ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación integradora
Duración: 3 horas.

Primer cuatrimestre – 2022
3/VIII/22 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}2 & -1 & 2\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T.$$

Hallar la preimagen por T del subespacio $\left\{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 + 3y_2 - y_3 = 0, 2y_1 - 6y_2 + y_3 = 0\right\}$.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

y sea $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ la solución del sistema $Y' = AY$ tal que $Y(0) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$. Hallar $Y(1)$.

3. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que posea las siguientes propiedades: $A^2 - 4I$ es singular, $\text{rango}(A - I) = 1$, el plano $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\right\}$ es un autoespacio de A, y $\text{traza}(A) = 0$.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz de rango 2 tal que $\begin{bmatrix}2 & -6 & 3\end{bmatrix}^T \in \text{nul}(A)$ y

$$A\begin{bmatrix}6 & -3\\ 3 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{14}{3} & 0\\ 0 & \frac{7}{3}\end{bmatrix}.$$

Halar todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$.

5. Determinar los puntos de la superficie $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 7x_2^2 + 2x_2x_3 + 7x_3^2 = 1\right\}$ más cercanos al origen e indicar a qué distancia se encuentran del mismo.