Matemática 2

RESOLUCION SEGUNDO PARCIAL

1. **Sabiendo que $f'(x) = e^{x^2-1} \cdot (2x)$ y además que $f(1) = 5$ hallar la función $f(x)$**

Para obtener $f(x)$ debemos aplicar la integral a su derivada.

$$f(x) = \int f'(x)$$

$$= \int e^{x^2-1} \cdot (2x)$$

Método de sustitución

$$\int e^{\overset{j(x)}{x^2-1}} \cdot \overset{j'(x)}{(2x)}$$

$$\boxed{u = x^2 - 1 \qquad du = 2x}$$

$$= \int e^u \cdot du$$

$$= e^u + k$$

$$f(x) = e^{x^2-1} + k$$

Ahora debemos hallar $f(x)$ tal que se satisfaga $f(1) = 5$, por lo que debemos hallar k:

$$e^{1^2-1} + k = 5$$

$$e^0 + k = 5$$

$$1 + k = 5$$

$$k = 4$$

$$\therefore f \text{ tal que } f(1) = 5 \text{ es } f(x) = e^{x^2-1} + 4$$

2. **Dadas las funciones: $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ y $g(x) = x + 1$**

   (a) **Hallar el área encerrada por las gráficas de las funciones f y g**

   - Debemos igualar ambas funciones para así obtener sus respectivos puntos críticos.

$$f(x) = g(x)$$

$$-x^2 + 4x + 1 = x + 1$$

$$-x^2 + 3x = 0$$

$$x(-x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \wedge x_2 = 3$$

   - Hallamos nuestro intervalo de integración $I = [0, 3]$
   - Averiguamos cual función cumple ser techo y cual piso. Declaro un valor $u = 1$.

$$f(u) = -1^2 + 4 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$g(u) = 1 + 1 = 2$$

f(x) es techo y g(x) es piso

   - Hallamos el área:

$$\int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx$$

$$\int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx$$

$$= \int_0^3 \Big(-x^2 + 4x + 1 - (x + 1)\Big)\,dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx$$

$$= -1 \int_0^3 x^2 dx + 3 \int_0^3 x\,dx$$

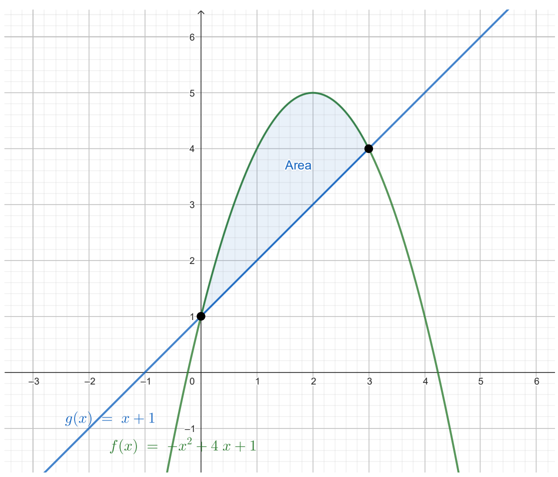
$$= -\frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^3$$

$$= -\frac{3^3}{3} + 3 \cdot \frac{3^2}{2} - 0$$

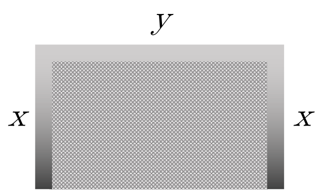
$$= -\frac{18}{2} + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore A = \frac{9}{2}$$

   (b) **Graficar las funciones f y g en el mismo plano de coordenadas y sombrear el área encerrada.**



3. **Se dispone de 8 metros de caño de metal para construir un arco de fútbol (el arco tendrá solamente dos caños verticales y un travesaño horizontal) y se desea que el arco sea lo más grande posible (en cuanto a área). "Hallar las medidas del arco. Recuerde graficar la situación, armar la función a optimizar y su dominio, clasificar los extremos que halle y responder al problema.**



- Primero debemos identificar nuestra ecuación principal: $\boldsymbol{2x+y=8\ mts}$.
- También debemos identificar nuestra función a optimizar: $\boldsymbol{f=x.y}$. Como no trabajamos con dos variables, debemos arreglar la función para trabajar con una sola variable. Para eso despejo la variable y de la ecuación primaria y obtengo $y=8-2x$. Lo reemplazo en la función:

$$f(x)=x\cdot(8-2x)\Rightarrow \boldsymbol{f(x)=8x-2x^2}$$

- Derivo $f(x)$ e igualo $f'(x)=0$ para obtener máximos/mínimos.

$$\boldsymbol{f'(x)=8-4x}$$

Igualo $f'(x)=0$

$$8-4x=0$$
$$\frac{4x}{4}=\frac{8}{4}$$
$$\boldsymbol{x=2}$$

- Es importante determinar el Dominio de la función para seguir trabajando. Como estamos buscando un área, sabemos que esta tiene que ser mayor a 0. Por consecuente x e y tienen que ser mayores a 0. Ya sabemos que nuestro limite inferior del intervalo es 0, pero, ¿el superior? Como no sabemos cuan grande tiene que ser x deberemos averiguarlo a través de y, sabiendo que $y>0$:

$$y>0$$
$$8-2x>0$$
$$8>2x$$
$$4>x$$
$$\boldsymbol{x<4}$$
$$\boldsymbol{Dom(f)=(0,4)}$$

- Con los datos recolectados, evaluamos el crecimiento de la función con el criterio de la primera derivada.

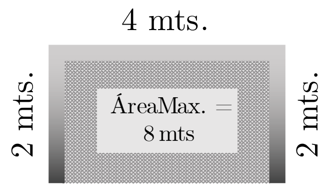
Intervalo	VP	$\boldsymbol{f'(VP)}$	$\boldsymbol{f}$ ...
(0,2)	1	>0	↗
(2,4)	3	<0	↘

En $x=2$ hay un máximo.

- Reemplazamos el valor encontrado de x en la ecuación principal y hallamos y:

$$2\cdot 2+y=8$$
$$y=4$$

RTA: Las medidas del arco se componen de dos caños verticales idénticos de 2 mts. y un travesaño de 4 mts., con un área máxima de 8 mts^2.



4. Calcular las siguientes integrales:

(a) $$\int_0^{\pi} \boldsymbol{cos(x)\cdot(5\ -\ 2x)dx}$$

Integramos **por partes** y definimos u y dv a través de la regla nemotécnica ILATE:

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{u=5-2x \longrightarrow du=-2dx} \\ \boldsymbol{dv=cos(x)dx \longrightarrow v=sen(x)} \end{array}}$$

$$(5-2x)\cdot sen(x)-\int sen(x)\cdot(-2)\cdot dx$$

$$(5-2x)\cdot sen(x)-(-2)\int sen(x)\cdot dx$$

$$(5-2x)\cdot sen(x)-(-2)(-\cos(x))$$

$$[(5-2x)\cdot sen(x)-2\cdot\cos(x)]_0^{\pi}$$

$$(5-2\pi)\cdot sen(\pi)-2\cdot\cos(\pi)-((5-2\cdot 0)\cdot sen(0)-2\cdot\cos(0))$$

$$0-2\cdot(-1)-(0-2\cdot 1)$$

$$2-(-2)=2+2=\boldsymbol{4}$$

(b) $$\int \boldsymbol{\frac{e^x+12x}{6x^2+e^x}dx}$$

Método de sustitución

$$\int \frac{e^x+\overset{h'(x)}{12x}}{\underbrace{6x^2+e^x}_{h(x)}}dx$$

$$\boxed{\boldsymbol{u=6x^2+e^x \qquad du=e^x+12x}}$$

$$=\int\frac{1}{u}\cdot du$$

$$=ln(|u|)+k$$

Reemplazamos u:

$$=ln(|6x^2+e^x|)+k$$

$$\boldsymbol{=ln(6x^2+e^x)+k}$$