ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación integradora
Duración: 3 horas.

Segundo cuatrimestre – 2022
22/II/23 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

1. En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} x$$

se considera Π la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathbb{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 3x_2 = 0 \right\}$. Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $\Pi(x) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \end{bmatrix}^T$ cuya distancia al subespacio $\mathbb{S}$ sea igual a 2.

2. Hallar la solución $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ del problema de valores iniciales

$$Y' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} Y, \qquad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz simétrica tal que $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}^T$ son autovectores de A, $\sigma(A) = \left\{ \frac{1}{3}, 1 \right\}$ y $\operatorname{traza}(A) = \frac{5}{3}$. Hallar $\lim\limits_{k\to\infty} A^k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

4. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ -6 & -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Hallar todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ y determinar la de norma mínima.

5. Sea $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección sobre el plano $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \right\}$ en la dirección de la recta gen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T \right\}$. Hallar y graficar la imagen por Π de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$.