# MA0501 – Tarea 2

Diego Alberto Vega Víquez - C38367 — José Carlos Quintero Cedeño - C26152 — Gabriel Valverde Guzmán - C38060

2025-09-03

# Tabla de contenidos

Ejercicio 1	2
Ejercicio 2	2
Ejercicio 3	2
Ejercicio 4	3
Ejercicio 5	3
Ejercicio 6	3
Ejercicio 7	4
Ejercicio 8	4
Ejercicio 9	4
Ejercicio 10	5
Ejercicio 11	5
Ejercicio 12	6
Ejercicio 13	6
Ejercicio 14	6
Ejercicio 15	7
Ejercicio 16	7
Ejercicio 17	7
Ejercicio 18	7
Ejercicio 19	9
Ejercicio 20	12
Ejercicio 21	13
Ejercicio 22	13
Ejercicio 22	15

# Ejercicio 1

#### i Instrucción

Desarrolle funciones iterativas y recursivas en R para los algoritmos de los métodos de:

- iteración de punto fijo,
- bisección,
- método de Newton-Raphson,
- método de la secante, y
- método de Steffensen vistos en clase,

y el método Regula-Falsi que se describe en el ejercicio 11.

#### Solución

# Ejercicio 2

### i Instrucción

Use el procedimiento Bisección para resolver las siguientes ecuaciones, con por lo menos 5 dígitos significativos. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente R.

a) 
$$\cos^2(x) = 2\sin(x)$$
 para  $0 \le x \le 1$ 

b) 
$$-x^3 + x + 1 = 0$$
 para  $1 \le x \le 2$ 

Para cada una de las ecuaciones anteriores, de acuerdo con los teoremas de error vistos en clase, calcule el número de iteraciones necesarias para obtener la precisión pedida, y compare estos resultados con los obtenidos con  $\mathbf{R}$ .

#### Solución

# Ejercicio 3

### i Instrucción

Use el procedimiento Bisección para resolver las siguientes ecuaciones, con por lo menos 4 dígitos significativos. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente R.

2

a) 
$$e^x + 4x - 5 = 0$$

b) 
$$x^4 - 2x - 1 = 0$$

Determine gráficamente un intervalo inicial [a, b], con  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

# Ejercicio 4

### i Instrucción

Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine el intervalo [a,b] en el cual la iteración de punto fijo converge. Estime el número de iteraciones necesarias para obtener aproximaciones con 5 dígitos significativos, y efectúe los cálculos con el procedimiento PuntoFijo. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente R.

- a)  $e^{-x} x = 0$
- b)  $e^x = 3x$

#### Solución

### Ejercicio 5

#### i Instrucción

Repita el ejercicio anterior usando el método de Steffensen.

#### Solución

# Ejercicio 6

### i Instrucción

Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine una función g y un intervalo [a,b] en el cual la iteración de punto fijo converja a una solución positiva de la ecuación. Debe probar que g(x) cumple las hipótesis del teorema de Banach. Encuentre esta solución usando el procedimiento PuntoFijo. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente

- $\mathbf{R}$ .
  - a)  $3x^2 e^x = 0$
  - b)  $x \cos(x) = 0$

# Ejercicio 7

# i Instrucción

Use el procedimiento Newton para resolver las siguientes ecuaciones, con por lo menos 4 dígitos significativos. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente R.

- a)  $\cos(x) x^2 = 0$
- b)  $4\sin(x) = e^x$

#### Solución

# Ejercicio 8

### i Instrucción

Repita el ejercicio anterior usando el procedimiento Secante, y compare los resultados.

#### Solución

# Ejercicio 9

### i Instrucción

Suponga que p es un cero de multiplicidad m de f donde  $f^{(m)}$  es continua en un intervalo abierto que contiene a p. Demuestre que el método de punto fijo siguiente:

$$g(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}$$

cumple que g'(p) = 0.

# Ejercicio 10

### i Instrucción

Demuestre que el método de Newton aplicado a  $x^m - R$  y a  $1 - (R/x^m)$  para calcular  $\sqrt[m]{R}$  da dos fórmulas diferentes de iterativas. Para R > 0 y  $m \ge 0$ , ¿cuál fórmula es mejor y por qué?

#### Solución

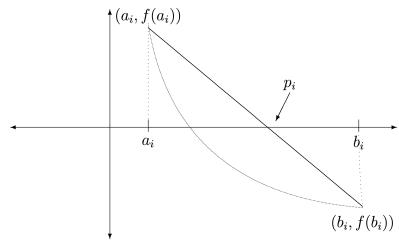
### Ejercicio 11

### i Instrucción

**Método Regula Falsi**: Este es otro método para encontrar una raíz de la ecuación f(x) = 0 que se encuentra en el intervalo [a,b]. El método es similar al de la bisección en que se generan intervalos  $[a_i,b_i]$  encerrando la raíz de f(x)=0, y es similar al método de la secante en la forma de obtener los nuevos intervalos aproximados.

Suponiendo que el intervalo  $[a_i,b_i]$  contiene una raíz de f(x)=0, calculamos la intersección con el eje x de la recta que pasa por los puntos  $(a_i,f(a_i))$  y  $(b_i,f(b_i))$ , denotando este punto por  $p_i$ .

- Si  $f(p_i)f(a_i)<0,$  se define  $a_{i+1}=a_i$  y  $b_{i+1}=p_i;$
- En caso contrario, se define  $a_{i+1}=p_i$  y  $b_{i+1}=b_i.$ 
  - a) Dé una interpretación geométrica del método Regula Falsi con ayuda del siguiente gráfico:



- b) Calcule la ecuación de la recta que pasa por  $(a_i,f(a_i))$  y  $(b_i,f(b_i)).$
- c) Pruebe que:

$$p_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

- d) Escriba un algoritmo en pseudocódigo para el método Regula Falsi.
- e) Escriba una función en R para este algoritmo.

# Ejercicio 12

### i Instrucción

Use el método de Regula Falsi para aproximar la solución de las siguientes ecuaciones con 6 dígitos significativos, determine el intervalo inicial gráficamente. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente  ${\bf R}$ .

a) 
$$\log(1+x) - x^2 = 0$$

b) 
$$x^3 + 2x - 1 = 0$$

#### Solución

# Ejercicio 13

### i Instrucción

Pruebe que la sucesión construida por:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0\\ \frac{a + (m-1)x_n^m}{mx_n^{m-1}} & \text{si } n \ge 1 \end{cases}$$

converge a  $\sqrt[m]{a}$ , con a > 0.

#### Solución

# Ejercicio 14

### i Instrucción

Demuestre que las siguientes sucesiones  $(x_n)$  convergen linealmente a x=0. Encuentre cuántos términos deben generarse antes de que  $|x_n-x|\le 5\times 10^{-2}$ . a)  $x_n=\frac{1}{n},\,n\ge 0$ b)  $x_n=\frac{1}{n^2},\,n\ge 0$ 

a) 
$$x_n = \frac{1}{n}, n \ge 0$$

b) 
$$x_n = \frac{n}{n^2}, n \ge 0$$

# Ejercicio 15

### i Instrucción

Demuestre que la sucesión definida por  $x_n=1/n^k,\; n\geq 1,$  para cualquier entero positivo k,converge linealmente a x = 0. Para cada par de enteros k y m, determinar un número N para el cual  $1/N^k < 10^{-m}$ .

#### Solución

### Ejercicio 16

### i Instrucción

Demostrar que la sucesión  $x_n = 10^{-2^n}$  converge cuadráticamente a cero.

#### Solución

### Ejercicio 17

# i Instrucción

Para las siguientes sucesiones  $(x_n)$ , linealmente convergentes, use el método  $\Delta^2$  de Aitken para generar una sucesión  $(\bar{x}_n)$  hasta que  $|\bar{x}_n-x|\leq 5\times 10^{-2}$ . a)  $x_n=\frac{1}{n},\,n\geq 0$ b)  $x_n=\frac{1}{n^2},\,n\geq 0$ 

a) 
$$x_n = \frac{1}{n}, n \ge 0$$

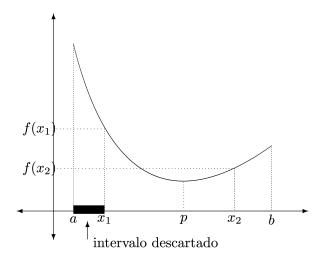
b) 
$$x_n = \frac{1}{n^2}, n \ge 0$$

#### Solución

# Ejercicio 18

#### i Instrucción

Un conocido método numérico para minimizar funciones estrictamente unimodales (una función f que decrece estrictamente (o crece estrictamente) hasta su punto mínimo (máximo)) se llama la función estrictamente unimodal en un intervalo [a, b], y uno de ellos es el **Método** Igualmente Espaciado. La idea geométrica se ilustra en el siguiente gráfico:



Se toma  $a_1=a$  y  $b_1=b$ , y además:

$$x_1 := \frac{2a+b}{3}, \qquad x_2 := \frac{a+2b}{3}$$

Entonces, como se ilustra en el gráfico:

• Si  $f(x_1) > f(x_2)$ , entonces se toma:

$$a_2 = x_1, \quad b_2 = b_1, \quad p_1 = a_2$$

y el nuevo intervalo es:

$$[a_2, b_2] = [x_1, b_1] = \left\lceil \frac{2a+b}{3}, b \right\rceil$$

• En caso contrario, se toma:

$$a_2 = a_1, \quad b_2 = x_2, \quad p_1 = b_2$$

y el nuevo intervalo es:

$$[a_2,b_2] = [a_1,x_2] = \left[a_1,\frac{a+2b}{3}\right]$$

Con el nuevo intervalo se aplica el proceso de nuevo, y así sucesivamente hasta que  $a_n$  y  $b_n$  estén suficientemente cerca. La sucesión  $(p_n)$  converge al punto p donde f alcanza el mínimo.

- a) De acuerdo con lo anterior, pruebe que  $x_1 < x_2$ .
- b) Construya un algoritmo en pseudocódigo y la correspondiente función en  ${\bf R}$  para el método Igualmente Espaciado descrito anteriormente.

c) Pruebe que el intervalo construido con el algoritmo anterior satisface la relación:

$$|b_n-a_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(b-a)$$

¿Qué se puede concluir, respecto al error absoluto?

#### Solución

### Ejercicio 19

### i Instrucción

En este ejercicio se presenta el **Método Dicotómico** para minimizar funciones estrictamente unimodales. En este método primeramente se evalúa la función f(x) en dos puntos que están a una distancia de  $\varepsilon/2$  del punto medio del intervalo [a,b], es decir se calculan:

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right)$$
 y  $f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right)$ ,

y se procede a compararlos. Si

**a**)

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) \le f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

entonces se descarta el intervalo  $\left[\frac{a+b+\varepsilon}{2},b\right]$  y así el punto mínimo  $x^*$  debe estar en el intervalo  $\left[a,\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$ , el cual será el nuevo intervalo de búsqueda. Si

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) > f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

entonces se descarta el intervalo  $\left[a,\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right[$  y en este caso el punto mínimo  $x^*$  debe estar en el intervalo  $\left[\frac{a+b-\varepsilon}{2},b\right]$ .

Pruebe que en cualquiera de los casos la longitud del intervalo de búsqueda se reduce de b-a a  $\frac{b-a+\varepsilon}{2}$ .

b)

Suponga que se tiene el caso:

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) \leq f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

entonces se descarta el intervalo  $\left[\frac{a+b+\varepsilon}{2},b\right]$ , y el nuevo intervalo de búsqueda es  $\left[a,\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$ . Ahora se debe calcular:

$$f\left(\frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right)$$
 y  $f\left(\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right)$ ,

y surgen de nuevo dos posibilidades. Si

$$f\left(\frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right) \leq f\left(\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right),$$

entonces se descarta el intervalo  $\left]\frac{3a+b+3\varepsilon}{4},\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$  y el nuevo intervalo de búsqueda es  $\left[a,\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right]$ . En el otro caso se descarta el intervalo  $\left[a,\frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right]$  y el nuevo intervalo de búsqueda es  $\left[\frac{3a+b-\varepsilon}{4},\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$ .

Pruebe que en cualquiera de los casos la longitud del intervalo de búsqueda se reduce de  $\frac{b-a+\varepsilon}{2}$  a  $\frac{b-a+3\varepsilon}{4}$ .

**c**)

Repitiendo el proceso n veces deben calcularse:

$$f\left(\frac{(2^n-1)a+b-\varepsilon}{2^n}\right) \quad \text{y} \quad f\left(\frac{(2^n-1)a+b+(2^n-1)\varepsilon}{2^n}\right),$$

pruebe que en cualquiera de los dos casos la longitud del intervalo de búsqueda es

$$\frac{b-a+(2^n-1)\varepsilon}{2^n}.$$

Con lo cual, si  $x_n$  representa la n-ésima aproximación del punto mínimo  $x^*$ , entonces pruebe que:

$$|x^*-x_n| \leq \frac{b-a+(2^n-1)\varepsilon}{2^n}.$$

El proceso se ilustra en la Figuras 1 y 2.

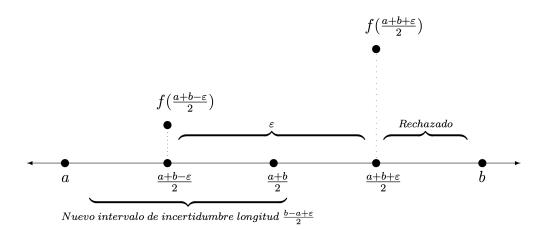


Figura 1: Figura 1

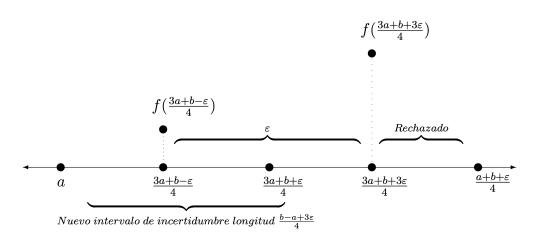


Figura 2: Figura 2

d)

Construya un algoritmo en pseudocódigo y la correspondiente función  ${\bf R}$  para el *Método Dicotómico* descrito anteriormente.

**e**)

 $\ensuremath{\overleftarrow{\wp}}$ Cuántas iteraciones se requieren teóricamente para minimizar

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$$

en el intervalo [1,4] si se desea que el resultado tenga un error absoluto menor a  $10^{-5}$ ? Encuentre el mínimo.

### Ejercicio 20

#### i Instrucción

El objetivo de este ejercicio es demostrar la convergencia del método de Newton–Raphson sin utilizar el Teorema de punto fijo de Banach.

**Teorema:** Sea  $f \in C^2[a,b]$ . Si  $x \in [a,b]$  con f(x) = 0 y  $f'(x) \neq 0$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que el método de Newton–Raphson:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

genera una sucesión que está bien definida y converge a x cuando  $n\to\infty,$  para todo  $x_0\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon].$ 

Para esto haga lo siguiente:

a) Pruebe que si  $(r_n)_{n\geq 0}$  es una sucesión de números positivos o nulos que verifican:

$$r_{n+1} \le r_n^2,$$

y si  $r_0 < 1$ , entonces  $(r_n)$  converge a 0. Además, pruebe que:

$$r_n \le (r_0)^{2^n}.$$

b) Pruebe que:

$$x_{n+1} - x = \frac{(x_n - x)f'(x_n) - f(x_n) + f(x)}{f'(x_n)}.$$
 (1)

c) Pruebe que existen números estrictamente positivos  $\epsilon_1$  y M tales que:

para todo 
$$y \in [x - \epsilon_1, x + \epsilon_1]$$
 se tiene que  $|f'(y)| \ge M$ .

d) Justifique por qué:

$$\max_{y\in[x-\epsilon_1,x+\epsilon_1]}|f''(y)|:=L<\infty.$$

e) Pruebe que el valor absoluto de la parte derecha del numerador de la ecuación (1) es igual a:

12

$$\left| \int_{x_n}^x f''(t)(x-t) \, dt \right|. \tag{2}$$

f) Pruebe que (2) está acotado por:

$$\frac{L}{2}|x_n - x|^2.$$

g) Pruebe que si se define

$$r_n := \frac{L}{2M} |x_n - x| \quad \text{entonces} \quad r_{n+1} \le r_n^2.$$

h) Sea  $\epsilon = \min\left(\epsilon_1, \frac{2M}{L}\right)$ , pruebe que si  $|x_n - x| < \epsilon$ , entonces use la parte (a) para probar que  $|x_{n+1} - x| < \epsilon$ , y concluya el resultado.

#### Solución

# Ejercicio 21

### i Instrucción

Demuestre que en el caso de ceros de multiplicidad m, el Método de Newton Modificado:

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

es cuadráticamente convergente. Sugerencia: Use series de Taylor.

#### Solución

# Ejercicio 22

#### i Instrucción

El objetivo de este ejercicio es demostrar la convergencia del método de la **Secante** sin utilizar el Teorema de punto fijo de Banach.

#### Teorema:

Sea f una función de clase  $C^2[a,b]$ , con a < b. Si existe un punto x tal que f(x) = 0 y  $f'(x) \neq 0$ , entonces existe un número  $\varepsilon > 0$  tal que si  $x_0$  y  $x_1$  están dentro del intervalo ([x - , x + ]), la sucesión generada por el método de la secante

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

está bien definida dentro del intervalo ([x - , x + ]) y converge a x, cero de la ecuación f(x) = 0.

a) Sea  $(r_n)$  una sucesión de números reales positivos tales que:

$$r_{n+1} \le r_n r_{n-1}$$

Pruebe que si  $r_0 < 1$  y  $r_1 < 1$ , entonces la sucesión  $(r_n)$  está acotada por 1 y converge a 0. Además, pruebe que existe una constante C tal que:

$$r_n \leq Cr^{\rho}$$
,

donde r es un número estrictamente menor que 1, y

$$\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

b) Se denota:

$$f[x_n,x_{n-1}]:=\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$$

pruebe que:

$$f(\boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}) f[\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}]$$

c) Pruebe que:

$$x_{n+1} - x = (x_n - x) \cdot \frac{f[x_n, x_{n-1}] - f[x_n, x]}{f[x_n, x_{n-1}]}$$

d) Pruebe que:

$$x_{n+1}-x=\frac{(x_n-x)(x_n-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},x]}{f[x_n,x_{n-1}]},$$

donde:

$$f[x_n,x_{n-1},x] := \frac{f[x_n,x_{n-1}] - f[x_n,x]}{x_n - x}$$

e) Sea  $[x-\epsilon_1,x+\epsilon_1]$  un intervalo sobre el cual  $|f'(x)| \geq M.$ 

Pruebe que si  $x_n$  y  $x_{n-1}$  están dentro del intervalo, entonces:

$$|f[x_n, x_{n-1}]| \ge M$$

f) Sea Lla cota superior de |f''| en el intervalo  $[x-\epsilon_1,x+\epsilon_1].$  Pruebe que si  $x_n$  y  $x_{n-1}$ 

están dentro del intervalo, entonces:

$$|f[x_n,x_{n-1},x]| \leq \frac{L}{2}$$

g) Pruebe que:

$$|x_{n+1}-x|\leq \frac{L}{2M}|x_n-x|\cdot |x_{n-1}-x|$$

h) Tome:

$$r_n := \frac{L}{2M} |x_n - x|, \quad \mathbf{y} \quad \varepsilon < \min\left(\epsilon_1, \frac{2M}{L}\right)$$

usando (a), concluya que si  $x_0$  y  $x_1$  están dentro del intervalo  $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ , entonces  $x_n$ está dentro del intervalo para todo n, y  $|x_n-x|\to 0$  cuando  $n\to \infty.$ 

#### Solución

### Ejercicio 22

Instrucción

Pruebe los Teoremas 7, 10, 11 y 12 de la presentación de la clase.

#### Solución



#### Teorema 7

Sea f una función de clase  $C^2[a, b]$  con a < b.

Si existe un punto x tal que f(x)=0 y  $f'(x)\neq 0$ , entonces existe un número  $\varepsilon>0$  tal que si  $x_0$  y  $x_1$  están dentro del intervalo  $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ , la sucesión generada por el **método de la** secante

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-2} - x_{n-1})f(x_{n-1})}{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}$$

está bien definida dentro del intervalo  $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$  y converge a x, cero de la ecuación f(x) = 0.

#### 🌢 Prueba

### **?** Teorema 10

Sea f una función de clase  $C^2[a, b]$ .

Si existe un punto  $\tilde{x}$  tal que  $f(\tilde{x})=0,$   $f'(\tilde{x})\neq 0$  y  $f''(\tilde{x})\neq 0$ , entonces existe un número  $\varepsilon>0$  tal que si  $x_0$  y  $x_1$  están dentro del intervalo  $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ , la sucesión generada por el **método** de la secante

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-2} - x_{n-1})f(x_{n-1})}{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}$$

converge a  $\tilde{x}$  con orden de al menos  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618.$ 

### Prueba

Pruebe que:

$$|e_{n+1}| \approx C \cdot |e_n| \cdot |e_{n-1}| \tag{1.10}$$

$$\operatorname{con} C := \frac{|f'''(\tilde{x})|}{2|f'(\tilde{x})|}.$$

Por la definición 1 se busca una solución aproximada a la ecuación:

$$|e_n| = \lambda |e_{n-1}|^{\alpha} \tag{1.11}$$

con  $\lambda > 0$  y  $\alpha \ge 1$ .

Sustituyendo esta expresión en la anterior, se tiene:

$$\lambda |e_n|^\alpha = \lambda \lambda^\alpha |e_{n-1}|^{\alpha^2} = C \lambda |e_{n-1}|^{\alpha+1}. \tag{1.12}$$

Por tanto, para que se cumpla esta igualdad para n suficientemente grandes, debe cumplirse:

$$\lambda^\alpha = C$$
y  $\alpha^2 = \alpha + 1$ 

De donde se obtiene que:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } \lambda = C^{1/\alpha} \qquad \mathbf{I}$$

# **?** Teorema 11

Sea  $(x_n)$  una sucesión que converge a x con orden lineal con constante asintótica  $\lambda < 1$ , además se asume que  $e_n = x_n - x \neq 0$  para todo n. Entonces la sucesión  $(\tilde{x}_n)$ , definida en (1.14), converge a x más rápido que  $(x_n)$ .

# **?** Teorema 12

Si el método de punto fijo  $x_{n+1}=g(x_n)$  converge linealmente, entonces el orden de convergencia del método de Steffensen es al menos dos.

# Prueba

Suponga que g(x) es un número suficientemente de veces derivable, luego pruebe que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\tilde{x}|}{|x_n-\tilde{x}|^2}=\frac{1}{2}\left|\frac{g'(\tilde{x})g''(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})-1}\right|:=\lambda\neq0.$$