

Departamento de Ingeniería Matemática
 MA3402-1 Estadística
 07 de agosto de 2019



Auxiliar 1: Modelos paramétricos, ECM y Recuerdos

Profesor: Felipe Tobar

Auxiliares: Diego Marchant, Francisco Vásquez

P1. Estudios relacionados con el comportamiento de ciertos bichos indican que estos tienden a organizarse al azar, linealmente, en un intervalo de longitud $\theta > 0$, a la derecha de un punto donde se ubica una feromona. Nos gustaría estimar el valor del parámetro θ . Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple (MAS) de la distancia de n bichos con respecto a la feromona.

- (a) Defina el modelo paramétrico correspondiente.
- (b) Considere el estimador $\hat{\theta} = 2\bar{X}_n$. ¿Será insesgado? Si no lo es, modifíquelo para que lo sea.
- (c) Ahora, considere el estimador $\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. ¿Será insesgado? Si no lo es, modifíquelo para que lo sea.
- (d) Calcule el ECM para cada uno de los estimadores y compárelos.

P2. Sea una muestra aleatoria simple (MAS) $X = (X_1, \dots, X_n)$ dada por $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \forall i = 1, \dots, n$. Con μ y σ parámetros desconocidos.

Considere

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Donde \bar{X}_n es el promedio de X . Muestre que S^2 es insesgado como estimador de σ^2 y calcule su varianza.

Considere

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Muestre que $\hat{\sigma}^2$ es sesgado como estimador de σ^2 , pero es asintóticamente insesgado.

Calcule su error cuadrático medio y concluya que:

$$ECM(\hat{\sigma}^2) = \mathbb{E}((\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2) < \mathbb{E}((S^2 - \sigma^2)^2) = \text{Var}(S^2) = ECM(S^2)$$

Considere

$$\hat{\sigma}_\rho^2 := \rho S^2$$

con $0 < \rho \in \mathbb{R}$ fijo

Calcule su error cuadrático medio y encuentre ρ^* tal que:

$$ECM(\hat{\sigma}_{\rho^*}^2) = \inf_{\rho > 0} ECM(\hat{\sigma}_\rho^2)$$

Muestre que $\hat{\sigma}_{\rho^*}^2$ es sesgado como estimador de σ^2 , pero es asintóticamente insesgado.