Taller de Problemas

2.1.5 Ejercicios:

10) Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \rightleftarrows p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

a) Comprobando los 10 axiomas para el conjunto sobre el campo $\mathbb{R}$

1. Cierre bajo suma.

$$p_1(x) + p_2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(a_i + b_i)}_{c_i} x^i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in |p_n\rangle$$

2. La suma usual es conmutativa.

3. La suma usual es asociativa

4. $\exists$ un único elemento neutro $|0\rangle$. $0 \in |p_n\rangle \Rightarrow 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^{n-1}$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} 0x^i \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} 0x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} 0x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

5. $\exists$ un elemento simétrico $\forall\ p(x) \in |p_n\rangle$:

$-p(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_{n-1} x^{n-1}$, Está claro que $p(x) - p(x) = 0$ que es el elemento neutro.

6. Cerrado bajo la multiplicación por $k \in \mathbb{R}$

$$k \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \underbrace{ka_0}_{c_0} + \underbrace{ka_1}_{c_1} x + \cdots + \underbrace{ka_{n-1}}_{c_{n-1}} x^{n-1} \in |p_n\rangle$$

7. Asociativo bajo producto por escalares $k, \beta \in \mathbb{R}$

Si: $kp(x) = \sum_{i=0}^{n-1} ka_i x^i = p_1(x) \Rightarrow \beta p_1(x) = \beta \sum_{i=0}^{n-1} ka_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \beta k a_i x^i$

$$= (\beta k) \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in |p_n\rangle$$

8. Si $k, \beta \in \mathbb{R}$: $(k+\beta)|p_i\rangle = (k+\beta)\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = k\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \beta\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

9. $k(p_1 + p_2) = k\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right] = k\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + k\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$

10. Si $1 \in \mathbb{R}$: $1|p_i\rangle = 1\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = p_i$

b) No es espacio vect. porque no está cerrado por la multiplicación por un escalar $k \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo $\frac{1}{2}\cdot p_i \notin \mathbb{Z}(x)$.

c)

I. e.j: $p_1 = x^2 + 5$, $p_2 = -x^2 \Rightarrow p_1 + p_2 = 5 \in |p_0\rangle$, pero $p_1, p_2 \in |p_2\rangle$

$\Downarrow$ $n=1$ $\Downarrow$ $n=3$

$\Rightarrow$ No está cerrado bajo suma y por ende no es un subespacio vect.

II e.j $p_1 = x^4 + x$, $p_2 = -x^4 \Rightarrow p_1 + p_2 = x \in |p_1\rangle$, pero $p_1, p_2 \in |$

$\Rightarrow$ No está cerrado bajo suma y por ende no es un subesp. vectorial.

III. El polinomio 0 $P(x) = 0$ tiene grado -1, $-\infty$ o indefinido pero nunca mayor a 1. Por lo que el espacio no tiene elemento neutro y por ende no es un sub esp. vect.

IV Si es un subesp. vect.

2.2.4 ejercicio 6.1

a) Todas las propiedades requeridas para un espacio vectorial se cumplen porque la suma y multiplicación por escalar son exactamente las de $\mathbb{R}^4$.
Por tanto el conjunto de cuaterniones es un esp. vectorial de dimensión 4 sobre $\mathbb{R}$.

b) Sea $|b\rangle = b^0|q_0\rangle + b^i|q_i\rangle$ y $|r\rangle = r^0|q_0\rangle + r^j|q_j\rangle$

Si $|q_i\rangle \circ |q_j\rangle = -\delta_{ij}|q_0\rangle + \varepsilon_{ijk}|q_k\rangle$

Entonces

$$|d\rangle = |b\rangle \circ |r\rangle$$
$$= (b^0|q_0\rangle + b^i|q_i\rangle) \circ (r^0|q_0\rangle + r^j|q_j\rangle)$$
$$= b^0r^0|q_0\rangle + b^0r^j|q_j\rangle + b^ir^0|q_i\rangle + b^ir^j(|q_i| \circ |q_j\rangle)$$
$$= b^0r^0|q_0\rangle + b^0r^j|q_j\rangle + b^ir^0|q_i\rangle + b^ir^j(-\delta_{ij}|q_0\rangle + \varepsilon_{ijk}|q_k\rangle)$$

Por tanto:

$$|d\rangle = |b\rangle \circ |r\rangle \iff \begin{cases} d^0 = b^0r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r} \\ \vec{d} = r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r} \end{cases}$$

c) Del punto b) sabemos que

$$d^0 = b^0r^0 - b^ir^i, \qquad d^i = b^0r^i + r^0b^i + \varepsilon^i_{jk}\, b_j r_k$$

si tomamos:

$$a = b^0r^0 - b^ir^i, \qquad S^{(ij)} = \delta^{ij} = S^{(ji)}, \qquad A^{kij} = \varepsilon^i_{jk} = -A^{kji}$$

Donde S^{ij} es simétrico (trivialmente $\delta^{ij} = \delta^{ji}$)

A^{kij} es antisimétrico en j, k porque $\varepsilon^i_{jk} = -\varepsilon^i_{kj}$

$\Rightarrow$ La parte escalar sería: $a = b^0r^0 - b^ir^i = d^0$

La parte vectorial sería: $S^{(ij)}(b^0r^j + r^0b^j) + A^{kij}b^jr^k = \delta^{ij}(b^0r^j + r^0b^j)$

$+ \varepsilon^i_{jk}b^jr^k = b^0r^i + r^0b^i + \varepsilon^i_{jk}b^jr^k = d^i$.

Esto es así: $\forall$ $b \wedge r$.

d) · a que es la parte escalar, es:

$$a = b^0r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}$$

· $S^{(ij)}$ es la matriz identidad: $S^{(ij)} = \delta^{ij}$. Con ella el término $S^{(ij)}(b^0r^j + r^0b^j)$ da $b^0r^i + r^0b^i$ (cada componente i)

· $A^{[jk]i}$ son los coeficientes antisimétricos que producen el producto cruz:
$(\vec{b}\times\vec{r})^i = \varepsilon^i_{jk}b^jr^k$

Powered by CamScanner

- $b^0 r + r^0 b$ es un vector normal y $b \times r$ es un pseudovector.

Por lo que su suma no tendrá un solo comportamiento. No será puramente un vector ni un pseudovector.

e) Las matrices de Pauli satisfacen: $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$

Y queremos obtener la regla de los cuaterniones: $q_i q_j = -\delta_{ij} q_0 + \varepsilon_{ijk} q_k$

con q_0 la unidad.

Una identificación que funciona es:

$$q_0 \mapsto I \quad , \quad q_i \mapsto -i\sigma_i$$

Podemos verificarlo:

$$q_i q_j \mapsto (-i\sigma_i)(-i\sigma_j) = (-i)^2 \sigma_i \sigma_j = -\sigma_i \sigma_j$$

Usando la identidad de Pauli:

$$-\sigma_i \sigma_j = -(\delta_{ij} I + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k) = -\delta_{ij} I - i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

Si reescribimos $-i\sigma_k$ en términos de q_k: $-i\sigma_k \mapsto q_k$ entonces:

$$-\sigma_i \sigma_j = -\delta_{ij} q_0 + \varepsilon_{ijk} q_k$$

Queda comprobado.

- Para los $M_{2\times 2}$. Tomamos el cuaternión general:

$$Q = a^0 q_0 + a^1 q_1 + a^2 q_2 + a^3 q_3$$

Bajo la identificación $q_0 \mapsto I$, $q_i \mapsto -i\sigma_i$, la matriz asociada es

$$M = a^0 I - i(a^1\sigma_1 + a^2\sigma_2 + a^3\sigma_3)$$

Si se calcula la matriz se obtiene la forma

$$M = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$$

Powered by CamScanner

f) Si se calculan los productos de matrices obtenemos las relaciones quaterniónicas

1. $L_{q_1}^2 = L_{q_2}^2 = L_{q_3}^2 = -I_4$

2. $L_{q_1} L_{q_2} = L_{q_3}$ y $L_{q_2} L_{q_1} = -L_{q_3}$

En general $L_{q_i} L_{q_j} = -\delta_{ij} I_4 + \varepsilon_{ijk} L_{q_k}$, que es lo mismo que:

$$q_i q_j = -\delta_{ij} q_0 + \varepsilon_{ijk} q_k$$

Esto muestra que el producto de las matrices I_4, L_{q_1}, L_{q_1} y L_{q_2} reproduce el producto de los cuaterniones.

g) Vemos que:

$$|a\rangle^* \circ |b\rangle \Rightarrow \begin{cases} \text{componente escalar} = a^0 b^0 + \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \text{componente vectorial} = b^0(-\vec{a}) + a^0\vec{b} + (-\vec{a})\times\vec{b} \end{cases}$$

Una interpretación útil es tomar solo la parte escalar. Si hacemos eso:

1. Es simétrico; $\langle a|b\rangle = a^0 b^0 + \vec{a}\cdot\vec{b} = \langle b|a\rangle$
2. La segunda entrada es lineal.
3. Se cumple que $\langle a|a\rangle = (a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2 \geq 0$ y $= 0$ solo si $a = 0$

Por lo que de esta forma si es una buena definición.

i) Sabiendo que $\langle a|b\rangle = a^0 b^0 + \vec{a}\cdot\vec{b}$. $\Rightarrow \langle a|a\rangle = (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$

$\Rightarrow n(|a\rangle) = \|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$

Verificando las propiedades de norma:

1. $\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} \geq 0$ porque es la raíz de una suma de cuadrados.
2. $\|a\| = 0 \iff \langle a|a\rangle = 0 \iff a^0 = a^1 = a^2 = a^3 = 0 \iff |a\rangle = 0$
3. Para un λ del campo:

$$\|\lambda a\| = \sqrt{\langle \lambda a|\lambda a\rangle} = \sqrt{\bar{\lambda}\lambda\langle a|a\rangle} = |\lambda|\,\|a\|$$

4. La desigualdad Cauchy-Schwarz se cumple porque este producto interno

es el mismo que en IR^4

$\Rightarrow$ Esta norma es válida para el espacio de cuaterniones

j) Sea $|a\rangle = (a^0, \vec{a})$ y su conjugado $|a\rangle^* = (a^0, -\vec{a})$.

La norma al cuadrado es:

$$\|a\|^2 = (a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2$$

si calculamos $|a\rangle \circ |a\rangle^*$ usando la fórmula del producto

$$(b^0, \vec{b}) \circ (r^0, \vec{r}) = (b^0 r^0 - \vec{b} \cdot \vec{r}, \; r^0 \vec{b} + b^0 \vec{r} + \vec{b} \times \vec{r})$$

Con $b = a$ y $r = a^*$.

Parte escalar $\rightarrow$ $d^0 = a^0 \cdot a^0 - \vec{a} \cdot (-\vec{a}) = (a^0)^2 + \|\vec{a}\|^2 = \|a\|^2$

Parte vectorial $\rightarrow$ $\vec{d} = a^0 \vec{a} + a^0(-\vec{a}) + \vec{a} \times (-\vec{a}) = 0$

$\Rightarrow$ $|a\rangle \circ |a\rangle^* = \|a\|^2 |q_0\rangle$, dividiendo por $\|a\|^2$ obtenemos:

$$|a\rangle \circ \frac{|a\rangle^*}{\|a\|^2} = |q_0\rangle$$

k) Los cuaterniones forman un grupo bajo $\circ$:

1. Asociatividad (su producto es asociativo porque viene de una álgebra sobre IR^4)
2. Elemento identidad: $q_0 = 1$
3. Inversos: $\forall \; q_i \neq 0$ tiene un inverso $q_i^{-1} = q_i^* / \|q_i\|^2$.
4. El producto de dos cuaterniones es otro de ellos.

	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

2.3.6 ejercicios:

5) Hay demostrar primero que las matrices de Pauli son linealmente independiente

a)
$$c_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_0 + c_3 = 0 \\ c_0 - c_3 = 0 \end{array}\right\rangle c_0 = c_3 = 0$$

$\Rightarrow$ Son L.I

$$\left.\begin{array}{l} c_1 - ic_2 = 0 \\ c_1 + ic_2 = 0 \end{array}\right\rangle c_1 = c_2 = 0$$

- Ahora hay demostrar que estas matrices generan cualquier matriz hermítica 2x

$$\begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d\end{pmatrix} = c_0\sigma_0 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3$$

$$= \begin{pmatrix} c_0 + c_3 & c_1 - ic_2 \\ c_1 + ic_2 & c_0 - c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a = c_0 + c_3 \\ d = c_0 - c_3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} b + ic = c_1 - ic_2 \\ b - ic = c_1 + ic_2 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} b = c_1 \\ c = -c_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow c_0 = \frac{a+d}{2}, \quad c_3 = \frac{a-d}{2}$$

$$c_1 = b, \quad c_2 = -c$$

- Dado que siempre podemos encontrar estos coeficientes para cualquier matriz hermítica $\Rightarrow$ Las matrices de Pauli generan el esp. vectorial.

b) Se debe cumplir que $\langle\sigma_i|\sigma_j\rangle = 0$ para $i \neq j$

Como son hermíticas se cumple que $\sigma_i^\dagger = \sigma_i \Rightarrow \langle\sigma_i|\sigma_j\rangle = T_r(\sigma_i\sigma_j)$

- $\sigma_0\sigma_1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \Rightarrow T_r(\sigma_0\sigma_1) = 0$
- $\sigma_0\sigma_2 = \sigma_2 = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} \Rightarrow T_r(\sigma_0\sigma_2) = 0$
- $\sigma_0\sigma_3 = \sigma_3 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \Rightarrow T_r(\sigma_0\sigma_3) = 0$

- $\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3 \Rightarrow Tr(\sigma_1\sigma_2) = 0$

- $\sigma_1 \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2 \Rightarrow Tr(\sigma_1\sigma_3) = 0$

- $\sigma_2 \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1 \Rightarrow Tr(\sigma_2\sigma_3) = 0$

Note que $Tr(\sigma_j\sigma_i) = Tr(\sigma_i\sigma_j)$

c) Cualquier combinación lineal de $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3\}$ con coeficientes reales dará como resultado una matriz real:

$$c_0\sigma_0 + c_1\sigma_1 + c_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} c_0 + c_3 & c_1 \\ c_1 & c_0 - c_3 \end{pmatrix}$$

- La matriz σ_2 es una matriz imaginaria pura. Cualquier múltiplo real de σ_2 es también una matriz imaginaria pura:

$$c_2\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -ic_2 \\ ic_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada uno de estos conjuntos forman un subespacio.