udp Instituto de Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD DIEGO PORTALES
FACULTAD DE INGENIERIA Y CIENCIAS
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Tarea computacional No 1 - Métodos Numéricos

Prof. Julio López, Ayund. Javiera Araya Plazo máximo de entrega: 20 de Abril del 2017

- Todos los resultados que se le piden a continuación, deben ser presentados en tablas donde se muestren las iteraciones mas resaltantes que realizan los métodos. El uso de gráficos también puede ser incorporado. Explique detalladamente todos los análisis que realizó.
- La entrega del trabajo es forma grupal (a lo más 4 integrantes) y estos deben ser enviados a los emails: julio.lopez@udp.cl, javiera.arayamu@mail.udp.cl, en un archivo comprimido zip o rar, usando el siguiente formato:

  `MNT1_Apellido1_Apellido2_Apellido3_Apellido_4.`
- Pasada el plazo máximo de entrega, se recibirá los trabajos pero con un máximo a obtener de 6 puntos, el cual ira disminuyendo con relación a la fecha de entrega.

Resolución de ecuaciones no lineales

1. Usando los métodos: Bisección, Falsa posición, y Secante, encuentre la raíz aproximada de las siguientes ecuaciones no lineales en los intervalos indicados:

   (a) $x^3 - 4\text{sen}(x) + 1 = 0$, sobre los intervalos $[0, 1]$ y $[1, 2]$.

   (b) $e^{-t/2} + \cos(2t) = 0$ sobre $[1, 2]$.

   (c) $x + 30 - x\cosh(\frac{40}{x}) = 0$ sobre [25,35].

   (d) $x^3 - e^{-x} + x\text{sen}(3x) = 0$ sobre $[0, 2]$.

   (e) $e^{-x^2} - \cos(x) = 0$, en $[1, 2]$.

   con una tolerancia de 10^{-5}. Haga una comparación de los métodos en cuanto a la cantidad de iteraciones, error relativo, tiempo de CPU. Cuál de ellos fue más eficiente?.

2. Programe el siguiente algoritmo

procedure ALGORITMO DEL MÉTODO DE ILLINOIS$(a, b, Nmax, \varepsilon)$

  $f_a := f(a)$.

  $f_b := f(b)$.

  $iter := 0$.

  $c := \dfrac{a * f_b - b * f_a}{f_b - f_a}$.

  $f_c := f(c)$.

  flag=0.

  while $|f_c| > \varepsilon$ and $iter < Nmax$ **do**

    if $f_c * f_a > 0$ **then**

      $a = c$, $f_a = f_c$.

      if flag=-1 **then**

        $c := \dfrac{a * f_b/2 - b * f_a}{f_b/2 - f_a}$.

      else

        $c := \dfrac{a * f_b - b * f_a}{f_b - f_a}$.

      end if

      flag=-1.

    else

      $b = c$, $f_b = f_c$.

      if flag=1 **then**

        $c := \dfrac{a * f_b - b * f_a/2}{f_b - f_a/2}$.

      else

        $c := \dfrac{a * f_b - b * f_a}{f_b - f_a}$.

      end if

      flag=1.

    end if

    $f_c = f(c)$.

    $iter = iter + 1$.

  end while

end procedure

Luego, use este algoritmo para calcular la raíz de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^{10} - 1$, $x \in [0, 1.3]$,

(b) $f(x) = \cos(x) - x^3$, $x \in [0, 2]$,

(c) $f(x) = \sin(x) + \sin(x^2)$, $x \in [0, 3]$,

con una tolerancia de 10^{-5}.

Comente sus resultados, cuando aplica el método de la Falsa Posición a estas funciones.

3.

Cálculo del valor presente de una Anualidad Ordinaria:
El dinero necesario para pagar la cuota correspondiente a un crédito hipotecario a interés fijo se suele estimar mediante la denominada "**Ecuación de la Anualidad Ordinaria**":

$$Q = \frac{A}{i}(1 - (1+i)^{-n}),$$

donde Q denota la cantidad pedida en préstamo (ó valor presente), A la cuota que debe pagar el beneficiario por el préstamo (ó renta), i la tasa de interés fijado por la entidad bancaria que concede el préstamo, y n el número de periodos durante los cuales se realizan pagos de la cuota.

Problema de Aplicación: Una pareja que desea comenzar una vida en común se plantea adquirir una vivienda, y para ello saben que necesitan pedir un préstamo de USD 35.000 a pagar trimestralmente durante un plazo de 20 años. Sabiendo que para atender este pago, la pareja pueden destinar una cantidad máxima de 600 dólares mensuales.

(a) Use el método de Newton, con estimación inicial $i_0 = 0.04$, para calcular el interés al que pueden negociar su préstamo con las entidades bancarias. Con dicho interés, alguna entidad bancaria le concederá el préstamo solicitado?
Hint: Use como funciones:

$$f_1(i) = Q(i+1)^n i - A((1+i)^n - 1), \quad f_2(i) = Q - \frac{A}{i}(1 - (1+i)^{-n}).$$

Suponga ahora que desean endeudarse en 30 años en lugar de 20. Cual sería el interés en esta situación?

(b) Resuelva el mismo problema, usando la iteración de Punto Fijo, con estimación inicial $i_0 = 0.04$, con las siguientes 2 funciones:

$$g_1(i) = \frac{A}{Q}(1 - (1+i)^{-n}), \quad g_2(i) = \left(\frac{A}{Qi}(1+i)^n - 1\right)^{1/n} - 1$$

4. Considere la función $f(x) = x\cos(x) - e^x + 1$.

(a) Considere las siguientes funciones

$$g_1(x) = \frac{e^x + x - 1}{1 + \cos(x)}, \quad g_2(x) = \sqrt{\frac{x(e^x - 1)}{\cos(x)}}.$$

Realize unas 12 iteraciones de punto fijo, usando como puntos iniciales $x_0 = -0.5$ y $x_0 = 0.5$.

(b) Teniendo en cuenta las siguientes funciones de iteración de punto fijo

$$g_3(x) = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)}, \quad g_4(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)},$$

realize unas 12 iteraciones usando como puntos iniciales $x_0 = -0.5$ y $x_0 = 0.5$.

(c) Que puede decir sobre el comportamiento de las iteraciones de punto fijo calculadas anteriormente. Esto es, el método convergió a la raíz de f? Cual fue más rápido?

5. **Métodos iterativos:** A continuación se describen algunos métodos de iteración de punto fijo que encuentran la raíz aproximada de $f(x) = 0$:

- Método de Schröder

$$x_{n+1} = S_f(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

- Método de acceleración convexa de Whittaker

$$x_{n+1} = W_f(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)}\,(2 - L_f(x_n))$$

donde $L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$.

(a) Utilize estos métodos para encontrar la solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$, donde

  (i) $f_1(x) = xe^{x^2} - \operatorname{sen}(x) + 4\cos(x) + 6$, en [-2,0].

  (ii) $f_2(x) = x^3 - 3x^2(2^{-x}) + 3x(4^{-x}) - 8^{-x}$, en $[0, 1]$.

  (iii) $f_3(x) = x^3 - e^{-x} + x\operatorname{sen}(3x)$ sobre $[0, 2]$

  En cada caso use como criterio de parada:

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} \leq 10^{-7}$$

(b) Compare los errores relativos vs. las iteraciones (mediante un gráfico) para los métodos (descritos anteriormente) que determinan la raíz de $f_i(x) = 0$, para $i = 1, 2, 3$.

Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales:

En los siguientes ejercicios, use como criterio de parada lo siguiente:

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\|}{\|\mathbf{x}^{(n+1)}\|} \leq 10^{-6},$$

donde $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2}$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Considere los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - 3xy^2 &=& 1/2, \\ 3x^2y - y^3 &=& \sqrt{3}/2. \end{array}\right. \qquad (b)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x^2 + x - y^2 &=& 1, \\ y - \sin(x^2) &=& 0. \end{array}\right.$$

   Usando el método de Newton, encuentre los puntos de intersección de las curvas descritas en los items (a) y (b). Para encontrar los puntos iniciales (x_0, y_0), apóyese en gráficos que le permitan encontrar una aproximación (punto inicial) a la solución.

2.

Optimización sin restricciones:
Considere el siguiente problema de minimización

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}),$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función dos veces diferenciable (i.e, $f \in C^2(\mathbb{R})$). El método de Newton para encontrar la solución (aproximada) de este problema viene dado por:

$$\left\{\begin{array}{rl} \nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{d}^{(k)} &= -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}), \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)}, \end{array}\right.$$

donde $\nabla f(\mathbf{x})$ y $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ denotan el gradiente y el Hessiano de f en el punto $\mathbf{x}$, respectivamente.

(a) Realice un código en Matlab del Método de Newton descrito anteriormente, para cualquier f.

(b) Considere la función de Rosenbrock:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1}((1-x_i)^2 + 100(x_{i+1} - x_i^2)^2).$$

Pruebe su código tomando $n = 2$, y como puntos iniciales $(x_0, y_0) = (-3, -4)$ y $(-1, 1)$. Reporte lo siguiente:

- Grafica de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en este caso, es decir, la función:

$$f(x, y) = (1-x)^2 + 100(y - x^2)^2.$$

- Cantidad de iteraciones, solución aproximada, CPU time (en caso de tener convergencia. Si no converge con dichos puntos iniciales, puede elegir otro punto).
- Gráfique: Iteraciones vs $f(x_k, y_k)$.

Remark.- El mínimo en este caso es el punto $(x^*, y^*) = (1, 1)$.

(c) Considere la función de Freudenstein and Roth dado por $f(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)^2 + f_2(x_1, x_2)^2$, donde

$$f_1(x_1, x_2) = -13 + x_1 + ((5 - x_2)x_2 - 2)x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = -29 + x_1 + ((x_2 + 1)x_2 - 14)x_2.$$

- Grafique la función en $[-25, 20] \times [-20, 10]$.
- Use el Método de Newton para calcular la solución del problema de optimización, tomando como puntos iniciales: $(x_0, y_0) = (-50, 7), (20, 7), (20, -18), (5, -10)$. Para cada uno de los cuatro puntos iniciales, compare cantidad de iteraciones y el punto al cual esta convergiendo.