TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MORELIA

PROGRAMACIÓN AVANZADA

ANÁLISIS DE SEÑALES PERIODICAS

Dr. José Luis Monroy Morales

Cuando el periodo de la función periódica es igual a 2π, v_o se puede expresar con la serie de Fourier:

$$v_o = V_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega t$$

Donde

[1] Una señal es periódica si $f(t) = f(t + nT)$, donde *T* es el periodo y *n* = ±1, ±2, ±3, …

$$V_o = \frac{1}{T}\int_0^T v_o \cdot d\omega t$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T v_o \cdot \cos\ n\omega t \cdot d\omega t$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T v_o \cdot \mathrm{sen}\ n\omega t \cdot d\omega t$$

Si el periodo de la función es diferente que 2π, entonces (caso general)

$$v_o = V_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_r t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{sen}\, n\omega_r t$$

Donde $\omega_r = \frac{2\pi}{T_r}\omega$; T_r es el periodo de la función en radianes

$$V_o = \frac{1}{T_r}\int_0^{T_r} v_o \cdot d\omega t$$
$$a_n = \frac{2}{T_r}\int_0^{T_r} v_o \cdot \cos\ n\omega_r t \cdot d\omega t$$
$$b_n = \frac{2}{T_r}\int_0^{T_r} v_o \cdot \mathrm{sen}\ n\omega_r t \cdot d\omega t$$

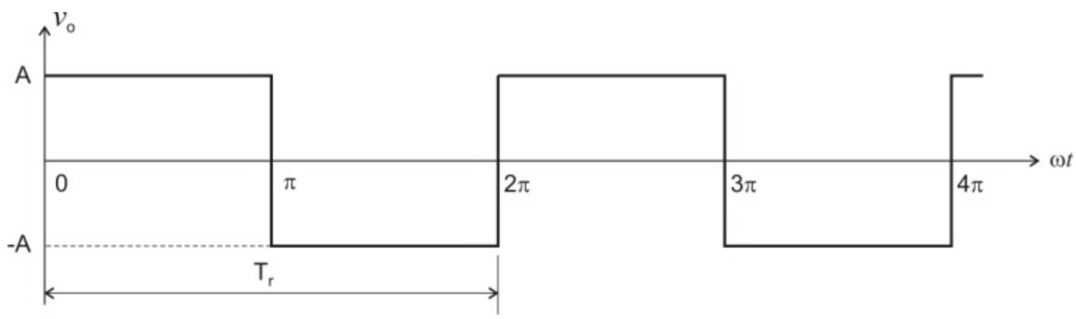
Si la función periódica tiene simetría de media onda[2], entonces no hay componente de frecuencia 0 ni armónicas pares, y el análisis de las armónicas impares se puede hacer usando solamente medio ciclo de la función:

$$a_n = \frac{2}{T_r/2}\int_0^{T_r/2} v_o \cdot \cos\ n\omega_r t \cdot d\omega t \qquad n = 1,\ 3,\ 5,\ ...$$
$$b_n = \frac{2}{T_r/2}\int_0^{T_r/2} v_o \cdot \mathrm{sen}\ n\omega_r t \cdot d\omega t \qquad n = 1,\ 3,\ 5,\ ...$$

Onda cuadrada con simetría de media onda

---

[2] Una señal periódica tiene simetría de media onda si $f(t) = -\left(f(t) + \frac{T}{2} \right)$



En este caso $T_r = 2\pi$, por lo tanto $\omega_r = \omega$

No hay componente armónica de frecuencia cero, no hay armónicas pares y las impares se calculan usando solo medio ciclo de la función:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} A\cdot \cos\ n\omega t \cdot d\omega t = \frac{2A}{n\pi}\left[\mathrm{sen}\, n\pi - \mathrm{sen}\, 0\right] = 0 \qquad \text{para todo } n$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} A\cdot \mathrm{sen}\ n\omega t \cdot d\omega t = \frac{2A}{n\pi}\left[-\cos n\pi + \cos 0\right] = \frac{4A}{n\pi} \qquad n = 1,\ 3,\ 5\ldots$$

Por lo tanto

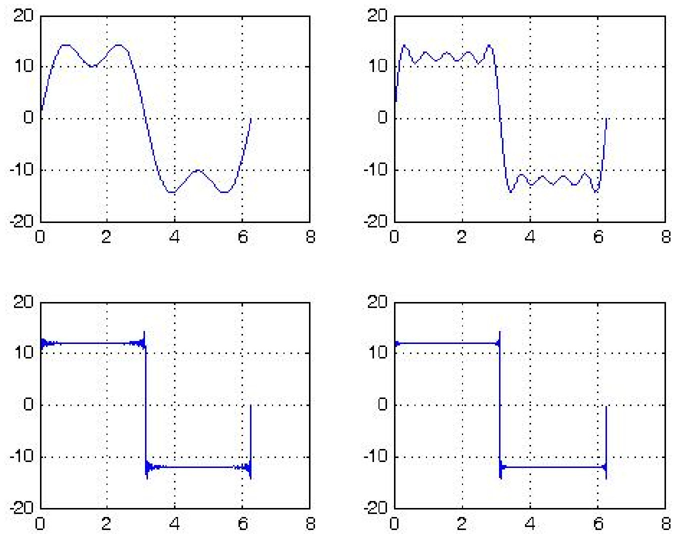
$$v_o = \sum_{n=1,\,3,\,5\,\ldots}^{\infty} b_n \mathrm{sen}\, n\omega t$$

Programa en MATLAB

```
clear
A=12;                     % Amplitud del voltaje vo
N=input('Número de armónicas = ')
n=1:2:N;                  % Vector de índices de armónicas impares
bn=4*A./(n*pi);           % Vector de amplitudes de las componentes seno
wt=0:0.0001:2*pi;         % Vector wt
tic                       % Se guarda el tiempo actual
for k=1:length(wt)        % Cálculo del vector vo
vo(k)=0;                  % Se inicializa el elemento k
for h=1:length(n)         % Se calculan los elementos del vector vo
vo(k)=vo(k)+bn(h)*sin(n(h)*wt(k)); % Sumatoria de las componentes
                                   % armónicas de cada elemento de vo
end
end

% vo=bn*sin(n'*wt);
```

```
Toc                        % Se muestra el tiempo trascurrido desde el TIC
plot(wt,vo), grid
```



Formas de onda obtenidas con N=3, 9, 99 y 399

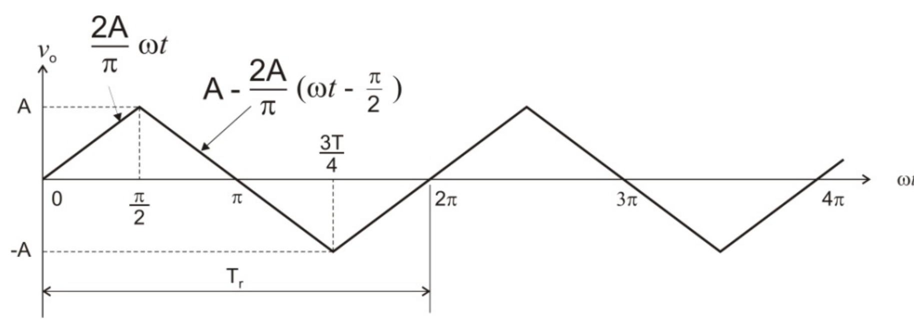
Tiempo de ejecución con `for`

N	Tiempo, segundos
3	3.787495
9	3.824645
99	4.128018
399	5.111036

Tiempo de ejecución sin `for`

N	Tiempo, segundos
3	0.010342
9	0.025532
99	0.193619
399	0.774756

Onda triangular con simetría de media onda



En este caso $T_r = 2\pi$, por lo tanto $\omega_r = \omega$

No hay componente armónica de frecuencia cero, no hay armónicas pares

Se define la función en la mitad de un ciclo

Para $0 < \omega t < \pi/2$:

$$v_o = \frac{A}{\pi/2}\,\omega t = \frac{2A}{\pi}\omega t$$

Para $\pi/2 < \omega t < \pi$:

$$\frac{v_o - A}{\omega t - \frac{\pi}{2}} = -\frac{A}{\pi/2}$$

$$v_o = -\frac{2A}{\pi}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + A$$

Definiendo $m = \dfrac{2A}{\pi}$, las armónicas impares se calculan como

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} m\cdot\omega t\cdot\cos\, n\omega t\cdot d\omega t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-m\cdot\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + A\right)\cdot\cos\, n\omega t\cdot d\omega t\right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} m\cdot\omega t\cdot\text{sen}\, n\omega t\cdot d\omega t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-m\cdot\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + A\right)\cdot\text{sen}\, n\omega t\cdot d\omega t\right] = \frac{4m}{\pi n^2}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}$$

Como $V_o = 0$, entonces

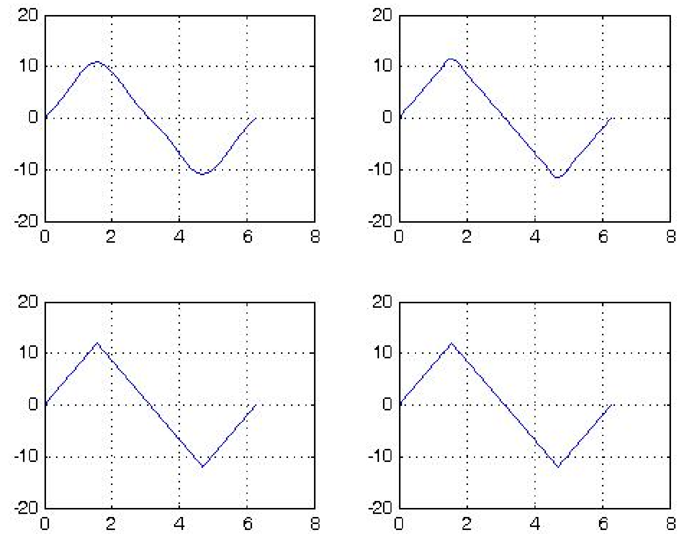
$$v_o = \sum_{n=1,\,3,\,5\,...}^{\infty} b_n \text{sen}\, n\omega t$$

Programa en MATLAB

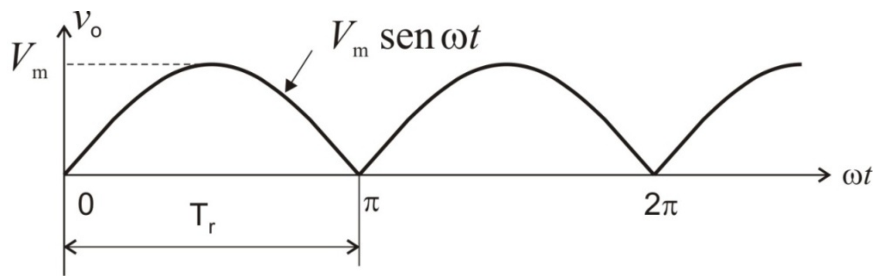
```
clear
A=12;                    % Amplitud del voltaje vo
m=2*A/pi;                % Pendiente de la onda
N=input('Número de armónicas = ')

n=1:2:N;                            % Vector de índices de armónicas impares
bn=4*m./(pi*n.^2).*sin(n*pi/2);     % Vector de componentes seno
wt=0:0.0001:2*pi;                   % Vector wt
vo=bn*sin(n'*wt);                   % Vector vo
plot(wt,vo),grid
```

Formas de onda obtenidas con N=3, 9 , 99, 399



Onda senoidal positiva (rectificador monofásico de onda completa)



El periodo de la función es $T_r = \pi$. Por lo tanto la $\omega_r = 2\omega$, donde ω es la frecuencia del voltaje de CA de entrada al rectificador dado por V_m *sen* ωt.

La función no tiene simetría de media onda, por lo tanto tendrá armónicos pares e impares.

La componente de frecuencia cero o valor promedio de la función es

$$V_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V_m \operatorname{sen}\omega t \cdot d\omega t = \frac{2V_m}{\pi}$$

Las armónicas para n = 1, 2, 3, 4, … se calculan como

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi V_m \operatorname{sen}\omega t\cdot\cos\ n\omega t\cdot d\omega t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi V_m \operatorname{sen}\omega t\cdot\cos\ 2n\omega t\cdot d\omega t =$$

$$\frac{2V_m}{\pi}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(\omega t+2n\omega t)+\operatorname{sen}(\omega_0 t-2n\omega t)}{2}\cdot d\omega t = \frac{V_m}{\pi}\left[-\frac{\cos(1+2n)\omega t}{1+2n}-\frac{\cos(1-2n)\omega t}{1-2n}\right]_0^\pi =$$

$$= -\frac{V_m}{\pi}\left[\frac{\cos(1+2n)\pi-\cos 0}{1+2n}+\frac{\cos(1-2n)\pi-\cos 0}{1-2n}\right] = -\frac{V_m}{\pi}\left[\frac{-2}{1+2n}+\frac{-2}{1-2n}\right] = -\frac{4V_m}{(4n^2-1)\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi V_m \operatorname{sen}\omega t\cdot\operatorname{sen}\ n\omega t\cdot d\omega t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi V_m \operatorname{sen}\omega t\cdot\operatorname{sen}\ 2n\omega t\cdot d\omega t =$$

$$\frac{2V_m}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(\omega t-2n\omega t)-\cos(\omega t+2n\omega t)}{2}\cdot d\omega t = \frac{V_m}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(1-2n)\omega t}{1-2n}-\frac{\operatorname{sen}(1+2n)\omega t}{1+2n}\right]_0^\pi$$

$$\frac{V_m}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(1-2n)\pi-\operatorname{sen}0}{1-2n}-\frac{\operatorname{sen}(1+2n)\pi-\operatorname{sen}0}{1+2n}\right] = 0$$

Por lo tanto

$$v_o = V_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\ 2n\omega t$$

Programa en MATLAB

```
clear
Vm=12*sqrt(2);                    % Amplitud del voltaje vo
N=input('Número de armónicas = ')
Vo=2*Vm/pi;                       % Componente de frecuencia 0
n=1:N;                            % Vector de índices de armónicas
an=-4*Vm./((4*n.^2-1)*pi);        % Vector de componentes coseno
wt=0:0.0001:2*pi;                 % Vector wt
vo=Vo+an*cos(2*n'*wt);            % Vector vo
plot(wt,vo),grid
```

Forma de onda obtenida con N=99