Théorie des Graphes

Définitions

Graphe fini G = (V, E) est défini par :

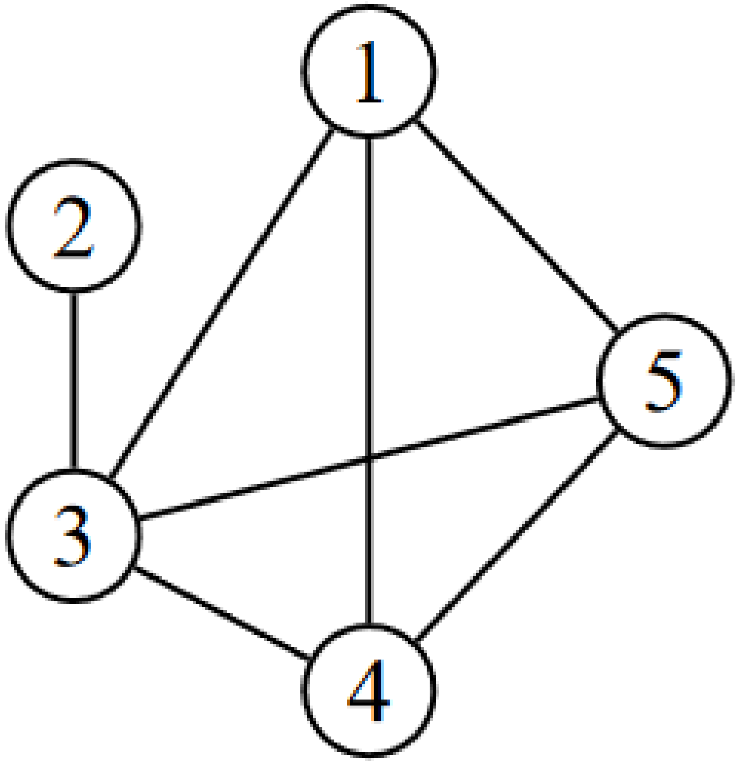
- l’ensemble fini V ={v1, v2, . . . , vn} de sommets (Vertices en anglais)
- l’ensemble fini E ={e1, e2, . . . , em} d’arêtes (Edges en anglais).

Adjacence :

Si l’arête e relie les sommets a et b, on dit que ces sommets sont adjacents.

Ordre d’un graphe :

nombre de sommets n de ce graphe.



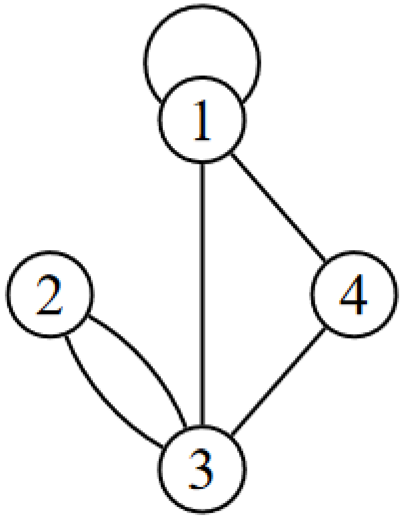
V={1,2,3,4}
E={2-3, 2-3, 3-5,3-4, 4-5, 1-5}

2 et 3 sont des sommets adjacents
2 et 5 ne sont pas adjacents
Ordre de ce graphe : 5

Graphe simple et multigraphe

Un graphe est simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

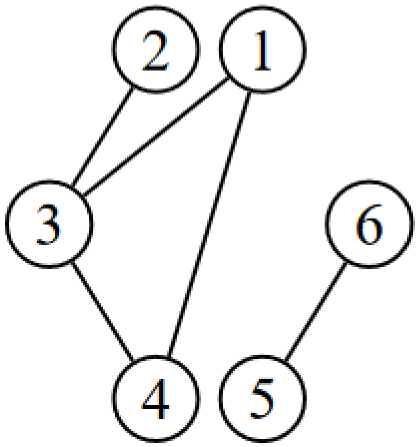
On peut imaginer des graphes avec une arête qui relie un sommet à lui-même (une boucle), ou plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets. On appellera ces graphes des multigraphes.



Multigraphe

Connexité

- Un graphe est connexe s'il est possible, à partir de n'importe quel sommet, de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes. Un graphe non connexe se décompose en composantes connexes. Sur le graphe ci-dessous, les composantes connexes sont {1, 2, 3, 4} et {5, 6}



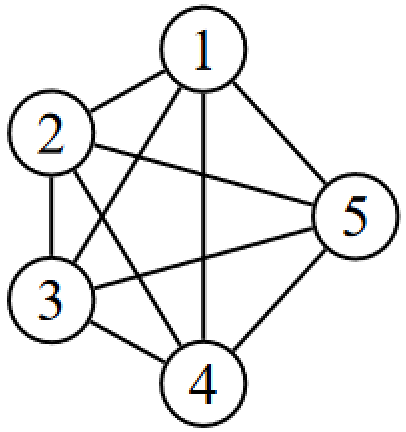
Graphe non connexe

$$V = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$E = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{3,4\},\{5,6\}\}$$

Complétude

Un graphe est complet si chaque sommet du graphe est relié directement à tous les autres

sommets



Graphe complet K_5

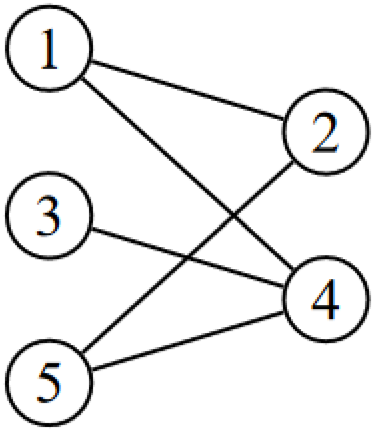
$$V = \{1,2,3,4,5\}$$
$$E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$$

Bipartite

Un graphe est biparti si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles X et Y ,

de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans X à un sommet dans Y

(dans l’exemple ci-dessous, on a X = {1, 3, 5} et Y = {2, 4}, ou vice versa)



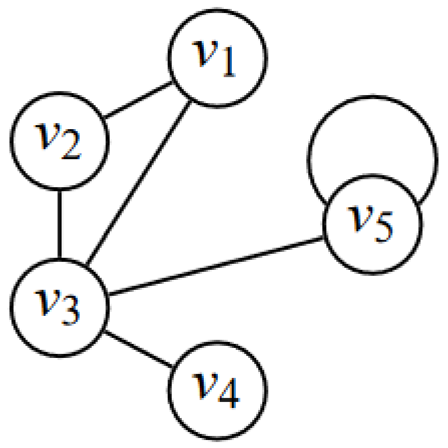
Graphe biparti

$$V = \{1,2,3,4,5\}$$
$$E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{4,5\}\}$$

Degré d'un sommet

- On appelle degré du sommet v, et on note d(v), le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.
- Attention ! Une boucle sur un sommet compte double
- Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets.

$$d(v_1) = 2$$
$$d(v_2) = 2$$
$$d(v_3) = 4$$
$$d(v_4) = 1$$
$$d(v_5) = 3$$



Eulérien

On appelle cycle eulérien d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G. Un graphe est dit eulérien s'il possède un cycle eulérien.

On appelle chaîne eulérienne d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G. Un graphe ne possédant que des chaînes eulériennes est semi-eulérien.

Plus simplement, on peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

Eulérien

Graphe eulérien : tous ses sommets sont de degré pair (sauf 2 max) . On peut faire un parcours

Cycle eulérien : tous ses sommets sont de degré pair

hamiltonien

On appelle cycle hamiltonien d’un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacun des sommets de G.

On appelle chaîne hamiltonienne d’un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacun des sommets de G. Un graphe ne possédant que des chaînes hamiltoniennes est semi-hamiltonien.

Règles à connaitre

– un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien ;

– si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet

doivent faire partie du cycle hamiltonien ;

– les graphes complets Kn sont hamiltoniens.

Théorème

Théorème 1.4 (Ore)

Soit G un graphe simple d’ordre $n > 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) > n$, alors G est hamiltonien.

Corollaire 1.5 (Dirac)

Soit G un graphe simple d’ordre $n > 3$. Si pour tout sommet x de G, on a $d(x) > n \;\; 2$,

alors G est hamiltonien

Représentations non graphiques d’un graphe

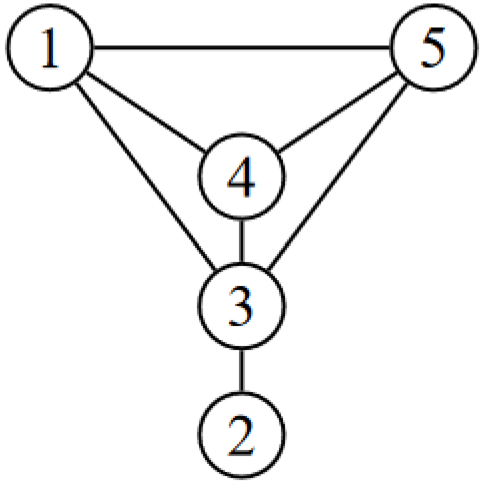
On peut représenter un graphe simple par une matrice d’adjacences. Une matrice (n×m)

est un tableau de n lignes et m colonnes. (i, j)

Dans une matrice d’adjacences, les lignes et les colonnes représentent les

sommets du graphe.
est adjacent au

sommet j .

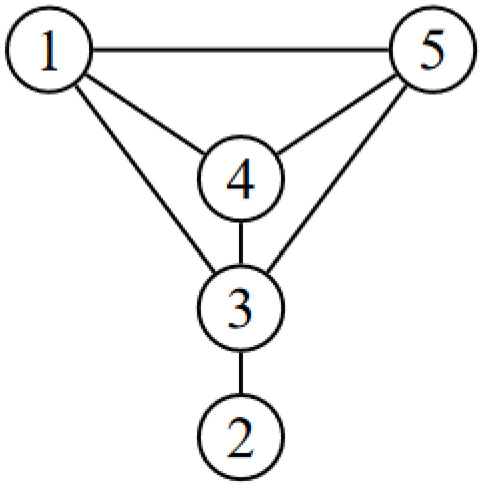


$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Listes d’adjacences

On peut aussi représenter un graphe simple en donnant pour chacun de ses sommets la liste

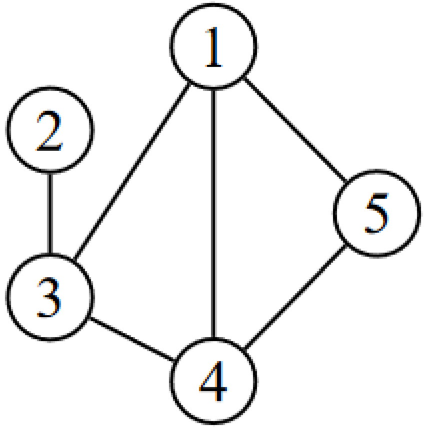
des sommets auxquels il est adjacent. Ce sont les listes d’adjacences



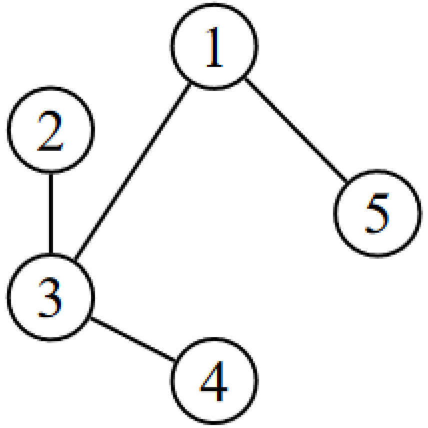
1 : 3, 4, 5
2 : 3
3 : 1, 2, 4, 5
4 : 1, 3, 5
5 : 1, 3, 4

ACM

Un arbre couvrant (aussi appelé arbre maximal) est un graphe partiel qui est aussi un arbre.



Graphe G



Un arbre couvrant

Coloration et nombre chromatique

La coloration des sommets d'un graphe consiste à affecter à tous les sommets de ce graphe une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Une coloration avec k couleurs est donc une partition de l'ensemble des sommets en k stables.

Le nombre chromatique du graphe G, noté $\gamma(G)$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de V en k sous-ensembles stables

Majoration

- $\gamma(G) \leq r + 1$, où r est le plus grand degré des sommets de G

Graphes orientés

En donnant un sens aux arêtes d'un graphe, on obtient un digraphe (ou graphe orienté).

Le mot « digraphe » est la contraction de l'expression anglaise « directed graph ».

Un digraphe fini G = (V, E) est défini par l'ensemble fini V = {v1, v2, . . . , vn} dont les élé- ments sont appelés sommets, et par l'ensemble fini E = {e1, e2, . . . , em} dont les éléments

sont appelés arcs.

degré

On note $d^+(v)$ le degré extérieur /sortant du sommet v, c’est-à-dire le nombre d’arcs ayant v comme extrémité initiale.

On note $d^-(v)$ le degré intérieur /entrants du sommet v, c’est-à-dire le nombre d’arcs ayant v comme extrémité finale.

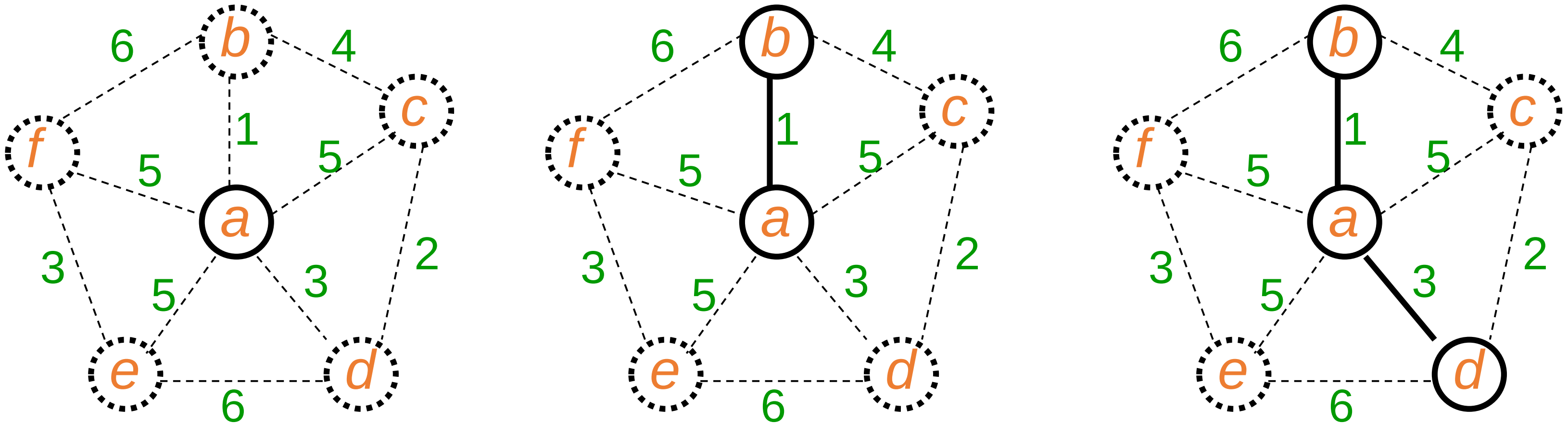
On définit le degré :

$d(v) = d^+(v) + d^-(v)$

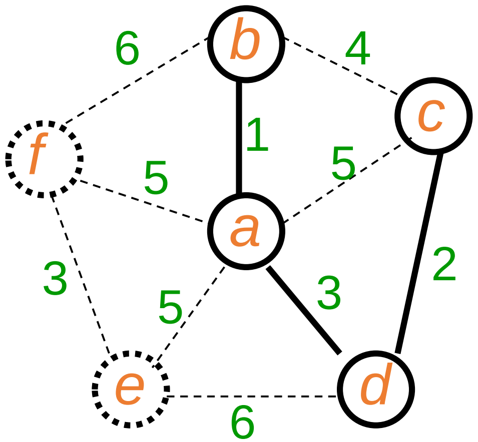
Méthode de Kruskall (1957)

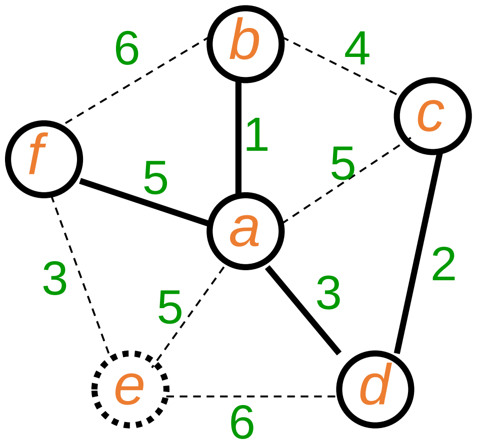
Calcul d'un ARCM :
faire grossir un sous-arbre jusqu'au recouvrement du graphe

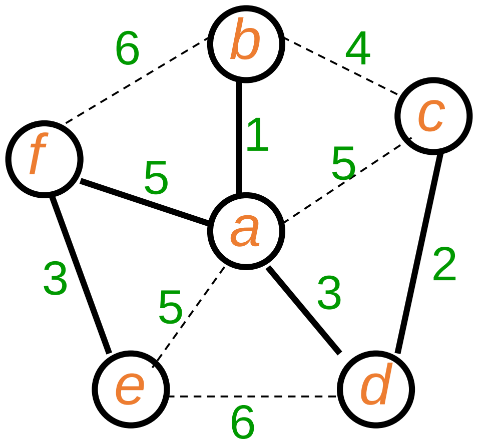
Exemple



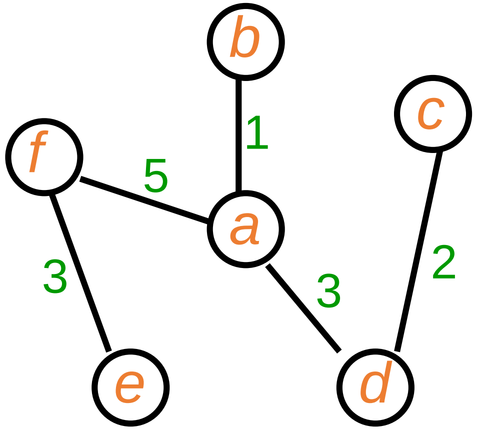
Exemple (suite)







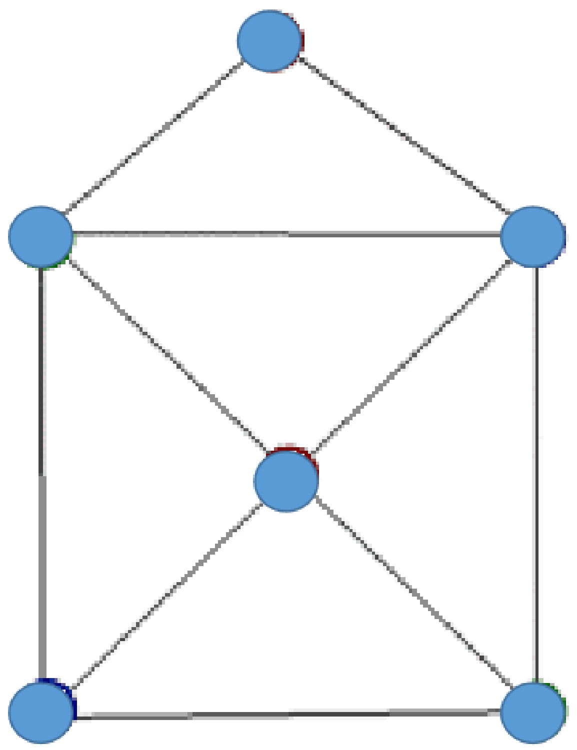
ARCM
coût = 14



Algorithme de Welsh Powell

$G = (S, A)$ $\quad S = \{ s_1, s_2, \ldots, s_n \}$
G sans boucle !

fonction coloration-séquentielle (G graphe) : entier ;
début
    pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire** {
        $c \leftarrow 1$;
        tant que il existe t adjacent à s_i avec $f(t) = c$ **faire**
            $c \leftarrow c + 1$;
        $f(s_i) \leftarrow c$;
    }
    retour max ($f(s_i)$, $i = 1, \ldots, n$) ;
fin

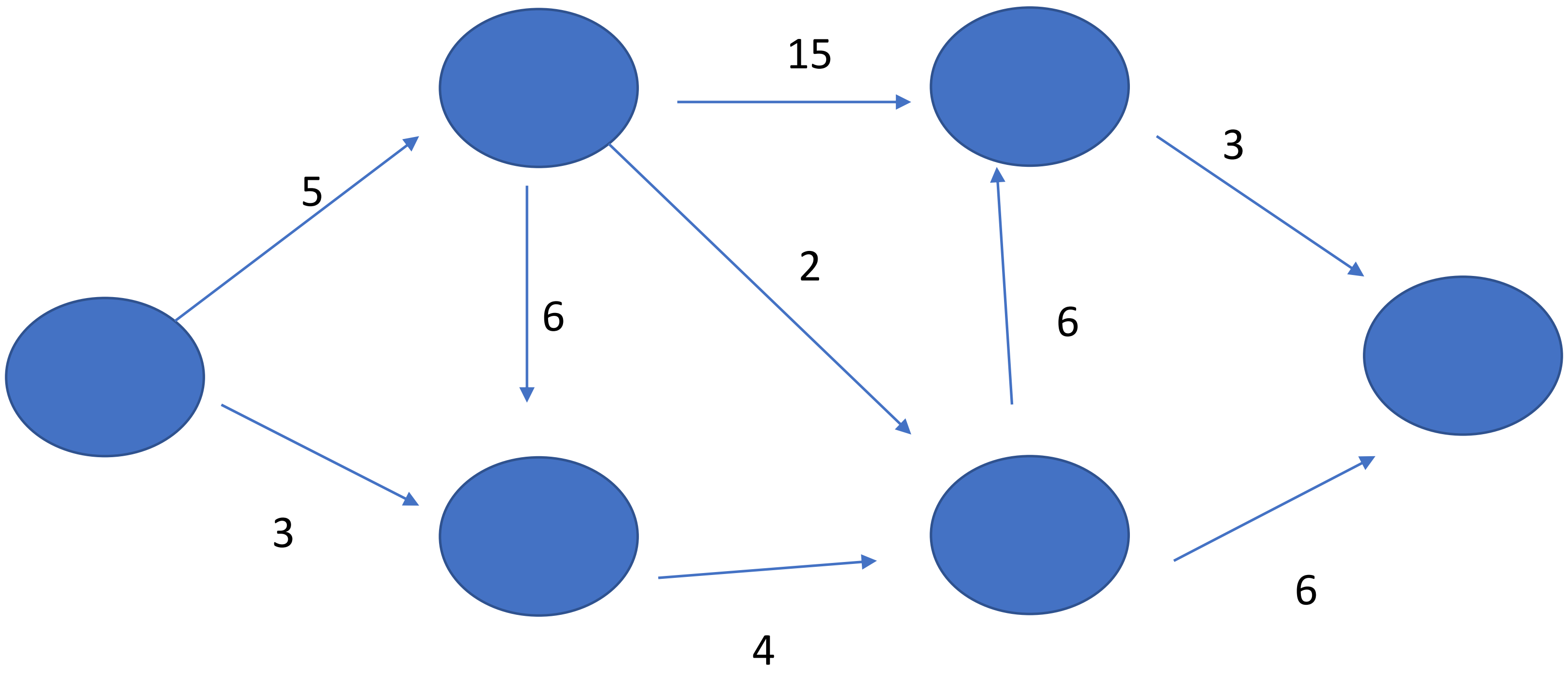


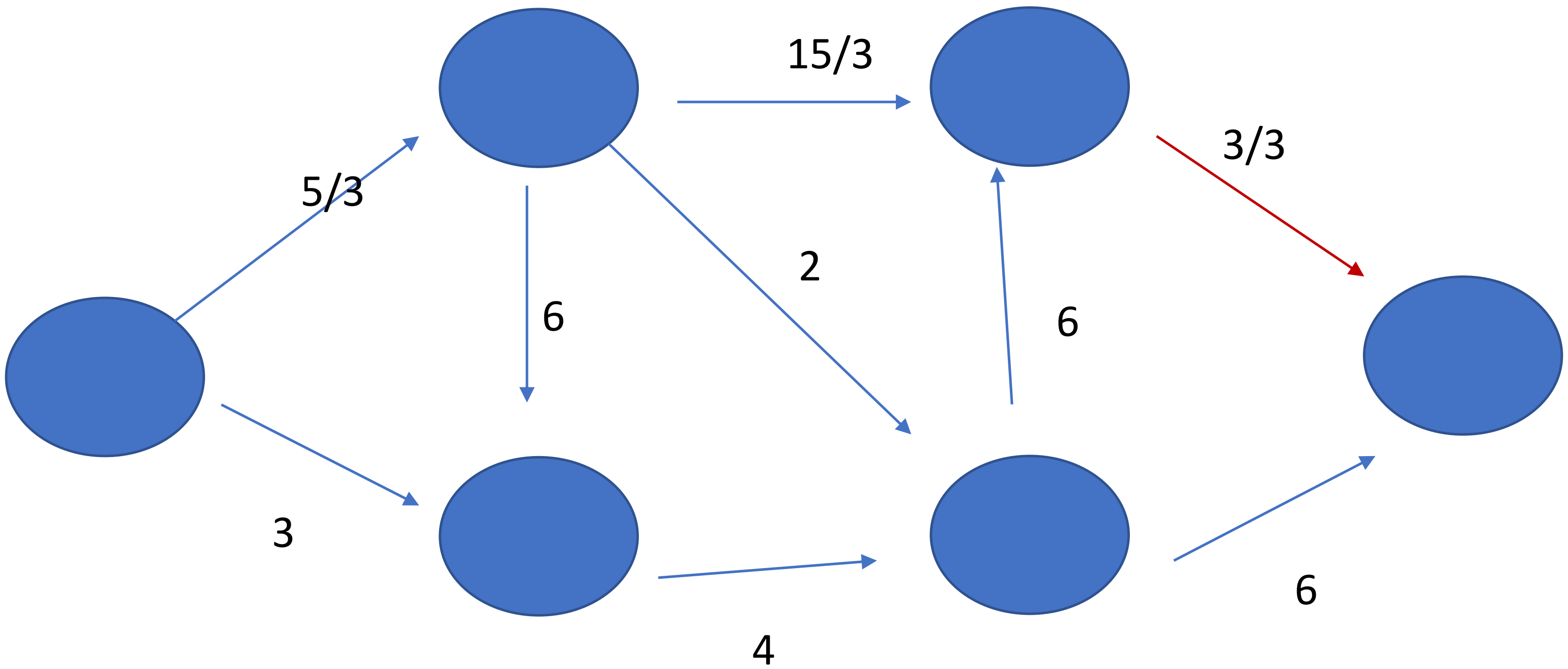
Temps d 'exécution : $O(n^2)$ Calcul de Chr (G) : $O(n^2\, n!)$
(appliquer la fonction à toutes les permutations de S)
Aucun algorithme polynomial connu !

Algorithme de Ford-Fulkerson

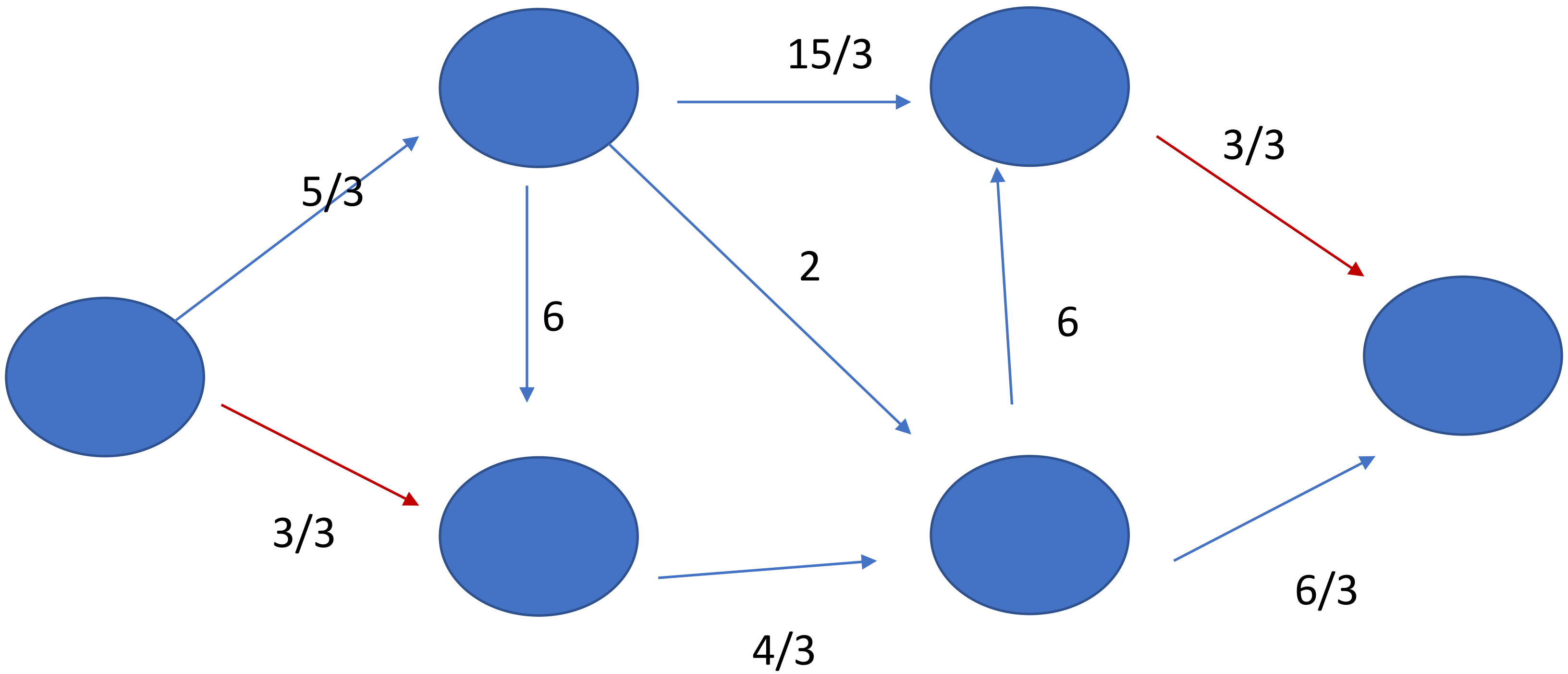
Notes :

- Si le vecteur de flot initial ainsi que les bornes sont entiers ou rationnels, l'algorithme se terminera en un nombre fini d'itérations.
- Méthode du plus court chemin d'augmentation : parmi tous les chemins non bloqués, choisir comme chemin d'augmentation celui comportant le moins d'arcs.
- Si cette méthode est utilisée, l'algorithme convergera toujours.
- De plus, même avec des données entières, cette méthode est plus performante.

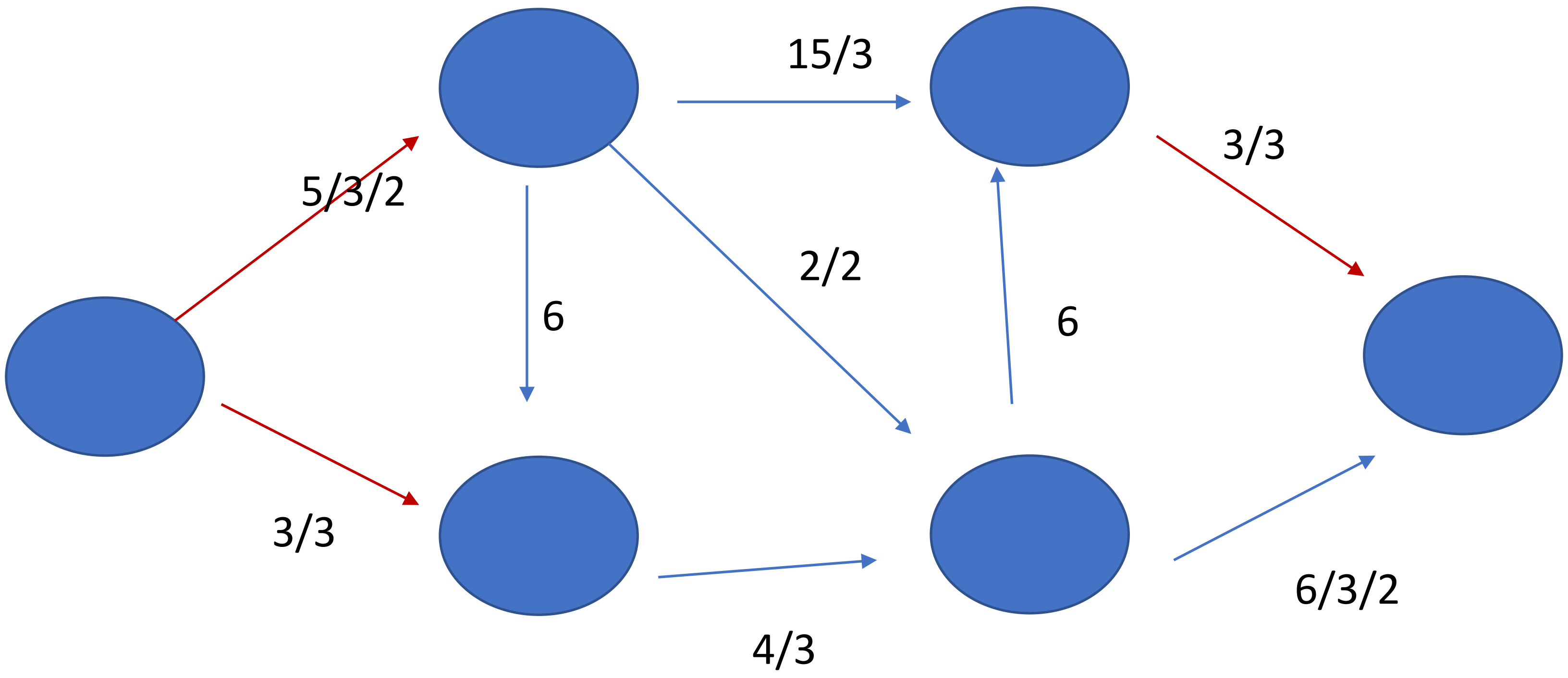

15
5
3
6
2
6
3
4
6



15/3
3/3
5/3
2
6
6
3
6
4



15/3
5/3
3/3
6
2
6
3/3
4/3
6/3



Arrêt de l'algo par saturation : 8 de flot max