

Departamento de Ingeniería Matemática  
 MA3402-1 Estadística  
 07 de agosto de 2019



## Auxiliar 1: Modelos paramétricos, ECM y Recuerdos

**Profesor:** Felipe Tobar

**Auxiliares:** Diego Marchant, Francisco Vásquez

**P1.** Estudios relacionados con el comportamiento de ciertos bichos indican que estos tienden a organizarse al azar, linealmente, en un intervalo de longitud  $\theta > 0$ , a la derecha de un punto donde se ubica una feromona. Nos gustaría estimar el valor del parámetro  $\theta$ . Sea  $X = (X_1, \dots, X_n)$  una muestra aleatoria simple (MAS) de la distancia de  $n$  bichos con respecto a la feromona.

- Defina el modelo paramétrico correspondiente.
- Considere el estimador  $\hat{\theta} = 2\bar{X}_n$ . ¿Será insesgado? Si no lo es, modifíquelo para que lo sea.
- Ahora, considere el estimador  $\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ . ¿Será insesgado? Si no lo es, modifíquelo para que lo sea.
- Calcule el ECM para cada uno de los estimadores y compárelos.

**P2.** Sea una muestra aleatoria simple (MAS)  $X = (X_1, \dots, X_n)$  dada por  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \forall i = 1, \dots, n$ . Con  $\mu$  y  $\sigma$  parámetros desconocidos.

Considere

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Donde  $\bar{X}_n$  es el promedio de  $X$ . Muestre que  $S^2$  es insesgado como estimador de  $\sigma^2$  y calcule su varianza.

Considere

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Muestre que  $\hat{\sigma}^2$  es sesgado como estimador de  $\sigma^2$ , pero es asintóticamente insesgado.

Calcule su error cuadrático medio y concluya que:

$$ECM(\hat{\sigma}^2) = \mathbb{E}((\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2) < \mathbb{E}((S^2 - \sigma^2)^2) = \text{Var}(S^2) = ECM(S^2)$$

Considere

$$\hat{\sigma}_\rho^2 := \rho S^2$$

con  $0 < \rho \in \mathbb{R}$  fijo

Calcule su error cuadrático medio y encuentre  $\rho^*$  tal que:

$$ECM(\hat{\sigma}_{\rho^*}^2) = \inf_{\rho > 0} ECM(\hat{\sigma}_\rho^2)$$

Muestre que  $\hat{\sigma}_{\rho^*}^2$  es sesgado como estimador de  $\sigma^2$ , pero es asintóticamente insesgado.