

ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación integradora

Duración: 3 horas.

Primer cuatrimestre – 2022
10/VIII/22 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres: _____

Legajo: _____

Curso: _____

1. Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ el operador diferencial definido por $L := (D + 2I)^2(D - 3I)$. Hallar todas las soluciones de la ecuación diferencial $L[y] = 0$ tales que $y(0) = y'(0) = 0$.

2. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ de traza nula tal que

$$A^2 + 3A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz simétrica tal que $\sigma(A) = \{-\frac{1}{4}, 1\}$ y $\text{nul}(A - I) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}$. Hallar la solución del problema de valores iniciales $Y' = AY$, $Y(0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que maximizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\max_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

5. Sea Q la forma cuadrática en \mathbb{R}^2 definida por $Q(x) = x^T (aI + bvv^T) x$, donde a y b son números reales positivos y $v = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix}^T$. Sabiendo que $\min_{\|x\|=1} Q(x) = 5$ y $\max_{\|x\|=1} Q(x) = 30$ graficar el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : Q(x) \leq 10\}$.