MA0501 – Tarea 3

Diego Alberto Vega Víquez - C38367 — José Carlos Quintero Cedeño - C26152 — Gabriel Valverde Guzmán - C38060

2025-09-07

Tabla de contenidos

Ejercicio 1	2
Ejercicio 2	10
Ejercicio 3	11
Ejercicio 4	14
Ejercicio 5	16
Ejercicio 6	17
Ejercicio 7	19
Ejercicio 8	20
Ejercicio 9	22
Ejercicio 10	22
Ejercicio 11	24
Ejercicio 12	25
Ejercicio 13	27
Ejercicio 14	28
Ejercicio 15	30
Ejercicio 16	30
Ejercicio 17	30
Ejercicio 18	31
Ejercicio 19	34
Ejercicio 20	40
Ejercicio 21	47
Ejercicio 22	48
Ejercicio 23	50

Ejercicio 1

i Instrucción

Desarrolle funciones iterativas y recursivas en R para los algoritmos de los métodos de:

- iteración de punto fijo,
- bisección,
- método de Newton-Raphson,
- método de la secante, y
- método de Steffensen vistos en clase,

y el método Regula-Falsi que se describe en el ejercicio 11.

Solución

Metodo de punto fijo

```
punto.fijo <- function(p0, tol, n, g) {</pre>
  i <- 1
  p0_temp <- p0
  while (i <= n) {
    p \leftarrow g(p0_{temp})
    if (abs(p - p0_temp) < tol) {</pre>
      return(list("valor" = p, "iteraciones" = i))
    }
    i <- i + 1
    p0_temp <- p
  }
  return(NULL)
}
punto.fijo.rec <- function(p0, tol, n, g) {</pre>
  p1 <- g(p0)
  if (abs(p1 - p0) < tol || n < 1) {
    if (n >= 1) {
      return(p1)
    else{
      return(Inf)
```

```
} else{
    return(punto.fijo.rec(p1, tol, n - 1, g))
}

f1 <- function(x) sqrt(1 + 1/x)

punto.fijo(1, 1e-8, 20, f1)

$valor
[1] 1.324718

$iteraciones
[1] 13

punto.fijo.rec(1, 1e-8, 20, f1)

[1] 1.324718</pre>
```

Método de bisección

```
biseccion <- function(a, b, tol, n, g) {</pre>
  i <- 1
  a1 <- a
  b1 <- b
  if (g(a) * g(b) > 0) {
   return("No se cumplen las hipotesis")
  }
  else{
    while (i <= n) {
      x \leftarrow (a1 + b1) / 2
      if (g(a1) * g(x) > 0) {
       a1 <- x
      }
      else{
       b1 <- x
      if (abs(b1 - a1) < tol) {</pre>
```

```
return(list("valor" = x, "iteraciones" = i))
      }
     i <- i + 1
    }
   return(NULL)
 }
}
biseccion.rec <- function(a, b, tol, n, g) {</pre>
  a1 <- a
 b1 <- b
  x < - (a + b) / 2
  if (abs(b1 - a1) < tol || n < 1) {</pre>
   if (n >= 1) {
    return(x)
   }
   else{
    return(x)
   }
  }
  else {
   if (g(a) * g(x) > 0) {
     return(biseccion.rec(x, b1, tol, n - 1, g))
   }
   else {
     return(biseccion.rec(a1, x, tol, n - 1, g))
   }
 }
f \leftarrow function(x) (cos(x))^2 - 2 * sin(x)
biseccion(0, 1, 1e-8, 100, f)
```

\$valor

[1] 0.4270786

```
$iteraciones
```

[1] 27

```
biseccion.rec(0, 1, 1e-8, 100, f)
```

[1] 0.4270786

Método de Newton-Raphson

```
newton.raphson <- function(x0, tol, n, f, df) {</pre>
  i <- 1
  x0_{temp} <- x0
  while (i \leq n) {
    x \leftarrow x0_{temp} - f(x0_{temp}) / df(x0_{temp})
    if (abs(x - x0_temp) < tol) {
      return(list("valor" = x, "iteraciones" = i))
   i <- i + 1
   x0_{temp} < - x
  }
  return(NULL)
}
newton.raphson.rec <- function(x0, tol, n, f, df) {</pre>
  x0_{temp} <- x0
  x \leftarrow x0_{temp} - f(x0_{temp}) / df(x0_{temp})
  if (abs(x - x0) < tol || n < 1) {
    if (n >= 1) {
      return(x)
    }
    else{
      return(NULL)
    }
  }
  else{
    return(newton.raphson.rec(x, tol, n - 1, f, df))
  }
}
```

```
f <- function(x) (cos(x))^2 - 2 * sin(x)

df <- function(x) - 2 * cos(x) * sin(x) - 2 * sin(x)

newton.raphson(0.5, 1e-8, 100, f, df)

$valor
[1] 0.4270786

$iteraciones
[1] 36

newton.raphson.rec(0.5, 1e-8, 100, f, df)</pre>
```

[1] 0.4270786

```
Método de la secante
```

```
secante <- function(x0, x1, tol, n, f) {</pre>
  i <- 2
 x0.temp <- x0
 x1.temp <- x1
 while (i <= n) {
   x \leftarrow x1.temp - ((x0.temp - x1.temp) * f(x1.temp)) / (f(x0.temp) - f(x1.temp))
   if (abs(x - x0.temp) < tol) {
      return(list("valor" = x, "iteraciones" = i))
   x0.temp <- x1.temp
   x1.temp <- x
    i <- i + 1
  }
 return(NULL)
}
secante.rec <- function(x0, x1, tol, n, f) {</pre>
 x \leftarrow x1 - ((x0 - x1) * f(x1)) / (f(x0) - f(x1))
 if (abs(x - x0) < tol || n < 1) {
    if (n >= 1) {
      return(x)
    }
```

```
else{
    return(NULL)
}

}
else{
    return(secante.rec(x1, x, tol, n - 1, f))
}

g <- function(x) cos(x) - x^2

secante(0, 1, 1e-8, 100, g)

$valor
[1] 0.8241323

$iteraciones
[1] 8

secante.rec(0, 1, 1e-8, 100, g)</pre>
```

[1] 0.8241323

Método de Steffensen

```
steffensen <- function(x0, tol, n, f) {
    i <- 2
    x0.temp <- x0
    while (i <= n) {
        x1 <- f(x0.temp)
        x2 <- f(x1)
        x <- x0.temp - (x1 - x0.temp)^2 / (x2 - 2 * x1 + x0.temp)
        if (abs(x - x0.temp) < tol) {
          return(list("valor" = x, "iteraciones" = i))
        }
        i <- i + 1
        x0.temp <- x
    }
    return(NULL)</pre>
```

```
}
steffensen.rec <- function(x0, tol, n, f) {</pre>
  x1 \leftarrow f(x0)
  x2 < - f(x1)
  x < -x0 - (x1-x0)^2/(x2-2*x1+x0)
  if(abs(x - x0) < tol || n < 1){
    if(n>=1){
      return(x)
    }
   else{
     return(NULL)
    }
  }
  else{
    return(steffensen.rec(x, tol, n-1, f))
  }
}
f1 \leftarrow function(x) sqrt(1 + 1/x)
steffensen(1, 1e-8, 100, f1)
$valor
[1] 1.324718
$iteraciones
[1] 5
steffensen.rec(1, 1e-8, 100, f1)
[1] 1.324718
Método Regula Falsi
regula.falsi <- function(a,b, tol, n, f){</pre>
  i <- 1
  a.temp <- a
  b.temp <- b
```

```
while (i <= n) {
    x \leftarrow (a.temp*f(b.temp) - b.temp*f(a.temp))/(f(b.temp) - f(a.temp))
    if(f(a.temp)*f(x) > 0){
      a.temp <- x
    }
    else{
      b.temp <- x
    if(abs(b.temp-a.temp) < tol) {</pre>
      return(list("valor" = x, "iteraciones" = i))
    i <- i + 1
  }
  return(NULL)
}
regula.falsi.rec <- function(a, b, tol, n, f) {</pre>
  a.temp <- a
  b.temp <- b
  x \leftarrow (a.temp*f(b.temp) - b.temp*f(a.temp))/(f(b.temp) - f(a.temp))
  if(abs(b.temp-a.temp)<tol || n<1){</pre>
    if(n>=1){
      return(x)
    }
    else{
      return(NULL)
    }
  }
  else{
    if(f(a)*f(x) > 0){
      return(regula.falsi.rec(x, b.temp, tol, n-1, f))
    }
    else{
      return(regula.falsi.rec(a.temp, x, tol, n-1, f))
    }
  }
```

```
f <- function(x) (cos(x))^2 - 2 * sin(x)

regula.falsi(0, 1, 1e-8, 100, f)

$valor
[1] 0.4270786

$iteraciones
[1] 6

regula.falsi.rec(0, 1, 1e-8, 100, f)</pre>
```

Ejercicio 2

[1] 0.4270786

i Instrucción

Use el procedimiento Bisección para resolver las siguientes ecuaciones, con por lo menos 5 dígitos significativos. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente R.

```
a) \cos^2(x) = 2\sin(x) para 0 \le x \le 1
```

b)
$$-x^3 + x + 1 = 0$$
 para $1 \le x \le 2$

Para cada una de las ecuaciones anteriores, de acuerdo con los teoremas de error vistos en clase, calcule el número de iteraciones necesarias para obtener la precisión pedida, y compare estos resultados con los obtenidos con \mathbf{R} .

Solución

```
a)
```

```
f <- function(x) cos(x)^2 - 2*sin(x)
biseccion(0, 1, 1e-5, 30, f)
```

\$valor

[1] 0.4270859

\$iteraciones

[1] 17

```
#Calculo con R
raiz.a <- uniroot(f, c(0,1))$root
sprintf("%.20f", raiz.a)</pre>
```

[1] "0.42707795652908947526"

Para que se obtener la precision pedida, se requieren de teoreticamente mas de :

```
round(5* log(10) / log(2))
```

[1] 17

iteraciones, lo cual es consistente con el resultado del codigo anterior

b)

```
g \leftarrow function(x) -x^3 + x + 1
biseccion(1, 2, 1e-5, 30, g)
```

\$valor

[1] 1.324715

\$iteraciones

[1] 17

```
#Calculo con R
raiz.b <- uniroot(g, c(1,2))$root
sprintf("%.20f", raiz.b)</pre>
```

[1] "1.32471782512876834481"

Para obtener la precision pedida, se requieren, teoreticamente, de las mismas iteraciones que el inciso anterior (pues la longitud del intervalo es la misma), lo cual es consistente con lo obtenido ahora.

Ejercicio 3

i Instrucción

Use el procedimiento Bisección para resolver las siguientes ecuaciones, con por lo menos 4 dígitos significativos. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente R.

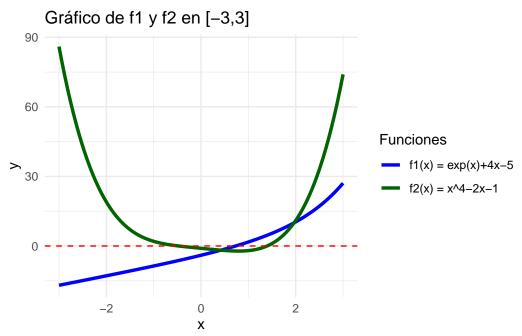
a)
$$e^x + 4x - 5 = 0$$

b)
$$x^4 - 2x - 1 = 0$$

Determine gráficamente un intervalo inicial [a, b], con $a, b \in \mathbb{Z}$.

Solución

Grafico de las funciones:



Con base en este grafico, es razonable determinar que f1 = 0 en el intervalo [0,1], y que f2 = 0 en el intervalo [1,2] y en [-1,0]

a)

```
biseccion(0,1,1e-4,30,f1)
$valor
[1] 0.7307739
$iteraciones
[1] 14
#Calculo con R
raiz.a \leftarrow uniroot(f1,c(0,1))root
sprintf("%.20f", raiz.a)
[1] "0.73080970231405351090"
  b)
#Raiz en intervalo [1,2]
biseccion(1,2,1e-4,30,f2)$valor
[1] 1.395325
#Calculo con R
raiz.b.1 \leftarrow uniroot(f2,c(1,2))root
sprintf("%.20f", raiz.b.1)
[1] "1.39532879208128846038"
#Raiz en intervalo [-1,0]
biseccion(-1,0,1e-4,30,f2)$valor
[1] -0.4746704
#Calculo con R
raiz.b.2 \leftarrow uniroot(f2,c(-1,0))$root
sprintf("%.20f", raiz.b.2)
```

[1] "-0.47461369980099188393"

Ejercicio 4

i Instrucción

Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine el intervalo [a,b] en el cual la iteración de punto fijo converge. Estime el número de iteraciones necesarias para obtener aproximaciones con 5 dígitos significativos, y efectúe los cálculos con el procedimiento PuntoFijo. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente R.

- a) $e^{-x} x = 0$
- b) $e^x = 3x$

Solución

```
f1 <- function(x) exp(-x) - x
f1.f <- function(x) exp(-x)
f2 <- function(x) exp(x) - 3*x
f2.f <- function(x) exp(x)/3</pre>
```

a) Reescribimos como:

$$f(x) = e^{-x}, \quad \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}$$

Se desea encontrar un intervalo [a,b] donde f sea contractiva. Como $|f'(x)|=e^{-x}$, se cumple que:

$$|f'(x)| < 1 \Rightarrow x > 0$$

Entonces [0,1] es un intervalo que se mapea en sí mismo a través de f, y cumple que:

$$q := \sup |f'(x)| = e^{-0.5} \approx 0.6065$$

El número de iteraciones necesarias para asegurar un error absoluto menor a 10^{-5} es:

$$\begin{split} n &\geq \ln\left(\frac{10^{-5}(1-e^{-0.5})}{e^{-0.5}(0.5)}\right) \cdot \frac{1}{\ln(e^{-0.5})} \\ &\approx 20.71 \\ \Rightarrow n &\geq 21 \text{ iteraciones} \end{split}$$

punto.fijo(0.55, 1e-5, 18, f1.f)

\$valor

[1] 0.5671468

\$iteraciones

[1] 15

#Calculo con R
pto.fijo.a <- uniroot(f1, c(0,1))\$root
sprintf("%.20f", pto.fijo.a)</pre>

- [1] "0.56714389329720804600"
 - b) Entonces:

$$f'(x) = \frac{e^x}{3}$$

Se quiere que $|f'(x)| \leq 1$, entonces:

$$\frac{e^x}{3} \le 1$$

$$e^x \le 3$$

$$x \le \ln(3) \approx 1.09$$

Entonces el intervalo [0,1] cumple con que:

- Se mapea en sí mismo a través de f
- Se cumple que $q = \frac{e^{0.7}}{3} < 1$

Estimamos el número de iteraciones:

$$n \ge \ln\left(\frac{10^{-5}(1 - \frac{e^{0.7}}{3})}{\frac{e^{0.7}}{3}(0.6)}\right) \cdot \frac{1}{\ln(\frac{e^{0.7}}{3})}$$

$$\approx 19.35$$

 $\Rightarrow n \ge 20$ iteraciones

i Notación

El error en la iteración de punto fijo puede acotarse mediante:

$$|x_n-x|\leq \frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|$$

donde q es la constante de Lipschitz (cota del valor absoluto de la derivada en el intervalo).

```
punto.fijo(0.6, 1e-5, 30, f2.f)
```

\$valor

[1] 0.6190473

\$iteraciones

[1] 15

```
#Calculo con R
pto.fijo.b <- uniroot(f2, c(0,1))$root
sprintf("%.20f", pto.fijo.b)</pre>
```

[1] "0.61903894360599232005"

Ejercicio 5

i Instrucción

Repita el ejercicio anterior usando el método de Steffensen.

Solución

a)

```
steffensen(0.5, 1e-5, 30, f1.f)
```

\$valor

[1] 0.5671433

\$iteraciones

[1] 4

```
#Calculo con R
pto.fijo.a <- uniroot(f1, c(0,1))$root
sprintf("%.20f", pto.fijo.a)</pre>
```

[1] "0.56714389329720804600"

b)

```
steffensen(0.5, 1e-5, 30, f2.f)
```

\$valor

[1] 0.6190613

\$iteraciones

[1] 5

```
#Calculo con R
pto.fijo.b <- uniroot(f2, c(0,1))$root
sprintf("%.20f", pto.fijo.b)</pre>
```

[1] "0.61903894360599232005"

Ejercicio 6

i Instrucción

Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine una función g y un intervalo [a,b] en el cual la iteración de punto fijo converja a una solución positiva de la ecuación. Debe probar que g(x) cumple las hipótesis del teorema de Banach. Encuentre esta solución usando el procedimiento PuntoFijo. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente

 \mathbf{R} .

a)
$$3x^2 - e^x = 0$$

b)
$$x - \cos(x) = 0$$

Solución

```
g1 <- function(x) 3*x^2 - \exp(x)
g1.g <- function(x) (\operatorname{sqrt}(3)/3) * \exp(x/2)
g2 \leftarrow function(x) x - cos(x)
g2.g <- function(x) cos(x)
  a)
punto.fijo(0.5, 1e-8, 30, g1.g)
$valor
[1] 0.9100076
$iteraciones
[1] 23
#Calculo con R
pto.fijo.a <- uniroot(g1, c(0,1))$root
sprintf("%.20f", pto.fijo.a)
[1] "0.91000774763991165717"
  b)
punto.fijo(0.5, 1e-8, 60, g2.g)
$valor
[1] 0.7390851
$iteraciones
Γ17 45
#Calculo con R
pto.fijo.b <- uniroot(g2, c(0,1))$root
sprintf("%.20f", pto.fijo.b)
[1] "0.73909105828536980631"
  c)
g <- function(x) sqrt(x + 2)
punto.fijo(3.5,1e-8, 60,g)
```

\$valor

[1] 2

\$iteraciones

[1] 15

Ejercicio 7

i Instrucción

Use el procedimiento Newton para resolver las siguientes ecuaciones, con por lo menos 4 dígitos significativos. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente R.

- a) $\cos(x) x^2 = 0$
- b) $4\sin(x) = e^x$

Solución

```
f1 \leftarrow function(x) cos(x) - x^2
df1 \leftarrow function(x) - sin(x) - 2*x
f2 \leftarrow function(x) exp(x) - 4*sin(x)
df2 \leftarrow function(x) exp(x) - 4*cos(x)
```

a)

```
newton.raphson(0.5, 1e-4, 10, f1, df1)
```

\$valor

[1] 0.8241323

\$iteraciones

[1] 4

```
#Calculo con R
raiz.a <- uniroot(f1, c(0,1))$root
sprintf("%.20f", raiz.a)</pre>
```

- [1] "0.82413061924178543372"
 - b)

```
newton.raphson(0.5, 1e-4, 10, f2, df2)
$valor
[1] 0.3705581
$iteraciones
[1] 4
#Calculo con R
raiz.b.1 \leftarrow uniroot(f2, c(0,1))$root
sprintf("%.20f", raiz.b.1)
[1] "0.37055762351764781615"
newton.raphson(1.5, 1e-4, 10, f2, df2)
$valor
[1] 1.364958
$iteraciones
[1] 4
#Calculo con R
raiz.b.2 \leftarrow uniroot(f2, c(1,2))root
sprintf("%.20f", raiz.b.2)
```

[1] "1.36495065582883667865"

Ejercicio 8

i Instrucción

Repita el ejercicio anterior usando el procedimiento Secante, y compare los resultados.

Solución

```
f1 <- function(x) cos(x) - x^2

df1 <- function(x) -sin(x) - 2*x

f2 <- function(x) exp(x) - 4*sin(x)

df2 <- function(x) exp(x) - 4*cos(x)
```

```
a)
secante(0,1,1e-4,10,f1)
$valor
[1] 0.8241323
$iteraciones
[1] 7
#Calculo con R
raiz.a \leftarrow uniroot(f1, c(0,1))$root
sprintf("%.20f", raiz.a)
[1] "0.82413061924178543372"
  b)
secante(0,1, 1e-4, 10, f2)
$valor
[1] 0.3705581
$iteraciones
[1] 9
#Calculo con R
raiz.b.1 \leftarrow uniroot(f2, c(0,1))root
sprintf("%.20f", raiz.b.1)
[1] "0.37055762351764781615"
secante(1,2, 1e-4, 10, f2)
$valor
[1] 1.364958
$iteraciones
[1] 9
#Calculo con R
raiz.b.2 \leftarrow uniroot(f2, c(1,2))root
sprintf("%.20f", raiz.b.2)
```

Ejercicio 9

i Instrucción

Suponga que p es un cero de multiplicidad m de f donde $f^{(m)}$ es continua en un intervalo abierto que contiene a p. Demuestre que el método de punto fijo siguiente:

$$g(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}$$

cumple que g'(p) = 0.

Solución

Ejercicio 10

i Instrucción

Demuestre que el método de Newton aplicado a $x^m - R$ y a $1 - (R/x^m)$ para calcular $\sqrt[m]{R}$ da dos fórmulas diferentes de iterativas. Para R > 0 y $m \ge 0$, ¿cuál fórmula es mejor y por qué?

Solución

Caso 1:
$$f(x) = x^m - R$$

Tenemos:

$$f'(x) = mx^{m-1}$$

Aplicando el método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - R}{mx_n^{m-1}} = x_n - \frac{x_n}{m} + \frac{R}{mx_n^{m-1}}$$

Por lo tanto:

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)x_n + \frac{R}{mx_n^{m-1}}$$

Caso 2:
$$f(x) = 1 - \frac{R}{x^m}$$

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{mR}{x^{m+1}}$$

Aplicando el método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \left(1 - \frac{R}{x_n^m}\right) \cdot \frac{x_n^{m+1}}{mR}$$

Observamos que:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^{m+1} - x_n R}{mR} \\ &= x_n - \frac{x_n^{m+1}}{mR} + \frac{x_n}{m} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)x_n - \frac{x_n^{m+1}}{mR}$$

- La diferencia clave entre ambas fórmulas está en el segundo término:

 En la **segunda fórmula** aparece $\frac{x^{m+1}}{mR}$, que puede crecer enormemente si x o m son grandes. Esto puede causar sobreflujo o pérdida de precisión numérica en las compu-
 - En cambio, en la **primera fórmula** se usa $\frac{R}{mx^{m-1}}$, el cual tiende a hacerse **más pe**queño conforme x crece, lo que ayuda a estabilizar la iteración.

Por ello, la primera opción es mucho más segura numéricamente.

¿Cuál fórmula es mejor?

Para R > 0 y $m \ge 1$, la **primera fórmula**:

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)x_n + \frac{R}{mx_n^{m-1}}$$

es generalmente más estable y eficiente, especialmente cuando se parte de una buena aproximación inicial x_0 lejos de cero.

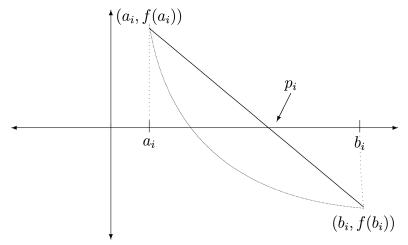
Ejercicio 11

i Instrucción

Método Regula Falsi: Este es otro método para encontrar una raíz de la ecuación f(x) = 0 que se encuentra en el intervalo [a, b]. El método es similar al de la bisección en que se generan intervalos $[a_i, b_i]$ encerrando la raíz de f(x) = 0, y es similar al método de la secante en la forma de obtener los nuevos intervalos aproximados.

Suponiendo que el intervalo $[a_i, b_i]$ contiene una raíz de f(x) = 0, calculamos la intersección con el eje x de la recta que pasa por los puntos $(a_i, f(a_i))$ y $(b_i, f(b_i))$, denotando este punto por p_i .

- Si $f(p_i)f(a_i) < 0$, se define $a_{i+1} = a_i$ y $b_{i+1} = p_i$;
- En caso contrario, se define $a_{i+1} = p_i$ y $b_{i+1} = b_i$.
 - a) Dé una interpretación geométrica del método Regula Falsi con ayuda del siguiente gráfico:



- b) Calcule la ecuación de la recta que pasa por $(a_i,f(a_i))$ y $(b_i,f(b_i)).$
- c) Pruebe que:

$$p_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

- d) Escriba un algoritmo en pseudocódigo para el método Regula Falsi.
- e) Escriba una función en R para este algoritmo.

Ejercicio 12

i Instrucción

Use el método de $Regula\ Falsi$ para aproximar la solución de las siguientes ecuaciones con 6 dígitos significativos, determine el intervalo inicial gráficamente. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente ${\bf R}$.

- a) $\log(1+x) x^2 = 0$
- b) $x^3 + 2x 1 = 0$

Solución

```
f1 <- function(x) log(1 + x) - x^2
f2 <- function(x) x^3 + 2*x - 1

x <- seq(-2, 2, length.out = 400)

# Evaluar funciones
y1 <- f1(x)</pre>
```

Warning in log(1 + x): NaNs produced

```
# Graficar f1
plot(x, y1, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
    ylim = c(-10, 10),
    xlab = "x", ylab = "f(x)",
    main = "Graficas de f1(x) y f2(x)")

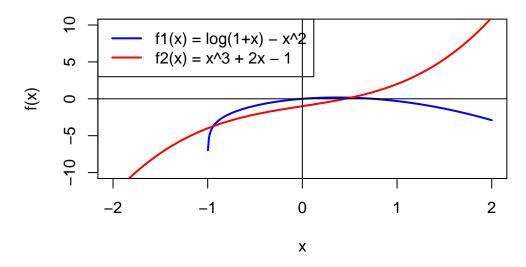
# Agregar f2
lines(x, y2, col = "red", lwd = 2)

# Ejes
abline(h = 0, v = 0, col = "black")

# Leyenda
legend("topleft",
    legend = c("f1(x) = log(1+x) - x^2",
```

```
"f2(x) = x^3 + 2x - 1"),
col = c("blue", "red"), lwd = 2)
```

Gráficas de f1(x) y f2(x)



A partir del gráfico se puede observar que f1 interseca con el eje x en dos puntos: uno parece estar entre -0.5 y 0.5, mientras el otro parece estar entre0.5 y 1.

Por otra parte, f2 parece intersecar entre 0 y 1 a)

```
regula.falsi(-0.5, 0.5, 1e-6, 100, f1)
```

\$valor

[1] 4.100353e-18

\$iteraciones

[1] 50

```
#Calculo con R
raiz.a.1 <- uniroot(f1, c(-0.5,0.5))$root
sprintf("%.20f", raiz.a.1)</pre>
```

[1] "0.0000108466331270529"

```
regula.falsi(0.5, 1, 1e-6, 100, f1)
```

\$valor

[1] 0.7468817

\$iteraciones

[1] 26

```
#Calculo con R
raiz.a.2 <- uniroot(f1, c(0.5,1))$root
sprintf("%.20f", raiz.a.2)</pre>
```

[1] "0.74687960898323879633"

b)

```
regula.falsi(0,1,1e-6, 100,f2)
```

\$valor

[1] 0.4533977

\$iteraciones

[1] 30

```
#Calculo con R
raiz.b <- uniroot(f2, c(0,1))$root
sprintf("%.20f", raiz.b)</pre>
```

[1] "0.45339750274672485642"

Ejercicio 13

i Instrucción

Pruebe que la sucesión construida por:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{a + (m-1)x_n^m}{mx_n^{m-1}} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

converge a $\sqrt[m]{a}$, con a > 0.

Solución

Note que calcular $\sqrt[m]{a}$ es equivalente a resolver la ecuación:

$$x^m-a=0$$

Aplicando el método de Newton-Raphson con $f(x) = x^m - a$, tenemos:

$$f'(x) = mx^{m-1}$$

Entonces, la fórmula de Newton-Raphson es:

$$\begin{split} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^m - a}{mx_n^{m-1}} \\ &= \frac{mx_n^m - (x_n^m - a)}{mx_n^{m-1}} \\ &= \frac{a + (m-1)x_n^m}{mx_n^{m-1}} \end{split}$$

Esto coincide exactamente con la fórmula de recurrencia dada para $n \geq 1$.

Por lo tanto, como la sucesión está construida con el método de Newton-Raphson para una función que cumple las condiciones del teorema de convergencia de Newton, sabemos que esta sucesión converge a la solución de $x^m - a = 0$, la cual es:

$$\sqrt[m]{a}$$

Ejercicio 14

i Instrucción

Demuestre que las siguientes sucesiones (x_n) convergen linealmente a x=0. Encuentre cuántos términos deben generarse antes de que $|x_n-x|\le 5\times 10^{-2}$. a) $x_n=\frac{1}{n},\,n\ge 0$ b) $x_n=\frac{1}{n^2},\,n\ge 0$

a)
$$x_n = \frac{1}{n}, n \ge 0$$

b)
$$x_n = \frac{1}{n^2}, n \ge 0$$

Solución

🌢 Prueba a)

$$x_n = \frac{1}{n}$$

Convergencia a 0.

Vea que como $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, la sucesión converge a x=0.

Tomando $x_n = \frac{1}{n}$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

Vea entonces que $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1-0}|}{|x_n-0|^1}=1>0$ lo que implica convergencia lineal. **Tolerancia:** $|x_n|\le 5\times 10^{-2}$

$$\frac{1}{n} \le 0.05 \iff n \ge 20.$$

Se requieren n = 20 (el término 20 ya cumple la cota).

🌢 Prueba b)

$$x_n = \frac{1}{n^2}$$

Convergencia a 0.

Note que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Con $x_n = \frac{1}{n^2}$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

Tolerancia $|x_n| \le 5 \times 10^{-2}$.

$$\frac{1}{n^2} \le 0.05 \iff n \ge \sqrt{20} \approx 4.472.$$

Por lo tanto, basta con n = 5.

- Ambas sucesiones convergen linealmente a 0
- Para cumplir $|x_n| \le 5 \times 10^{-2}$:

$$-x_n = \frac{1}{n}: n \ge 20.$$

$$-x_n = \frac{1}{n^2} : n \ge 5.$$

Ejercicio 15

i Instrucción

Demuestre que la sucesión definida por $x_n=1/n^k,\; n\geq 1,$ para cualquier entero positivo k,converge linealmente a x=0. Para cada par de enteros k y m, determinar un número N para el cual $1/N^k < 10^{-m}$.

Solución

Ejercicio 16

i Instrucción

Demostrar que la sucesión $x_n = 10^{-2^n}$ converge cuadráticamente a cero.

Solución

Hay que demostrar que existe λ positiva, tal que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-0|}{|x_n-0|^2}=\lambda,$$

$$\begin{split} \lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - 0|}{|x_n - 0|^2} &= \lim_{n \to \infty} \frac{|10^{-2^{n+1}}|}{|10^{-2^n}|^2} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{10^{-2^{n+1}}}{\left(10^{-2^n}\right)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{10^{-2 \cdot 2^n}}{10^{-2 \cdot 2^n}} = 1 > 0 \end{split}$$

Por lo tanto, $\lambda = 1 > 0$ y la sucesión converge cuadráticamente a 0.

Ejercicio 17

i Instrucción

Para las siguientes sucesiones (x_n) , linealmente convergentes, use el método Δ^2 de Aitken para generar una sucesión (\bar{x}_n) hasta que $|\bar{x}_n-x|\leq 5\times 10^{-2}$. a) $x_n=\frac{1}{n},\,n\geq 0$ b) $x_n=\frac{1}{n^2},\,n\geq 0$

a)
$$x_n = \frac{1}{n}, n \ge 0$$

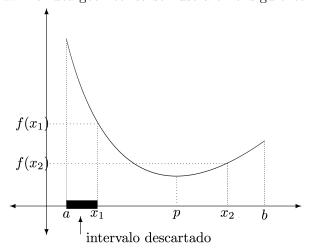
b)
$$x_n = \frac{1}{n^2}, n \ge 0$$

Solución

Ejercicio 18

i Instrucción

Un conocido método numérico para minimizar funciones estrictamente unimodales (una función f que decrece estrictamente (o crece estrictamente) hasta su punto mínimo (máximo)) se llama la función estrictamente unimodal en un intervalo [a, b], y uno de ellos es el **Método Igualmente Espaciado**. La idea geométrica se ilustra en el siguiente gráfico:



Se toma $a_1=a$ y $b_1=b$, y además:

$$x_1:=\frac{2a+b}{3}, \qquad x_2:=\frac{a+2b}{3}$$

Entonces, como se ilustra en el gráfico:

• Si $f(x_1) > f(x_2)$, entonces se toma:

$$a_2 = x_1, \quad b_2 = b_1, \quad p_1 = a_2$$

y el nuevo intervalo es:

$$[a_2, b_2] = [x_1, b_1] = \left[\frac{2a+b}{3}, b\right]$$

• En caso contrario, se toma:

$$a_2 = a_1, \quad b_2 = x_2, \quad p_1 = b_2$$

y el nuevo intervalo es:

$$[a_2,b_2] = [a_1,x_2] = \left[a_1,\frac{a+2b}{3}\right]$$

Con el nuevo intervalo se aplica el proceso de nuevo, y así sucesivamente hasta que a_n y b_n estén suficientemente cerca. La sucesión (p_n) converge al punto p donde f alcanza el mínimo.

- a) De acuerdo con lo anterior, pruebe que $x_1 < x_2$.
- b) Construya un algoritmo en pseudocódigo y la correspondiente función en ${\bf R}$ para el método Iqualmente Espaciado descrito anteriormente.
- c) Pruebe que el intervalo construido con el algoritmo anterior satisface la relación:

$$|b_n-a_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(b-a)$$

¿Qué se puede concluir, respecto al error absoluto?

d) ¿Cuántas iteraciones se requieren teóricamente para minimizar la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ en el intervalo [1,4] si se desea un error absoluto menor a 10^{-5} ? Encuentre el mínimo.

Solución

a) Sabemos que a < b

$$\Rightarrow 2a < b + a$$

$$\Rightarrow 2a + b < 2b + a$$

$$\Rightarrow \frac{2a + b}{3} < \frac{2b + a}{3}$$

$$\Rightarrow x_1 < x_2$$

b)

```
ig.espaciado <- function(a, b, tol, n, f) {
    i <- 1
    a.temp <- a
    b.temp <- b
    while (i <= n) {
        x1 <- (2 * a.temp + b.temp) / 3
        x2 <- (a.temp + 2 * b.temp) / 3
        if (f(x1) > f(x2)) {
            a.temp <- x1
            x <- a.temp
        }
        else{</pre>
```

```
b.temp <- x2
    x <- b.temp
}
if (abs(b.temp - a.temp) < tol) {
    return(list("valor" = x, "iteraciones" = i))
}
i <- i + 1
}
return(NULL)
}</pre>
```

c) Queremos probar que el intervalo construido con el algoritmo anterior satisface:

$$|b_n-a_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(b-a)$$

$$\begin{split} |b_1 - a_1| &= |b - a| \\ |b_2 - a_2| &= \left(\frac{2}{3}\right) |b - a| \\ |b_3 - a_3| &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 |b - a| \\ &\vdots \\ |b_n - a_n| &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |b - a| \end{split}$$

Como
$$x_n \in]a_n,b_n[$$
y $x_n = \frac{2a_n + b_n}{3}$ o $x_n = \frac{a_n + 2b_n}{3}$

Entonces:

$$\begin{split} |x_n-x| &\leq \frac{2}{3}|b_n-a_n| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|b-a| \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n|b-a| \end{split}$$

d) Queremos que:

$$|x_n-x|\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot 3<10^{-5}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < 10^{-5} \cdot 3$$

$$n > \frac{\ln(10^{-5} \cdot 3)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 31.10$$

 $\Rightarrow n \ge 32$ iteraciones

El valor mínimo de la función se obtiene de la siguiente manera.

```
f <- function(x) x^4 - 4*x^3 +3*x^2
f(ig.espaciado(1, 4, 1e-5, 1000, f)$valor)
```

[1] -4.848076

Ejercicio 19

i Instrucción

En este ejercicio se presenta el **Método Dicotómico** para minimizar funciones estrictamente unimodales. En este método primeramente se evalúa la función f(x) en dos puntos que están a una distancia de $\varepsilon/2$ del punto medio del intervalo [a,b], es decir se calculan:

$$f\left(\frac{a+b-arepsilon}{2}
ight) \quad ext{y} \quad f\left(\frac{a+b+arepsilon}{2}
ight),$$

y se procede a compararlos. Si

a)

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) \leq f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

entonces se descarta el intervalo $\left[\frac{a+b+\varepsilon}{2},b\right]$ y así el punto mínimo x^* debe estar en el intervalo $\left[a,\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$, el cual será el nuevo intervalo de búsqueda.

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) > f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

entonces se descarta el intervalo $\left[a, \frac{a+b-\varepsilon}{2}\right]$ y en este caso el punto mínimo x^* debe estar en el intervalo $\left[\frac{a+b-\varepsilon}{2}, b\right]$.

Pruebe que en cualquiera de los casos la longitud del intervalo de búsqueda se reduce de b-a a $\frac{b-a+\varepsilon}{2}$.

b)

Suponga que se tiene el caso:

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) \le f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

entonces se descarta el intervalo $\left[\frac{a+b+\varepsilon}{2},b\right]$, y el nuevo intervalo de búsqueda es $\left[a,\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$. Ahora se debe calcular:

$$f\left(\frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right)$$
 y $f\left(\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right)$,

y surgen de nuevo dos posibilidades. Si

$$f\left(\frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right) \le f\left(\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right),$$

entonces se descarta el intervalo $\left[\frac{3a+b+3\varepsilon}{4},\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$ y el nuevo intervalo de búsqueda es $\left[a,\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right]$. En el otro caso se descarta el intervalo $\left[a,\frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right]$ y el nuevo intervalo de búsqueda es $\left[\frac{3a+b-\varepsilon}{4},\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$.

Pruebe que en cualquiera de los casos la longitud del intervalo de búsqueda se reduce de $\frac{b-a+\varepsilon}{2}$ a $\frac{b-a+3\varepsilon}{4}$.

 $\mathbf{c})$

Repitiendo el proceso n veces deben calcularse:

$$f\left(\frac{(2^n-1)a+b-\varepsilon}{2^n}\right) \quad \text{y} \quad f\left(\frac{(2^n-1)a+b+(2^n-1)\varepsilon}{2^n}\right),$$

pruebe que en cualquiera de los dos casos la longitud del intervalo de búsqueda es

$$\frac{b-a+(2^n-1)\varepsilon}{2^n}.$$

Con lo cual, si x_n representa la n-ésima aproximación del punto mínimo x^* , entonces pruebe que:

$$|x^*-x_n| \leq \frac{b-a+(2^n-1)\varepsilon}{2^n}.$$

El proceso se ilustra en la Figuras 1 y 2.

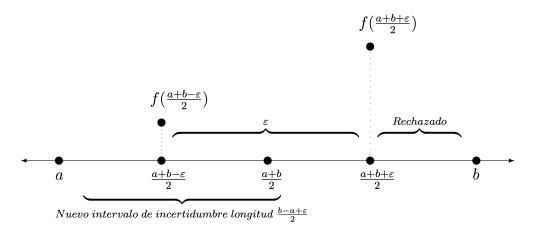


Figura 1: Figura 1

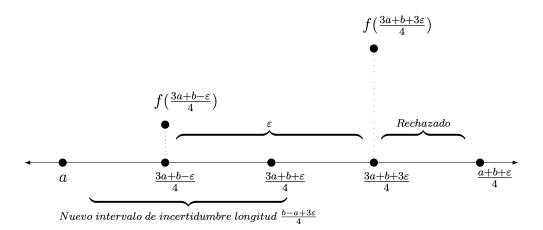


Figura 2: Figura 2

d)

Construya un algoritmo en pseudocódigo y la correspondiente función ${f R}$ para el ${\it M\'etodo}$ ${\it Dicot\'emico}$ descrito anteriormente.

e)

¿Cuántas iteraciones se requieren teóricamente para minimizar

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$$

en el intervalo [1,4] si se desea que el resultado tenga un error absoluto menor a 10^{-5} ? Encuentre el mínimo.

Solución

Sea f estrictamente unimodal en [a, b]. En el **método dicotómico** se evalúa f en los dos puntos a distancia $\varepsilon/2$ del punto medio:

$$x_1 = \frac{a+b-\varepsilon}{2}, \qquad x_2 = \frac{a+b+\varepsilon}{2},$$

• Prueba a)

Como f es estrictamente unimodal, si $f(x_1) \leq f(x_2)$ el mínimo x^* no puede estar a la derecha de x_2 ; si $f(x_1) > f(x_2)$, x^* no puede estar a la izquierda de x_1 . Por ello es válido descartar, respectivamente, los subintervalos indicados.

Caso (a): $f(x_1) \le f(x_2)$.

El nuevo intervalo es $[a, \frac{a+b+\varepsilon}{2}]$. Su longitud es

$$\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right)-a=\frac{a+b+\varepsilon-2a}{2}=\frac{b-a+\varepsilon}{2}.$$

Caso (b): $f(x_1) > f(x_2)$.

El nuevo intervalo es $\left[\frac{a+b-\varepsilon}{2}, b\right]$. Su longitud es

$$b - \left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) = \frac{2b-a-b+\varepsilon}{2} = \frac{b-a+\varepsilon}{2}.$$

En ambos casos la longitud pasa de b-a a $\frac{b-a+\varepsilon}{2}$.

Una iteración del método dicotómico reduce el tamaño del intervalo de búsqueda desde b-a hasta

$$\frac{b-a+\varepsilon}{2}$$

manteniendo dentro del nuevo intervalo al punto de mínimo x^* . Reiterando el procedimiento se obtiene una secuencia de intervalos que contienen x^* y cuyas longitudes decrecen geométricamente (con corrección ε). \square

• Prueba b)

Volvemos a tener dos posibilidades:

Caso 1: $f(x_3) \leq f(x_4)$

Se descarta el subintervalo $\left]\frac{3a+b+3\varepsilon}{4},\ \frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$ y el nuevo intervalo es

$$I_2 = \left[a, \ \frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right].$$

Longitud:

$$|I_2|=\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}-a=\frac{3a+b+3\varepsilon-4a}{4}=\frac{b-a+3\varepsilon}{4}.$$

Caso 2: $f(x_3) > f(x_4)$

Se descarta el subintervalo $\left[a,\ \frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right]$ y el nuevo intervalo es

$$I_2 = \left[\frac{3a+b-\varepsilon}{4}, \ \frac{a+b+\varepsilon}{2}\right].$$

Longitud:

$$|I_2| = \frac{a+b+\varepsilon}{2} - \frac{3a+b-\varepsilon}{4} = \frac{2a+2b+2\varepsilon-3a-b+\varepsilon}{4} = \frac{b-a+3\varepsilon}{4}.$$

Tras la primera evaluación, la longitud había pasado de b-a a $\frac{b-a+\varepsilon}{2}$. Después de la segunda evaluación (dentro del mismo caso b)), **en cualquiera de las dos comparaciones** la longitud del intervalo se reduce a

$$\frac{b-a+3\varepsilon}{4}.$$

La unimodalidad estricta garantiza en ambos casos que el punto de mínimo x^* permanece dentro del nuevo intervalo.

• Prueba c)

Procederemos por inducción

Caso Base n=1.

$$L_1 = \frac{b-a+\varepsilon}{2} = \frac{b-a+(2^1-1)\varepsilon}{2^1}.$$

Paso inductivo. Suponga que

$$L_k = \frac{b-a+(2^k-1)\varepsilon}{2^k}$$

Entonces, usando $L_{k+1} = T(L_k) = \frac{L_k + \varepsilon}{2}$,

$$\begin{split} L_{k+1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{b-a+(2^k-1)\varepsilon}{2^k} + \varepsilon \right) \\ &= \frac{b-a+(2^k-1)\varepsilon+2^k\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{b-a+(2^{k+1}-1)\varepsilon}{2^{k+1}}. \end{split}$$

Queda demostrada por inducción la expresión

$$\boxed{L_n = \frac{b - a + (2^n - 1)\varepsilon}{2^n}}.$$

En cada iteración, el mínimo x^* permanece dentro del intervalo de búsqueda y la aproximación x_n también se toma dentro de ese intervalo. Por lo tanto, la distancia entre ambos no excede la **longitud** del intervalo vigente:

$$|x^\star - x_n| \le L_n = \frac{b - a + (2^n - 1)\varepsilon}{2^n}.$$

El método dicotómico reduce la longitud del intervalo según

$$L_n = \frac{b-a+(2^n-1)\varepsilon}{2^n},$$

y garantiza la cota de error

$$|x^{\star} - x_n| \leq \frac{b - a + (2^n - 1)\varepsilon}{2^n} \qquad \Box$$

d)

```
dicotomico <- function(a, b, e, tol, n, f) {
   i <- 1
   a.temp <- a
   b.temp <- b
   while (i <= n) {
      x1 <- (a.temp + b.temp - e)/2
      x2 <- (a.temp + b.temp + e)/2
   if(f(x1) <= f(x2)){
      b.temp <- x2
      x <- b.temp
   }
}</pre>
```

```
else{
    a.temp <- x1
    x <- a.temp
}
if(abs(b.temp - a.temp) < tol){
    return(list("valor" = x, "iteraciones" = i))
}
i <- i+1
}
return(NULL)
}</pre>
```

e)

```
f <- function(x) x^4 -4*x^3 + 3*x^2
min.x <- dicotomico(1, 4, 1e-6, 1e-5, 100, f)
min.x</pre>
```

\$valor

[1] 2.36603

\$iteraciones

[1] 19

Para encontrar el valor minimo de la funcion en [1,4], esta se evalua en el punto encontrado recientemente:

```
f(min.x$valor)
```

[1] -4.848076

Ejercicio 20

i Instrucción

El objetivo de este ejercicio es demostrar la convergencia del método de Newton–Raphson sin utilizar el Teorema de punto fijo de Banach.

Teorema: Sea $f \in C^2[a,b]$. Si $x \in [a,b]$ con f(x) = 0 y $f'(x) \neq 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal

que el método de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

genera una sucesión que está bien definida y converge a x cuando $n\to\infty$, para todo $x_0\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon].$

Para esto haga lo siguiente:

a) Pruebe que si $(r_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de números positivos o nulos que verifican:

$$r_{n+1} \le r_n^2,$$

y si $r_0<1,$ entonces (r_n) converge a 0. Además, pruebe que:

$$r_n \le (r_0)^{2^n}.$$

b) Pruebe que:

$$x_{n+1} - x = \frac{(x_n - x)f'(x_n) - f(x_n) + f(x)}{f'(x_n)}.$$
 (1)

c) Pruebe que existen números estrictamente positivos ϵ_1 y M tales que:

para todo
$$y \in [x - \epsilon_1, x + \epsilon_1]$$
 se tiene que $|f'(y)| \ge M$.

d) Justifique por qué:

$$\max_{y\in[x-\epsilon_1,x+\epsilon_1]}|f''(y)|:=L<\infty.$$

e) Pruebe que el valor absoluto de la parte derecha del numerador de la ecuación (1) es igual a:

$$\left| \int_{x_n}^x f''(t)(x-t) \, dt \right|. \tag{2}$$

f) Pruebe que (2) está acotado por:

$$\frac{L}{2}|x_n-x|^2.$$

g) Pruebe que si se define

$$r_n:=\frac{L}{2M}|x_n-x|\quad \text{entonces}\quad r_{n+1}\leq r_n^2.$$

h) Sea $\epsilon = \min\left(\epsilon_1, \frac{2M}{L}\right)$, pruebe que si $|x_n - x| < \epsilon$, entonces use la parte (a) para probar que $|x_{n+1} - x| < \epsilon$, y concluya el resultado.

Solución

a) Se va a probar por inducción que $r_n \leq (r_0)^{2^n}$.

Caso base: n = 1.

Se tiene que $r_1 \leq r_0^2,$ lo cual es cierto porque la sucesión cumple que:

$$r_{n+1} \le r_n^2$$

Paso inductivo: Suponga que $r_n \leq (r_0)^{2^n}$. Queremos probar que $r_{n+1} \leq (r_0)^{2^{n+1}}$.

Por la hipótesis inductiva:

$$\begin{split} r_n & \leq (r_0)^{2^n} \\ \Rightarrow r_n^2 & \leq \left((r_0)^{2^n} \right)^2 = (r_0)^{2^{n+1}} \end{split}$$

Y dado que $r_{n+1} \le r_n^2$, entonces:

$$r_{n+1} \le (r_0)^{2^{n+1}}$$

Para demostrar convergencia a 0, observamos que si $0 < r_0 < 1$, entonces:

$$(r_0)^{2^n} \to 0$$
 cuando $n \to \infty$

y como $0 \le r_n \le (r_0)^{2^n}$, se concluye que:

$$r_n \to 0$$
 cuando $n \to \infty$

b. Queremos demostrar:

$$x_{n+1} - x = \frac{(x_n - x)f'(x_n) - f(x_n) + f(x)}{f'(x_n)}$$

Pero como f(x) = 0, se tiene:

$$\begin{split} x_{n+1} - x &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x \\ &= \frac{f'(x_n)x_n - f(x_n)}{f'(x_n)} - x \\ &= \frac{f'(x_n)x_n - f(x_n) - f'(x_n)x}{f'(x_n)} \\ &= \frac{f'(x_n)(x_n - x) - f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= \frac{(x_n - x)f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \blacksquare \end{split}$$

c. Queremos probar que existen $\epsilon_1>0$ y M>0 tales que:

$$\forall y \in [x - \epsilon_1, x + \epsilon_1] \Rightarrow |f'(y)| \ge M$$

Dado que $f'(x) \neq 0$ y f' es continua, existe un $\epsilon_1 > 0$ tal que:

$$f'(y) \neq 0 \quad \forall y \in [x - \epsilon_1, x + \epsilon_1]$$

Esto implica que:

$$M:=\inf_{y\in[x-\epsilon_1,x+\epsilon_1]}|f'(y)|>0\quad\blacksquare$$

d) Queremos justificar que:

$$\max_{y \in [x - \epsilon_1, x + \epsilon_1]} |f''(y)| := L < \infty$$

Dado que f''(y) es continua en $[x-\epsilon_1,x+\epsilon_1]$, un intervalo cerrado, alcanza un máximo en ese intervalo. Por lo tanto:

$$L:=\max_{y\in[x-\epsilon_1,x+\epsilon_1]}|f''(y)|<\infty\quad\blacksquare$$

e) Queremos probar que el valor absoluto de la parte derecha del numerador de la ecuación (1) es igual a:

$$\left| \int_{x_n}^x f''(t)(x-t) \, dt \right|$$

Notamos que:

$$\begin{split} f(x)-f(x_n)&=\int_{x_n}^x f'(t)\,dt\\ \Rightarrow f(x)-f(x_n)-f'(x_n)(x-x_n)&=\int_{x_n}^x f'(t)\,dt-f'(x_n)(x-x_n)\\ &=\int_{x_n}^x \left(f'(t)-f'(x_n)\right)dt \end{split} \tag{)}$$

Por otra parte, usando el teorema fundamental del cálculo:

$$f'(t) - f'(x_n) = \int_{x_n}^t f''(s) \, ds$$

Sustituyendo en ():

$$\int_{x_n}^x (f'(t)-f'(x_n))dt = \int_{x_n}^x \left(\int_{x_n}^t f''(s)\,ds\right)dt$$

Intercambiamos el orden de integración (ver gráfica triangular en s-t):

$$\begin{split} \int_{x_n}^x \left(\int_{x_n}^t f''(s) \, ds \right) dt &= \int_{x_n}^x \left(\int_{s}^x dt \right) f''(s) \, ds \\ &= \int_{x_n}^x (x - s) f''(s) \, ds \end{split}$$

Entonces:

$$f(x)-f(x_n)-f'(x_n)(x-x_n)=\int_{x_n}^x (x-s)f''(s)\,ds$$

Haciendo cambio de variable t=s, se concluye:

$$|f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n)| = \left| \int_{x_n}^x f''(t)(x - t) \, dt \right| \quad \blacksquare$$

f) Probar que la expresión:

$$\left| \int_{x_n}^x f''(t)(x-t)\,dt \right|$$

está acotada por:

$$\frac{L}{2}|x_n-x|^2$$

Dado que:

$$\begin{split} \left| \int_{x_n}^x f''(t)(x-t) \, dt \right| & \leq \int_{x_n}^x |f''(t)| \cdot |x-t| \, dt \\ & \leq L \int_{x}^x |x-t| \, dt \end{split}$$

Calculamos:

$$\begin{split} \int_{x_n}^x |x-t| \, dt &= \int_{x_n}^x (x-t) \, dt \\ &= \left[xt - \frac{t^2}{2} \right]_{x_n}^x \\ &= \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) - \left(xx_n - \frac{x_n^2}{2} \right) \\ &= \frac{x^2}{2} - xx_n + \frac{x_n^2}{2} \\ &= \frac{(x-x_n)^2}{2} \end{split}$$

Por tanto:

$$\left| \int_{x_n}^x f''(t)(x-t)\,dt \right| \leq \frac{L}{2}|x-x_n|^2 \quad \blacksquare$$

g) Probar que si se define:

$$r_n:=\frac{L}{2M}|x_n-x|$$

entonces se cumple:

$$|x_{n+1} - x| \le r_n^2$$

Sabemos que:

$$x_{n+1} - x = \frac{\int_{x_n}^x f''(t)(x-t) \, dt}{f'(x_n)}$$

Aplicando el resultado del ítem (f):

$$\begin{split} |x_{n+1}-x| & \leq \frac{1}{|f'(x_n)|} \left| \int_{x_n}^x f''(t)(x-t) \, dt \right| \\ & \leq \frac{L}{2M} |x_n-x|^2 \end{split}$$

Luego, si definimos $r_n = \frac{L}{2M}|x_n - x|$, entonces:

$$|x_{n+1}-x| \leq r_n^2 \quad \blacksquare$$

h)
$$\varepsilon < \min \left\{ \varepsilon_1, \frac{2M}{L} \right\}$$

Probar que si $|x_n-x|<\varepsilon,$ entonces $|x_{n+1}-x|<\varepsilon,$ y concluir que la sucesión converge.

Sabemos que:

$$|x_{n+1}-x| \le r_n^2 = \left(\frac{L}{2M}|x_n-x|\right)^2$$

Si $|x_n - x| < \varepsilon$, se tiene:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x| &\leq \left(\frac{L}{2M}\right)^2 \varepsilon^2 \\ &< \left(\frac{L}{2M} \cdot \varepsilon\right) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ya que $\varepsilon < \frac{2M}{L}$, entonces $\frac{L}{2M} \cdot \varepsilon < 1$, y por tanto $\left(\frac{L}{2M} \cdot \varepsilon\right)^2 < \varepsilon$.

Por lo tanto:

$$|x_{n+1}-x|<\varepsilon$$

Esto demuestra que la sucesión generada por el método de Newton-Raphson converge.

Ejercicio 21

Instrucción

Demuestre que en el caso de ceros de multiplicidad m, el **Método de Newton Modificado**:

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

es cuadráticamente convergente. Sugerencia: Use series de Taylor.

Solución

🌢 Prueba

Como la raíz tiene multiplicidad m, existe una función g de clase C^1 con $g(\alpha) \neq 0$ tal que

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x),$$
 $f'(x) = m(x - \alpha)^{m-1} g(x) + (x - \alpha)^m g'(x).$

Denotemos el error $e_n:=x_n-\alpha$ y abreviemos $g_n:=g(\alpha+e_n),$ $g_n':=g'(\alpha+e_n).$ Entonces

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n^m g_n}{e_n^{m-1}(mg_n + e_n g_n')} = e_n \, \frac{g_n}{mg_n + e_n g_n'}.$$

El paso de Newton modificado queda

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = e_n - m \, e_n \, \frac{g_n}{mg_n + e_n g_n'} = e_n \bigg(1 - \frac{mg_n}{mg_n + e_n g_n'} \bigg) \, .$$

Escriba el denominador como $mg_n\bigg(1+\frac{e_ng_n'}{mg_n}\bigg);$ usando la expansión

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + O(z^3) \quad (z \to 0),$$

se obtiene

$$\frac{mg_n}{mg_n+e_ng_n'}=1-\frac{e_ng_n'}{mg_n}+O(e_n^2).$$

Sustituyendo en la expresión de e_{n+1} :

$$e_{n+1} = e_n \bigg(1 - \left[1 - \frac{e_n g_n'}{m g_n} + O(e_n^2) \right] \bigg) = \frac{g_n'}{m g_n} \, e_n^2 + O(e_n^3).$$

Como g es C^1 y $g(\alpha) \neq 0$, tenemos $g_n \to g(\alpha), \, g'_n \to g'(\alpha)$ cuando $e_n \to 0$, y por tanto existe una constante

$$C = \frac{g'(\alpha)}{m \, g(\alpha)}$$

tal que

$$e_{n+1} = C e_n^2 + O(e_n^3).$$

La relación de error $e_{n+1} = Ce_n^2 + O(e_n^3)$ muestra que el **método de Newton modificado** es cuadráticamente convergente para raíces de multiplicidad m.

Comentario. Para m=1 (raíz simple) se recupera el Newton clásico con $e_{n+1}=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}e_n^2+O(e_n^3)$. Para $m\geq 2$, el factor cuadrático es $C=\frac{g'(\alpha)}{mg(\alpha)}$, donde $f(x)=(x-\alpha)^mg(x)$ y $g(\alpha)\neq 0$.

Ejercicio 22

i Instrucción

El objetivo de este ejercicio es demostrar la convergencia del método de la **Secante** sin utilizar el Teorema de punto fijo de Banach.

Teorema:

Sea f una función de clase $C^2[a,b]$, con a < b. Si existe un punto x tal que f(x) = 0 y $f'(x) \neq 0$, entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que si x_0 y x_1 están dentro del intervalo $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, la

sucesión generada por el método de la secante

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

está bien definida dentro del intervalo $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ y converge a x, cero de la ecuación f(x)=0.

a) Sea (r_n) una sucesión de números reales positivos tales que:

$$r_{n+1} \le r_n r_{n-1}$$

Pruebe que si $r_0 < 1$ y $r_1 < 1$, entonces la sucesión (r_n) está acotada por 1 y converge a 0. Además, pruebe que existe una constante C tal que:

$$r_n \leq Cr^{\rho}$$
,

donde r es un número estrictamente menor que 1, y

$$\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

b) Se denota:

$$f[x_n,x_{n-1}]:=\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$$

pruebe que:

$$f(x_n) = (x_n - x)f[x_n, x]$$

c) Pruebe que:

$$x_{n+1} - x = (x_n - x) \cdot \frac{f[x_n, x_{n-1}] - f[x_n, x]}{f[x_n, x_{n-1}]}$$

d) Pruebe que:

$$x_{n+1}-x=\frac{(x_n-x)(x_n-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},x]}{f[x_n,x_{n-1}]},$$

donde:

$$f[x_n,x_{n-1},x] := \frac{f[x_n,x_{n-1}] - f[x_n,x]}{x_n - x}$$

e) Sea $[x - \epsilon_1, x + \epsilon_1]$ un intervalo sobre el cual $|f'(x)| \ge M$.

Pruebe que si x_n y x_{n-1} están dentro del intervalo, entonces:

$$|f[x_n,x_{n-1}]| \geq M$$

f) Sea L la cota superior de |f''| en el intervalo $[x-\epsilon_1,x+\epsilon_1]$. Pruebe que si x_n y x_{n-1}

están dentro del intervalo, entonces:

$$|f[x_n,x_{n-1},x]| \leq \frac{L}{2}$$

g) Pruebe que:

$$|x_{n+1}-x|\leq \frac{L}{2M}|x_n-x|\cdot |x_{n-1}-x|$$

h) Tome:

$$r_n := \frac{L}{2M} |x_n - x|, \quad \mathbf{y} \quad \varepsilon < \min\left(\epsilon_1, \frac{2M}{L}\right)$$

usando (a), concluya que si x_0 y x_1 están dentro del intervalo $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$, entonces x_n está dentro del intervalo para todo n, y $|x_n-x|\to 0$ cuando $n\to\infty$.

Solución

Ejercicio 23

i Instrucción

Pruebe los Teoremas 7, 10, 11 y 12 de la presentación de la clase.

Solución

Teorema 7

Sea f una función de clase $C^2[a, b]$ con a < b.

Si existe un punto x tal que f(x)=0 y $f'(x)\neq 0$, entonces existe un número $\varepsilon>0$ tal que si x_0 y x_1 están dentro del intervalo $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$, la sucesión generada por el **método de la secante**

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-2} - x_{n-1})f(x_{n-1})}{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}$$

está bien definida dentro del intervalo $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ y converge a x, cero de la ecuación f(x)=0.

Prueba

Como $f'(\alpha) \neq 0$ y f' es continua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I := [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$. Luego f es estrictamente monótona en I.

Si $x_{n-2},x_{n-1}\in I$ y $x_{n-2}\neq x_{n-1}$, entonces $f(x_{n-2})\neq f(x_{n-1})$; por el Teorema del Valor Medio existe ξ_n entre x_{n-2} y x_{n-1} con

$$\frac{f(x_{n-2})-f(x_{n-1})}{x_{n-2}-x_{n-1}}=f'(\xi_n)\neq 0,$$

por lo que x_n queda bien definido. Además, como f es monótona y $f(\alpha) = 0$, el punto x_n cae entre x_{n-2} y x_{n-1} , de modo que por inducción toda la sucesión permanece en I si $x_0, x_1 \in I$.

Sea $e_n := x_n - \alpha.$ La expansión de Taylor alrededor de α da, para x cercano a $\alpha,$

$$f(x) = f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{1}{2}f''(\eta_x)(x - \alpha)^2,$$

donde η_x está entre x y α . Aplicando en x_{n-1} y x_{n-2} y sustituyendo en la fórmula de la secante, tras simplificar se obtiene

$$e_n = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} e_{n-1} e_{n-2} + O(e_{n-1}^2 e_{n-2}) + O(e_{n-1} e_{n-2}^2).$$

En particular, existen C>0 y (reduciendo ε si fuera necesario) $\delta\in(0,\varepsilon]$ tales que si $|e_0|,|e_1|<\delta$, entonces

$$|e_n| \le C \, |e_{n-1}| \, |e_{n-2}| \qquad (n \ge 2).$$

Elija δ tal que $C\delta < 1$. Entonces, por inducción,

$$|e_2| \leq C|e_1||e_0| < \delta, \qquad |e_3| \leq C|e_2||e_1| < \delta, \quad \dots$$

por lo que todas las iteraciones permanecen en I y la sucesión $\{e_n\}$ es decreciente a 0. Además, de la relación asintótica

$$e_n \sim \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} e_{n-1} e_{n-2},$$

se deduce la **convergencia superlineal** de orden $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Concluimos que, para x_0, x_1 suficientemente cercanos a α , la secuencia generada por la secante está bien definida en I y **converge a** α .

? Teorema 10

Sea f una función de clase $C^2[a,b]$.

Si existe un punto \tilde{x} tal que $f(\tilde{x})=0,$ $f'(\tilde{x})\neq 0$ y $f''(\tilde{x})\neq 0$, entonces existe un número $\varepsilon>0$ tal que si x_0 y x_1 están dentro del intervalo $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$, la sucesión generada por el **método** de la secante

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-2} - x_{n-1})f(x_{n-1})}{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}$$

converge a \tilde{x} con orden de al menos $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618.$

♦ Prueba

Denotemos el error $e_n := x_n - \tilde{x}$. Por Taylor alrededor de \tilde{x} , para x cercano a \tilde{x} ,

$$f(x) = f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \frac{1}{2}f''(\tilde{x})(x - \tilde{x})^2 + r(x), \qquad r(x) = o((x - \tilde{x})^2).$$

Aplicando esto a x_{n-1} y x_{n-2} y sustituyendo en la fórmula de la secante, usando además el Teorema del Valor Medio para el denominador

$$\frac{f(x_{n-2})-f(x_{n-1})}{x_{n-2}-x_{n-1}}=f'(\xi_n)\quad (\xi_n \text{ entre } x_{n-2},x_{n-1}),$$

se obtiene, tras álgebra directa (y absorbiendo los restos en $o(\cdot)$),

$$e_n = \frac{f''(\tilde{x})}{2, f'(\tilde{x})}, e_{n-1}e_{n-2}; +; o(e_{n-1}e_{n-2}). \tag{1}$$

En particular, existe un C > 0 tal que (para n grande)

$$|e_{n+1}|; =; C, |e_n|, |e_{n-1}|; +; o(|e_n|, |e_{n-1}|), \qquad C = \left| \frac{f''(\tilde{x})}{2, f'(\tilde{x})} \right|. \tag{2}$$

De aquí se deduce que la secuencia es bien definida y converge localmente (si $|e_0|$, $|e_1|$ son suficientemente pequeños, la relación (2) hace decrecer los errores a cero). Buscamos un modelo asintótico de la forma

$$|e_n| \sim \lambda, |e_{n-1}|^{\alpha}, \qquad \lambda > 0, \ \alpha > 1. \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2) y despreciando términos de orden menor, $|e_{n+1}| \sim C |e_n| |e_{n-1}| \sim C (\lambda |e_{n-1}|^{\alpha}) |e_{n-1}| = C \lambda |e_{n-1}|^{\alpha+1}$. Pero por (3) también $|e_{n+1}| \sim \lambda |e_n|^{\alpha} \sim \lambda (\lambda |e_{n-1}|^{\alpha})^{\alpha} = \lambda^{\alpha+1} |e_{n-1}|^{\alpha^2}$ Igualando exponentes y coeficientes dominantes se obtiene el sistema

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \qquad \lambda^\alpha = C.$$

La ecuación cuadrática da

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
 (la otra raíz < 1 se descarta).

Y el factor asintótico es $\lambda = C^{1/\alpha}$.

De (2) y del cálculo precedente se concluye que la secante, cerca de una raíz simple con $f''(\tilde{x}) \neq 0$, verifica

$$|e_{n+1}|=\lambda, |e_n|^\alpha+o\big(|e_n|^\alpha\big), \qquad \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1,$$

por lo que converge localmente y su orden de convergencia es al menos α .

Teorema 11

Sea (x_n) una sucesión que converge a x con orden lineal con constante asintótica $\lambda < 1$, además se asume que $e_n = x_n - x \neq 0$ para todo n. Entonces la sucesión (\tilde{x}_n) , definida en (1.14), converge a x más rápido que (x_n) .

Prueba

Como la convergencia de (x_n) a x es lineal con constante $\lambda < 1$, existe $c \neq 0$ tal que

$$e_n = x_n - x = c \lambda^n + r_n, \qquad \frac{r_n}{\lambda^n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$
 (2)

Expresamos las diferencias progresivas usando (2):

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = e_{n+1} - e_n = c(\lambda^{n+1} - \lambda^n) + o(\lambda^n) = c(\lambda - 1)\lambda^n + o(\lambda^n),$$

$$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = c(\lambda - 1)^2 \lambda^n + o(\lambda^n)$$
(3)

Inserte (3) en la fórmula de Aitken (1.14):

$$\begin{split} \tilde{x}_{n+3} - x &= (x_n - x) - \frac{(\triangle x_n)^2}{\triangle^2 x_n} \\ &= \left[c\lambda^n + o(\lambda^n) \right] - \frac{\left[c(\lambda - 1)\lambda^n + o(\lambda^n) \right]^2}{c(\lambda - 1)^2 \lambda^n + o(\lambda^n)}. \end{split}$$

Factorizando $c\lambda^n$ arriba y abajo y usando Notación de Landau,

$$\frac{(\triangle x_n)^2}{\triangle^2 x_n} = c\lambda^n \; \frac{(1+o(1))}{(1+o(1))} = c\lambda^n + o(\lambda^n).$$

Por tanto,

$$\tilde{e}_{n+3} := \tilde{x}_{n+3} - x = \left[c\lambda^n + o(\lambda^n)\right] - \left[c\lambda^n + o(\lambda^n)\right] = o(\lambda^n). \tag{4}$$

De (2)–(4) se tiene

$$\frac{|\tilde{e}_{n+3}|}{|e_n|} \longrightarrow 0$$

es decir, $|\tilde{x}_{n+3}-x|=o(|x_n-x|);$ por lo tanto, (\tilde{x}_n) converge más rápido que $(x_n).$

? Teorema 12

Si el método de punto fijo $x_{n+1}=g(x_n)$ converge linealmente, entonces el orden de convergencia del método de Steffensen es al menos dos.

Sea $e_n:=x_n-\tilde{x}.$ Como g es C^2 en un entorno de \tilde{x} con $g(\tilde{x})=\tilde{x},$ por Taylor:

$$g(\tilde{x} + e) = \tilde{x} + ae + be^2 + O(e^3), \qquad a := g'(\tilde{x}), \ b := \frac{1}{2}g''(\tilde{x}).$$

Entonces

$$e_{n+1} = ae_n + be_n^2 + O(e_n^3). (1)$$

Escribamos las diferencias progresivas de la sucesión de punto fijo:

$$\Delta x_n := x_{n+1} - x_n = e_{n+1} - e_n = (a-1)e_n + be_n^2 + O(e_n^3), \tag{2}$$

у

$$\Delta^2 x_n := x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n. \tag{3}$$

Usando (1) en n y n + 1,

$$\begin{split} e_{n+2} &= ae_{n+1} + be_{n+1}^2 + O(e_{n+1}^3) \\ &= a(ae_n + be_n^2) + b(ae_n)^2 + O(e_n^3) \\ &= a^2e_n + b(a+a^2)e_n^2 + O(e_n^3) \end{split}$$

Sustituyendo en (3) y simplificando,

$$\Delta^2 x_n = (a-1)^2 e_n + b \left(a^2 + a - 2\right) e_n^2 + O(e_n^3). \tag{4} \label{eq:delta-x}$$

El paso de Steffensen es precisamente la aceleración Δ^2 de Aitken:

$$x_{n+1}^{(S)} = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}, \qquad \tilde{e}_{n+1} := x_{n+1}^{(S)} - \tilde{x} = e_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}.$$

Con (2)–(4),

$$\begin{split} (\Delta x_n)^2 &= (a-1)^2 e_n^2 + 2(a-1)be_n^3 + O(e_n^4), \\ \Delta^2 x_n &= (a-1)^2 e_n \Big[1 + \frac{b(a^2 + a - 2)}{(a-1)^2} e_n + O(e_n^2) \Big]. \end{split}$$

Dividiendo,

$$\frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} = e_n \Big[1 + \tfrac{2b}{(a-1)} e_n - \tfrac{b(a^2 + a - 2)}{(a-1)^2} e_n + O(e_n^2) \Big] = e_n + \frac{ab}{1-a} \, e_n^2 + O(e_n^3).$$

Por lo tanto,

$$\tilde{e}_{n+1} = e_n - \left(e_n + \frac{ab}{1-a} e_n^2 + O(e_n^3)\right) = \frac{ab}{a-1} e_n^2 + O(e_n^3).$$