

## Denominador con al menos un factor cuadrático que no se repite

Revisemos el siguiente ejercicio. Como puedes ver, la factorización ya está realizada: tenemos dos denominadores y uno de ellos es de segundo grado.

$$\int \frac{(x^2 - x - 3)dx}{(x^2 + 1)(x + 4)} =$$

Prosigamos con los pasos ya planteados, tomando en cuenta lo que hemos señalado respecto a los denominadores:

**Paso 1.** El denominador ya está factorizado, por lo tanto, tenemos:

$$(x^2 + 1)(x + 4)$$

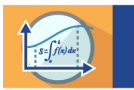
Observa que un factor es cuadrático, por lo tanto, planteamos nuestra suma de fracciones de la siguiente manera:

$$\frac{(x^2 - x - 3)}{(x^2 + 1)(x + 4)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{(x + 4)^2}$$

Proseguimos con el ejemplo trabajando sobre la suma parcial:

$A$ ,  $B$  y  $C$  son numeradores hipotéticos, es decir, los planteamos para determinar si existen o no. En caso de que así sea, sustituiremos la integral original por una suma de dos funciones.





**Paso 2.** Tomamos la suma de dos fracciones hipotéticas y procedemos a integrar en una sola expresión, muy similar a la original. Veamos:

$$\frac{Ax + b}{x^2 + 1} + \frac{c}{(x + 4)} = \frac{(Ax + b)(x + 4) + C(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x + 4)} = \frac{Ax^2 + 4Ax + Bx + 4B + Cx^2 + C}{(x^2 + 1)(x + 4)}$$

**Paso 3.** Igualamos la expresión resultante con la original:

$$\frac{(x^2 - x - 3)}{(x^2 + 1)(x + 4)} = \frac{Ax^2 + 4Ax + Bx + 4B + Cx^2 + C}{(x^2 + 1)(x + 4)}$$

**Paso 4.** Para determinar los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$  tendremos que construir un sistema de ecuaciones que incluya tanto a los elementos del numerador original como a los elementos del numerador hipotético.

- Para  $x^2$ :

De un lado tenemos el coeficiente 1, del otro  $A + C$ . Lo expresamos del siguiente modo:

$$1 = A + C$$

- Para  $x$ :

De un lado tenemos el coeficiente  $-1$ , del otro  $4A + B$ . Lo expresamos del siguiente modo:

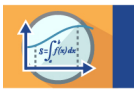
$$-1 = 4A + B$$

- Para el término con solo constantes:

De un lado tenemos el coeficiente  $-3$ , del otro  $4B + C$ . Lo expresamos del siguiente modo:

$$-3 = 4B + C$$





Así, podemos construir el siguiente sistema de ecuaciones:

(1)	$1 = A + C$
(2)	$-1 = 4A + B$
(3)	$-3 = 4B + C$

**Paso 5.** Encontramos las incógnitas:

En este caso es conveniente eliminar  $C$  en (1) y (3) restando:

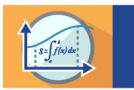
(1)	$1 = A + C$
(3)	$-1(-3 = 4B + C)$

Resulta la ecuación (4):

$$4 = A - 4B$$

Luego, relacionamos (2) y (4):

(2)	$-1 = 4A + B$
(4)	$4 = A - 4B$



Eliminamos B multiplicando (2) y (4):

(2)	$-4 = 16A + 4B$
(4)	$4 = A - 4B$

Sumando ambas ecuaciones resulta:

$$0 = 17A$$

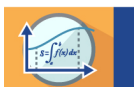
Por lo tanto,  $A = 0$ .

Nuestras ecuaciones quedan de la siguiente manera:

(4)	$4 = A - 4B$
Sustituyendo A en (4):	$4 = 0 - 4B$
Da como resultado:	$B = -1$

Sustituimos C en (1):

(1)	$1 = A + C$
Sustituyendo C en (1):	$1 = 0 + C$
Da como resultado:	$C = 1$



**Paso 6.** Una vez que encontramos las incógnitas buscadas, ya podemos expresar la integral original en función de la nueva expresión:

$$\frac{(x^2 - x - 3)}{(x^2 + 1)(x + 4)} = \frac{-1}{x^2 + 1} + \frac{1}{(x + 4)^2}$$

En la integral tendríamos que:

$$\int \frac{(x^2 - x - 3)dx}{(x^2 + 1)(x + 4)} = \int \left( \frac{-1}{x^2 + 1} + \frac{1}{(x + 4)^2} \right) dx = - \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{(x + 4)^2}$$

Aplicando las integrales correspondientes, tendríamos el siguiente resultado:

$$y = -\arctan x - \frac{1}{(x + 4)} + C$$

