

Raíces de funciones irracionales.

Ernesto José Canales Guillén (00051120@uca.edu.sv)
 Víctor Daniel Peraza Bolaños (00143320@uca.edu.sv)
 Diego Fernando Ramos Guardado (00043920@uca.edu.sv)
 Laura Ivonne Shahidinejad Martínez (00365919@uca.edu.sv)

CONTENTS

I	Método de la secante.	1
II	Método de la falsa posición.	5
III	Método de Muller.	8
IV	Método de Newton-Raphson en \mathbb{C}	12
References		18

I. MÉTODO DE LA SECANTE.

A. Deducción y descripción del método

1) Deducción

En el método de Newton Raphson, se necesita saber la derivada de la función en cada aproximación. La fórmula para hallar el siguiente punto en dicho método es la siguiente:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad (\text{I.1})$$

Conocer la derivada de la función puede resultar más complejo, por lo que, en lugar de la derivada, se puede utilizar la siguiente aproximación:

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \rightarrow p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

Si P_{n-2} está cerca de P_{n-1} , entonces tenemos lo siguiente:

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

Al sustituir la aproximación de $f'(P_{n-1})$ en la fórmula I.1, tenemos la fórmula del método de la secante [5]:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{\frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}} \quad (\text{I.2})$$

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

A diferencia de Newton, en el método de la secante se necesitan dos puntos iniciales P_{n-2} y P_{n-1} . Al utilizar la fórmula de la secante, se encuentra el siguiente punto P_n .

Después se modifica la notación para encontrar P_{n+1} utilizando los dos puntos anteriores P_{n-1} y P_n , y así sucesivamente hasta encontrar la raíz.

2) Descripción

El método de la secante sirve para encontrar raíces de ecuaciones sin saber la derivada de la función (a diferencia del método de Newton en donde sí es necesario conocer la derivada). La raíz de una ecuación no es otra cosa más que el valor de la X cuando $f(x)$ vale cero. Es decir que este método es una modificación del método de Newton.

¿Cómo funciona?

El método de la secante requiere dos puntos iniciales P_{n-2} (valor más pequeño) y P_{n-1} (valor más grande). Esos dos valores sirven para generar una línea recta que va a cruzar con el eje de las X y justamente ese punto se va a conocer como P_n o la aproximación a la raíz.

Después de utilizar la fórmula para encontrar P_n , se modifica la notación para encontrar P_{n+1} utilizando los dos puntos anteriores P_{n-1} y P_n , y así sucesivamente hasta encontrar la raíz o al menos hasta que el error sea menor o igual a la tolerancia.

No se necesita otra cosa más que la función y proponer los dos valores de inicio para tener la aproximación. A diferencia del método de Newton, no se ocupa la derivada.

B. Análisis del error y demostración de convergencia

Se asume que r es una raíz para $f(x) = 0$. La secuencia x_n del método de la secante está dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Se quiere encontrar el exponente p de tal manera que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \lambda$$

En donde $e_n = x_n - r$. Por el teorema de Taylor,

$$f(x_{n-1}) = f(e_{n-1} + r) = f(r) + e_{n-1}f'(r) + \frac{e_{n-1}^2}{2}f''(r) + O(e_{n-1}^3)$$

$$f(x_n) = f(e_n + r) = f(r) + e_nf'(r) + \frac{e_n^2}{2}f''(r) + O(e_n^3)$$

Ya que $f(r) = 0$, se tiene para $e = e_n$ o $e = e_{n-1}$

$$f(e + r) = ef'(r) + \frac{e^2}{2}f''(r) + O(e^3)$$

$$f(e + r) \approx ef'(r) + \frac{e^2}{2}f''(r)$$

El método de la secante da:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e_{n+1} + r &= e_n + r - f(e_n + r) \frac{(e_n + r) - (e_{n-1} + r)}{f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r)} \\ \Rightarrow e_{n+1} &= e_n - \frac{f(e_n + r)(e_n - e_{n-1})}{f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r)} \end{aligned} \quad (I.3)$$

Dejando:

$$M = \frac{f''(r)}{2f'(r)} \Leftrightarrow \frac{f''(r)}{2} = Mf'(r)$$

Ignorando los términos de orden superior, el numerador de la ecuación I.3 se convierte en lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(e_n + r)(e_n - e_{n-1}) &= (e_n f'(r) + \frac{e_n^2}{2} f''(r))(e_n - e_{n-1}) \\ &= (e_n f'(r) + M e_n^2 f'(r))(e_n - e_{n-1}) \\ &= e_n f'(r)(1 + M e_n)(e_n - e_{n-1}) \end{aligned}$$

El denominador de la ecuación I.3 se convierte en:

$$\begin{aligned} f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r) &= [e_n f'(r) + \frac{1}{2} f''(r) e_n^2] - [e_{n-1} f'(r) + \frac{1}{2} f''(r) e_{n-1}^2] \\ &= f'(r)(e_n - e_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(r)(e_n^2 - e_{n-1}^2) \\ &= f'(r)(e_n - e_{n-1}) + M f'(r)(e_n^2 - e_{n-1}^2) \\ &= f'(r)(e_n - e_{n-1})(1 + M(e_n + e_{n-1})) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación I.3 ahora es:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \frac{e_n f'(r)(1 + M e_n)(e_n - e_{n-1})}{f'(r)(e_n - e_{n-1})(1 + M(e_n + e_{n-1}))} \\ &= e_n - \frac{e_n(1 + M e_n)}{1 + M(e_n + e_{n-1})} \\ &= \frac{e_n + e_n M(e_n + e_{n-1}) - e_n(1 + M e_n)}{1 + M(e_n + e_{n-1})} \\ &= \frac{M e_n e_{n-1}}{1 + M(e_n + e_{n-1})} \end{aligned}$$

Lo cual implica que:

$$e_{n+1} \approx M e_n e_{n-1} \approx \frac{f''(r)}{2f'(r)} e_n e_{n-1}$$

Ahora se calcula el exponente p . Se tiene $|e_{n+1}| = \lambda |e_n|^p$ y $|e_{n+1}| \approx |M| |e_n| |e_{n-1}|$, entonces:

$$\begin{aligned} \lambda |e_n|^p &= |M| |e_n| |e_{n-1}| \\ \Rightarrow |e_n|^{p-1} &= |M| / \lambda |e_{n-1}| \\ \Rightarrow |e_n| &= |M| / \lambda |e_{n-1}|^{1/p-1} = \lambda |e_{n-1}|^p \end{aligned}$$

Por lo que se obtiene [6]:

$$p = \frac{1}{p-1} \Rightarrow p^2 - p - 1 = 0 \Rightarrow p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

La convergencia de este método es superlineal, lo que significa que es mayor que los de convergencia lineal pero menor que los de convergencia cuadrática como el método de Newton.

En este caso, p es el número de oro, aproximadamente 1.618, lo que significa que el método de la secante es casi tan rápido como Newton-Raphson pero un poco más lento y que es más rápido que los de convergencia lineal.

C. Análisis sobre la eficiencia del método

El método de la secante es iterativo, requiere la función y los dos puntos anteriores para encontrar P_n o la raíz, utiliza la recta secante que pasa por los puntos que le corresponden a las aproximaciones anteriores y puede resultar más fácil de utilizar a comparación del método de Newton, sin embargo el método de la secante no siempre converge, es decir que no necesariamente se encontrará una aproximación de la solución que se está buscando. Además, no necesariamente se tiene una referencia al elegir los dos puntos iniciales y si estos no son ideales, el método no resultará muy eficiente.

Como se mencionó anteriormente, el método puede diverger como por ejemplo, si se tienen dos puntos iniciales (X_0 y X_1), se calculan sus imágenes y la recta que los contiene, y como resultado se obtiene una recta paralela al eje x , es decir, una recta que nunca va a interceptar al eje x , en este caso el método diverge. Algebraicamente, se estaría obteniendo una división entre cero. También se pueden tener variaciones de eso, no obteniendo una recta paralela exactamente al eje x , pero que se va a interceptar en el infinito, en un número muy grande o muy pequeño.

Otro caso de divergencia es cuando en lugar de irse acercando a la solución que se busca, más bien se está alejando. Gráficamente es muy sencillo ver cuándo el método va a diverger, porque no nos estamos acercando al cero, es decir, a la intercepción de la función con el eje x . Algebraicamente, se debe ver si el error está aumentando o disminuyendo. Si el error disminuye, el método está convergiendo y si está aumentando entonces el método probablemente esté divergiendo.

D. Ventajas y desventajas

1) Ventajas

- En el método de Newton, se ocupa la derivada de la función lo cual resulta en más operaciones aritméticas y se vuelve más complejo. A diferencia del método de Newton, en el método de la secante no se ocupa la derivada de la función.
- Solo se necesita conocer la función y proponer dos puntos iniciales, se sustituyen en la función y lo mismo se repite hasta encontrar la raíz.
- Es menos complejo que otros métodos que requieren más pasos y operaciones para obtener resultados.

2) Desventajas

- La convergencia del método de la secante es ligeramente más lenta que la del método de Newton.
- Un problema que se tiene con la aplicación del método de la secante es la posibilidad de que el polinomio tenga raíces complejas incluso cuando todos los coeficientes son números reales.
- La agrupación de raíces no está garantizada para el método de la secante.

- Se necesitan dos valores iniciales, entonces tenemos más probabilidad de que este método numérico no sea convergente. Al contrario, Newton al solo tener un valor inicial X_0 tiene más probabilidad de converger.
- No siempre converge, es decir que no necesariamente se va a encontrar una aproximación de la solución que estamos buscando.
- El método depende mucho de las condiciones iniciales que se escojan.

E. Pseudocódigo

Algorithm 1: Método de la secante

Input: Aproximaciones iniciales p_0, p_1 tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones N_0 .

1 Output: Solución aproximada p o mensaje de error.

2 $i = 2$;

3 $q_0 = f(p_0)$;

4 $q_1 = f(p_1)$.

5 while $i \leq n_0$ **do**

6 $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$ **if** $|p - p_1| < TOL$ **then**

7 // El procedimiento fue exitoso

8 **return** p

9 **end**

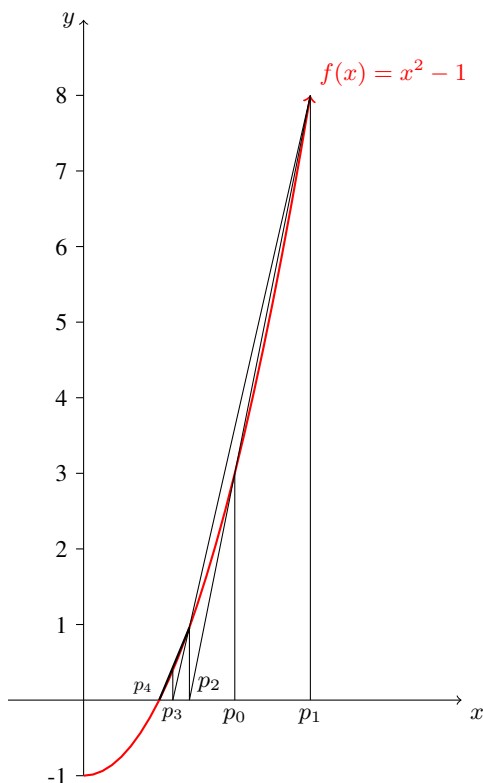
10 $i = i + 1$. $p_0 = p_1$; $q_0 = q_1$; $p_1 = p$; $q_1 = f(p)$

11 end

12 return Output: "El metodo fallo luego de N iteraciones, $N = N_0$ "

F. Elementos ilustrativos

Ejemplo gráfico del método de la secante con la función $f(x) = x^2 - 1$:



G. Ejemplos

1) Ejemplo 1

Utilice el método de la secante para encontrar una solución para $f(x) = e^{-x} - x$, utilizando como puntos iniciales $p_{n-2} = 2$ y $p_{n-1} = 5$.

i	p_{n-1}	p_{n-2}	$f(p_{n-1})$	$f(p_{n-2})$
1	5	2	-4.99	-1.86
2	0.21	5	0.60	-4.99
3	0.72	0.21	-0.24	0.60
4	0.58	0.72	-0.02	-0.24
5	0.57	0.58	0.00	-0.02

i	p_n	ErAbs %
1	0.21	2258.71
2	0.72	70.69
3	0.58	25.25
4	0.57	1.88
5	0.57	0.00

Fórmula del método de la secante:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

En el caso del error, se puede calcular el error absoluto con la siguiente fórmula:

$$EA = \left| \frac{p_n - p_{n-1}}{p_n} \right| * 100$$

I-G1a Iteración 1

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{-x} - x \\
 f(p_{n-1}) &= e^{-5} - 5 = -4.99 \\
 f(p_{n-2}) &= e^{-2} - 2 = -1.86 \\
 p_n &= (5) - \frac{(-4.99 * (5 - 2))}{(-4.99 - (-1.86))} = 0.21 \\
 Errorabsoluto &= \frac{0.21 - 5}{0.21} * 100 = 2258.71
 \end{aligned}$$

I-G1b Iteración 2

$$\begin{aligned}
 f(p_{n-1}) &= e^{-0.21} - 0.21 = 0.60 \\
 f(p_{n-2}) &= e^{-5} - 5 = -4.99 \\
 p_n &= (0.21) - \frac{(0.60 * (0.21 - 5))}{(0.60 - (-4.99))} = 0.72 \\
 Error_{absoluto} &= \frac{0.72 - 0.21}{0.72} 100 = 70.69
 \end{aligned}$$

I-G1c Iteración 3

$$\begin{aligned}
 f(p_{n-1}) &= e^{-0.72} - 0.72 = -0.24 \\
 f(p_{n-2}) &= e^{-0.21} - 0.21 = 0.60 \\
 p_n &= (0.72) - \frac{(-0.24 * (0.72 - 0.21))}{(-0.24 - (0.60))} = 0.58 \\
 Error_{absoluto} &= \frac{0.58 - 0.72}{0.58} 100 = 25.25
 \end{aligned}$$

I-G1d Iteración 4

$$\begin{aligned}
 f(p_{n-1}) &= e^{-0.58} - 0.58 = -0.02 \\
 f(p_{n-2}) &= e^{-0.72} - 0.72 = -0.24 \\
 p_n &= (0.58) - \frac{(-0.02 * (0.58 - 0.72))}{(-0.02 - (-0.24))} = 0.57 \\
 Error_{absoluto} &= \frac{0.57 - 0.58}{0.57} 100 = 1.88
 \end{aligned}$$

I-G1e Iteración 5

$$\begin{aligned}
 f(p_{n-1}) &= e^{-0.57} - 0.57 = 0.00 \\
 f(p_{n-2}) &= e^{-0.58} - 0.58 = -0.02 \\
 p_n &= (0.57) - \frac{(0.00 * (0.57 - 0.58))}{(0.00 - (-0.02))} = 0.57 \\
 Error_{absoluto} &= \frac{0.57 - 0.57}{0.57} 100 = 0.00
 \end{aligned}$$

En este ejemplo se puede observar que al utilizar el último $p_n = 0.57$ en la función original, se obtiene 0, por lo que ya se ha encontrado la raíz. Cabe mencionar que los resultados se han redondeado a dos decimales.

2) Ejemplo 2

Utilice el método de la secante para encontrar una solución para $f(x) = x^2 - 3x - 4$, utilizando como puntos iniciales $p_{n-2} = 5$ y $p_{n-1} = 7$.

i	p_{n-1}	p_{n-2}	$f(p_{n-1})$	$f(p_{n-2})$
1	7	5	24.00	6.00
2	4.33	7	1.78	24.00
3	4.12	4.33	0.61	1.78
4	4.01	4.12	0.04	0.61
5	4.00	4.01	0.00	0.04

i	p_n	ErAbs %
1	4.33	61.54
2	4.12	5.18
3	4.01	2.81
4	4.00	0.18
5	4.00	0.00

I-G2a Iteración 1

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 - 3x - 4 \\
 f(p_{n-1}) &= (7)^2 - 3(7) - 4 = 24 \\
 f(p_{n-2}) &= (5)^2 - 3(5) - 4 = 6 \\
 p_n &= (7) - \frac{(24 * (7 - 5))}{(24 - 6)} = 4.33 \\
 Error_{absoluto} &= \frac{4.33 - 7}{4.33} 100 = 61.54
 \end{aligned}$$

I-G2b Iteración 2

$$\begin{aligned}
 f(p_{n-1}) &= (4.33)^2 - 3(4.33) - 4 = 1.78 \\
 f(p_{n-2}) &= (7)^2 - 3(7) - 4 = 24 \\
 p_n &= (4.33) - \frac{(1.78 * (4.33 - 7))}{(1.78 - 24)} = 4.12 \\
 Error_{absoluto} &= \frac{4.12 - 4.33}{4.12} 100 = 5.18
 \end{aligned}$$

I-G2c Iteración 3

$$\begin{aligned}
 f(p_{n-1}) &= (4.12)^2 - 3(4.12) - 4 = 0.61 \\
 f(p_{n-2}) &= (4.33)^2 - 3(4.33) - 4 = 1.78 \\
 p_n &= (4.12) - \frac{(0.61 * (4.12 - 4.33))}{(0.61 - 1.78)} = 4.01 \\
 Error_{absoluto} &= \frac{4.01 - 4.12}{4.01} 100 = 2.81
 \end{aligned}$$

I-G2d Iteración 4

$$\begin{aligned}
 f(p_{n-1}) &= (4.01)^2 - 3(4.01) - 4 = 0.04 \\
 f(p_{n-2}) &= (4.12)^2 - 3(4.12) - 4 = 0.61 \\
 p_n &= (4.01) - \frac{(0.04 * (4.01 - 4.12))}{(0.04 - 0.61)} = 4.00 \\
 Error_{absoluto} &= \frac{4.00 - 4.01}{4.00} 100 = 0.18
 \end{aligned}$$

I-G2e Iteración 5

$$\begin{aligned}
 f(p_{n-1}) &= (4.00)^2 - 3(4.00) - 4 = 0.00 \\
 f(p_{n-2}) &= (4.01)^2 - 3(4.01) - 4 = 0.04 \\
 p_n &= (4.00) - \frac{(0.00 * (4.00 - 4.01))}{(0.00 - 0.04)} = 4.00 \\
 Error_{absoluto} &= \frac{4.00 - 4.00}{4.00} 100 = 0.00
 \end{aligned}$$

En este ejemplo se puede observar que al utilizar el último $p_n = 4.00$ en la función original, se obtiene 0, por lo que ya se ha encontrado la raíz.

II. MÉTODO DE LA FALSA POSICIÓN.

A. El método de posición falsa (Regula Falsi)

El método de la falsa posición pretende conjugar la seguridad del método de la bisección con la rapidez del método de la secante.

Como es denominado [5], el término Regula Falsi literalmente “regla falsa” o “posición falsa” (a veces es denominado como el método de adivinar y comprobar. [2]) se refiere a una técnica en la que se usan resultados que se sabe son falsos, pero de algún modo específico, genera aproximaciones de la misma manera que el método de la secante, pero incluye una prueba para garantizar que la raíz siempre se agrupa entre iteraciones sucesivas, para obtener convergencia a un resultado verdadero. Aunque su convergencia está garantizada, tiene una tasa de convergencia lenta.

Los problemas de posición falsa se pueden encontrar en el papiro Rhind, que data de aproximadamente 1650 a.C.

B. Deducción del método

Originalmente en [11], tenemos que si se pueden elegir dos aproximaciones iniciales x_{n-1} y x_n tales que los dos valores de la función de esos puntos tengan signo opuesto en una función continua comprendida entre $[x_{n-1}, x_n]$, entonces es posible generar una sucesión de valores que siempre tengan esta propiedad.

Para iniciar, construimos la recta que pasa por los puntos $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$. De acuerdo con la figura, se tiene que $m_1 = m_2$;

Se calcula la intersección con el eje x de la recta trazada anteriormente y a este punto se le denotará como x_{n+1} .

Para encontrar la ecuación general que nos dará x_{n+1} en cada recta trazada, primero necesitamos encontrar la pendiente de la recta m_2 :

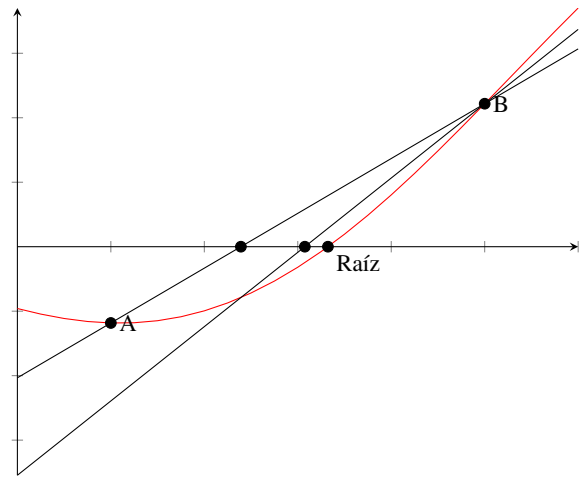


Fig. II.1. Gráfica del método de la falsa posición

$$m_2 = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Luego encontramos la pendiente de la recta m_1 que quedaría desde el intercepto hasta el extremo del intervalo en donde la función cambia de signo:

$$m_1 = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1})}{x_{n+1} - x_{n-1}}$$

Por tanto, igualando las ecuaciones de ambas pendientes, debido que son dos segmentos de la misma recta:

$$m_1 = m_2$$

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1})}{x_{n+1} - x_{n-1}} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

El valor del cruce por cero se define cuando se tiene un valor de x_{n+1} , dado por la recta definida por la ecuación anterior, donde se cumple que $f(x_{n+1}) = 0$.

Así, la ecuación anterior queda de la siguiente forma:

$$\frac{0 - f(x_{n-1})}{x_{n+1} - x_{n-1}} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Despejando x_{n+1} se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (x_n - x_{n-1})(0 - f(x_{n-1})) &= (x_{n+1} - x_{n-1})(f(x_n) - f(x_{n-1})) \\
 -\frac{(x_n - x_{n-1})(f(x_{n-1}))}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))} &= (x_{n+1} - x_{n-1}) \\
 x_{n+1} &= x_{n-1} - \frac{(x_n - x_{n-1})(f(x_{n-1}))}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))} \quad (II.1)
 \end{aligned}$$

Simplificando (II.1):

$$x_{n+1} = \frac{(x_{n-1})(f(x_n)) - (x_n)(f(x_{n-1}))}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))} \quad (II.2)$$

Utilizando la ecuación (II.2) anterior, el valor de x_{n+2} se elige tomando un valor entre x_{n-1} y x_n de tal forma que el valor de la función sea opuesto en signo a $f(x_{n+1})$. Así, valores de $f(x_{n+1})$ y x_{n+2} definen un menor intervalo que contiene el cruce por cero. El proceso continúa tomando siempre lados opuestos del cruce por cero.

1) Demostración de convergencia y análisis del error

2) Preliminares a tomar en cuenta [9]:

Para la velocidad de convergencia, consideramos una secuencia $[q_0, q_1, \dots]$ converge en q , luego la diferencia $(q_n - q)$ debe ser menor a medida que n se acerca al infinito; tomando la diferencia $(q_n - q)$ como error (e_n) , es dada por $e_n = q_n - q$.

Tomando la proporción de errores sucesivos $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|}$ queremos que sea menor que uno, es decir, si n tiende al infinito, la proporción debe ser menor que uno.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \right) = k < 1$$

Entonces el orden de convergencia es uno o la secuencia converge linealmente.

Generalmente, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} \right) = k < 1$$

3) Tasa de convergencia:

En el método de posición falsa, la secuencia de aproximación es x_1, x_2, \dots, x_n que converge en x . Sea e_n : el error se da como $x_n - x$. La sucesión converge si $|e_n| \rightarrow 0$ como $|n| \rightarrow \infty$. El orden de convergencia está determinado por una relación asintótica $|e_n|$ y $|e_{n-1}|$. Ahora bien, si consideramos una función $f(x) = 0$ en el intervalo (x_0, x_1) que contiene la raíz, luego en el método de posición falsa, uno de los dos puntos dados x_0 o x_1 siempre son fijos y otros varían. Si se fija el punto x_0 , la función se aproxima mediante una recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x_n, f(x_n))$, donde $n = 1, 2, \dots$.

4) Calcular el error:

Sea $x_n \rightarrow x$. Cuando x_n es una secuencia x_0, x_1, x_2, \dots converge a x , entonces el error en la iteración n_{th} es dado por $e_n = x_n - x$ para $n > 0$.

Sea λ y α constantes positivas tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|^\alpha} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} \right) = \lambda$$

Sabemos por la formula de la falsa posición (II.2):

$$x_{n+1} = \frac{(x_{n-1})(f(x_n)) - (x_n)(f(x_{n-1}))}{(f(x_n) - f(x_{n-1}))}$$

Podemos reescribir la ecuación (II.2) como:

$$x_n = \frac{(x_{n-2})(f(x_{n-1})) - (x_{n-1})(f(x_{n-2}))}{(f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}))} \quad (\text{II.3})$$

Además, calculamos sus errores como:

$$e_n = x_n - x \rightarrow x_n = e_n + x \quad (\text{II.4})$$

$$e_{n-1} = x_{n-1} - x \rightarrow x_{n-1} = e_{n-1} + x \quad (\text{II.5})$$

$$e_{n-2} = x_{n-2} - x \rightarrow x_{n-2} = e_{n-2} + x \quad (\text{II.6})$$

Sustituyendo los valores de (II.4), (II.5) y (II.6) en la ecuación (II.3) obtenemos:

$$e_n + x = \frac{(e_{n-2} + x)(f(e_{n-1} + x)) - (e_{n-1} + x)(f(e_{n-2} + x))}{f(e_{n-1} + x) - f(e_{n-2} + x)}$$

$$e_n = \frac{(e_{n-2} + x)(f(e_{n-1} + x)) - (e_{n-1} + x)(f(e_{n-2} + x))}{f(e_{n-1} + x) - f(e_{n-2} + x)} - x$$

Simplificando:

$$e_n = \frac{(e_{n-2})(f(e_{n-1} + x)) - (e_{n-1})(f(e_{n-2} + x))}{f(e_{n-1} + x) - f(e_{n-2} + x)} \quad (\text{II.7})$$

5) Expandiendo por las series de Taylor:

La expansión de Taylor es dada por:

$$[f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \dots]$$

Con ella obtenemos:

$$e_n = \frac{e_{n-2}[f(x) + e_{n-1}f'(x) + (\frac{e_{n-1}^2}{2!})f''(x) \dots]}{[f(x) + e_{n-1}f'(x) + \frac{e_{n-1}^2}{2!f''(x)}] - [f(x) + e_{n-2}f'(x) + \frac{e_{n-2}^2}{2!f''(x)}]} - \frac{e_{n-1}[f(x) + e_{n-2}f'(x) + (\frac{e_{n-2}^2}{2!})f''(x) \dots]}{[f(x) + e_{n-1}f'(x) + \frac{e_{n-1}^2}{2!f''(x)}] - [f(x) + e_{n-2}f'(x) + \frac{e_{n-2}^2}{2!f''(x)}]}$$

Efectuando:

$$e_n = \frac{e_{n-1}e_{n-2}}{2} \frac{f''(x)}{f'(x)}$$

$$e_n = \frac{1}{2} \frac{f''(x)}{f'(x)} e_{n-1}e_{n-2}$$

$$e_n = C e_{n-1}e_{n-2} \quad (\text{II.8})$$

Donde $C = \frac{1}{2} \frac{f''(x)}{f'(x)}$ es la constante del error asintótico.

Debido que Falsa posición se fija a un punto, por ejemplo, podemos asumir $C e_{n-2}$ es una constante K , por lo tanto, podemos reescribir (II.8) como:

$$e_n = K e_{n-1} \quad (\text{II.9})$$

Por lo tanto, de la ecuación (II.9) se puede deducir que la falsa posición tiene una tasa de convergencia lineal cuando $|K| < 1$.

C. Ventajas y Desventajas del método

1) Ventajas

- Es un método horquillado ¹ y siempre es convergente.
- El error es controlable, a mayor número de iteraciones la raíz es más precisa.
- No requiere el cálculo de derivadas.
- No es necesario tener información de la función, aparte del signo de las imágenes.

2) Desventajas

- La tasa de convergencia es lenta.
- Tiene una tasa de convergencia lineal.
- No logra determinar raíces complejas.
- No logra identificar múltiples raíces diferentes.
- No se puede aplicar en un intervalo donde la función toma valores del mismo signo.

D. Pseudocódigo

Para encontrar una solución para $f(x) = 0$ dada la función f continua en el intervalo (p_0, p_1) donde $f(p_0)$ y $f(p_1)$ tienen signos opuestos:

¹Los métodos de horquillado determinan intervalos cada vez más pequeños (horquillas) que contienen una raíz.

Algorithm 2: Método de posición falsa

Input: Aproximación inicial p_0, p_1 ; tolerancia TOL ; máximo número de iteraciones N_0 .

Output: Solución aproximada p o mensaje de error.

```

1  $i = 2$ ;  $q_0 = f(p_0)$ ;  $q_1 = f(p_1)$ 
2 while  $i \leq N_0$  do
3    $p = p_0 - \frac{q_0(p_1 - p_0)}{q_1 - q_0}$ 
4   if  $|p - p_0| < TOL$  then
5     // Procedimiento exitoso
6     Output:  $p$ 
7   end
8    $i = i + 1$ ;  $q = f(p)$ 
9   if  $q \cdot q_1 < 0$  then
10     $p_0 = p_1$ ;  $q_0 = q_1$ 
11  end
12  $p_0 = p$ ;  $q_0 = q$ 
13 end
Output: El método falló luego de  $N_0$  iteraciones

```

E. Ejemplos**1) Dato curioso**

El método de la falsa posición se aplica a la predicción de cantidades traza de contaminantes atmosféricos producidos por reacciones de combustión, como las que se encuentran en fuentes puntuales industriales.

2) Ejercicio

Considerando la función:

$$f(x) = 1 + 2x - 3x^2 e^{-x} + 2x^3 \sin(x) e^{-\frac{x}{5}}$$

Calcular el cruce por cero dentro del intervalo $[6, 7]$; usando un error máximo de 10^{-5} .

TABLE I
RESULTADOS DEL CÁLCULO DE LOS CRUCES POR CERO.

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	x_n	$f(x_n)$	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
0	6.0000	-23.624	7.0000	126.00	6.1578	-3.9574
1	6.1578	-3.9574	7.0000	126.00	6.1835	-0.5292
2	6.1835	-0.5292	7.0000	126.00	6.1869	-0.0681
3	6.1869	-0.0681	7.0000	126.00	6.1873	-0.0087
4	6.1873	-0.0087	7.0000	126.00	6.1874	-0.0011
5	6.1874	-0.0011	7.0000	126.00	6.1874	-0.0001
6	6.1874	-0.0001	7.0000	126.00	6.1874	$-1.8e-5$

El cruce por cero de la función $f(x)$ en $[6, 7]$ nos devuelve un valor de $x_{n+1} = 6.1874$

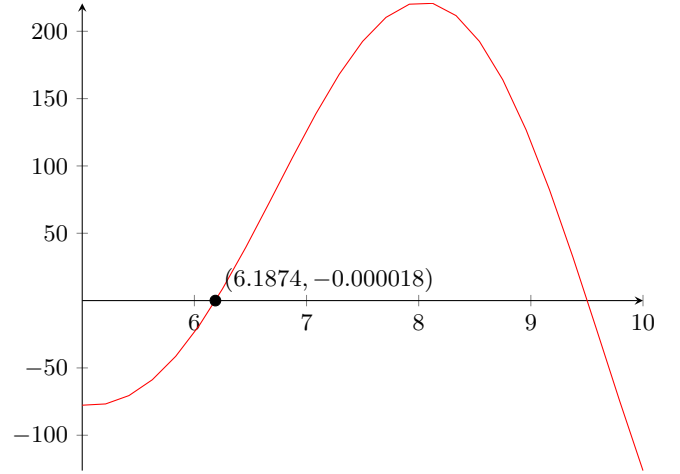


Fig. II.2. Gráfica de $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 e^{-x} + 2x^3 \sin(x) e^{-\frac{x}{5}}$

III. MÉTODO DE MULLER.

A. Introducción al método de Muller.

Originalmente en [8] se planteó un método para encontrar raíces de funciones algebraicas a través de un procedimiento iterativo que consiste en utilizar un polinomio interpolante de segundo grado para encontrar su raíz más cercana al valor de la ecuación que se quiere resolver. Partiendo de dicha premisa es que a continuación se presenta una deducción y análisis del método, sin embargo, primero es necesario definir algunos preliminares matemáticos que serán útiles para justificar argumentos hechos posteriormente y en consecuencia presentar el método en su totalidad.

1) *Preliminares matemáticos.*

2) *Polinomio interpolante.*

Si se conoce el valor de una función $f(x)$ en $n+1$ puntos defínase el polinomio interpolante como un polinomio de grado n que pasa por los $n+1$ puntos previamente establecidos y se utiliza para aproximar los valores de $f(x)$ en las cercanías de cada punto. La deducción más detallada de cómo se puede encontrar dicho polinomio y toda la teoría detrás se salen del ámbito de esta investigación, sin embargo, una explicación puede encontrarse en cualquier texto sobre análisis y métodos numéricos (véase por ejemplo [3]).

3) *Polinomio interpolante de Newton.*

Definición III.1. Dado un conjunto distinto de puntos $(x_n, f(x_n)), \dots, (x_0, f(x_0))$ se define el polinomio interpolante de Newton como un polinomio de grado n de la forma

$$\begin{aligned} P(x) = & f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) \\ & + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ & + \dots + f[x_n, \dots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

donde $f[x_n, \dots, x_i]$ es la operación conocida como diferencia dividida de Newton, la cual se definirá más adelante. Del anterior planteamiento es posible observar cómo los $n+1$ puntos acaban definiendo un polinomio de grado n que sirve para interpolar la función en los valores conocidos.

4) *Cota de error de un polinomio interpolante*

Considerando entonces que un polinomio interpolante aproxima una función en las cercanías de los $n+1$ puntos que lo definen, es posible estimar cuál es la magnitud máxima del error que se comente al realizar tal aproximación. Sea $P(x)$ el polinomio interpolante y $f(x)$ una función con $n+1$ derivadas continuas definidas en el menor intervalo I que contenga los números reales $[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$, se define el error cometido como la expresión

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_n) \dots (x - x_0) \quad (\text{III.2})$$

con $\xi \in I$.

De nuevo la demostración de la anterior expresión va más allá del ámbito de este trabajo y puede encontrarse en cualquier libro de análisis numérico.

5) *Diferencias divididas.*

Dada una función $f(x)$ se definen sus diferencias divididas como una operación recursiva de la forma

$$\begin{aligned} f[x_n] &= f(x_n) \\ f[x_n, x_{n-1}] &= \frac{f[x_{n-1}] - f[x_n]}{x_{n-1} - x_n} \\ &\vdots \\ f[x_n, \dots, x_0] &= \frac{f[x_{n-1}, \dots, x_0] - f[x_n, \dots, x_1]}{x_0 - x_n} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Donde $f[x_n, x_{n-1}]$ es la primera diferencia dividida, $f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$ es la segunda diferencia dividida y así sucesivamente.

Lemma III.1. $f[x_n, \dots, x_0] = \frac{f^n(\xi)}{n!}$ para algún $\xi \in I$, donde I es el intervalo más pequeño que contiene los números reales $[x_n, \dots, x_0]$.

Proof. Primero se plantea una función $f(x) \in C^n I$ aproximada por un polinomio interpolante $P(x)$ de grado n partiendo de $n+1$ puntos $[x_n, \dots, x_0]$ establecido anteriormente en la definición (III.1). Dado que $P(x)$ es una interpolación de $f(x)$ se plantea la función $g(x) = f(x) - P(x)$ la cual tiene $n+1$ raíces, así que por el teorema de Rolle generalizado se tiene que:

$$\begin{aligned} g^n(\xi) &= f^n(\xi) - P^n(\xi) = 0 \\ g^n(\xi) &= f^n(\xi) - f[x_n, \dots, x_0]n! = 0 \\ f[x_n, \dots, x_0] &= \frac{f^n(\xi)}{n!} \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

□

B. Deducción del método.

Para encontrar alguna raíz de la función algebraica $f(x)$ primero se parte de tres puntos $\{(x_2, f(x_2)), (x_1, f(x_1)), (x_0, f(x_0))\}$ que sirven como base para encontrar un polinomio interpolante de segundo grado que aproxime la función $f(x)$. Sin perder generalidad se asume que $x_2 < x_1 < x_0$ y se define $w(x) = x - x_2$, por lo que el polinomio interpolante tiene la forma

$$P(w) = aw^2 + bw + c \quad (\text{III.5})$$

El motivo de esto es que se quiere encontrar el valor más pequeño $x - x_2$ que sea al mismo tiempo una raíz del polinomio así que lo planteado en III.5 simplifica ligeramente el álgebra a desarrollar para encontrar los valores buscados en la ecuación.

De lo anterior entonces es necesario encontrar los valores de a, b, c para saber cuál es el polinomio interpolante en los puntos establecido, para esto se plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$P(w(x_2)) = c = f(x_2) \quad (\text{III.6})$$

$$P(w(x_1)) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + f(x_2) = f(x_1) \quad (\text{III.7})$$

$$P(w(x_0)) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + f(x_2) = f(x_0) \quad (\text{III.8})$$

Sustrayendo III.7 de III.8

$$\begin{aligned} a((x_0 - x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2) + b((x_0 - x_2) - (x_1 - x_2)) \\ = f(x_0) - f(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(((x_0 - x_2) - (x_1 - x_2))((x_0 - x_2) + (x_1 - x_2))) \\ + b((x_0 - x_2) - (x_1 - x_2)) = f(x_0) - f(x_1) \end{aligned}$$

$$a[(x_0 - x_2) + (x_1 - x_2)] + b = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{(x_0 - x_2) - (x_1 - x_2)}$$

$$a[(x_0 - x_2) + (x_1 - x_2)] + b = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$a[(x_0 - x_2) + (x_1 - x_2)] + b = f[x_0, x_1]$$

$$b = f[x_0, x_1] - a[(x_0 - x_2) + (x_1 - x_2)] \quad (\text{III.9})$$

Ahora sustituyendo III.9 en III.7

$$\begin{aligned}
 & a(x_1 - x_2)^2 + \left(f[x_0, x_1] - a(x_0 + x_1 + 2x_2) \right)(x_1 - x_2) \\
 & \quad + f(x_2) = f(x_1) \\
 & a(x_1 - x_2)^2 - a(x_0 + x_1 - 2x_2)(x_1 - x_2) + f[x_0, x_1](x_1 - x_2) \\
 & \quad + f(x_2) = f(x_1) \\
 & a\left((x_1 - x_2)(x_1 - x_2 - x_0 - x_1 + 2x_2)\right) + f[x_0, x_1](x_1 - x_2) \\
 & \quad + f(x_2) = f(x_1) \\
 & a\left((x_1 - x_2)(x_2 - x_0)\right) + f[x_0, x_1](x_1, x_2) + f(x_2) = f(x_1) \\
 & a(x_2 - x_0) + f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \\
 & a(x_2 - x_0) = f[x_1, x_2] - f[x_0, x_2] \\
 & a = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_2, x_1, x_0] \quad (\text{III.10})
 \end{aligned}$$

Sustituyendo III.10 en III.9

$$\begin{aligned}
 b &= f[x_0, x_1] - f[x_2, x_1, x_0] \left[(x_0 - x_2) + (x_1 - x_2) \right] \\
 b &= f[x_0, x_1] - f[x_2, x_1, x_0](x_0 - x_2) - f[x_2, x_1, x_0](x_1 - x_2) \\
 b &= f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1] + f[x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0](x_1 - x_2) \\
 b &= f[x_2, x_1] + f[x_2, x_1, x_0](x_2 - x_1) \\
 b &= f[x_2, x_1] + \frac{(x_1 - x_2) \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} + (x_1 - x_2) \left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right)}{x_0 - x_2} \\
 b &= f[x_2, x_1] + \frac{\frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} (f(x_0) - f(x_1)) + f(x_1) - f(x_2)}{x_0 - x_2} \\
 & \quad - \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2} + f[x_2, x_0] \\
 b &= f[x_2, x_1] + f[x_2, x_0] \\
 & \quad + \frac{\frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} (f(x_0) - f(x_1)) + f(x_1) - f(x_2) - f(x_0) + f(x_2)}{x_0 - x_2} \\
 b &= f[x_2, x_1] + f[x_2, x_0] \\
 & \quad + \frac{\frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} (f(x_0) - f(x_1)) - f(x_0 - f(x_1))}{x_0 - x_2} \\
 b &= f[x_2, x_1] + f[x_2, x_0] + \frac{(f(x_0) - f(x_1)) \left(\frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} - 1 \right)}{x_0 - x_2} \\
 b &= f[x_2, x_1] + f[x_2, x_0] + \frac{(f(x_0) - f(x_1)) \left(\frac{x_2 - x_1 - x_0 + x_1}{x_0 - x_1} \right)}{x_0 - x_2} \\
 b &= f[x_2, x_1] + f[x_2, x_0] + \frac{(f(x_0) - f(x_1)) \left(\frac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1} \right)}{x_0 - x_2} \\
 b &= f[x_2, x_1] + f[x_2, x_0] - \frac{f(x_0 - f(x_1))}{x_0 - x_1} \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_2} \\
 b &= f[x_2, x_1] + f[x_2, x_0] - f[x_1, x_0] \quad (\text{III.11})
 \end{aligned}$$

Con los planteamientos anteriores entonces sabemos que

$$\begin{aligned}
 a &= f[x_2, x_1, x_0] \\
 b &= f[x_2, x_1] + f[x_2, x_0] - f[x_1, x_0]
 \end{aligned}$$

$$c = f(x_2)$$

lo cual significa que se tienen los datos suficientes para despejar (III.5) y encontrar w , así que utilizando la fórmula cuadrática se tiene que

$$w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

y haciendo las sustituciones correspondientes se puede concluir entonces que

$$x = x_2 - \frac{2f(x_2)}{b \pm \sqrt{b^2 - 4f(x_2)f[x_2, x_1, x_0]}}$$

aplicando de forma sucesiva la ecuación anterior se tiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{b \pm \sqrt{b^2 - 4f(x_n)f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]}} \quad (\text{III.12})$$

lo cual concluye la deducción del método de Muller para encontrar raíces de funciones algebraicas.

C. Análisis de convergencia.

1) Demostración de convergencia.

Sea p la raíz de la función $f(x)$ que se busca encontrar con el algoritmo, se asume que si $x_n \rightarrow p$ entonces por el lemma III.1 $b \rightarrow f'(p)$ y $a \rightarrow f''(p)$ entonces sustituyendo en (III.12) se tiene que

$$p = p - \frac{2f(p)}{f'(p) \pm \sqrt{(f'(p))^2 - 4f(p)f''(p)}} \quad (\text{III.13})$$

y ya que por definición $f(p) = 0$ se puede concluir que la expresión (III.13) es igual a 0 siempre que $f'(p) \neq 0$ así que el método converge a una raíz de la ecuación.

2) Análisis del error y orden de convergencia.

Para establecer una expresión que defina el error del método anteriormente planteado se define $P(p)$ como el polinomio interpolante de segundo grado evaluado en la raíz p y $f(p)$ como la función aproximada evaluada en su raíz. Además por (III.12) se sabe que x_{n+1} es una raíz del polinomio interpolante, entonces por (III.2) se sabe que

$$P(p) - f(p) = -\frac{f'''(\xi)}{6}(p - x_n)(p - x_{n-1})(p - x_{n-2}) \quad (\text{III.14})$$

luego $f(p) = 0$ y utilizando el teorema del valor medio se sabe que

$$\frac{P(p) - P(x_{n+1})}{p - x_{n+1}} = f'(p), \quad P(p) = f'(p)(p - x_{n+1})$$

ya que $P(x_{n+1}) = 0$, entonces sustituyendo en (III.14) se tiene

$$p - x_{n+1} = -\frac{f'''(p)}{6f'(p)}(p - x_n)(p - x_{n-1})(p - x_{n-2}) \quad (\text{III.15})$$

lo cual es un punto de partida suficiente para establecer el error del método y posteriormente su orden de convergencia. Utilizando la notación de error $|e_{n+1}| = |p - x_{n+1}|$ y definiendo $M = \left| \frac{f'''(p)}{6f'(p)} \right|$ se puede reescribir III.15 como

$$|e_{n+1}| = M|e_n||e_{n-1}||e_{n-2}| \quad (\text{III.16})$$

y utilizando la definición de orden de convergencia se tiene que

$$|e_{n+1}| = C|e_n|^\alpha \quad (\text{III.17})$$

lo cual implica también que

$$|e_n| = C|e_{n-1}|^\alpha \quad (\text{III.18})$$

y despejando $|e_{n-1}|$ se tiene

$$|e_{n-1}| = \left(\frac{1}{C}|e_n|\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\text{III.19})$$

y de forma similar

$$|e_{n-1}| = C|e_{n-2}|^{\alpha}$$

así que sustituyendo la ecuación anterior en (III.19) y despejando $|e_{n-2}|$ se tiene

$$|e_{n-2}| = \frac{1}{C^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}}} |e_n|^{\frac{1}{\alpha^2}} \quad (\text{III.20})$$

por lo que reemplazando (III.17), (III.18), (III.19) y (III.20) en (III.16) se tiene que

$$C|e_n|^{\alpha} = M|e_n|^{\frac{1}{C^{\frac{1}{\alpha}}}} |e_n|^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{C^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}}}\right) |e_n|^{\frac{1}{\alpha^2}}$$

simplificando entonces se tiene que

$$C|e_n|^{\alpha} = \frac{M}{C^{\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}}} |e_n|^{1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}} \quad (\text{III.21})$$

lo cual implica que $C = \frac{M}{C^{\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}}}$ y $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$ por lo que despejando α se llega a la ecuación $\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ de la que resolviendo se sabe entonces que $\alpha \approx 1.84$, lo cual indica que el orden de convergencia del método de Muller es aproximadamente 1.84: menor que el método de Newton pero mejor que bisección por ejemplo. Sabiendo entonces su orden de convergencia se tiene que

$$|p - x_1| = C|p - x_0|^{1.84}$$

$$C^{0.84}|p - x_1| = (C|p - x_0|)^{1.84}$$

y de forma inductiva se tiene que

$$C^{0.84n}|p - x_{n+1}| = (C|p - x_0|)^{1.84^n} \quad (\text{III.22})$$

entonces se debe cumplir que $C|p - x_0| < 1$ para que posteriormente cuando $n \rightarrow \infty$, $x_n \rightarrow p$. En otras palabras, la convergencia del método está garantizada únicamente si el punto inicial escogido está lo suficientemente cerca de la raíz a encontrar.

D. Ventajas y desventajas.

1) Ventajas.

- Su convergencia es bastante rápida, siendo considerablemente mejor que métodos como bisección.
- Permite encontrar no solo raíces reales sino también complejas.
- No requiere el cálculo de ninguna derivada para su implementación.

2) Desventajas.

- Se necesita conocer un valor cercano a la raíz que se desea encontrar.
- Puede resultar en raíces complejas incluso si solo se buscan raíces reales.
- No es posible garantizar convergencia si la raíz está en un punto crítico (véase III.13).

E. Pseudocódigo.

El siguiente algoritmo asume la utilización de aritmética de números complejos dentro del mismo, además la operación de diferencias divididas calculada de forma externa con un procedimiento similar al mostrado en (III.3). La condición de paro es que el valor absoluto de la función evaluada en la última aproximación encontrada sea menor a una tolerancia ϵ o que la cantidad de iteraciones supere un valor límite previamente establecido.

Algorithm 3: Método de Muller

Data: x_2, x_1, x_0 valores distintos para interpolar $f(x)$, un valor ϵ de tolerancia y un valor N que define la cantidad máxima de iteraciones.

Result: La raíz de $f(x)$ más cercana a los puntos iniciales dados o un mensaje de error en caso de que no se cumpla la tolerancia mínima

```

1 begin
2    $x_{n+1} \leftarrow 0$ 
3    $x_n \leftarrow x_2$ 
4    $x_{n-1} \leftarrow x_1$ 
5    $x_{n-2} \leftarrow x_0$ 
6    $x_{n+1} \leftarrow 3$ 
7   while  $|f(x_{n+1})| < \epsilon$  or  $i \geq N$  do
8      $a \leftarrow f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$ 
9      $b \leftarrow f[x_n, x_{n-1}] + f[x_n, x_{n-2}] - f[x_{n-1}, x_{n-2}]$ 
10     $c \leftarrow f(x_n)$ 
11     $D \leftarrow \sqrt{b^2 - 4ac}$ 
12    /* Escoge el valor de mayor magnitud
       para el denominador */
13    if  $|b - D| \leq |b + D|$  then
14       $E \leftarrow b + D$ 
15    else
16       $E \leftarrow b - D$ 
17    end
18     $x_{n+1} \leftarrow x_n - \frac{2c}{E}$ 
19     $x_{n-2} \leftarrow x_{n-1}$ 
20     $x_{n-1} \leftarrow x_n$ 
21     $x_n \leftarrow x_{n+1}$ 
22     $i \leftarrow i + 1$ 
23  end
24  if  $|f(x_{n+1})| < \epsilon$  then
25    return  $x_{n+1}$ 
26  else
27    Output: No se pudo encontrar un valor para la raíz.
28  end

```

F. Ejemplos.

1) Visualizando algunas iteraciones

Como primer ejemplo para visualizar el algoritmo se puede utilizar el polinomio deducido en (III.21) y encontrar todas sus raíces haciendo uso del algoritmo. Primero se presenta una gráfica del polinomio como función compleja, representando en los ejes x, y de la gráfica el plano complejo y en el eje z de la gráfica el módulo de cada valor de la función, tal representación resulta útil para visualizar dónde se encuentran las raíces en el plano complejo. Las tres raíces del polinomio con seis decimales correctos son:

$$\begin{aligned}
& (+1.839286 + 0.000000i) \\
& (-0.419643 - 0.606290i) \\
& (-0.419643 + 0.606290i)
\end{aligned}$$

Una gráfica de dicho polinomio puede verse en la figura III.1 (con z siendo un número complejo). Se consideran algunas iteraciones del método de Muller con su respectiva forma y sus raíces de modo que se pueda visualizar su comportamiento y sucesiva aproximación a una de las raíces. Eliendo los puntos más cercanos a cada raíz es posible utilizar el método para encontrarlas todas.

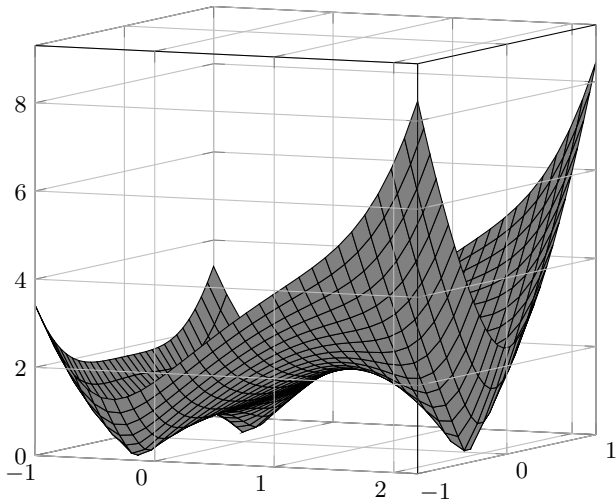
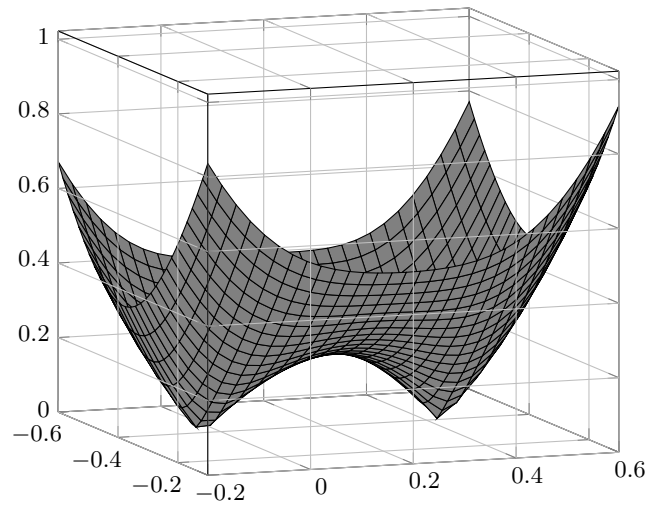
Fig. III.1. Polinomio $z^3 - z^2 - z - 1$ 

Fig. III.4. Tercera iteración

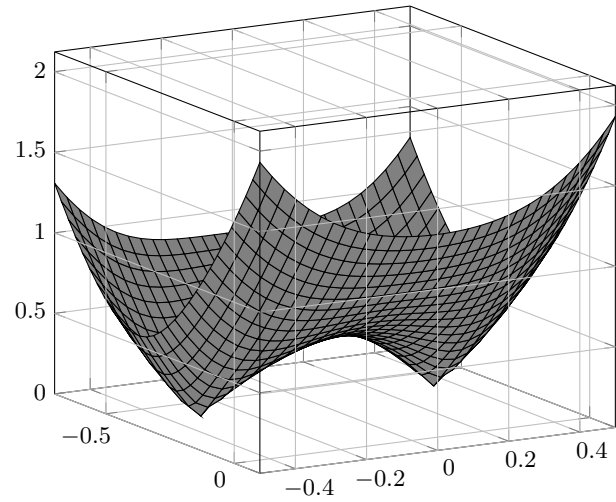


Fig. III.2. Primera iteración

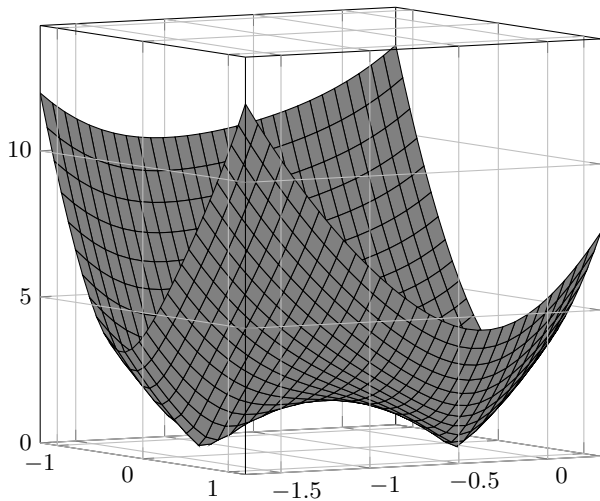


Fig. III.3. Segunda iteración

TABLE II
ITERACIONES DEL MÉTODO.

Iteración	Raíz 1	Raíz 2
1	$+1.625000 + 0.330718i$	$+1.625000 - 0.330718i$
2	$+0.219445 - 1.020150i$	$+0.326009 - 0.148102i$
3	$-0.381386 - 0.049646i$	$-0.380227 + 0.412363i$

El cuadro II muestra las sucesivas aproximaciones de las raíces de los polinomios interpolantes hacia la tercera raíz de la función original $(-0.419643 + 0.606290i)$, siendo que con únicamente tres iteraciones la magnitud de la distancia de la raíz más cercana del tercer polinomio interpolante y la raíz de la función original es de tan solo 0.197892. Dos iteraciones más garantizan que $|f(x_n)| < \epsilon$ si se asume $\epsilon = 10^{-6}$.

IV. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON EN \mathbb{C}

A. Introducción al método

Encontrar raíces de polinomios ha sido una tarea de suma importancia más allá del ámbito de la matemática teórica, pues tiene múltiples aplicaciones desde gráficas de computadora, como puede verse en [1] hasta resolución de problemas de optimización. Su relevancia es aún mayor cuando teorías como las de Galois y el teorema de Abel Ruffini limitan las fórmulas que directamente permiten la obtención de sus raíces [4] más allá de polinomios de grado 4. Es por esto, que la creación de algoritmos o herramientas que puedan resolver dichas limitantes, son muy importantes para el ámbito matemático; ahora no solo su existencia es necesaria, si no que se desea que estas sean lo más rápidas y eficaces posibles.

Entre estos resalta el método descubierto por Isaac Newton y luego refinado por Joseph Raphson, el cual permite encontrar aproximaciones a las raíces de polinomios con una gran rapidez mediante pocas iteraciones y con un gran precisión al mismo tiempo. Veremos ahora porque se da esto y como funciona el método de Newton y como se puede extender más allá de los reales

B. Demostración del método

Supongamos que $f \in C^2[a, b]$ y sea $p_n \in [a, b]$ una aproximación a p de tal forma que $f'(p_n) \neq 0$ y $|p - p_n|$ es un valor pequeño. Encontrando el primer polinomio de Taylor para $f(x)$ en p_n y evaluado en $x = p$, se obtiene:

$$f(p) = f(p_n) + (p - p_n)f'(p_n) + \frac{(p - p_n)^2}{2!}f''(\xi(p))$$

Donde $\xi(p)$ es un valor que se encuentra entre p y p_n . Dado que $f(p) = 0$, se obtiene lo siguiente

$$0 = f(p_n) + (p - p_n)f'(p_n) + \frac{(p - p_n)^2}{2!}f''(p)$$

Como asumimos que $|p - p_n|$ es un valor pequeño, entonces el valor obtenido de $(p - p_n)^2$ es aún más pequeño, lo que permite que sea despreciable, quedando así la ecuación como

$$0 \approx f(p_n) + (x - p_n)f'(p_n)$$

resolviendo para p obtenemos

$$p \approx p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$$

De lo cual obtenemos el método de Newton-Raphson, el cual a partir de un punto inicial p_0 se obtiene una sucesión $\{p\}_{n=0}^{\infty}$ y una aproximación a la raíz p

$$p = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad (\text{IV.1})$$

Obteniendo así mismo una ecuación que será muy útil para encontrar el error y demostrar convergencia de Newton-Raphson

$$0 = \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} + p - p_o + (x - p_n)^2 \frac{f''(p)}{2!f'(p)}$$

$$p = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} - (p - p_n)^2 \frac{f''(p)}{2!f'(p)}$$

$$p = p_{n+1} - (p - p_n)^2 \frac{f''(p)}{2!f'(p)}$$

$$p - p_{n+1} = -(p - p_n)^2 \frac{f''(p)}{2!f'(p)}$$

C. Convergencia del método de Newton-Raphson

El método de Newton tiene una convergencia considerablemente rápida, permitiendo obtener una aproximación extremadamente precisa con pocas iteraciones, como puede verse en ejemplo 1, y puede intuirse a través de su derivación por medio de series de Taylor, donde se asume que $|p - p_o|$ es un valor pequeño, lo que permite desechar su elevación cuadrática $(p - p_o)^2$.

Sin embargo, esto representa una limitante para el método, que requiere que la aproximación inicial p_0 se encuentre lo bastante cerca del valor real de p para poder cumplir dicha asunción. Si este es el caso y se cumple que $f'(p) \neq 0$ entonces el método de Newton garantiza su convergencia, como puede verse en el siguiente teorema

Teorema IV.1. Sea $f \in C^2[a, b]$ con f continua en $[a, b]$ y $p \in (a, b)$, y con $f(p) = 0$ y $f'(x) \neq 0$ y siendo f, f', f'' continuas, existe entonces un $\delta > 0$ tal que Newton - Raphson genera una sucesión $\{p\}_{n=0}^{\infty}$ que converge a p para cualquier valor inicial tomado de $[p - \delta, p + \delta]$.

Proof. Partiendo que Newton-Raphson es un esquema de iteración proveniente de punto fijo[3], pues $p = g(p_{n-1})$, $n \geq 0$ y obteniendo de él la sucesión $\{p\}_{n=0}^{\infty}$, para que esta converja, dada la existencia de un $\delta > 0$, debe existir un ϵ tal que $|p - x| < \epsilon$ para toda x en $[p - \delta, p + \delta]$.

Sea

$$M = \frac{\text{Max}_x |f''(x)|}{\text{Min}_x |f'(x)|}$$

de la deducción del polinomio de Taylor para el método de newton, tenemos que

$$p - p_n = -(p - p_n)^2 \frac{f''(p_n)}{2f'(p_n)}$$

De esto, obtenemos que

$$|p - p_{n+1}| \leq M|p - p_n|^2$$

$$M|p - p_{n+1}| \leq (M|p - p_n|)^2$$

Siendo $[p - \delta, p + \delta]$ un sub-intervalo dentro de $[a, b]$ y partiendo de la existencia de un δ , implica la existencia de un ϵ tal que $|p - p_0| \leq \epsilon$ y tomando que $M|p - p_0| < 1$. Teniendo también que $M|p - p_1| < 1$ y $M|p - p_1| < M|p - p_0|$, que implica $|p - p_1| \leq \epsilon$ y por transitividad, podemos extender el argumento hasta p_n valores mediante inducción demostrando que $|p - p_n| \leq \epsilon$ y $M|p - p_n| < 1$ para $n \geq 0$

$$M|p - p_n| \leq (M|p - p_0|)^2$$

$$|p - p_n| \leq \frac{1}{M}(M|p - p_0|)^2$$

como $(M|p - p_0|)^2 < 1$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p - p_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{M}$$

En base a lo anterior y demostrando también a través de la definición de límites para sucesiones, siendo $L = 0$ y habiendo comprobado la existencia de ϵ , se concluye que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \{p\}_{n=0}^{\infty} = 0$$

y por lo tanto el método de Newton-Raphson converge para cualquier valor p_0 tomado dentro del intervalo $[p - \delta, p + \delta]$. \square

1) Convergencia para dos raíces o más

Habiendo observado como el método de Newton converge de manera muy rápida hacia la raíz cuando existe solamente una, podemos extender la anterior definición para emplear el método a n raíces, con $n \geq 2$, partiendo de la premisa que todo p_0 dentro de $[p - \delta, p + \delta]$ convergerá al valor de la raíz más cercana, siempre y cuando dentro del intervalo escogido se cumplan las condiciones de que f, f' son continuas y $f'(p_0) \neq 0$, y por lo tanto podemos enunciar la siguiente definición

Definición IV.1. Si p_* es una raíz de f , el área de atracción de p_* esta compuesta por todos aquellos valores p_0 tales que el método de Newton al comenzar desde p_0 converge hacia p_*

$$B(x_*) = x_0 | x_n = N^n(x_0) \rightarrow x_*$$

A partir de la determinación del tipo de puntos al que pertenecen los valores de p_0 , podremos establecer que los puntos iniciales tenderán a la raíz más cercana. Los tipos de puntos fijos se establecen en base a la siguiente definición:

Definición IV.2. Supóngase un mapa $f : X \rightarrow X$ es diferenciable en un punto fijo p_* , entonces

- p_* es atrayente si y solo si $|f'(p_*)| < 1$
- p_* es super-atrayente si y solo si $|f'(p_*)| = 0$
- p_* es repelente si y solo si $|f'(p_*)| > 1$

Entonces, en vista de que $|g'(p)| = 0$ ya que

$$g(x) = 1 - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

con derivada

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x)f'(x)) - (f(x)f''(x))}{(f'(x))^2} = \frac{(f(x)f''(x))}{(f'(x))^2}$$

y asumiendo que $f(p) = 0$

$$g'(x) = 0$$

lo que permite concluir que los puntos dentro del intervalo $[p - \delta, p + \delta]$, son super-atrayentes y por ende convergerán a la raíz más cercana

Este comportamiento puede observarse buscando las raíces de la ecuación $x^2 - 1 = 0$, la cual posee dos raíces reales 1 y -1 como puede verse en Figura IV.1.

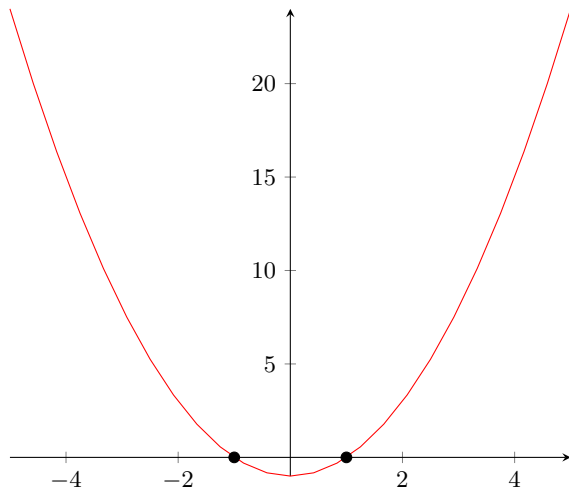


Fig. IV.1. Gráfica de $x^2 - 1$

Coloreando cada p_0 en base a que raíz se acercarán en la aproximación, vemos que obtenemos la siguiente imagen

Donde se observa como el plano se divide en dos partes uniformes con su respectivo color, en base a cual será la raíz a la que el valor se aproximará

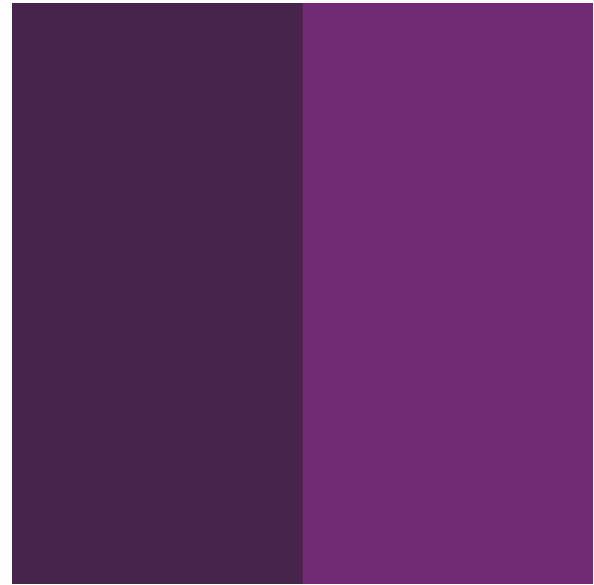


Fig. IV.2. Zonas de convergencia de $x^2 - 1$

si, ahondamos más en la imagen y generamos un gradiente de color, donde mientras más oscuro más rápidamente converge el punto, o lo que es lo mismo, menos iteraciones se necesitan, obtenemos lo siguiente:

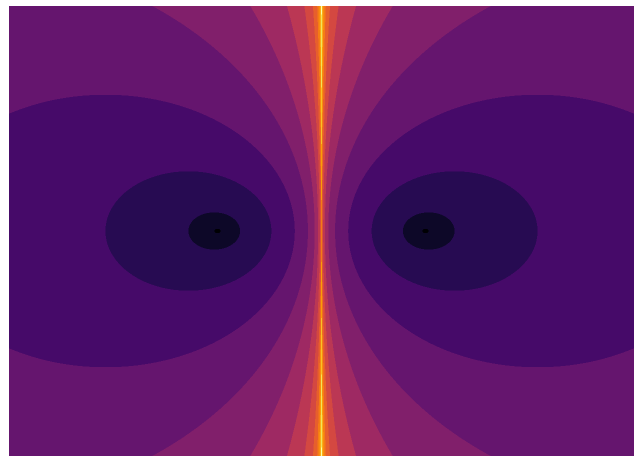
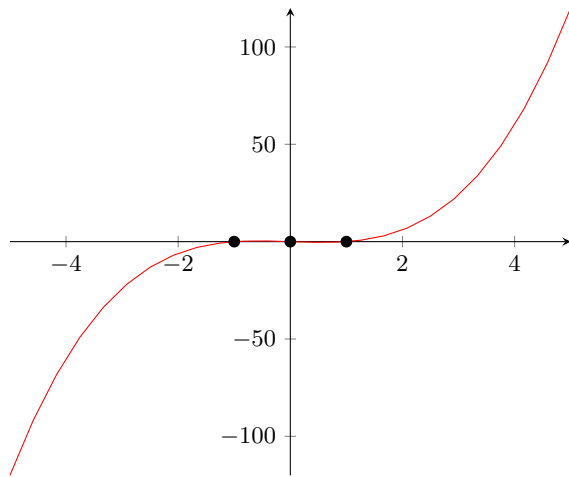


Fig. IV.3. Rapidez de convergencia de los puntos de $x^2 - 1$

Donde podemos ver que al aproximarnos a 0, los ritmos de convergencia tienden a aumentar de manera drástica, al punto de no converger. Esto se debe a que si evaluamos un valor de $p_n = 0$, $g'(0) = 2x = 2(0) = 0$, indefiniendo el resultado del método en ese punto

Veamos otro ejemplo con un comportamiento curioso, el cual también tiene puntos donde el método se indefine Sea $f(x) = x^3 - x$, que al resolver algebraicamente obtenemos $(x - 1)(x - 0)(x + 1)$ con raíces en 1,0,-1. A partir de su gráfica vemos que existen dos puntos críticos, que determinándolos a través de $f'(x) = 0$ da como resultado $-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Fig. IV.4. Gráfica de $x^3 - x$

De esto podemos concluir que $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \subset B(-1)$ y $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty) \subset B(1)$. Para el caso de $B(0)$, su determinación es un poco más complicada, ya que debemos tomar en cuenta los puntos crítico, los cuales producirán un efecto cíclico, en este caso de período 2, en Newton-Raphson si se les tome como puntos iniciales o cualquier punto inicial que, después de n iteraciones, haga que la tangente de la función sea igual a uno de ellos [10].

Partiendo la premisa anterior, tenemos que determinar en que punto $x_0 = x_2$, es decir $x = N(N(x)) = N^2(x)$. Este proceso se simplifica ya que f es una función impar y entonces $-f(x) = f(-x)$, por lo tanto a través de simetría tenemos que obtendremos $N^2(x)$ si $-x = N(x)$. Para esto calculamos la función en el método

$$N(x) = x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1}$$

$$N(x) = \frac{2x^3}{3x^2 - 1}$$

luego igualamos a $-x$ y resolvemos

$$-x = \frac{2x^3}{3x^2 - 1}$$

$$0 = 5x^3 - x$$

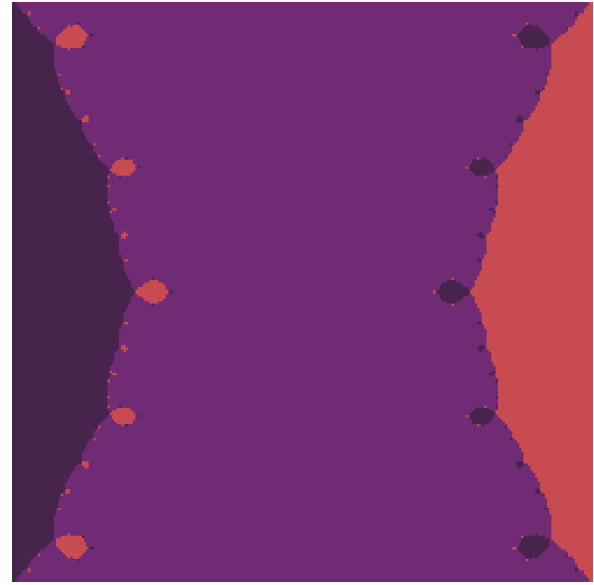
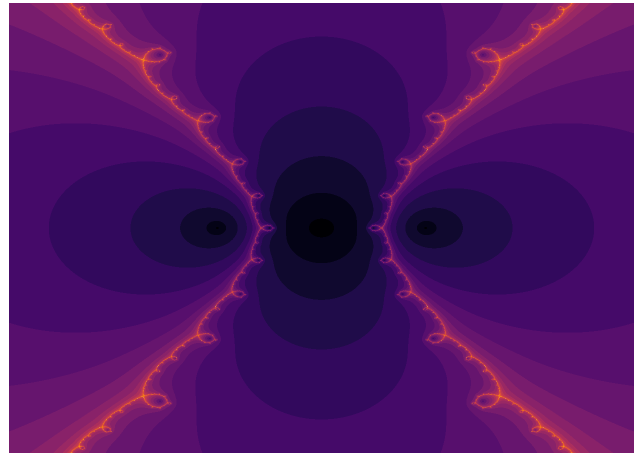
$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \vee x = 0$$

Y de esto podemos concluir que $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) \subset B(0)$

Ahora bien, veamos que pasa entre los valores de $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ y $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Como la función es simétrica, entonces lo que pasa en $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, será igual que en $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$. En estos dos intervalos se suceden áreas de convergencia hacia $B(1)$ y $B(-1)$, las cuales se ven divididas por valores los cuales luego de n iteraciones caerían en alguno de los puntos críticos de la función, indefiniendo el método.

Veamos por ejemplo un punto un poco a la izquierda de $\frac{1}{\sqrt{3}}$, por ejemplo 0.5773442692, el cual si evaluamos en Newton, nos devolverá -18518.03739, un valor que se encuentra dentro de los puntos convergentes hacia -1, hasta que encontremos un valor cuya n iteración sea $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, el cual al igualar ese valor en el método obtenemos 0.465601, por lo tanto $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0.465601) \subset B(-1)$. Si luego probamos con 0.465600, la siguiente iteración devuelve un número positivo muy grande, que cae dentro de $B(1)$. Este comportamiento se mantendrá hasta que hallemos un número cuya n -ésima iteración de como resultado $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e indefina la función.

Estos patrones continúan y se alternan entre cada división causada por valores que iteren hacia alguno de los puntos críticos de la función, y podremos determinar cada una de estas divisiones igualando 1 a función a uno de los puntos previos obtenidos,, esto nos genera unos patrones curiosos, como puede verse en Figura IV.5 y IV.6

Fig. IV.5. Áreas de convergencia de $x^3 - x$ Fig. IV.6. Rapidez de convergencia de los puntos de $x^3 - x$

D. Análisis del error del método de Newton-Raphson

El error del método de Newton, puede obtenerse a partir de su deducción del método de Taylor, donde

$$p - p_{n+1} = -(p - p_n)^2 \frac{f''(p)}{2!f'(p)}$$

es el error obtenido a través de la aproximación polinomial. Sin embargo, mediante el Teorema del Valor Medio, puede obtenerse una fórmula más sencilla para obtener el error a lo largo de las iteraciones del método

$$f(p_n) - f(p) = f'(\xi)(p_n - p)$$

$$\frac{f(p_n)}{f'(\xi)} = (p_n - p)$$

Donde si $f'(\xi)$ no cambia rápidamente entre p y p_n , entonces $f'(\xi) = f'(p)$ y

$$(p_n - p) = \frac{f(p_n)}{f'(\xi)} = p_{n+1} - p_n$$

obteniendo así la fórmula del error estándar de Newton

$$(p_n - p) = p_{n+1} - p_n \quad (\text{IV.2})$$

E. Análisis sobre la eficiencia del método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson, tiene una convergencia cuadrática, como se demostrará partiendo del siguiente teorema

Teorema IV.2. *Asumiendo que f, f', f'' sean continuas para toda x en las proximidades de p y asumiendo que $f(p) = 0, f'(p) \neq 0$. Entonces si se escoge lo suficientemente cerca de p , las iteraciones del método de Newton Raphson convergen a p . Con un orden de convergencia cuadrático*

Proof. Partiendo de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} = \lambda$$

Usaremos el polinomio de Taylor de $f(x)$ en p

$$0 = f(p_n) + (p - p_n)f'(p_n) + \frac{(p - p_n)^2}{2}f''(p)$$

obtenemos

$$p - p_{n+1} = -(p - p_n)^2 \frac{f''(p)}{2f'(p)}$$

$$\frac{|p - p_{n+1}|}{|(p - p_n)^2|} = \frac{f''(p)}{2f'(p)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p - p_{n+1}|}{|(p - p_n)^2|} = \frac{f''(p)}{2f'(p)}$$

Lo que prueba que la convergencia del método es cuadrática \square

F. Extensión del método al Dominio de \mathbb{C}

El teorema fundamental del álgebra enuncia lo siguiente:

Teorema IV.3. *Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene n raíces complejas*

Cuya demostración se puede encontrar en [7]

A partir de esto, podemos expandir la búsqueda de raíces incluyendo números imaginarios y pasar del plano exclusivamente real, al plano complejo \mathbb{C} y extender a su vez el método de Newton-Raphson, cuya única modificación será que ahora es capaz de recibir funciones complejas y puntos iniciales del mismo tipo

$$z = z_{n-1} - \frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1})} \quad (\text{IV.3})$$

Por ejemplo, sea $f(z) = z^2 + 1, f'(z) = 2z$, veremos que obtenemos las raíces $-i, i$ con la siguiente imagen de sus puntos de convergencia

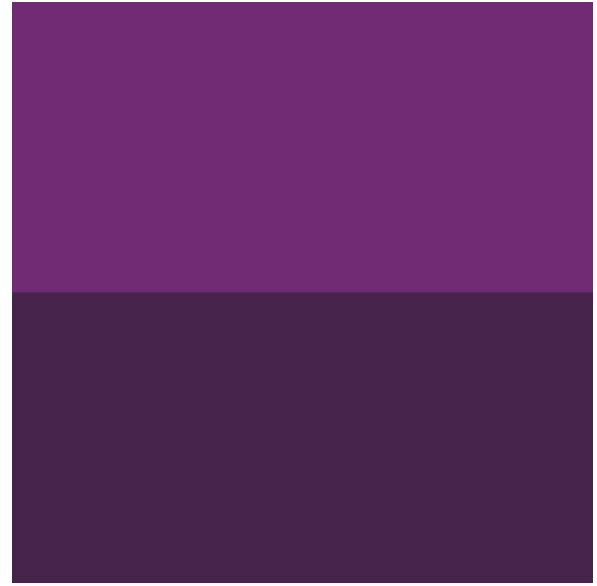


Fig. IV.7. Zonas de convergencia de $x^2 + 1$

y si colocamos el mapa de la rapidez de convergencia de sus puntos (Los colores más claros indican mayor cantidad de iteraciones)

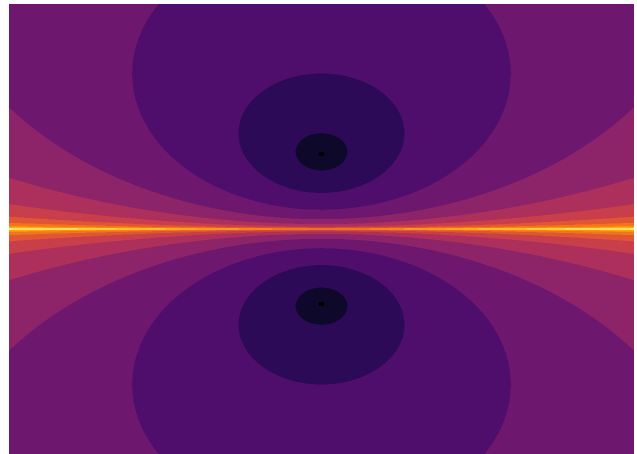
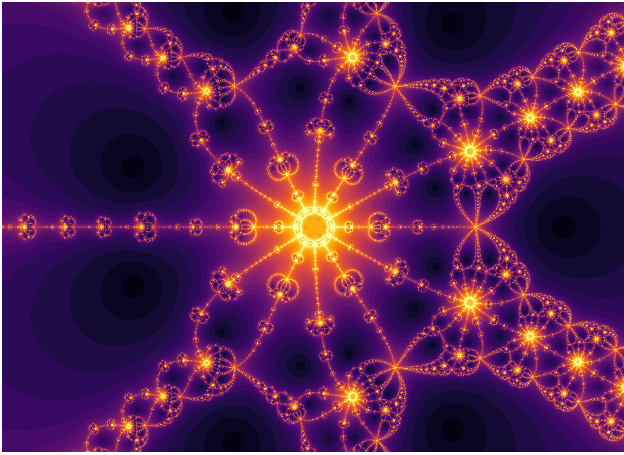
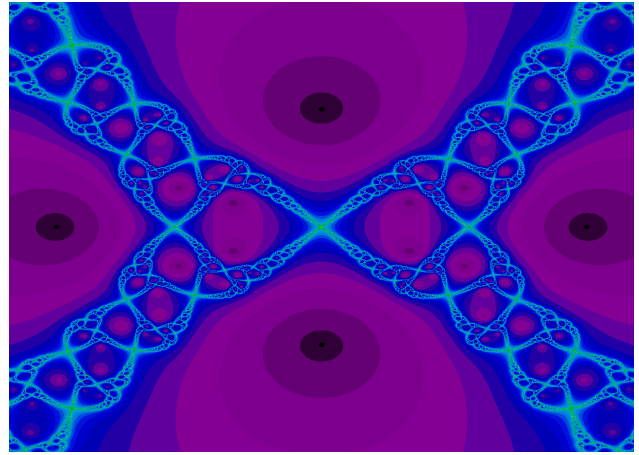


Fig. IV.8. Rapidez de convergencia de los puntos de $x^2 + 1$

Comportándose muy similar a la función vista previamente en Figura IV.3, con la división siendo en este caso el eje de los reales

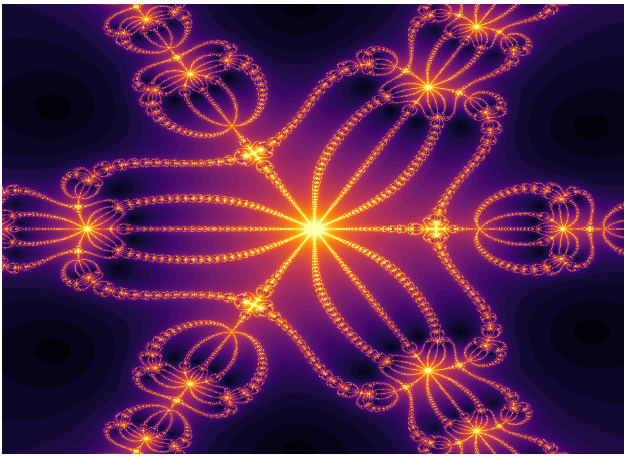
Pero que pasa con funciones de grado $n \geq 2$ Si observamos la función $f(z) = z^3 - 1$, obtenemos las raíces $(-0.5, -0.866i), (-0.5 + 0.866i), (1 + 0i)$ y al generar su mapa de convergencia, obtenemos la siguiente imagen, la cual genera un patrón interesante

Fig. IV.11. Fractal generado por $x^7 - x - 1$ Fig. IV.13. Fractal generado por $x^4 - x^2 - 1$

Función: $x^6 - x^3 + 11$

Raíces:

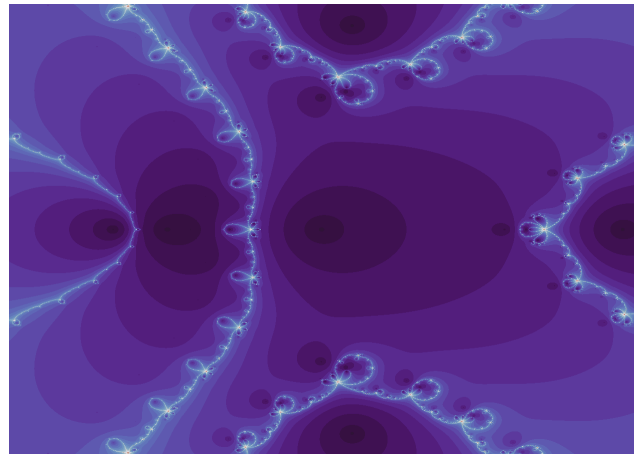
$(-1.2523-0.8098i)$	$(-1.2523+0.8098i)$
$(-0.0752-1.4894i)$	$(-0.0752+1.4894i)$
$(1.3275-0.6796i)$	$(1.3275+0.6796i)$

Fig. IV.12. Fractal generado por $x^6 - x^3 + 11$

Función: $x^6 - 3x^2 - 2x$

Raíces:

$(-1+0i)$	$(-0.7413+0i)$
$0i$	$(0.1472-1.3576i)$
$(0.1472+1.3576i)$	$(1.4469+0i)$

Fig. IV.14. Fractal generado por $x^6 - 3x^2 - 2x$

Función: $x^4 - x^2 - 1$

Raíces:

$(-1.272+0i)$	$(-0-0.7862i)$
$0.7862i$	$(1.272+0i)$

Función: $x^7 - x^2 + 1$

Raíces:

$(-0.8398+0i)$	$(-0.7555-0.7411i)$
$(-0.7555+0.7411i)$	$(0.2945-1.0774i)$
$(0.2945+1.0774i)$	$(0.8809-0.2758i)$
$(0.8809+0.2758i)$	

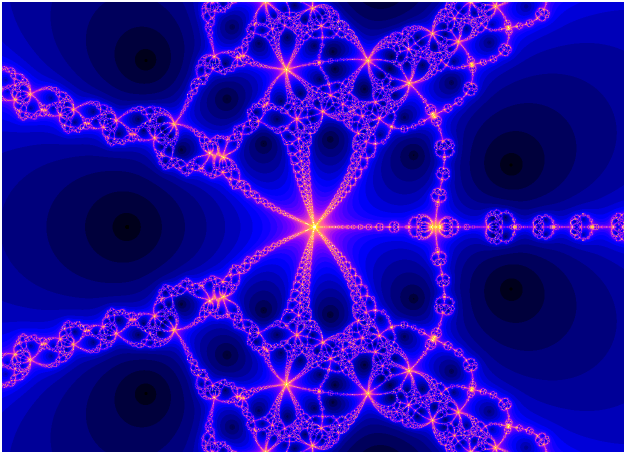


Fig. IV.15. Fractal generado por $x^7 - x^2 + 1$

REFERENCES

- [1] 3Blue1Brown. Newton's fractal (which newton knew nothing about), 10 2021.
- [2] Computer Science AI. Advantages, disadvantages and applications of regula falsi method, 2017-2021. Last accessed 5 May 2022.
- [3] Kendall E. Atkinson. *An introduction to numerical analysis*. Wiley, New York u.a., 2. ed. edition, 1989.
- [4] Benjamin Badger. Roots of polynomial equations part i, 2021.
- [5] Richard L. Burden and J. Douglas Faires. *Numerical Analysis*. Richard Stratton, Boston, MA 02210, ninth edition edition, 2010.
- [6] Bruce Edwards. Order of convergence for the secant method, 01 2018.
- [7] Isaiah Lankham, Bruno Nachtergaele, and Anne Schilling. The fundamental theorem of algebra. 02 2007.
- [8] David E. Muller. A method for solving algebraic equations using an automatic computer. *Mathematics of computation*, 10(56):208–215, Jan 1, 1956.
- [9] Mahendra Ram. Rate of convergence and termination point. *E-Materials VII*, pages 1–3–5, Unknown.
- [10] A.G. Wiersma. The complex dynamics of newton's method, 06 2016.
- [11] José Alberto Gutiérrez Robles y Miguel Ángel Olmos Gómez y Juan Martín Casillas González. *Análisis numérico*. Unknown, C.P. 01376, México, D.F., 2010.