TEORÍA DE CONJUNTOS Y LÓGICA PROPOSICIONAL

Guía resumen Módulo I

Tabla de contenido

TEORIA DE CONJUNTOS

Módulo I

1. Noción de Conjunto

Un conjunto es una colección bien definida de objetos llamados elementos o miembros del conjunto.

En esta definición la frase 'bien definida' es esencial para determinar si un grupo de personas o una colección de objetos es o no un conjunto, ya que para que una colección de objetos se considere como un conjunto no debe haber ambigüedad ni subjetividad.

Cada conjunto se define con una letra mayúscula

Para presentar un conjunto se utilizaran los signos **{ }**; y se puedes utilizar dos maneras para expresar un conjunto:

1.1 Extensión

Enumerando todos y cada uno de los elementos que forman parte de él; por ejemplo:

G = {José, Enrique, Gabriel}

1.2 Comprensión

Indicando las características necesarias que tendrán los objetos que pertenezcan al conjunto; por ejemplo**:**

G = {Alumnos del curso que les gusta ir al cine}

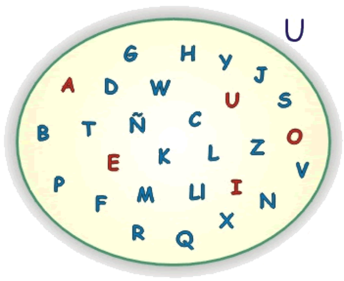
Extensión	Comprensión
A = {a,e,i,o,u}	**A** = { x es una vocal }

2. Definiciones

2.1 Conjunto universal o referencia

Es el formado por un amplio número de elementos, como puede ser el conjunto de los números naturales o por letras del abecedario. Estos conjuntos sirven de base para crear más conjuntos.

Para representar que un conjunto es universal se utiliza la vocal ***U*** mayúscula.



2.2 Conjunto vacío (Ø)

El ***conjunto vacío*** es aquel que no tiene elemento alguno. Generalmente el conjunto vacío se representa mediante un paréntesis { } (corchete sin elemento), o por el símbolo Ø.

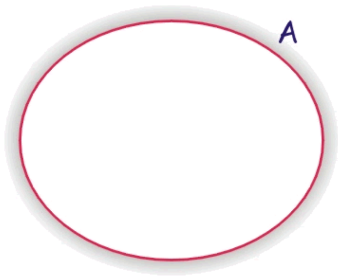
Ejemplos:

A **= { }**

El conjunto A no posee ningún elemento.

B **= { números impares entre 5 y 7 }**

No existe ningún número impar entre los números 5 y 7.

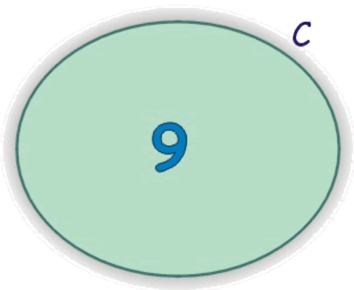


2.3 Conjunto unitario

1. Conjunto de satélites naturales de la Tierra.
2. El conjunto de números naturales mayores de 8 y menores de 10:

C **= { 9 }**

El único elemento es el número 9.



2.4 Conjunto Finito

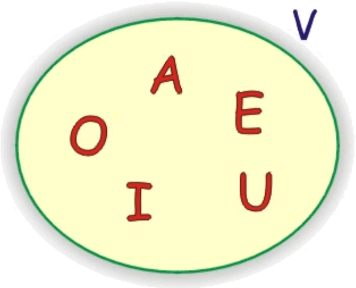
Un conjunto es ***finito***, cuando posee un comienzo y un final, en otras palabras, es cuando los elementos del conjunto se pueden determinar o contar.
Ejemplos:

1. Conjunto de números pares entre 10 y 40:

***R* = { 10,12,14,16,18,20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40 }**

2. Conjunto de vocales.

***V* = { a, e, o, i, u }**



2.5 Conjunto Infinito

El conjunto es ***infinito***, cuando posee un inicio pero no tiene fin. Es decir, que la cantidad de elementos que conforman el conjunto no se puede determinar.
Un **conjunto infinito** es un conjunto que no es finito.
Ejemplos:

1. El conjunto de los números naturales:

***N* = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,...}**

2. El conjunto de los peces en el mar:

***P* = { los peces en el mar }**

2.6 Clases de Conjuntos

Aunque es válido especificar las características de los elementos de un conjunto con palabras, como se hizo anteriormente, existen conjuntos importantes que se pueden usar para compactar la información. Algunos de los conjuntos que más se utilizan en las matemáticas son los siguientes:

N = Conjunto de los numero naturales {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9……}

Z+ = Conjunto de los números enteros no negativos {1,2,3,4,5,6,7,8,9……}

Z = Conjunto de los números enteros {…..,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5….}

2.7 Relación entre conjuntos

2.7.1 Definición de inclusión

La **relación de inclusión**, se da entre conjuntos y sub conjuntos. Es correcto decir que un subconjunto está incluido en un conjunto mayor, pero **no** es correcto decir que un subconjunto pertenece a un conjunto mayor.

Se lee →

“B esta incluido en A”
“B esta contenido en A”
“B es subconjunto de A”

$$\mathbf{B \subseteq A}$$

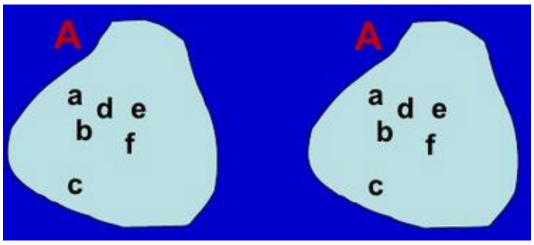
←

“A incluye al conjunto B”
“A contiene al conjunto B”
“A es superconjunto de B

”

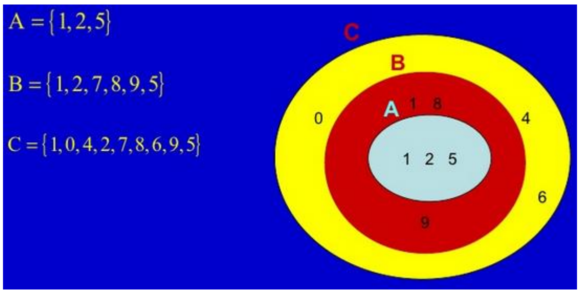
2.7.2 Inclusión reflexiva

Todo conjunto está incluido en sí mismo.



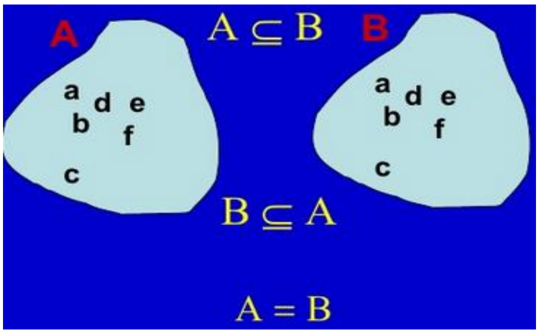
2.4.3 Inclusión transitiva

Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$



2.4.4 Inclusión Antisimétrica

Si A ⊆ B y B ⊆ A, entonces A = B.



2.4.5 Propiedades de la inclusión

Aplicando la definición de Subconjunto o Inclusión, se obtiene que

1.- Todo Conjunto A es un conjunto de sí mismo

2.- El conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos y en particular del mismo

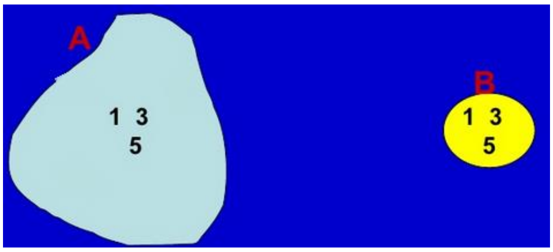
$$\emptyset \subseteq A$$
$$\emptyset \subseteq \mathbf{U}$$
$$\emptyset \subseteq \emptyset$$

3.- Todos los conjuntos son subconjuntos del conjunto universo (**U**).

$$A \subseteq \mathbf{U}$$
$$\emptyset \subseteq \mathbf{U}$$
$$\mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}$$

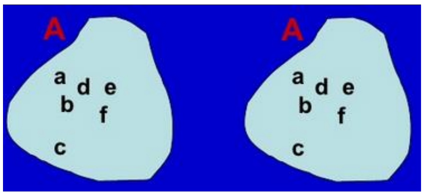
2.4.6 Igualdad

Decimos que el conjunto **A** es igual al conjunto **B** y lo escribimos con A = B, cuando tienen los mismos elementos.

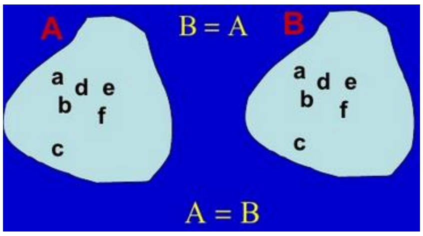


2.4.7 Propiedades de la igualdad

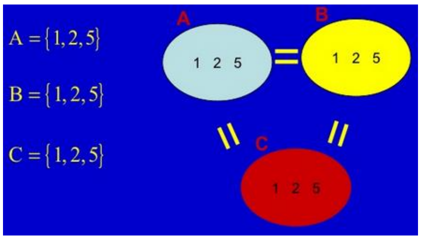
Reflexiva : Todo conjunto es igual a si mismo



Simétrica: Si A = B entonces B = A.



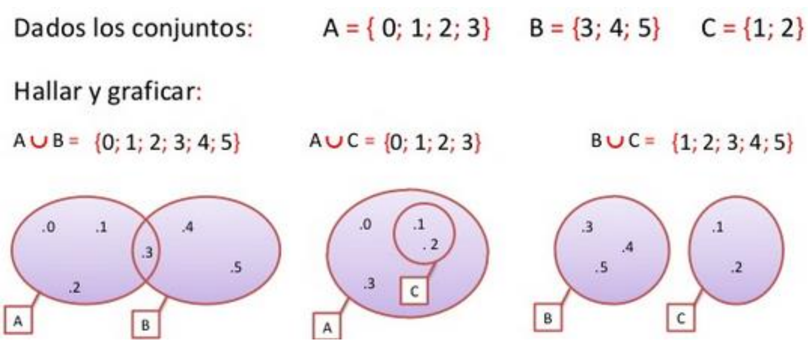
Transitiva: Si A = B y B = C, entonces A = C.



3 Operaciones con conjuntos

3.1 Unión

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, diremos que **"A unión B"** y lo escribimos **A U B** al conjunto cuyos elementos pertenecen a los conjuntos A y B.



3.1.1 Propiedades de la unión

Clausurativa
Si A y B son conjuntos entonces A U B es también conjunto.

Conmutativa
Si A y B son conjuntos entonces A U B = B U A

Asociativa
Si A,B y C son conjuntos entonces (A U B) U C = A U (B U C)

Modulativa
Si A es un conjunto entonces A U Ø = Ø U A = A

Dados los conjuntos A,B y C, subconjuntos de U, la unión de conjuntos verifica las siguientes propiedades:

$\mathbf{A \subseteq (A \cup B) = B \subseteq (A \cup B)}$

$\mathbf{A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B}$

$\mathbf{A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Leftrightarrow (A \cup B) \subseteq C}$

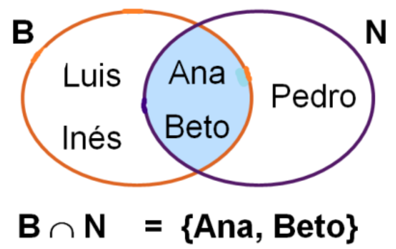
$A \cup A = A$ (Propiedad Idempotente)

$A \cup U$ (U es el conjunto universal)

3.2 Intersección

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, decimos **"A intersección B"** y lo escribimos como **$A \cap B$** , conjunto cuyos elementos pertenecen al conjunto A y al conjunto B.

$$\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$$



3.2.1 Propiedades de la intersección

Dados tres conjuntos A, B y C, subconjuntos de **U**, la intersección verifica las siguientes propiedades.

Clausurativa
Si A y B son conjuntos entonces **$A \cap B$** es también conjunto.

Conmutativa

Si A y B son conjuntos entonces $\mathbf{A \cap B = B \cap A}$

Asociativa

Si A,B y C son conjuntos entonces $\mathbf{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$

$\mathbf{A \cap B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq B.}$

$\mathbf{A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A}$

Si $\mathbf{A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow (A \cap B) \subseteq C}$

$\mathbf{A \cap A = A}$ **(Propiedad Idempotente)**

$\mathbf{A \cap U = A}$ **(U es el conjunto universal)**

$\mathbf{A \cap \emptyset\ 0\ \emptyset}$

3.2.2 Propiedades conjuntas unión e intersección.

$\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$
(Figura 1.5)
$\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
(Figura 1.6)
$\mathbf{A \cup A^c = U}$
$\mathbf{A \cap A^c = \emptyset}$

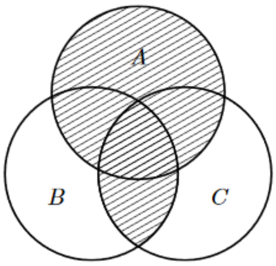


Figura 1.5: $A \cup (B \cap C)$.

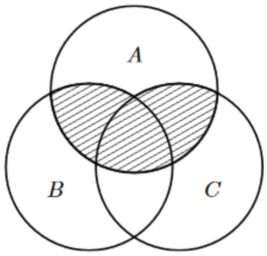
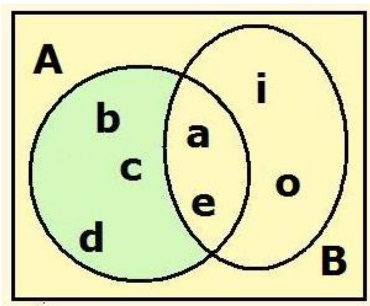


Figura 1.6: $A \cap (B \cup C)$.

3.3 Diferencia

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, decimos **"A menos B"** y lo escribimos **A - B** al conjunto cuyos elementos pertenecen al conjunto A y **NO** pertenecen al conjunto B.

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

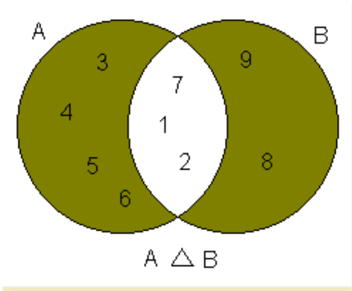


3.4 Diferencia Simétrica

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, decimos **"A menos B"** y lo escribimos $A \Delta B$ al conjunto cuyos elementos son los no comunes a los conjuntos A y B.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

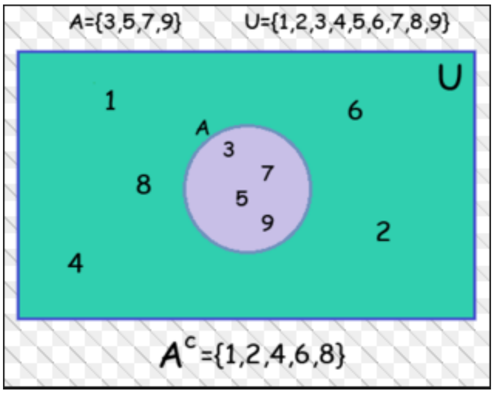
$$(A \oplus B) = x \mid (x \in A \text{ y } x \notin B) \text{ o } (x \in B \text{ y } x \notin A)$$



3.5 Complemento

Sea A un conjunto, decimos **"complemento de A"** y lo escribimos **A^c**, al conjunto de cuyos elementos pertenecen al conjunto **U** y no pertenecen al conjunto A.

$$CA_B = \{ x / x \in U \wedge \notin A \}$$



3.6 Ley de Morgan

El matemático ingles Augustus de Morgan demostró que:

La negación de la Intersección de dos o más conjuntos es equivalente a la unión de los conjuntos negados separadamente.

La negación de la Unión de dos o más conjuntos es igual a la intersección de los conjuntos negados por separado.

Ejemplo : Sean los conjuntos:

U = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 }

A = { 1,3,6,7,9,10 }

B = { 1,2,3,7,9,10}

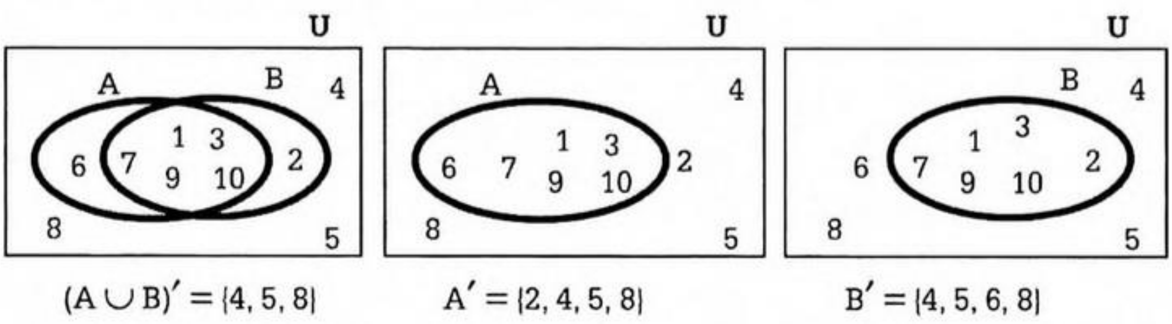
Aplicando las definiciones correspondientes, se tiene que :

A U B = { 1,2,3,6,7,9,10}

$(A \cup B)^c$ = { 4,5,8}

Por otro lado también se tiene que: **A^c = {2,4,5,8} ; B^c = {4,5,6,8} ; $A^c B^c$ = {4,5,8}**

Usando diagramas de Venn, se tiene que:



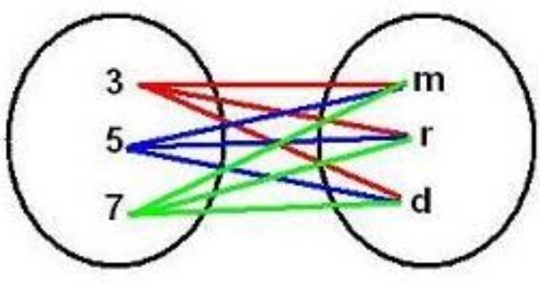
Por lo tanto se puede afirmar que : $(A \cup B)' = (A' \cap B')$

4 Producto cartesiano o cruz

Dados los conjuntos ***A, B*** $\subseteq$ **U**, *el producto cartesiano o cruz* de *A*, *B* se define por ***A*** $\times$ ***B*** y es igual a :

$$A \times B \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Se dice que los elementos de ***A*** $\times$ ***B*** son pares ordenados.
Para **(*a*, *b*), (*c*, *d*)** $\in$ ***A*** $\times$ ***B***,
se tiene que **(*a*, *b*) = (*c*, *d*)** si y sólo si,
a **=** ***c*** **y** ***b*** **=** ***d***.



Ejemplo:

Si **A** = { a , b , c } y **B** = { 1 , 2 }

A x B = { (a,1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2) }

Note que

A tiene 3 elementos

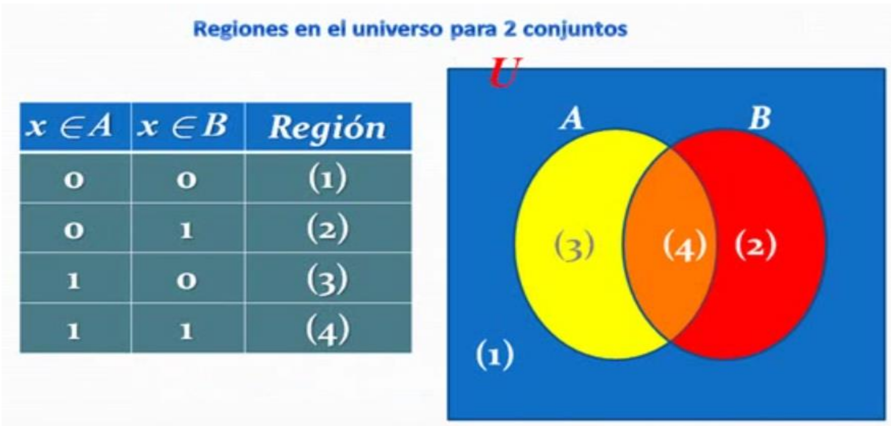
B tiene 2 elementos
A x B tiene 6 elementos.

5 Tablas de pertenencia

Una técnica para probar igualdades entre conjuntos es la tabla de pertenencia. Se observa que para los conjuntos **A** y **B ⊆ U** un elemento **x ϵ** al **U** cumple exactamente una de las cuatro situaciones siguientes:

a) x A; x B;
b) x A; x ϵ B ;
c) x ϵ A; x B ;
d) x ϵ A ; x ϵ B.

Asignando el valor de verdad 1 (verdadero) si **x ϵ A** y 0 (falso) si **x A**, quedan determinadas 4 regiones en el universo (U) de acuerdo a con la siguiente tabla:



$x \in A$	$x \in B$	Región
0	0	(1)
0	1	(2)
1	0	(3)
1	1	(4)

LÓGICA PROPOSICIONAL

Módulo I

6 Proposición lógica

La lógica estudia los principios del razonamiento, la demostración y la inferencia.

Toda teoría es un sistema de sentencias o declaraciones, que se aceptan como verdaderas y pueden ser utilizadas para obtener nuevas declaraciones utilizando reglas bien definidas. Es importante en computación, porque nosotros debemos enseñar a razonar a las máquinas.

Es importante en la disciplina de Bases de datos, porque trabajaremos con una lógica diferente a la clásica **bi-valorada**.

Una **proposición** es una sentencia declarativa que puede ser verdadera o falsa, y se debe poder decidir cuál de las dos. Podemos determinar si una sentencia **S** es declarativa verificando que tenga sentido la pregunta ¿es cierto que S?

Diremos que las proposiciones tienen un valor de verdad, que puede ser **verdadero o falso**.

6.1 Predicados

Un predicado, a diferencia de una proposición, admite variables de las que no se conoce su valor de verdad. Estas variables se conocen como parámetros del predicado.

Un ejemplo de predicado es **"X aprobará Bases de Datos"**, y podemos suponer que el valor de verdad de este predicado dependerá del parámetro X, que varía en el conjunto de estudiantes.

Si sustituye el lector la variable X por su nombre (esto se denomina instanciar un predicado con valores) obtendrá una **proposición**.

6.2 Conectivos o Conectores Lógicos

Los conectivos lógicos básicos de la lógica proposicional: **conjunción (AND)**, **disyunción (OR)** y **negación (NOT)**.

Los conectivos lógicos son operadores lógicos; toman predicados y devuelven predicados, permitiendo construir (en un proceso inductivo) predicados compuestos a partir de predicados simples (predicados sin conectivos).

El significado preciso de los conectivos puede ser definido mediante **tablas de verdad.**

6.3 Tablas de Verdad

Tablas de verdad o tabla de valores de verdad, es una tabla que muestra el valor de verdad de una **proposición compuesta**, para cada combinación de valores de verdad que se pueda asignar a sus componentes.

Las tablas de verdad son, por una parte, uno de los métodos más sencillos y conocidos de la lógica formal, pero al mismo tiempo también uno de los más **poderosos y claros**.

TABLA DEL **AND (∧)**

P	Q	P AND Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABLA DEL **OR (V)**

P	Q	P OR Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABLA DEL **NOT (~ o ¬)**

P	NOT P
V	F
F	V

6.3.1 Tablas de Verdad – Negación (¬) o (~)

Consiste en cambiar el valor de verdad de una variable proposicional

P	NOT P
V	F
F	V

6.3.2 Tablas de Verdad - Conjunción (∧)

La proposición será verdadera sólo cuando ambas variables proposicionales sean verdaderas

P	Q	P AND Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

6.3.3 Tablas de Verdad – Disyunción (V)

La proposición será verdadera cuando una o ambas variables proposicionales sean verdaderas.

P	Q	P OR Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

6.3.4 Tablas de Verdad – Disyunción Exclusiva ( )

La proposición será verdadera sólo cuando una de las dos variables proposicionales sea verdadera, pero no las dos.

A	B	$A\bar{\vee}B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

6.3.5 Tablas de Verdad – La implicancia o Condicional.

La **implicación** es el conector lógico más difícil de comprender y de asociar con una construcción del lenguaje natural. la proposición **α** se llama hipótesis o antecedente y la proposición **β** se llama conclusión o consecuente. Se representa con el símbolo ⇒ y la expresión **α ⇒ β** se puede leer de múltiples formas:

- α implica β
- Si α, entonces β
- α es suficiente para β
- α es una condición suficiente para β
- α solo si β
- β es necesaria para α
- β es una condición necesaria para α

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

6.3.6 Tablas de Verdad – La implicancia o Condicional.

Primer enunciado	**Segundo enunciado**	**La implicación en lenguaje natural**	**(A)**	**(B)**	**(A ⇒ B)**
La tierra es redonda	Cristóbal Colón descubrió América	Si la tierra es redonda entonces Cristóbal Colón descubrió América	V	V	V
Luis Miguel es un cantante	Cristóbal Colón descubrió África	Si Luis Miguel es un cantante entonces Cristóbal Colón descubrió África.	V	F	F
Neruda escribió «Condorito»	Los triángulos tienen tres lados	Si Neruda escribió «Condorito» entonces los triángulos tienen tres lados.	F	V	V
Júpiter es una estrella	El sol es un planeta	Si Júpiter es una estrella entonces el Sol es un planeta	F	F	V

Una proposición es **lógicamente equivalente** a otra cuando cada una de las asignaciones de valores de verdad a las proposiciones simples que las componen genera el mismo valor de verdad en ambas proposiciones.

En otras palabras **dos expresiones son lógicamente equivalentes si sus tablas de verdad son iguales**.

6.3.7 Tablas de Verdad – La Equivalencia o Bicondicional.

La equivalencia es una conectiva lógica representada con el símbolo **⇔** cuyo valor de verdad es **V** si las proposiciones a las que se aplica tienen el mismo valor de verdad y tiene un valor de verdad **F** si los valores de verdad de las proposiciones son diferentes. Podemos representar el comportamiento de la conectiva con la siguiente tabla de verdad:

α	β	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

En lenguaje natural esta conectiva está aproximadamente representada con la expresión «**si y solo si**» y se le suele denominar bicondicional o doble implicación.

6.4 Resultados de las Tablas de Verdad

Las tablas nos manifiestan los posibles valores de verdad de cualquier proposición, así como el análisis de la misma en función de las proposiciones que la integran, encontrándonos con los siguientes casos:

6.4.1 Verdad Indeterminada o Contingencia

Se entiende por verdad contingente, o verdad de hecho, aquella proposición que puede ser verdadera o falsa, según los valores de las
proposiciones que la integran. Sea el caso:

A ∧ (B v C)

1	2	3	4	5
A	B	C	BvC	A^(BvC)
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

6.4.2 Contradicción

Se entiende por **proposición contradictoria, o contradicción**, aquella proposición que en todos los casos posibles de su tabla de verdad su valor siempre es **F**. Dicho de otra forma, su valor **F** no depende de los valores de verdad de las proposiciones que la forman, sino de la forma en que están establecidas las relaciones sintácticas de unas con otras. Sea el caso:

A ∧ ~A o A ∧ ¬A

A	¬A	A^¬A
V	F	F
F	V	F

6.4.3 Tautologías

Se entiende por **proposición tautológica, o tautología**, aquella proposición que en todos los casos posibles de su tabla de verdad su valor siempre es **V**. Dicho de otra forma, su valor **V** no depende de los valores de verdad de las proposiciones que la forman, sino de la forma en que están establecidas las relaciones sintácticas de unas con otras. Sea el caso:

A V ~A o A V ¬A

A	¬A	A∨¬A
V	F	V
F	V	V

6.5 Aplicación

La Tabla de la verdad es una herramienta imprescindible en la recuperación de datos en las **bases de datos** como Internet con los motores de búsqueda o en una biblioteca con sus archivos informatizados. Asimismo se utilizan para programar simulaciones lógicas de **inteligencia artificial** con lenguajes propios. También en modelos matemáticos predictores: **meteorología, marketing** y otros muchos.

6.5.1 Lógica de Circuitos

La aplicación más importante de las tablas de verdad procede del hecho de que, interpretando los valores lógicos de verdad como 1 y 0 en el sentido:

Valor 1: corriente eléctrica

Valor 0: ausencia de dicha corriente.

Los valores de entrada o no entrada de corriente a través de un diodo puede producir una salida 0 o 1 según unas condiciones definidas como función según las tablas definidas anteriormente.

Así se establecen las siguientes funciones: AND, NAND, OR, XOR NOR, que se corresponden con las funciones definidas en las columnas, 8, 9, 2, 10 Y 15 respectivamente, y la función NOT.

En lugar de variables proposicionales consideramos gráficamente los posibles input como EA, EB, y los correspondientes outputs de SALIDA como 1, 0.

Esta aplicación hace posible la construcción de aparatos capaces de realizar estos cálculos a velocidades increíbles, llamadas por lo mismo computadoras.