ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación integradora
Duración: 3 horas

Segundo cuatrimestre – 2022
8/III/23 – 9:00 hs

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

---

1. Sea Π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Hallar la imagen por Π del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0\}$.

---

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz simétrica tal que $Y_1(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Y_2(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y tal que $\det(A) = -2$. Hallar todos los $Y_0 \in \mathbb{R}^3$ tales que la solución del problema de valores iniciales $Y' = AY, Y(0) = Y_0$ satisfaga que $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

---

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} A^n x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

---

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz en base canónica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0\}$. Hallar todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ y determinar la de norma mínima.

---

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que maximizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\max\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.