

Apuntes Teoría MA0501

Diego Alberto Vega Víquez

2025-08-28

Tabla de contenidos

| | |
|--|-----------|
| Fundamentos de la Programación en Lenguaje R | 2 |
| Funciones | 2 |
| Usando For, If y While | 2 |
| Algoritmos, aproximaciones y error | 3 |
| Aproximaciones y Error | 3 |
| Aritmética punto flotante | 3 |
| Problemas con la aritmética punto flotante | 8 |
| Algoritmos y convergencia | 10 |
| Origen del Error | 14 |
| Elementos de análisis funcional | 17 |
| Elementos de Análisis Funcional para Análisis Numérico | 17 |
| Espacios Normados | 17 |
| Productos escalares | 22 |
| Complejidad | 25 |
| El teorema de punto fijo de Banach | 29 |
| El teorema de la mejor aproximación | 33 |
| Solución numérica de ecuaciones no lineales. | 38 |
| El método de aproximaciones sucesivas. | 38 |
| Teoremas de convergencia y del error | 38 |
| Método de bisección, método regula falsi y método de la secante. | 50 |
| Método de la Bisección | 50 |
| Método de Newton–Raphson. | 55 |
| Aceleración de la convergencia y método de Steffensen. | 55 |

Fundamentos de la Programación en Lenguaje R

Funciones

A continuación un ejemplo de una función en **R**

```
area.triangulo <- function(base,altura) {  
  area <- (base*altura)/2  
  return(area)  
}  
  
area.triangulo(2,5)
```

①

① Comunmente usamos el punto para separar las palabras en el nombre de las variables

```
[1] 5
```

Usando For, If y While

```
encuentra.cero.f <- function(v) {  
  s <- -1  
  for(i in 1:length(v)) {  
    if((v[i]==0) && (s == -1)) {  
      s<-i  
    }  
  }  
  if (s != -1) {  
    return(s)  
  }  
  else {  
    return("¡El vector no tiene ningún cero!")  
  }  
}  
  
vec<-c(4,-7,2,1,9)  
encuentra.cero.f(vec)
```

```
[1] "¡El vector no tiene ningún cero!"
```

La siguiente función calcula la suma del valor absoluto de las entradas de un vector, es de decir, la norma 1 del vector dada por

$$|v[1]| + |v[2]| + \dots + |v[n]|$$

```
normal <- function(v) {
  suma <- 0
  i = 1
  while (i <= length(v)) {
    suma <- suma + abs(v[i])
    i <- i + 1
  }
  return(suma)
}

vec0<-c(4,-7,2,1)
normal(vec0)
```

[1] 14

Algoritmos, aproximaciones y error

Aproximaciones y Error

Aritmética punto flotante

Punto flotante

Definición: Forma Punto Flotante

Un número real x está en **forma punto flotante** si se escribe de la forma

$$0.d_1d_2\cdots d_k \times 10^n,$$

donde $0 \leq d_i \leq 9$, $d_1 \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Ejemplo

$$\pi = 0.31415 \times 10^1.$$

! Observación

- En análisis numérico todas las respuestas deben darse en **notación de punto flotante**.
- Si $x \in \mathbb{R}$, entonces se escribe como

$$x = 0.d_1d_2d_3 \cdots \times 10^n,$$

pero el computador solo puede **almacenar una cantidad finita de dígitos** por limitaciones de memoria.

Por lo tanto, quedan **dos posibilidades**:

1. Cortar

-

$$x \approx fl(x) = 0.d_1d_2 \cdots d_k \times 10^n,$$

es decir, **cortar a partir del dígito $k + 1$** .

2. Redondear y cortar

- Si $d_{k+1} \geq 5$ entonces **sume 1 a d_k** y corte.
- Si no, **solamente corte**.

💡 Ejemplo

$$\pi = 3.14159265 \cdots, \quad \text{con } k = 5 \text{ tenemos:}$$

$$fl(\pi) = 0.31415 \times 10^1 \quad (\text{Cortando})$$

$$fl(\pi) = 0.31416 \times 10^1 \quad (\text{Redondeando})$$

i Definición: Error de Redondeo

El error que resulta de reemplazar x por $fl(x)$ se denomina **Error de Redondeo**.

¿Cómo medir, controlar, la propagación del error?

i Definición: Error absoluto & Error relativo

Si P^* es una aproximación de P se llama:

$$\text{Error absoluto} = |P - P^*|$$

$$\text{Error relativo} = \frac{|P - P^*|}{|P|}, \quad \text{para } P \neq 0$$

Teorema

Sea $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, entonces:

1. Si $fl(x)$ se obtiene usando k -dígitos de x **cortando**, entonces:

$$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \leq 10^{-k+1}.$$

2. Si $fl(x)$ se obtiene usando k -dígitos de x **redondeado**, entonces:

$$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1} = 5 \times 10^{-k}.$$

Ejemplo

Si $P = 0.3000 \times 10^1$ y $P^* = 0.3100 \times 10^1$ entonces:

$$|P - P^*| = 0.1 \times 10^0, \quad \frac{|P - P^*|}{|P|} = 0.33 \times 10^{-1}$$

Pero si $P = 0.3000 \times 10^4$ y $P^* = 0.3100 \times 10^4$ entonces:

$$|P - P^*| = 0.1 \times 10^3, \quad \frac{|P - P^*|}{|P|} = 0.33 \times 10^{-1}$$

Prueba

1.

$$\begin{aligned} \left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| &= \left| \frac{0.d_1 d_2 \cdots \times 10^n - 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n}{0.d_1 d_2 \cdots \times 10^n} \right| \\ &= \left| \frac{0.d_{k+1} d_{k+2} \cdots \times 10^{n-k}}{0.d_1 d_2 \cdots \times 10^n} \right| \\ &= \left| \frac{0.d_{k+1} d_{k+2} \cdots}{0.d_1 d_2 \cdots} \right| \times 10^{-k} \\ &\leq \frac{1}{0.1} \times 10^{-k} \\ &= 10^{-k+1}. \end{aligned}$$

2.

Ya que $fl(x)$ es una aproximación de x con redondeo a k dígitos eso significa que podemos escribir $fl(x)$ de la siguiente forma

$$fl(x) = 0.d_1d_2 \cdots d_k \times 10^n$$

Sea $x \in \mathbb{R}$ que escribiremos como

$$x = 0.d_1d_2 \cdots \times 10^n$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| &= \left| \frac{0.d_1d_2 \cdots \times 10^n - 0.d_1d_2 \cdots d_k \times 10^n}{0.d_1d_2 \cdots \times 10^n} \right| \\ &= \left| \frac{0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots \times 10^{n-k}}{0.d_1d_2 \cdots \times 10^n} \right| \\ &= \left| \frac{0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots}{0.d_1d_2 \cdots} \right| \times 10^{-k} \end{aligned}$$

Aquí hay que analizar por casos:

- Suponga que $d_{k+1} < 5$

En este caso basta con cortar en d_k así:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| &= \left| \frac{0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots}{0.d_1d_2 \cdots} \right| \times 10^{-k} \\ &\leq 0.5 \cdot \left| \frac{1}{0.1} \right| \times 10^{-k} \\ &= 0.5 \times 10^{-k+1} \end{aligned}$$

- Suponga que $d_{k+1} \geq 5$.

Recuerde que para este caso en $fl(x)$ pasa que d_k es una unidad mayor que el d_k de x . De esta forma se va a cumplir que $d_{j_{\text{real}}} = d_{j_{\text{aproximado}}}$ para $j = \{1, 2, \dots, k-1\}$ así se tiene que

$$|x - fl(x)| = 10^{1-k} \cdot (1 - 0.d_{k+1} \cdots)$$

$$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| = \frac{10^{1-k} \cdot (1 - 0.d_{k+1} \dots)}{|0.d_1 d_2 \dots \times 10^n|}$$

Vea que

$$\begin{aligned} d_{k+1} \geq 5 &\implies 0.d_{k+1} \dots \geq \frac{1}{2} \\ &\implies 1 - 0.d_{k+1} \dots \leq \frac{1}{2} \\ &\implies 1 - 0.d_{k+1} \dots \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así

$$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \leq \frac{10^{1-k} \cdot 0.5}{|0.d_1 d_2 \dots \times 10^n|} \leq 10^{1-k} \cdot 0.5$$

Luego, concluya que

$$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1} \quad \blacksquare$$

Definición: Dígitos significativos

Se dice que un número P^* aproxima a P con t **dígitos significativos** si $t \in \mathbb{N}$ es el número más grande tal que:

$$\frac{|P - P^*|}{|P|} < 5 \times 10^{-t} = 0.5 \times 10^{-t+1}.$$

Ejemplo

$$x = \pi = 0. \underbrace{3141}_{4 \text{ dígitos}} 59265 \dots \times 10^1.$$

$$x^* = \frac{22}{7} = 0. \underbrace{3142}_{\text{dígitos distintos}} 8517 \times 10^1.$$

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} = 0.402 \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-4+1}.$$

Por lo que x^* aproxima x con **4 dígitos significativos**.

Ejemplo

¿Qué valores puede tomar x^* para aproximar 1000 con **4 dígitos significativos**?

$x = 1000 = 0.1000 \times 10^4$, luego tenemos que:

$$\left| \frac{x^* - 1000}{1000} \right| < 5 \times 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad -5 \times 10^{-4} < \frac{x^* - 1000}{1000} < 5 \times 10^{-4},$$

$$\Rightarrow 999.5 < x^* < 1000.5.$$

Note que

$$x^* = 0.9996 \times 10^3$$

aproxima a x con **4 dígitos significativos**,

pero

$$y = 0.1001 \times 10^4$$

no aproxima a x con 4 dígitos significativos.

Problemas con la aritmética punto flotante

- **División:**

Si $x \cong x + \varepsilon$ y se divide entre δ muy pequeño se tiene:

$$\frac{x}{\delta} \cong \frac{x + \varepsilon}{\delta} = \frac{x}{\delta} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{\delta}}_{(*)}$$

(*): Nuevo error enorme

- **Resta de dos números casi iguales:**

$$fl(x) = 0.d_1d_2 \cdots d_p\alpha_{p+1}\alpha_{p+2} \cdots \alpha_k \times 10^n$$

$$fl(y) = 0.d_1d_2 \cdots d_p\beta_{p+1}\beta_{p+2} \cdots \beta_k \times 10^n$$

$$x - y \cong fl(x) - fl(y) = 0.\underbrace{\gamma_{p+1}\gamma_{p+2} \cdots \gamma_k}_{(**)} \times 10^{n-p}$$

(**): Podría ser basura.

Notación

$$\Delta_x = |x - x^*|.$$
$$\delta_x = \frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{\Delta_x}{|x|}.$$

Teorema

Si $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ y $x^* = x_1^* + x_2^* + \dots + x_n^*$ con $x_i \geq 0$ entonces:

$$\Delta_x \leq \sum_{i=1}^n \Delta_{x_i}.$$
$$\delta_x \leq \max\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_n}\}.$$

Prueba

$$\Delta_x = |x - x^*| = \left| \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i^* \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^*| = \sum_{i=1}^n \Delta_{x_i}.$$

Sabemos que $\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} \leq \frac{\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \dots + \Delta_{x_n}}{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|},$

$$\delta_{x_i} = \frac{\Delta_{x_i}}{|x_i|} \Rightarrow \Delta_{x_i} = \delta_{x_i} |x_i|,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta_x &\leq \frac{|x_1|\delta_{x_1} + |x_2|\delta_{x_2} + \dots + |x_n|\delta_{x_n}}{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|} \\ &\leq \frac{\max\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_n}\} (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)}{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|} \\ &\leq \max\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_n}\}, \quad \text{pues } x_i \geq 0 \ \forall i. \end{aligned}$$

! Observación

Se debe evitar la pérdida de dígitos significativos:

Por ejemplo, al evaluar:

$$f(x) = 1 - \cos(x),$$

con x cercano a 0 se producirá una pérdida de dígitos significativos.

Esto se puede evitar racionalizando, como sigue:

$$f(x) = 1 - \cos(x) = \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}.$$

Algoritmos y convergencia

¿Qué es un algoritmo?

i Definición: Algoritmo

Un algoritmo es un procedimiento que describe, sin ninguna ambigüedad, una sucesión finita de pasos a realizar en orden específico, con el propósito de resolver un problema.

Características:

- Finito.
- Definido (no ambiguo).
- Entrada.
- Salida.
- Efectivo.
- Eficiente.

Para representar las instrucciones utilizaremos pseudocódigo.

💡 Ejemplo

Para calcular

$$\sum_{k=a}^{\infty} f(x, k)$$

tenemos:

Entrada: ε, f, a, x .

Salida: Valor aproximado de

$$\sum_{k=a}^{\infty} f(x, k).$$

```
k <- a
s <- 0
T <- f(x,k)
while |T| < do
  s <- s + t
  t <- t * (f(x,k+1) / f(x,k))
  k <- k + 1
end while
return s
```

i Definición: Algoritmos Estables

Un algoritmo se dice **estable** si pequeños cambios en la entrada producen pequeños cambios en la salida.

En caso contrario, es decir, pequeños cambios en la entrada producen grandes cambios en la salida, entonces el algoritmo se dice **inestable (caótico)**.

i Notación

E = Error inicial.

E_n = Error luego de n pasos.

i Definición: Crecimiento lineal del error

Si

$$|E_n| = CnE,$$

con C constante, entonces el crecimiento del error es **lineal**.

i Definición: Crecimiento exponencial del error

Si

$$|E_n| = K^n E, \quad K > 1,$$

entonces el crecimiento del error es **exponencial**.

! Observación

- Crecimiento del error lineal \Leftrightarrow estable.
- Crecimiento del error exponencial \Leftrightarrow inestable.

i Definición: Rapidez de convergencia

Sea $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a α , se dice que $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge con una rapidez $\mathcal{O}(\beta_n)$, donde $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es otra sucesión ($\beta_n \neq 0 \forall n$) si:

$$\frac{|\alpha_n - \alpha|}{|\beta_n|} < K$$

para n suficientemente grande y K constante que no depende de n .

i Notación

$$\alpha_n = \alpha + \mathcal{O}(\beta_n).$$

$$\alpha_n \rightarrow \alpha \text{ con rapidez } \mathcal{O}(\beta_n).$$

i Observación

$$\frac{|\alpha_n - \alpha|}{|\beta_n|} < K \iff -K\beta_n + \alpha < \alpha_n < K\beta_n + \alpha.$$

💡 Ejemplo

Si $\alpha_n = \frac{n+3}{n^3}$, entonces

$$\alpha_n = 0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

pues:

$$\left| \frac{\alpha_n - \alpha}{\beta_n} \right| = \left| \frac{\frac{n+3}{n^3} - 0}{\frac{1}{n^2}} \right| = \left| \frac{n^3 + 3n^2}{n^3} \right| = \left| 1 + \frac{3}{n} \right| \leq 4, \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Es decir, $\frac{n+3}{n^3}$ converge a 0 tan rápido como $\frac{1}{n^2}$ converge a 0.

💡 Ejemplo

Si

$$\alpha_n = \frac{\sin(n)}{n},$$

entonces

$$\alpha_n = 0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

i Observación: Velocidad de convergencia de los ciclos

1. For[i=1, i++, i<=N, ...]

tiene una velocidad de convergencia $\mathcal{O}(N)$.

2. For[i=1, i++, i<=N,

For[j=1, j++, j<=M, ...]]

tiene una velocidad de convergencia $\mathcal{O}(N^2)$.

3. For[i=1, i++, i<=N,

For[j=1, j++, j<=M,

For[k=1, k++, k<=L, ...]]]

tiene una velocidad de convergencia $\mathcal{O}(N^3)$.

Origen del Error

Tipos de Error

Existen dos tipos de error: El error en los datos y el error computacional

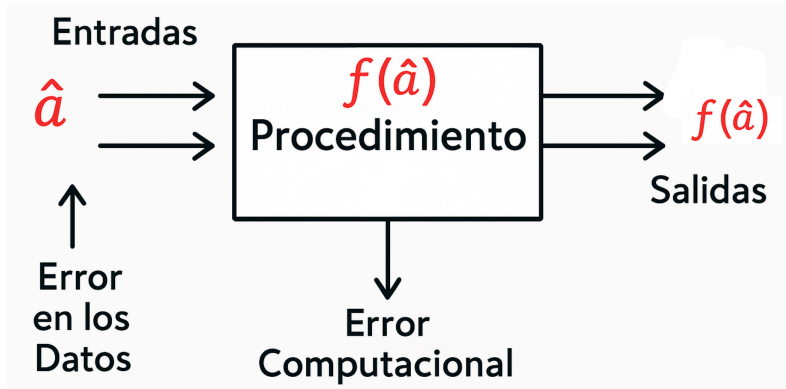


Figura 1: Tipos de Error

i Definición: Propagación del error

Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea \hat{a} una aproximación de a y f una función o procedimiento, entonces

$$f(\hat{a}) - f(a)$$

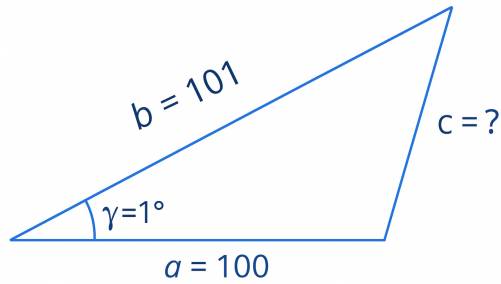
se llama **propagación del error** o **error propagado**.

Esto se ilustra en el siguiente gráfico

AGRAGAR GRAFICO ANDREY

💡 Ejemplo

Suponga que se desea calcular c en el siguiente triángulo:



Supongamos que a tiene un error y usamos 100.1.

Entonces el error se propaga como se muestra en la siguiente tabla:

| Expresión | Exacto | Aproximado | Error relativo |
|--|------------|------------------------------|----------------|
| a | 100 | 100.1 | 0.1 % |
| $b - a$ | 1 | 0.9 | -10 % |
| $(b - a)^2$ | 1 | 0.81 | -19 % |
| $4ab \sin^2(\frac{\gamma}{2})$ | 3.0765 ... | 3.0796 ... | 0.1 % |
| $(b - a)^2 + 4ab \sin^2(\frac{\gamma}{2})$ | 4.0765 ... | 3.8896 ... | -4.6 % |
| c | 2.0190 ... | 1.9722 ... | -2.3 % |
| Error relativo inicial: | 0.1 % | Error relativo final: | -2.3 % |

💡 Ejemplo: Inestabilidad Numérica

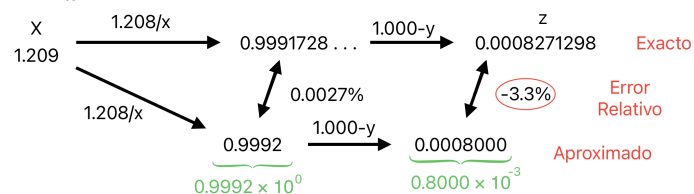
Suponga que se desea calcular

$$z = 1.000 - \frac{1.208}{x}$$

en una computadora que solamente utiliza 4 dígitos, con $x = 1.209$.

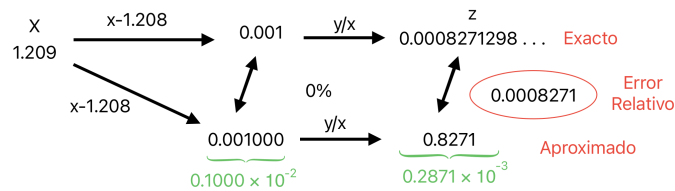
Algoritmo 1.

Calcule primero $y := \frac{1.208}{x}$ y luego $z := 1.000 - y$



Algoritmo 2.

Calcule primero $y := x - 1.208$ y luego $z := \frac{y}{x}$



Principio Básico:

Si es posible, evite operaciones sensibles con operandos contaminados por la propagación del error.

💡 Ejemplo: Raíces cuadráticas y propagación del error

Usualmente, para calcular las raíces de una ecuación cuadrática se usa:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

pero si $b > 0$ es mejor usar:

$$x_1 = \frac{-2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

y si $b < 0$ es mejor usar:

$$x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

💡 Ejemplos: Evitar cancelación numérica

Otros ejemplos que evitan problemas de cancelación cuando $x \approx y$ son:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &\rightarrow (x - y)(x + y), \\ \cos(x) - 1 &\rightarrow 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{para } x \rightarrow 0, \\ \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) &\rightarrow 2 \tanh^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right), \\ e^x - e^y &\rightarrow 2 \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{\frac{x+y}{2}}. \end{aligned}$$

Elementos de análisis funcional

Elementos de Análisis Funcional para Análisis Numérico

Espacios Normados

Definición: Espacio normado

Sea X un espacio vectorial complejo (o real).

Una función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

para todo $x, y \in X$ y para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}),

se llama **norma** en X .

El espacio vectorial X provisto de una norma se llama **espacio normado**.

Ejemplo

Algunas normas de \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n son:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|,$$

para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$.

Las normas anteriores son conocidas como las normas ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_∞ respectivamente.

Las tres son casos particulares de la **norma** ℓ_p :

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

La norma ℓ_∞ es el límite de ℓ_p cuando $p \rightarrow \infty$.

Proposición

Para toda norma se tiene la **segunda desigualdad triangular**:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|,$$

para todo $x, y \in X$.

Prueba

De la desigualdad triangular se tiene que

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

por lo tanto

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Análogamente, cambiando el rol de x y y , se obtiene

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|,$$

y por lo tanto se cumple la desigualdad.

Definición: Norma

Para dos elementos x, y en un espacio normado X la norma $\|x - y\|$ se llama **distancia** entre x y y .

Definición: Sucesión Convergente

Una sucesión (x_n) de elementos en un espacio normado X se llama **convergente** si existe un elemento $x \in X$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0,$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero $N(\varepsilon)$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ para todo $n > N(\varepsilon)$.

El elemento x es llamado el **límite** de la sucesión (x_n) y se escribe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Si una sucesión no converge se llama **divergente**.

Proposición

El límite de una sucesión convergente es **único**.

Prueba

(Ejercicio) ■

Definición: Normas Equivalentes

Dos normas en un espacio vectorial se llaman **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de sucesiones convergentes.

Teorema

Dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ en un espacio vectorial X son equivalentes si y solamente si existen números positivos c y C tal que:

$$c\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\|x\|_a, \quad \forall x \in X.$$

Prueba

Sean las normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ equivalentes. Suponga que no existe $C > 0$ tal que $\|x\|_b \leq C\|x\|_a$ para todo $x \in X$, entonces existe una sucesión (x_n) con $\|x_n\|_a = 1$ y $\|x_n\|_b \geq n^2$.

Luego la sucesión $y_n := x_n/n$ converge a cero con respecto a $\|\cdot\|_a$ pero no con respecto a $\|\cdot\|_b$, porque $\|y_n\|_b \geq n$.

Recíprocamente, si se tiene (2), entonces si $\|x_n - x\|_a \rightarrow 0$ es claro que $\|x_n - x\|_b \rightarrow 0$ y viceversa.

■

Teorema

En un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes.

Prueba

Ejercicio. ■

i Definición: Subconjunto cerrado

- Un subconjunto U de un espacio normado se llama **cerrado** si este contiene el límite de todas las sucesiones convergentes de U .
- La **clausura** \overline{U} de un conjunto U de un espacio normado X es el conjunto de todos los límites de sucesiones convergentes de U .
- Un subconjunto U de X se llama **abierto** si su complemento $X \setminus U$ es cerrado.
- Un conjunto U se llama **denso** en otro conjunto V si $V \subset \overline{U}$, es decir, si cada elemento de V es el límite de una sucesión convergente de U .
- Para cada $x_0 \in X$ y $r > 0$ el conjunto

$$B[x_0, r] := \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

es cerrado y se llama la **bola cerrada** de radio r y centro x_0 .

El conjunto

$$B(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

es abierto y se llama la **bola abierta** de radio r y centro x_0 .

💡 Ejemplo

- **Cerrado.** $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ es cerrado: toda sucesión convergente de puntos en $[0, 1]$ converge a un punto en $[0, 1]$.
- **Clausura.** Si $U =]0, 1[$, entonces $\overline{U} = [0, 1]$.
Si $U = \mathbb{Q}$, entonces $\overline{U} = \mathbb{R}$.
- **Abierto.** $]0, 1[\subset \mathbb{R}$ es abierto porque su complemento es $\mathbb{R} \setminus]0, 1[=]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$.
- **Denso en V .** \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$).
También $]0, 1[$ es denso en $[0, 1]$ pues $\overline{]0, 1[} = [0, 1]$.
- **Bolas (norma usual).**
En \mathbb{R} , con $x_0 = 2$, $r = 3$:

$$B[2, 3] = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq 3\} = [-1, 5],$$

$$B(2, 3) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 3\} =]-1, 5[.$$

En \mathbb{R}^2 , con $x_0 = (1, 2)$, $r = 2$:

$$B[(1, 2), 2] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \leq 2\},$$

$$B((1, 2), 2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < 2\}.$$

Definición

Un conjunto U se llama **acotado** si existe un número positivo C tal que

$$\|x\| < C \quad \text{para todo } x \in U.$$

Teorema

Toda sucesión acotada en un espacio normado de dimensión finita X contiene una subsucesión convergente.

Prueba

Sea u_1, u_2, \dots, u_n una base de X y sea (x_ν) una sucesión acotada. Entonces se puede escribir:

$$x_\nu = \sum_{j=1}^n \alpha_{j\nu} u_j.$$

Como x_ν es una sucesión acotada y usando la norma

$$\|x_\nu\|_{\infty B} := \max_{j=1,2,\dots,n} |\alpha_{j\nu}|,$$

se tiene que cada una de las sucesiones $(\alpha_{j\nu})$ es acotada en \mathbb{C} para cada $j = 1, 2, \dots, n$.

Por lo tanto, usando el teorema de Bolzano–Weierstrass se puede seleccionar una subsucesión

$\alpha_{j\nu(\ell)} \rightarrow \alpha_j$ cuando $\ell \rightarrow \infty$ para cada $j = 1, 2, \dots, n$.

Esto implica que:

$$x_{\nu(\ell)} \rightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \in X, \quad \text{cuando } \ell \rightarrow \infty.$$

■

Productos escalares

Definición: Producto interno y espacio pre-Hilbert

Sea X un espacio vectorial complejo (o real).

Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}) con las siguientes propiedades:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$,
2. $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$,
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
4. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ (o } \mathbb{R}),$

se llama **producto interno** en X .

Un espacio vectorial X provisto de un producto interno se llama **espacio pre-Hilbert**.

Observación

Una consecuencia inmediata de 3. y 4. es la **antilinealidad**:

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle.$$

Ejemplo

Un ejemplo de producto interno en \mathbb{C}^n (o \mathbb{R}^n) está dado por:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i},$$

donde $x := (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ y $y := (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$.

Teorema

Para todo producto interno se tiene la desigualdad de Cauchy–Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

para todo $x, y \in X$. Además se tiene igualdad si para todo x, y son linealmente dependientes.

Prueba

Si $x = 0$ la desigualdad es trivial.

Si $x \neq 0$, tome

$$z = y - \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x,$$

luego es claro que $\langle z, x \rangle = 0$ y que:

$$0 \leq \|z\|^2 = \left\langle y - \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x, y - \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x \right\rangle = \langle y, y \rangle - \frac{\langle y, x \rangle \langle x, y \rangle}{\|x\|^2} = \|y\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|x\|^2},$$

de donde se tiene la desigualdad. Además se tiene igualdad si para todo x, y son linealmente dependientes (ejercicio). ■

Teorema

Sea X un espacio vectorial complejo (o real).

Entonces la función:

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$$

define una norma en X , es decir, un espacio pre-Hilbert es siempre un espacio normado.

Prueba

Ejercicio (use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para probar la desigualdad triangular).

■

Definición: Elementos Ortogonales

- Dos elementos x y y de un espacio pre-Hilbert se llaman **ortogonales** si:

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

- Dos subconjuntos U y V se llaman **ortogonales** si $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $u \in U$ y $v \in V$.
- Si dos elementos son ortogonales se denota $x \perp y$ y si dos conjuntos son ortogonales se denota $U \perp V$.
- Un subconjunto $U \subseteq X$ se llama un **sistema ortogonal** si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x, y \in U$ con $x \neq y$.
- Un sistema ortogonal U de X se llama **ortonormal** si $\|x\| = 1$ para todo $x \in U$.

Teorema

Los elementos de un sistema ortogonal son linealmente independientes.

Prueba

Sea $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ un sistema ortogonal.

Si

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k q_k = 0,$$

y se multiplica a ambos lados por q_j , es inmediato que $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

■

Teorema [Gram–Schmidt]

Sea $\{u_0, u_1, \dots\}$ un conjunto finito o numerable de elementos linealmente independientes de un espacio de pre-Hilbert.

Entonces existe un sistema ortogonal único $\{q_0, q_1, \dots\}$ de la forma:

$$q_n = u_n + r_n, \quad \text{para } n = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

con $r_0 = 0$ y $r_n \in \text{gen}\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ para $n = 1, 2, \dots$

Además se tiene que:

$$\text{gen}\{u_0, u_1, \dots, u_n\} = \text{gen}\{q_0, q_1, \dots, q_n\}, \quad \text{para } n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Prueba

Asumamos que hemos construido elementos de la forma (3) con la propiedad (4) hasta q_{n-1} .

Por la propiedad (4) los elementos $\{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}\}$ son linealmente independientes y por lo tanto $\|q_k\| \neq 0$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Por lo tanto:

$$q_n = u_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle u_n, q_k \rangle}{\langle q_k, q_k \rangle} q_k,$$

está bien definido, y usando la hipótesis de inducción es fácil notar que

$$\langle q_n, q_k \rangle = 0, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Es claro que

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle u_n, q_k \rangle}{\langle q_k, q_k \rangle} q_k \in \text{gen}\{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}\} = \text{gen}\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}.$$

La unicidad queda de ejercicio al lector. ■

Compleitud

Definición: Sucesión de Cauchy

Una sucesión de elementos en un espacio normado X se llama **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon,$$

para todo $n, m \geq N(\varepsilon)$, es decir, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

Teorema

Toda sucesión convergente es de Cauchy

Prueba

Sea $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } n \geq N(\varepsilon).$$

Ahora, usando la desigualdad triangular:

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < \varepsilon,$$

para todo $n, m \geq N(\varepsilon)$. ■

Observación

El recíproco del teorema anterior no es válido en general, por esto tiene sentido dar la siguiente definición.

Definición: Subconjunto Completo

Un subconjunto U de un espacio normado X se llama **completo** si toda sucesión de Cauchy de elementos de U converge a un elemento en U .

Un espacio normado completo se llama **espacio de Banach**.

Un espacio pre-Hilbert se llama **espacio de Hilbert** si este es un espacio completo.

💡 Ejemplo

El espacio vectorial $C[a, b]$ provisto con la norma:

$$\|f\|_{\infty} := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

es un espacio de Banach.

🔥 Prueba

(Ejercicio) ■

💡 Ejemplo

El espacio vectorial $C[a, b]$ provisto con la norma L_1 :

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

NO es un espacio de Banach.

🔥 Prueba

Es evidente que $\|f\|_1$ es una norma.

Sin pérdida de generalidad se toma $[a, b] = [0, 2]$ y se escoge:

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Para todo $m > n$ se tiene que:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 (x^n - x^m) dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n, m \rightarrow \infty,$$

por lo tanto (f_n) es una sucesión de Cauchy.

Ahora, supongamos que la sucesión (f_n) converge a una función continua f con respecto a la norma L_1 , es decir:

$$\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Entonces:

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x) - x^n| dx + \int_0^1 x^n dx \leq \|f - f_n\|_1 + \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, de donde $f(x) = 0$ para $0 \leq x \leq 1$.

Además se tiene que

$$\int_1^2 |f(x) - 1| dx = \int_1^2 |f(x) - f_n(x)| dx \leq \|f - f_n\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

esto implica que $f(x) = 1$ para $1 \leq x \leq 2$.

Por lo tanto f no es continua, lo cual es una contradicción. ■

💡 Ejemplo

El espacio vectorial $C[a, b]$ provisto con la norma L_2 :

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^2$$

NO es un espacio de Banach.

Prueba

Hay que probar que el espacio vectorial $C[a, b]$ normado provisto con la norma L_2 **NO** es completo. Es decir, hay que encontrar una sucesión de Cauchy de elementos de U que **NO** converge a un elemento en U , siendo U un subconjunto del espacio vectorial $C[a, b]$. Sin pérdida de generalidad se toma $[a, b] = [0, 2]$ y se escoge:

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Para todo $m > n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_1 &= \left(\int_0^2 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 |x^n - x^m|^2 dx \right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 (x^{2n} - 2x^{n+m} + x^{2m}) dx \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{2}{n+m+1} + \frac{1}{2m+1} \right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n, m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

por lo tanto (f_n) es una sucesión de Cauchy.

Ahora, supongamos que la sucesión (f_n) converge a una función continua f con respecto a la norma L_1 , es decir:

$$\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \|(f - x^n) + x^n\|_1 \\ &\leq \|f - x^n\|_1 + \|x^n\|_1 \quad (\text{desigualdad triangular}) \\ &= \|f - f_n\|_1 + \left(\int_0^1 |x^n|^2 dx \right)^2 \\ &= \|f - f_n\|_1 + \left(\int_0^1 x^{2n} dx \right)^2 \\ &= \|f - f_n\|_1 + \left(\frac{1}{2n+1} \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

de donde $f(x) = 0$ para $0 \leq x \leq 1$.

Vea además que

Teorema

Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.

Prueba

Sea X un espacio normado con base u_1, u_2, \dots, u_n y sea (x_ν) una sucesión de Cauchy en X . Se puede escribir:

$$x_\nu = \sum_{j=1}^n \alpha_{j\nu} u_j$$

usando el Teorema 1 se tiene que existe un $C > 0$ tal que:

$$\max_{j=1,2,\dots,n} |\alpha_{j\nu} - \alpha_{j\mu}| \leq C \|x_\nu - x_\mu\|$$

para todo $\nu, \mu \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $(\alpha_{j\nu})$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{C} , entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que $\alpha_{j\nu} \rightarrow \alpha_j$ cuando $\nu \rightarrow \infty$ para cada $j = 1, 2, \dots, n$.

Por lo tanto (x_ν) converge a:

$$x_\nu \rightarrow x := \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \in X \quad \text{cuando } \nu \rightarrow \infty.$$

■

El teorema de punto fijo de Banach

Definición: Contracción

Sea U un subconjunto de un espacio normado X .

Un operador (una función) $A : U \rightarrow X$ se llama **una contracción** si existe una constante $q \in [0, 1[$ tal que:

$$\|Ax - Ay\| \leq q\|x - y\|, \quad \forall x, y \in U.$$

Definición: Continuidad de un operador

Sea U un subconjunto de un espacio normado X , y sea Y un espacio normado.

- Una función $A : U \rightarrow Y$ se llama **continua en** $x \in U$ si para toda sucesión (x_n) de U tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax.$$

- Un operador $A : U \rightarrow Y$ se llama **continuo** si es continuo en x para todo $x \in U$.

Proposición

Toda contracción es un operador continuo.

Prueba

La prueba es evidente, puesto que si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $\|Ax_n - Ax\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ ya que

$$\|Ax_n - Ax\| \leq q\|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

■

Definición: Operador Lipschitz

Un operador $A : U \rightarrow X$ se llama *Lipschitz* con constante de Lipschitz L si existe una constante positiva L tal que:

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|$$

para todo $x, y \in U$.

Es decir, una contracción es un operador *Lipschitz* con constante menor que uno.

Definición: Operador lineal

Un operador $A : X \rightarrow Y$ donde X y Y son espacios normados se llama **lineal** si:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

para todo $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}).

Teorema

Un operador lineal es continuo si y solo si es continuo en un elemento.

Prueba

Sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal continuo en $x_0 \in X$.

Entonces, para todo $x \in X$ y para toda sucesión $(x_n) \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que:

$$Ax_n = A(x_n - x + x_0) + A(x - x_0) \rightarrow A(x_0) + A(x - x_0) = Ax, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Observación

Como $x_n - x + x_0 \rightarrow x_0$, entonces se puede aplicar el límite dentro de la expresión.

■

Definición: Punto fijo

Un elemento $x \in X$ (espacio normado) se llama **punto fijo** de un operador $A : U \subseteq X \rightarrow X$ si:

$$Ax = x.$$

Teorema

Toda contracción tiene a lo más un único punto fijo.

Prueba

Supongamos que x y y son puntos fijos de una contracción A , entonces

$$0 \neq \|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leq q\|x - y\|,$$

lo que implica que $q \geq 1$, lo cual es una contradicción. ■

Teorema: (Banach)

Sea U un subconjunto completo de un espacio normado X y sea $A : U \rightarrow U$ una contracción. Entonces A tiene un punto fijo único.

Prueba

Sea $x_0 \in U$ entonces definimos recursivamente la siguiente sucesión en U :

$$x_{n+1} := Ax_n, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

De donde se tiene que:

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leq q\|x_n - x_{n-1}\|,$$

luego, por inducción se deduce que:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq q^n \|x_1 - x_0\|, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Por lo tanto para $m > n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \dots + \|x_{m-1} - x_m\| \\ &\leq (q^n + q^{n+1} + \dots + q^{m-1}) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{q^n}{1 - q} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Como $q^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy y como U es completo entonces existe $x \in U$ tal que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$. Finalmente, por la continuidad de A se tiene que:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax.$$

La unicidad se tiene por el teorema anterior. ■

💡 Ejemplo

Pruebe que la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{6}$, $x \in [-1, 1]$ tiene un punto fijo único en $[-1, 1]$.

Solución: Como \mathbb{R} es un espacio de Banach con la norma valor absoluto, se debe probar que $f(x) \in [-1, 1] \quad \forall x \in [-1, 1]$.

Como

$$f'(x) = \frac{1}{6}(2x - 2) = \frac{x - 1}{3} = 0 \iff x = 1$$

se tiene que los máximos y mínimos posibles están en $x = -1$ o $x = 1$, así el valor máximo es

$$f(-1) = \frac{1}{2}$$

y el valor mínimo es

$$f(1) = -\frac{1}{6}.$$

Por lo que para todo $x \in [-1, 1]$ se tiene que $f(x) \in [-1, 1]$, o sea que f tiene un punto fijo en $[-1, 1]$.

Para probar la unicidad, por el teorema del valor medio la constante L de Lipschitz está dada por:

$$L = \max_{x \in [-1, 1]} |f'(x)| = \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{x-1}{3} \right| = \left| \frac{-1-1}{3} \right| = \frac{2}{3} < 1.$$

Por lo tanto f es una contracción en $[-1, 1]$, luego la unicidad se tiene por el teorema anterior.

■

El teorema de la mejor aproximación

Definición: Mejor aproximación

Sea U un subconjunto de un espacio normado X y sea $w \in X$.

Un elemento $v \in U$ se llama **la mejor aproximación a w con respecto a U** si:

$$\|w - v\| \leq \inf_{u \in U} \|w - u\|,$$

es decir, v es el elemento en U más cercano a w .

Teorema

Sea U un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X .

Entonces, para todo elemento $w \in X$, existe una mejor aproximación con respecto a U .

Prueba

Sea $w \in X$ y escojamos una sucesión (u_n) tal que $u_n \in U$ y satisfaga lo siguiente:

$$\|w - u_n\| \rightarrow d := \inf_{u \in U} \|w - u\| \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Como

$$\|u_n\| \leq \|w - u_n\| + \|w\|$$

entonces (u_n) es una sucesión acotada.

Por el Teorema 3 la sucesión (u_n) contiene una subsucesión convergente $(u_{n(\ell)})$ con límite $v \in U$.

Entonces:

$$\|w - v\| = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|w - u_{n(\ell)}\| = d,$$

con lo que se prueba el teorema. ■

Teorema

Sea U un subespacio vectorial de un espacio de pre-Hilbert X .

Un elemento v es la mejor aproximación a $w \in X$ con respecto a U si y solo si:

$$\langle w - v, u \rangle = 0$$

para todo $u \in U$.

Es decir, si y solamente si $w - v \perp U$.

Además, para cada $w \in X$ existe a lo más una única mejor aproximación con respecto a U .

Prueba

(Ejercicio) ■

Definición: Operador Acotado

Un operador $A : X \rightarrow Y$ donde X y Y son espacios normados, se llama **acotado** si existe un número positivo C tal que:

$$\|Ax\| \leq C\|x\|$$

para todo $x \in X$.

Teorema

Un operador lineal $A : X \rightarrow Y$ es acotado si y solamente si:

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < \infty.$$

El número $\|A\|$ es la más pequeña cota para A y se llama la **norma de A** .

Prueba

Assuma A es acotado con una cota C . Entonces

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < C < \infty,$$

y entonces $\|A\|$ es menor o igual que cualquier otra cota para A .

Inversamente, si $\|A\| < \infty$, entonces usando la linealidad de la norma se tiene que:

$$\|Ax\| = \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|,$$

para todo $x \neq 0$, por lo tanto A es acotado con cota $C = \|A\|$.

■

Teorema

Sea U un subespacio vectorial completo de un espacio pre-Hilbert X . Entonces para cada elemento $w \in X$ existe una única mejor aproximación con respecto a U .

- El operador $P : X \rightarrow U$ que le asigna a $w \in X$ su mejor aproximación es un operador lineal acotado con las siguientes propiedades:

$$P^2 = P \quad \text{y} \quad \|P\| = 1.$$

- Este operador se conoce como la **proyección ortogonal** de X sobre U .

Prueba

(ejercicio) ■

Corolario

Sea U un subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio pre-Hilbert X con base u_1, u_2, \dots, u_n .

Entonces la combinación lineal

$$v = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k$$

es la mejor aproximación para $w \in X$ con respecto a U si y solamente si los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ satisfacen las *ecuaciones normales*:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \langle u_k, u_j \rangle = \langle w, u_j \rangle, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n.$$

Prueba

Es evidente que la ecuación (8) es equivalente a la ecuación (7).

■

Corolario

Sea U un subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio pre-Hilbert X con base ortonormal u_1, u_2, \dots, u_n .

Entonces la proyección ortogonal está dada por:

$$Pw = \sum_{k=1}^n \langle w, u_k \rangle u_k, \quad \text{con } w \in X.$$

Prueba

Es evidente de (8) puesto que

$$\langle u_k, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j, \\ 1 & \text{si } k = j, \end{cases}$$

luego $\alpha_k = \langle w, u_k \rangle$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

■

Ejemplo

Sea $P_2[0, 1]$ un subespacio de dimensión finita del espacio pre-Hilbert $C[0, 1]$ dotado del producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Es fácil verificar que

$$\mathcal{B} = \{ 1, \sqrt{3}(2x - 1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1) \}$$

es una base ortonormal de $P_2[0, 1]$.

Si tomamos $f(x) = e^x$, entonces la mejor aproximación de $f(x)$ en $P_2[0, 1]$ es:

$$Pf = \langle e^x, 1 \rangle \cdot 1 + \langle e^x, \sqrt{3}(2x - 1) \rangle \cdot \sqrt{3}(2x - 1) + \langle e^x, \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1) \rangle \cdot \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1),$$

es decir,

$$Pf = (e - 1) + \sqrt{3}(3 - e)\sqrt{3}(2x - 1) + \sqrt{5}(7e - 19)\sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$$

Por lo tanto,

$$Pf \approx 1.01 + 0.85x + 0.84x^2.$$

Gráficamente:
Gráfico de e^x y polinomio cuadrático

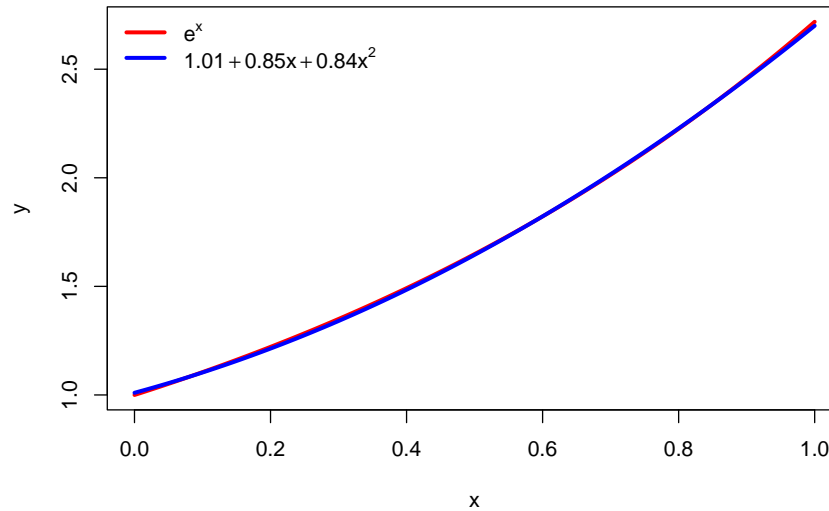


Figura 2: Gráfico de e^x y aproximación cuadrática

i Teorema

En una Regresión Múltiple, encontrar los parámetros $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ de tal manera que:

$$\sum_{i=1}^n e_i^2$$

sea mínima, es equivalente a proyectar ortogonalmente el vector y sobre el espacio generado por x_1, x_2, \dots, x_p .

Es decir, primero se ortonormaliza la base con *Gram-Schmidt* y luego se proyecta el vector y sobre el subespacio generado por la base ortonormal $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$.

O sea, primero se aplica el método de Gram-Schmidt a la base $B = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ y se obtiene una base ortonormal $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$.

Así, la regresión se realiza proyectando el vector y sobre el subespacio generado por la base ortonormal B' :

$$\hat{y} = \langle y, v_1 \rangle v_1 + \langle y, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle y, v_p \rangle v_p.$$

Donde $\langle x, y \rangle = x \cdot y$ es el producto punto.

Lo anterior es equivalente a hacerlo de la forma clásica:

$$\hat{y} = X\beta = X(X^T X)^{-1} X^T y.$$

Gráficamente:

 Prueba

Es claro, pues este teorema es nada más otra forma de calcular la proyección P de la variable a predecir sobre el subespacio generado por las variables predictoras. ■

Solución numérica de ecuaciones no lineales.

El método de aproximaciones sucesivas.

Teoremas de convergencia y del error

 Teorema

Sea U un subconjunto completo de un espacio normado X y $A : U \rightarrow U$ una contracción. Entonces las **aproximaciones sucesivas**:

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots,$$

con x_0 arbitrario en U , convergen al punto fijo único x de A .

 Prueba

Sea $x_0 \in U$ entonces definimos recursivamente la siguiente sucesión en U :

$$x_{n+1} := Ax_n, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

De donde se tiene que:

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leq q\|x_n - x_{n-1}\|,$$

luego por inducción se deduce que:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq q^n \|x_1 - x_0\|, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Por lo tanto para $m > n$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \cdots + \|x_{m-1} - x_m\| \\
&\leq (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1})\|x_1 - x_0\| \\
&\leq \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|.
\end{aligned}$$

Como $q^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy y como U es completo existe $x \in U$ tal que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$.

■

i Corolario: Cota del Error a Priori

Con las mismas hipótesis del teorema anterior se tiene el siguiente *estimado para el error a priori*:

$$\|x_n - x\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|.$$

Prueba

Es evidente de la desigualdad (1.1).

■

i Corolario: Cota del Error a Posteriori

Con las mismas hipótesis del teorema anterior se tiene el siguiente *estimado para el error a posteriori*:

$$\|x_n - x\| \leq \frac{q}{1-q} \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Prueba

Se deduce del error a priori iniciando con $x_0 = x_{n-1}$.

■

i Teorema [Versión 1]

Sea $D \subset \mathbb{R}$ un cerrado y sea $g : D \rightarrow D$ una función continuamente diferenciable con la siguiente propiedad:

$$q := \sup_{x \in D} |g'(x)| < 1.$$

Entonces la ecuación $g(x) = x$ tiene solución única $x \in D$ y la sucesión de aproximaciones sucesivas:

$$x_{n+1} := g(x_n), \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

con x_0 arbitrario en D converge a esta solución. Además se tiene el siguiente *estimado para el error a priori*:

$$|x_n - x| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|,$$

y el siguiente *estimado para el error a posteriori*:

$$|x_n - x| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|.$$

Además, si $D = [a, b]$ entonces se tiene también la siguiente cota del error:

$$|x_n - x| \leq q^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}.$$

Prueba

El espacio \mathbb{R} equipado de la norma valor absoluto $|\cdot|$ es un espacio de Banach.

Por el teorema del valor medio, para todo $x, y \in D$ con $x < y$ se tiene que:

$$g(x) - g(y) = g'(\xi)(x - y)$$

para algún punto $\xi \in]x, y[$. Por lo tanto:

$$|g(x) - g(y)| \leq \sup_{\xi \in D} |g'(\xi)| \cdot |x - y| = q|x - y|,$$

lo cual también es válido para $x, y \in D$ con $x \geq y$.

Por lo tanto g es una contracción, luego aplicando el Teorema de Banach o el Teorema 1 se tiene la existencia y unicidad del punto fijo.

De los corolarios 1 y 2 se tienen obviamente las desigualdades (1.2) y (1.3).

Para probar la cota del error (1.4) note que:

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |g(x_{n-1}) - g(x)| = |g'(\xi_1)| \cdot |x_{n-1} - x| \leq q|x_{n-1} - x| \\ &= q|g(x_{n-2}) - g(x)| = q|g'(\xi_2)| \cdot |x_{n-2} - x| \leq q^2|x_{n-2} - x| \\ &\leq \dots \\ &\leq q^n|x_0 - x| \\ &\leq q^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}. \end{aligned}$$

■

Teorema [Versión 2]

Sea $g \in C[a, b]$, con $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$. Entonces:

1. g tiene un punto fijo en $[a, b]$.
2. Además, si $g'(x)$ existe en $]a, b[$ y $|g'(x)| \leq q < 1$, para todo $x \in]a, b[$, entonces g tiene un punto fijo único en $[a, b]$.

Prueba

I Caso: Si $g(a) = a$ o $g(b) = b$ se tiene la prueba.

II Caso: Si $g(a) \neq a$ y $g(b) \neq b \Rightarrow g(a) > a$ y $g(b) < b$

Tome $h(x) = g(x) - x$, note que:

- h es continua en $[a, b]$,
- $h(a) = g(a) - a > 0$,
- $h(b) = g(b) - b < 0$.

Luego $h(a)$ y $h(b)$ tienen signos opuestos, usando el teorema de los valores intermedios se tiene que existe $x \in [a, b]$ tal que $h(x) = 0 \Rightarrow g(x) - x = 0 \Rightarrow g(x) = x$, por lo tanto x es el punto fijo de g .

2. Suponga que g tiene dos puntos fijos en $[a, b]$, sean estos x y y , con $x \neq y$, entonces por el Teorema del Valor Medio existe $\xi \in]a, b[$ tal que:

$$|x - y| = |g(x) - g(y)| = g'(\xi)|x - y| \leq q|x - y| < |x - y|$$

De donde $|x - y| < |x - y|$, lo cual es una contradicción, luego se tiene que $x = y$.

■

Ejemplo

Pruebe que

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{6}, \quad x \in [-1, 1]$$

tiene un punto fijo en $[-1, 1]$.

Solución

Se debe probar que $f(x) \in [-1, 1]$ para todo $x \in [-1, 1]$.

Como

$$f'(x) = \frac{1}{6}(2x - 2) = \frac{x - 1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

entonces los máximos o mínimos posibles están en $x = -1$ o $x = 1$.

Como $f(-1) = \frac{1}{2}$ es máximo y $f(1) = -\frac{1}{6}$ es mínimo entonces para todo $x \in [-1, 1]$ se tiene que $f(x) \in [-1, 1]$, de donde f tiene un punto fijo en $[-1, 1]$.

Solo se ha probado que existe por lo menos un punto fijo, ahora tenemos que probar que es único.

Se debe probar que existe $q < 1$ tal que $|f'(x)| \leq q < 1$, para todo $x \in]-1, 1[$.

Note que:

$$|f'(x)| = \left| \frac{x - 1}{3} \right| \leq \left| \frac{-1 - 1}{3} \right| = \frac{2}{3} < 1, \quad \text{para todo } x \in]-1, 1[.$$

Luego $f(x)$ tiene un punto fijo único en $[-1, 1]$.

■

Teorema

Sea x un punto fijo de una función continuamente diferenciable g tal que $|g'(x)| < 1$.

Entonces el método de las aproximaciones sucesivas

$$x_{n+1} := g(x_n), \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

es localmente convergente, es decir, existe un vecindario \mathcal{B} del punto fijo x de g tal que el método de aproximaciones sucesivas converge a x , para $x_0 \in \mathcal{B}$.

🔥 Prueba

Como g' es continua y $|g'(x)| < 1$ entonces existe una constante $0 < q < 1$ y $\delta > 0$ tal que $|g'(y)| < q$ para todo $y \in \mathcal{B} := [x - \delta, x + \delta]$.

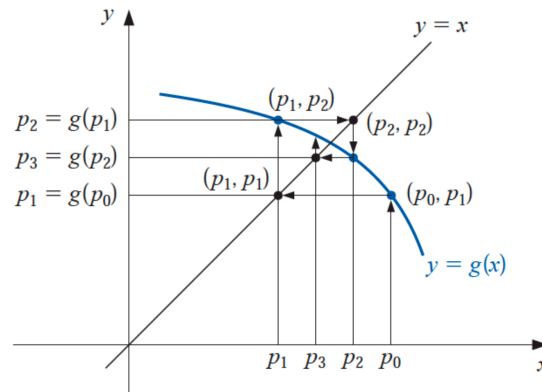
Entonces se tiene que:

$$|g(y) - x| = |g(y) - g(x)| \leq q|y - x| < |y - x| \leq \delta$$

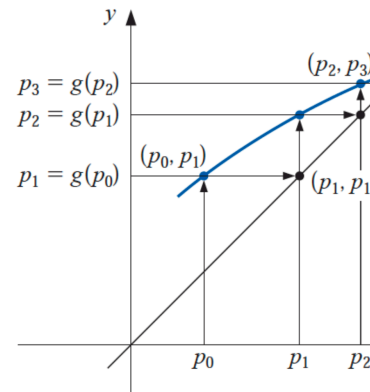
para todo $y \in \mathcal{B}$.

Por lo que se deduce que g mapea \mathcal{B} en sí mismo, o sea que $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ es una contracción, por lo que el resultado se tiene del Teorema 1.

■



(a)



(b)

El Teorema se ilustra en la Figura.

Algoritmo: Método de las aproximaciones sucesivas

Entrada: x_0 (aproximación inicial), Tol , N , $g(x)$

Salida: x (punto fijo aproximado) o mensaje de error

Pasos:

1. $i \leftarrow 1$
2. Mientras $i \leq N$, siga los pasos 3–6:
 - $x \leftarrow g(x_0)$
 - Si $|x - x_0| < Tol$:
 - Salida: x

– **Parar**

- $i \leftarrow i + 1$
- $x_0 \leftarrow x$

3. Mensaje de error: “Número máximo de iteraciones excedido”.

Parar

Una implementación en R es la siguiente:

```
punto.fijo <- function(p0, tol, n, g) {  
  i <- 1  
  p0_tem <- p0  
  while (i <= n) {  
    p <- g(p0_tem)  
    if (abs(p - p0_tem) < tol) {  
      return(p)  
    }  
    i <- i + 1  
    p0_tem <- p  
  }  
  return(Inf)  
}
```

💡 Ejemplo

Sea

$$f(x) = e^{-x}$$

, es fácil probar que

$$f(x)$$

mapea

$$A = [0.5, 0.69]$$

en sí mismo (ejercicio).

Como

$$f$$

es continuamente diferenciable, tome:

$$q = \max_{x \in A} |f'(x)| = \max_{x \in A} |-e^{-x}| \approx 0.606531 < 1$$

Si se ejecuta el programa iterativo en **R** como sigue:

```
g <- function(x) exp(-x)
sol3 <- punto.fijo(p0 = 0.55, tol = 1e-6, n = 30, g = g)
```

En la iteración 1 el valor de P es 0.576949810380487
En la iteración 2 el valor de P es 0.561608769952327
En la iteración 3 el valor de P es 0.570290858658895
En la iteración 4 el valor de P es 0.565360974647922
En la iteración 5 el valor de P es 0.568155020178646
En la iteración 6 el valor de P es 0.566569784824922
En la iteración 7 el valor de P es 0.567468643541252
En la iteración 8 el valor de P es 0.566958798578383
En la iteración 9 el valor de P es 0.567247933366687
En la iteración 10 el valor de P es 0.567083945963931
En la iteración 11 el valor de P es 0.567176948212764
En la iteración 12 el valor de P es 0.567124201933893
En la iteración 13 el valor de P es 0.567154116414135
En la iteración 14 el valor de P es 0.567137150547289
En la iteración 15 el valor de P es 0.567146772602292
En la iteración 16 el valor de P es 0.567141315511106
En la iteración 17 el valor de P es 0.567144410461424
En la iteración 18 el valor de P es 0.567142655180367
En la iteración 19 el valor de P es 0.567143650676000

es decir, tomando $x_0 = 0.55$ como aproximación inicial, con $\varepsilon = Tol = 10^{-6}$ para el algoritmo anterior obtenemos que el “punto fijo” de F es

$$x = x_{19} = 0.567143650676,$$

pues en x_{19} se terminó la ejecución de la función,
como se aprecia en la salida del programa:

Solución punto.fijo: 0.5671437

Por otro lado el error absoluto al calcular $x_{12} = 0.567124201933893$ es igual a:

$$|x - x_{12}| \approx 1.91 \cdot 10^{-5},$$

mientras que usando el error a priori se obtiene:

$$|x - x_{12}| \leq \frac{q^{12}}{1 - q} |x_1 - x_0| = 1.70 \cdot 10^{-4}$$

y usando el error a posteriori se obtiene que:

$$|x - x_{12}| \leq \frac{q}{1 - q} |x_{12} - x_{11}| = 8.13 \cdot 10^{-5}$$

que es una mejor estimación del verdadero error.

Usando el error a priori se deduce que para obtener una precisión de $\varepsilon = 10^{-6}$ se requieren al menos:

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{\varepsilon(1 - q)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\log(q)} \approx 22.3 \leq 23 \text{ iteraciones,}$$

pero se observa que el programa requirió de 19 iteraciones.

Ver la versión recursiva en el *HTML*.

```
punto.fijo.recursivo <- function(p0, tol, n, g) {  
  p1 <- g(p0)  
  if (abs(p0 - p1) < tol || n < 1) {  
    if (n > 1) {  
      return(p1)  
    } else {  
      return(Inf)  
    }  
  } else {  
    return(punto.fijo.recursivo(p1, tol, n - 1, g))  
  }  
}  
  
sol3 <- punto.fijo.recursivo(p0 = 0.55, tol = 1e-6, n = 30, g = g)  
cat("Solución punto.fijo.recursivo:", sol3, "\n")
```

Solución punto.fijo.recursivo: 0.5671437

Ejemplo

Resuelva la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$.

Solución:

Se debe plantear un problema de encontrar los puntos fijos de una función $g(x)$ que sea equivalente a resolver la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$.

Resolver $x^3 - x - 1 = 0$ es equivalente a resolver la ecuación $x^3 - 1 = x$, entonces se puede tratar de encontrar los puntos de $g(x) := x^3 - 1$.

Pero $g(x)$ no cumple las hipótesis del Teorema de Punto Fijo de Banach, pues $g'(x) = 3x^2 > 0 \Rightarrow g(x)$ es creciente en $[1, 2]$, luego $g(1) = 0$ y $g(2) = 7$ son el mínimo y el máximo de $g(x)$ en el intervalo $[1, 2]$ respectivamente, por lo que $g(x) \notin [1, 2] \quad \forall x \in [1, 2]$.

Otro intento se puede hacer usando el hecho de que:

$$x^3 - x - 1 = 0 \iff x = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{x}},$$

luego tome

$$g(x) := \sqrt{1 + \frac{1}{x}}, \quad g'(x) = -\frac{1}{2x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} < 0 \quad \text{en } [1, 2].$$

Esto implica que $g(x)$ es decreciente en $[1, 2]$, luego:

$$g(1) = \sqrt{2} \approx 1.41, \quad g(2) = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1.22.$$

El máximo y el mínimo respectivamente de $g(x)$ en $[1, 2]$, por lo que $g(x) \in [1, 2]$

$\forall x \in [1, 2]$, luego la función $g(x)$ tiene al menos un punto fijo en $[1, 2]$.

Se probó que $g : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$, falta probar que g es una contracción en el intervalo $[1, 2]$.

Veamos

$$g'(x) = -\frac{1}{2x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{1}{2x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \leq \frac{1}{2} := q < 1$$

de donde se puede tomar $q := \frac{1}{2}$.

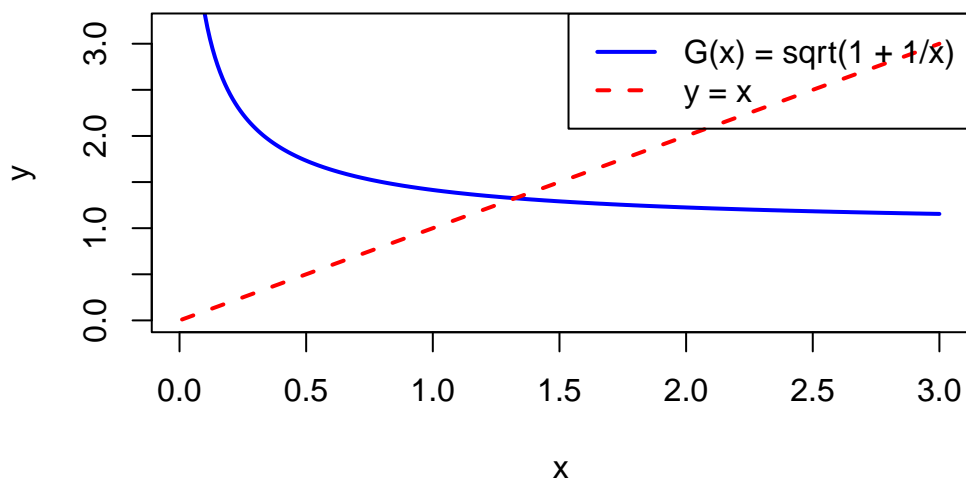
Se pueden ver las ejecuciones de las funciones en \mathbf{R} de punto fijo con $x_0 = 2$ y $\epsilon = 10^{-5}$ en el archivo `punto_fijo.html`.

Luego el punto fijo de $g(x)$ y solución de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$ es:

$$x = 1.32471747253653$$

Que coincide con la solución encontrada por nuestro programa. Gráficamente se ilustra en la Figura

Gráfico de G(x) y x



■

💡 Ejemplo

Dada la ecuación del ejemplo anterior $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$, ¿cuántas iteraciones se requieren para obtener un error absoluto menor que 10^{-5} ?

Solución: Recuerde que $q = \frac{1}{2}$, de donde se tiene que:

$$\begin{aligned} |x_n - x| &\leq q^n \max\{x_0 - a, b - x_0\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \max\{1, 0\} \quad (\text{con } x_0 = 2) \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Luego:

$$|x_n - x| \leq 10^{-5} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-5} \Leftrightarrow n \geq 16.6$$

Tome $n = 17$. ■

! Observación

Observación 1 En la práctica el programa requirió solamente 9 iteraciones.

💡 Ejemplo

Para la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$, con $x_0 = 2$, estime usando el error a priori (1.2) ¿Cuántas iteraciones se requieren para obtener un error absoluto menor que 10^{-5} ?

Solución: Se tiene que

$$q = \frac{1}{2}, \quad x_0 = 2, \quad g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

De donde se obtiene que $x_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1.2$, entonces:

$$\begin{aligned} |x_n - x| &\leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} |2 - 1.2| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 0.8 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} |x_n - x| \leq 10^{-5} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 0.8 \leq 10^{-5} \\ &\Leftrightarrow (n-1)(-\log(2)) \leq -5 - \log(0.8) \end{aligned}$$

esto implica que $n \geq 17.28$, por lo que se puede tomar $n = 18$. ■

! Observación

Observación 2 En la práctica el programa requirió solamente 9 iteraciones.

Método de bisección, método regula falsi y método de la secante.

Método de la Bisección

Las hipótesis de este método son:

- f debe ser continua en el intervalo $[a, b]$.
- $f(a)$ y $f(b)$ deben tener signos opuestos.

Luego, por el Teorema de los Valores Intermedios, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$, gráficamente se ilustra en la Figura .

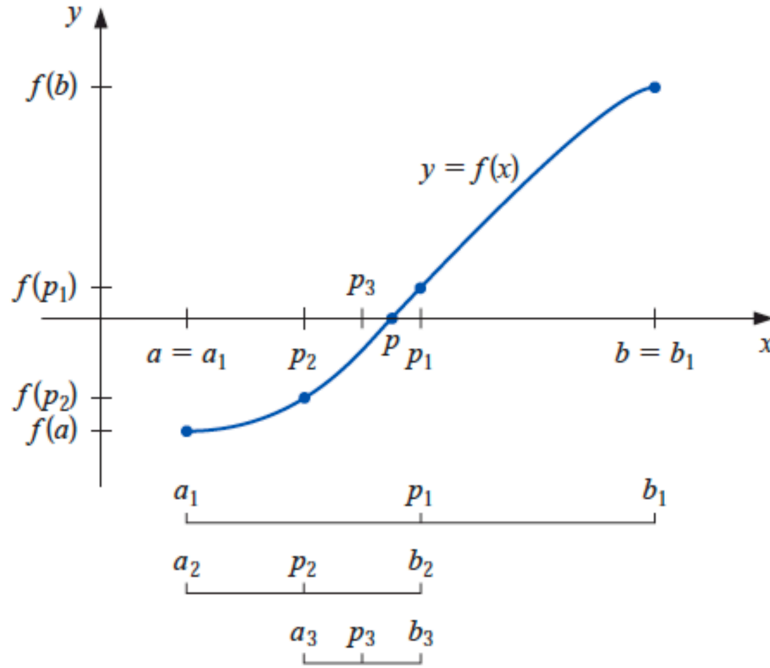


Figura 3: El Método de la Bisección

La idea es encontrar una sucesión (x_n) tal que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$ tal que $f(x) = 0$. Para encontrar la sucesión (x_n) , la idea es la siguiente:

- Tome $a_1 = a$, $b_1 = b$, $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$.
- Si $f(x_1) = 0$, entonces ya se tiene el cero de la ecuación $x = x_1$.
- Si no:
 - Si $f(x_1)$ y $f(a)$ tienen el mismo signo, se toma:

$$a_2 = x_1, \quad b_2 = b_1, \quad x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

- Si no se toma:

$$a_2 = a_1, \quad b_2 = x_1, \quad x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2},$$

y así sucesivamente hasta que $f(x_i) \approx 0$ o hasta superar el número máximo de iteraciones. El pseudocódigo se puede escribir como sigue:

Algoritmo

Entrada: a, b, Tol (tolerancia), N, f

Salida: Aproximación de x (cero de la ecuación) o mensaje de error

1. $i \leftarrow 1$
 2. Mientras $i \leq N$, siga los pasos 3–6
 3. $x \leftarrow \frac{a+b}{2}$
 4. Si $f(x) = 0$ o $|b-a| < Tol$
 - Salida (x)
 - **Parar**
 5. $i \leftarrow i + 1$
 6. Si $f(a) \cdot f(x) > 0$
 - $a \leftarrow x$
 - Si no
 - $b \leftarrow x$
 7. Salida (“Número máximo de iteraciones excedido”)
- Parar**

Este algoritmo se puede programar iterativamente en **R**, ver el archivo `biseccion.html`.

```
# Versión detallada: imprime cada iteración
biseccion <- function(a, b, tol, n, G) {
  i <- 1
  a1 <- a
  b1 <- b
  if (G(a) * G(b) > 0) {
    cat("No cumple las hipótesis\n")
```

```

} else {
  while (i <= n) {
    X <- (a1 + b1) / 2
    cat("En la iteración", i, "el valor de X es", X, "\n")
    if (G(a) * G(X) > 0) {
      a1 <- X
    } else {
      b1 <- X
    }
    if ((b1 - a1) < tol) {
      return(X)
    }
    i <- i + 1
  }
  cat("El método no converge\n")
  return(NA)
}
}

```

💡 Ejemplo

Resuelva la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$ con una tolerancia de $\varepsilon = 10^{-6}$.

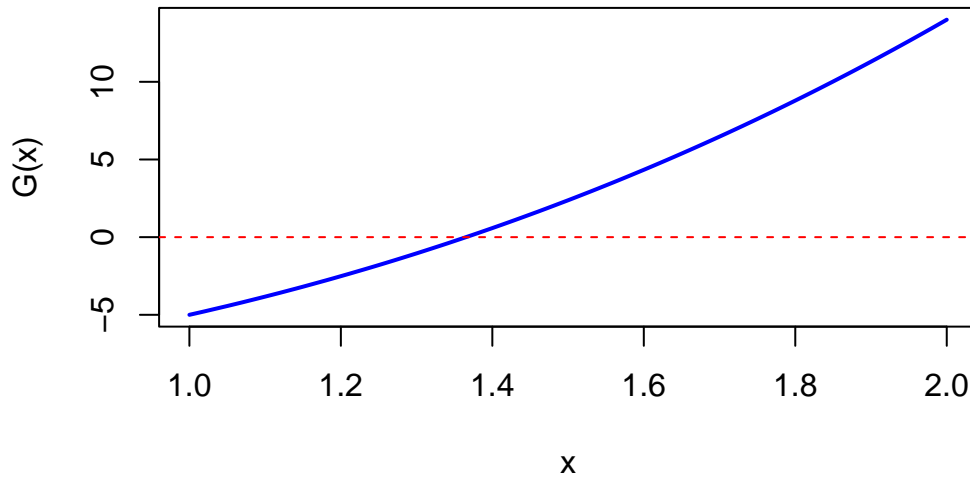
Solución:

```

# Definición de la función
G <- function(x) x^3 + 4*x^2 - 10
# Gráfico de la función
curve(G, from = 1, to = 2, col = "blue", lwd = 2,
      main = "Gráfico de G(x) = x^3 + 4x^2 - 10",
      xlab = "x", ylab = "G(x)")
abline(h = 0, col = "red", lty = 2)

```

Gráfico de $G(x) = x^3 + 4x^2 - 10$



```
# Llamada a la función biseccion  
resultado <- biseccion(1, 2, 1e-6, 50, G)
```

```
En la iteración 1 el valor de X es 1.5  
En la iteración 2 el valor de X es 1.25  
En la iteración 3 el valor de X es 1.375  
En la iteración 4 el valor de X es 1.3125  
En la iteración 5 el valor de X es 1.34375  
En la iteración 6 el valor de X es 1.359375  
En la iteración 7 el valor de X es 1.367188  
En la iteración 8 el valor de X es 1.363281  
En la iteración 9 el valor de X es 1.365234  
En la iteración 10 el valor de X es 1.364258  
En la iteración 11 el valor de X es 1.364746  
En la iteración 12 el valor de X es 1.36499  
En la iteración 13 el valor de X es 1.365112  
En la iteración 14 el valor de X es 1.365173  
En la iteración 15 el valor de X es 1.365204  
En la iteración 16 el valor de X es 1.365219  
En la iteración 17 el valor de X es 1.365227  
En la iteración 18 el valor de X es 1.365231  
En la iteración 19 el valor de X es 1.365229  
En la iteración 20 el valor de X es 1.36523
```

```
cat("Resultado final:", resultado, "\n")
```

Resultado final: 1.36523



Método de Newton–Raphson.

Aceleración de la convergencia y método de Steffensen.