MA0501 – Tarea 2

Diego Alberto Vega Víquez - C38367 José Carlos Quintero Cedeño - C26152
Gabriel Valverde Guzmán - C38060

2025-08-24

Tabla de contenidos

Ejercicio 1

ℹ Instrucción

Suponga que p^* aproxima a p con 3 dígitos significativos.

Encuentre el intervalo en el cual p^* debe estar, si:

a) $p = 150$

b) $p = 900$

c) $p = 1500$

d) $p = 90$

Solución

Vea que si P^* aproxima a P con 3 dígitos significativos eso significa que

$$\frac{|P - P^*|}{|P|} < 0.5 \times 10^{-t+1}$$

$$|P - P^*| < 0.5 \times 10^{-t+1}\,|P|$$

$$P - 0.5 \times 10^{-t+1}\,|P| < P^* < P + 0.5 \times 10^{-t+1}\,|P|$$

Por lo que se puede concluir que el intervalo en el cual $p*$ debe estar es

$$\left]\left(1 - 0.5 \times 10^{-t+1}\right)|P|, \left(1 + 0.5 \times 10^{-t+1}\right)|P|\right[$$

```r
# Definir el valor de t
t <- 3

# Función que devuelve los extremos del intervalo como fila de una tabla
intervalo <- function(P, t) {
  margen <- 0.5 * 10^(-t + 1)
  inferior <- P * (1 - margen)
  superior <- P * (1 + margen)
  data.frame(
```

```
    P = P,
    t = t,
    Limite_Inferior = round(inferior, 4),
    Limite_Superior = round(superior, 4)
  )
}

# Crear tabla con los resultados para varios valores de P
tabla_intervalos <- rbind(
  intervalo(150, t),
  intervalo(900, t),
  intervalo(1500, t),
  intervalo(90, t)
)

# Mostrar la tabla (Quarto renderiza automáticamente como tabla bonita)
kableExtra::kable(tabla_intervalos)
```

P	t	Limite_Inferior	Limite_Superior
150	3	149.25	150.75
900	3	895.50	904.50
1500	3	1492.50	1507.50
90	3	89.55	90.45

Ejercicio 2

Instrucción

Considere los siguientes valores para p y p^*:

a. $p = \pi \qquad p^* = 3.1$

b. $p = \frac{1}{3} \qquad p^* = 0.333$

c. $p = \frac{\pi}{1000} \qquad p^* = 0.0031$

d. $p = \frac{100}{3} \qquad p^* = 33.3$

¿Cuál es el error absoluto y relativo al aproximar p por p^*?

Solución

Ejercicio 3

Instrucción

Sea

$$\alpha_n = \frac{n+10}{n^5},$$

pruebe que

$$\alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

¿Qué se puede concluir?

Solución

Ejercicio 4

Instrucción

Suponga que $fl(x)$ es una aproximación de x con redondeo a k dígitos.

Demuestre que:

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1}.$$

Solución

Ya que $fl(x)$ es una aproximación de x con redondeo a k dígitos eso significa que podemos escribir $fl(x)$ de la siguiente forma

$$fl(x) = 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n$$

Sea $x \in \mathbb{R}$ que escribiremos como

$$x = 0.d_1 d_2 \cdots \times 10^n$$

De esta forma

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| &= \left|\frac{0.d_1 d_2 \cdots \times 10^n - 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n}{0.d_1 d_2 \cdots \times 10^n}\right| \\
&= \left|\frac{0.d_{k+1} d_{k+2} \cdots \times 10^{n-k}}{0.d_1 d_2 \cdots \times 10^n}\right| \\
&= \left|\frac{0.d_{k+1} d_{k+2} \cdots}{0.d_1 d_2 \cdots}\right| \times 10^{-k}
\end{aligned}
$$

Aquí hay que analizar por casos:

- Suponga que $d_{k+1} < 5$

En este caso basta con cortar en d_k así:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| &= \left|\frac{0.d_{k+1} d_{k+2} \cdots}{0.d_1 d_2 \cdots}\right| \times 10^{-k} \\
&\leq 0.5 \cdot \left|\frac{1}{0.1}\right| \times 10^{-k} \\
&= 0.5 \times 10^{-k+1}
\end{aligned}
$$

- Suponga que $d_{k+1} \geq 5$.

Recuerde que para este caso en $fl(x)$ pasa que d_k es una unidad mayor que el d_k de x. De esta forma se va a cumplir que $d_{j_{\text{real}}} = d_{j_{\text{aproximado}}}$ para $j = \{1, 2, \ldots, k-1\}$ así se tiene que

$$
\begin{aligned}
|x - fl(x)| &= 10^{1-k} \cdot (1 - 0.d_{k+1} \cdots) \\
\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| &= \frac{10^{1-k} \cdot (1 - 0.d_{k+1} \cdots)}{|0.d_1 d_2 \cdots \times 10^n|}
\end{aligned}
$$

Vea que

$$
\begin{aligned}
d_{k+1} \geq 5 &\implies 0.d_{k+1} \cdots \geq \frac{1}{2} \\
&\implies 1 - 0.d_{k+1} \cdots \leq \frac{1}{2} \\
&\implies 1 - 0.d_{k+1} \cdots \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Así

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \leq \frac{10^{1-k} \cdot 0.5}{|0.d_1 d_2 \cdots \times 10^n|} \leq 10^{1-k} \cdot 0.5$$

Luego, concluya que

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1} \qquad \blacksquare$$

Ejercicio 5

> **Instrucción**
>
> Si se calcula la raíz menor en valor absoluto de la ecuación:
>
> $$f(x) = x^2 + 0.4002 \times 10^0 x + 0.8 \times 10^{-4} = 0,$$
>
> con la fórmula cuadrática usual, entonces se produce una pérdida de dígitos significativos. ¿Por qué?
>
> Encuentre una fórmula alternativa para efectuar este cálculo sin que se produzca tal pérdida y determine la raíz de menor magnitud.

Ejercicio 6

> **Instrucción**
>
> Escriba una función en R que verifique, para cualquier n, la siguiente identidad:
>
> $$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix} = (x + a_1 + \cdots + a_n)(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n).$$

Solución

Ejercicio 7

> **Instrucción**
>
> Escriba una función en R que verifique para cualquier n la siguiente identidad:
>
> $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\cdots(a_n - b_n).$$

Solución

Ejercicio 8

> **Instrucción**
>
> Se dice que una matriz es *rala* si esta tiene más entradas nulas que no nulas (mayor estricto). Escriba una función en R que permita determinar si una matriz es rala.

Solución

Ejercicio 9

> **Instrucción**
>
> Se dice que una matriz $A \in M_{n\times m}$ tiene *forma de O* si todas las entradas de la fila 1, fila n, columna 1 y columna m no son nulas, y las demás entradas de la matriz son nulas.
> Escriba una función en R que permita determinar si una matriz está en forma de O.

Solución

Ejercicio 10

Instrucción

En el capítulo de análisis funcional complete las demostraciones de los teoremas 2, 4, 5, 14, 16 y de los ejemplos 3, 5.

Solución

Teorema 2

En un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes.

Prueba

■

Teorema 4

Para todo producto interno se tiene la desigualdad de Cauchy–Schwarz:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,$$

para todo $x, y \in X$, además se tiene igualdad si para todo x, y son linealmente dependientes.

Prueba

Si $x = 0$ la desigualdad es trivial. Si $x \neq 0$, tome

$$z = y - \frac{\langle y, x\rangle}{\|x\|^2}x,$$

luego es claro que $\langle z, x\rangle = 0$ y que:

$$0 \leq \|z\|^2 = \left\langle y - \frac{\langle y, x\rangle}{\|x\|^2}x,\, y - \frac{\langle y, x\rangle}{\|x\|^2}x \right\rangle = \langle y, y\rangle - \frac{\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} = \|y\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2}.$$

De donde se tiene la desigualdad. Además se tiene igualdad si para todo x, y son linealmente dependientes (ejercicio).

■

Teorema 5

Sea X un espacio vectorial complejo (o real). Entonces la función

$$\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}$$

define una norma en X, es decir un espacio pre–Hilbert es siempre un espacio normado.

Prueba

Ejercicio (use la desigualdad de Cauchy–Schwarz para probar la desigualdad triangular).
■

Teorema 14

Sea U un subespacio vectorial de un espacio de pre–Hilbert X.
Un elemento v es la mejor aproximación a $w \in X$ con respecto a U si y solo si:

$$\langle w - v, u\rangle = 0 \quad \forall u \in U.$$

Es decir, si y solamente si $w - v \perp U$. Además, para cada $w \in X$ existe a lo más una única mejor aproximación con respecto a U.

Prueba

(Ejercicio)
■

Teorema 16

Sea U un subespacio vectorial completo de un espacio pre–Hilbert X.
Entonces para cada elemento $w \in X$ existe una única mejor aproximación con respecto a U.

- El operador $P : X \to U$ que le asigna a $w \in X$ su mejor aproximación es un operador lineal acotado con las siguientes propiedades:

$$P^2 = P \quad \text{y} \quad \|P\| = 1.$$

- Este operador se conoce como la **proyección ortogonal** de X sobre U.

Prueba

(Ejercicio)

■

Ejemplo 3

El espacio vectorial $C[a, b]$ provisto con la norma

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

es un espacio de Banach.

Prueba

(Ejercicio)

■

Ejemplo 5

El espacio vectorial $C[a, b]$ provisto con la norma L_2:

$$\|f\|_1 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^2$$

NO es un espacio de Banach.

Prueba

Ejercicio (sug. use la misma sucesión del ejemplo 4).

■

Ejercicio 11

Instrucción

En el teorema 7, si tomamos como espacio pre–Hilbert a $\mathbb{R}^n$ con el producto punto clásico, escriba una función en R que reciba una base de un subespacio de $\mathbb{R}^n$ en una lista de listas y retorne la base ortogonal en una lista de listas, luego otra función que calcule la base ortonormal.

Solución

Ejercicio 12

Instrucción

Repita el ejercicio anterior usando los espacios y el producto interno del ejemplo 7.
¿Será posible hacer una función que reciba también como parámetro el producto interno como una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y genere la base ortogonal y ortonormal usando este producto interno?

Solución

Ejercicio 13

Instrucción

En el Corolario 2, si tomamos como espacio pre–Hilbert a $\mathbb{R}^n$ con el producto punto clásico, escriba una función en R que reciba una base de un subespacio U de $\mathbb{R}^n$ en una lista de listas, un vector de $\mathbb{R}^n$ y retorne en una lista la mejor aproximación a ese vector en U.

Solución

Ejercicio 14

Instrucción

Repita el ejercicio anterior usando los espacios y el producto interno del ejemplo 7.
¿Será posible hacer una función que reciba también como parámetro el producto interno como una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y genere la mejor aproximación usando este producto interno?

Solución

Ejercicio 15

Instrucción

Pruebe que la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ tiene un punto fijo único en $[0, 7]$.

Solución

Ejercicio 16

Instrucción

Sea $f : X \to X$ una aplicación. Denotamos por F_f el conjunto de puntos fijos de la aplicación f.
Pruebe las siguientes propiedades:

a. Sean $f, g : X \to X$ aplicaciones tales que $f \circ g = g \circ f$ entonces se tiene que:

$$f(F_g) \subset F_g, \quad g(F_f) \subset F_f.$$

b. Sean $f, g : X \to X$ aplicaciones, si $F_g = \{x^*\}$ y $f \circ g = g \circ f$ entonces $F_f \neq \emptyset$.

c. Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación. Si existe $n \in \mathbb{R}$ tal que $F_{f^n} = \{x^*\}$ entonces $F_f = \{x^*\}$.

d. Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación. Si $F_f \neq \emptyset$ entonces $F_{f^n} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

e. Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación sobreyectiva, supóngase que $f_d^{-1} : X \to X$ es tal que $f \circ f_d^{-1} = I_X$ y $F_{f_d^{-1}} \neq \emptyset$ entonces $F_f \neq \emptyset$.

f. Sea A un conjunto con un número impar de elementos y $f : A \to A$ tal que $f^2(x) = x$

para todo $x \in A$, se tiene entonces que $F_f \neq \emptyset$.

g. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f continua y acotada entonces $F_f \neq \emptyset$.

h. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f continua y periódica entonces $F_f \neq \emptyset$.

Solución

a. Sean $f, g : X \to X$ aplicaciones tales que $f \circ g = g \circ f$ entonces se tiene que:

$$f(F_g) \subset F_g, \quad g(F_f) \subset F_f.$$

Prueba

(Ejercicio)

■

b. Sean $f, g : X \to X$ aplicaciones, si $F_g = \{x^*\}$ y $f \circ g = g \circ f$ entonces $F_f \neq \emptyset$.

Prueba

(Ejercicio)

■

c. Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación. Si existe $n \in \mathbb{R}$ tal que $F_{f^n} = \{x^*\}$ entonces $F_f = \{x^*\}$.

Prueba

(Ejercicio)

■

d. Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación. Si $F_f \neq \emptyset$ entonces $F_{f^n} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prueba

(Ejercicio)

■

e. Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación sobreyectiva, supóngase que $f_d^{-1} : X \to X$ es tal que $f \circ f_d^{-1} = I_X$ y $F_{f_d^{-1}} \neq \emptyset$ entonces $F_f \neq \emptyset$.

Prueba

(Ejercicio)

■

f. Sea A un conjunto con un número impar de elementos y $f : A \to A$ tal que $f^2(x) = x$ para todo $x \in A$, se tiene entonces que $F_f \neq \emptyset$.

Prueba

(Ejercicio)

■

g. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f continua y acotada entonces $F_f \neq \emptyset$.

Prueba

(Ejercicio)

■

h. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f continua y periódica entonces $F_f \neq \emptyset$.

Prueba

(Ejercicio)

■