MA0501 – Tarea 4

Diego Alberto Vega Víquez - C38367 José Carlos Quintero Cedeño - C26152
Gabriel Valverde Guzmán - C38060

2025-09-26

Tabla de contenidos

Ejercicio 1

Instrucción del ejercicio 1

Complete las demostraciones que quedaron pendientes en la clase.

Solución

Teorema 1 [Weierstrass]

Sea f continua en $[a, b]$; entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ y $P_n(x) \in P_n$ tal que

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

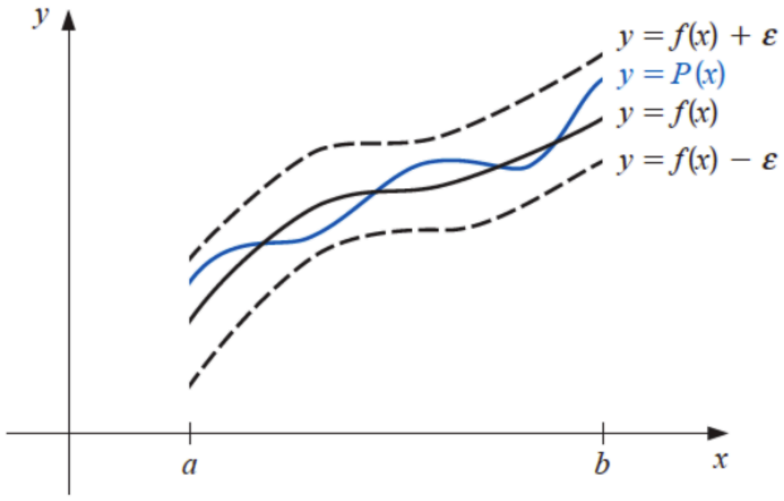


Figura 1: Polinomio de Bernstein

Prueba

Sin pérdida de generalidad, suponga que $a = 0$ y $b = 1$. Sea:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

se puede probar que $B_n(x) \to f(x)$ uniformemente en $[0, 1]$:
Vea que

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$$

Note que se tiene una esperanza con respecto a una distribución binomial $\text{Bin}(n, x)$

$$X_n \sim \text{Bin}(n, x) \implies \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_n}{n}\right) \right] = B_n(x)$$

Entonces:

$$|B_n(x) - f(x)| = \left| \mathbb{E}\left[f\left(\tfrac{X_n}{n}\right) \right] - f(x) \right|$$

Dado que f es continua en $[0, 1]$, por el Teorema de Heine–Cantor, también es uniformemente continua.
Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Considere dividir el dominio del índice k en dos regiones:

- Cuando $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$
- Cuando $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$

Entonces:

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \cdot P\left(\left|\tfrac{X_n}{n} - x\right| < \delta\right) + 2\|f\|_\infty \cdot P\left(\left|\tfrac{X_n}{n} - x\right| \geq \delta\right)$$

Usando la *desigualdad de Chebyshev* aplicada a $\frac{X_n}{n}$, cuya varianza es $\frac{x(1-x)}{n}$, el segundo término tiende a 0 uniformemente en $x \in [0, 1]$.
Como el error puede hacerse arbitrariamente pequeño uniformemente en x, se concluye:

$$\sup_{x \in [0,1]} |B_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

■

Teorema 3

Sea $f \in C[a,b]$ y $f \in C^n]a,b[$, si f se anula en $n+1$ puntos distintos, $x_0, x_1, \dots, x_n$ en $[a,b]$. Entonces $\exists\, c \in]a,b[$ tal que $f^{(n)}(c) = 0$.

Prueba

Por inducción sobre n

Caso base: $n = 1$.

Si $f(x_0) = f(x_1) = 0$ con $x_0 < x_1$, entonces por el Teorema de Rolle clásico, existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que:

$$f'(c) = 0.$$

Hipótesis de inducción:

Supongamos que el resultado es cierto para $n = k$, es decir, si $f \in C^k]a,b[$ y se anula en $k+1$ puntos distintos en $[a,b]$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f^{(k)}(c) = 0$.

Paso inductivo:

Sea ahora $f \in C^{k+1}]a,b[$ y supongamos que $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_{k+1}) = 0$, con $x_0 < x_1 < \cdots < x_{k+1}$.

Por el Teorema de Rolle, para cada par consecutivo (x_i, x_{i+1}), existe $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ tal que:

$$f'(c_i) = 0.$$

Eso da una nueva colección de $k+1$ puntos $c_0 < c_1 < \cdots < c_k$ donde f' se anula. Entonces, por la hipótesis de inducción aplicada a f', existe un punto $c \in (a,b)$ tal que:

$$f^{(k+1)}(c) = 0.$$

■

Teorema 6

Si $P_n(x)$ es el polinomio de Lagrange que coincide con $f(x)$ en $x_0, x_1, \dots, x_n$, entonces:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \\
&= f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}).
\end{aligned}
$$

Prueba

Si $P_n(x)$ se escribe de la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

entonces $P_n(x_0) = a_0$. Como $P_n(x_0) = f(x_0)$ se sigue que
$a_0 = f(x_0) = f[x_0]$.
Además:

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0),$$
$$f(x_1) = f[x_0] + a_1(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1].$$

Luego, por inducción se puede probar fácilmente que $a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$.

Paso base:

Para $k = 0$, se tiene:

$$P_n(x_0) = a_0 = f(x_0),$$

por lo tanto:

$$a_0 = f[x_0].$$

Hipótesis de inducción:

Supongamos que para algún $k \geq 1$ se cumple que:

$$a_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_j] \quad \text{para todo } j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Paso inductivo:

Queremos probar que:

$$a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k].$$

Evaluamos el polinomio $P_n(x)$ en $x = x_k$. Por construcción, se cumple:

$$P_n(x_k) = a_0 + a_1(x_k - x_0) + a_2(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \cdots + a_k(x_k - x_0)(x_k \overline{6} x_1)\cdots(x_k - x_{k-1}).$$

Pero también sabemos que $P_n(x_k) = f(x_k)$, y por la hipótesis de inducción:

Teorema 7

- Sea $f \in C[a,b]$.
- Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ nodos distintos en $[a,b]$.

Entonces el polinomio de grado menor que coincide con f y f' en $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

- Tiene grado $2n+1$.
- Está dado por

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{nj}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \widetilde{H}_{nj}(x),$$

donde

$$H_{nj}(x) = [1 - 2(x - x_j) L'_{nj}(x_j)] L^2_{nj}(x),$$

y

$$\widetilde{H}_{nj}(x) = (x - x_j) L^2_{nj}(x).$$

- Además, el error absoluto es:

$$|f(x) - H_{2n+1}(x)| = \left| \frac{(x - x_0)^2 \cdots (x - x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \right|, \quad \text{con } \xi \in]a,b[.$$

Prueba

- Se debe demostrar que $H_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$. Para ver esto, recordemos que:

$$L_{nj}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

de donde, cuando $i \neq j$:

$$H_{nj}(x_i) = 0 \quad \text{y} \quad \widetilde{H}_{nj}(x_i) = 0.$$

Mientras que:

$$H_{ni}(x_i) = [1 - 2(x_i - x_i)L'_{ni}(x_i)] \cdot 1 = 1,$$

$$\widetilde{H}_{ni}(x_i) = (x_i - x_i) \cdot 1^2$$

Luego:

$$H_{2n+1}(x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} f(x_j) \cdot 0 + f(x_i) \cdot 1 + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \cdot 0 = f(x_i).$$

Por lo tanto:

- $H_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.
- Se debe demostrar que $H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i)$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$.

Nótese que $L_{nj}(x)$ es un factor de $H'_{nj}(x)$, lo cual implica que $H'_{nj}(x_i) = 0$ cuando $i \neq j$. Además, si $i = j$:

$$\begin{aligned} H'_{ni}(x_i) &= -2L'_{ni}(x_i)L^2_{ni}(x_i) + [1 - 2(x_i - x_i)L'_{ni}(x_i)] \cdot 2 \cdot L_{ni}(x_i)L'_{ni}(x_i) \\ &= -2L'_{ni}(x_i) + 2L'_{ni}(x_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H'_{nj}(x_i) = 0$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ y para todo $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Además:

$$\widetilde{H}_{nj}(x_i) = L^2_{nj}(x_i) + (x_i - x_j)L'_{nj}(x_j) \cdot 2 \cdot L_{nj}(x_i)L'_{nj}(x_i),$$

de donde:

$$\widetilde{H}'_{nj}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Lema 1

Si $f \in C^n[a,b]$ y $x_0, x_1, \dots, x_n$ son los $(n+1)$ nodos distintos en $[a,b]$, entonces:
existe $\xi \in]a,b[$ tal que:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Prueba

Consideremos el polinomio interpolador de Newton de grado n, que interpola a f en los nodos $x_0, \dots, x_n$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Sea el **polinomio del error**:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Sabemos por teoría del error de interpolación que:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j),$$

para algún ξ_x entre el menor y el mayor de los puntos x_j y x.
Ahora consideremos la función:

$$F(x) = f(x) - Q(x),$$

donde $Q(x)$ es el polinomio de grado $n-1$ tal que $Q(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, \dots, n-1$. Entonces $F(x)$ es una función que coincide con f en los primeros n nodos, pero no necesariamente en el último.
Aplicamos el **Teorema de Rolle generalizado** a la función:

$$g(x) = f(x) - P_n(x),$$

la cual se anula en los puntos $x_0, \dots, x_n$, ya que $P_n(x_j) = f(x_j)$. Como $f \in C^n[a, b]$, entonces $g \in C^n[a, b]$ y se anula en $n+1$ puntos.
Por el teorema, existe $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$g^{(n)}(\xi) = 0.$$

Pero como $P_n(x)$ es de grado n, su derivada de orden n es constante:

$$P_n^{(n)}(x) = n! \cdot f[x_0, x_1, \dots, x_n],$$

y:

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n! \cdot f[x_0, \dots, x_n].$$

Entonces, si $g^{(n)}(\xi) = 0$:

$$f^{(n)}(\xi) = n! \cdot f[x_0, \dots, x_n] \quad \Rightarrow \quad f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Ejercicio 2

> **Instrucción del ejercicio 2**
>
> Implemente en R los algoritmos de interpolación polinómica vistos en clase.
> Los métodos que se deben implementar son:
>
> a) Interpolar $f(x)$ usando el polinomio de Lagrange con el algoritmo de Neville.
> b) Interpolar $f(x)$ usando el polinomio de Lagrange con el algoritmo de diferencias divididas de Newton.
> c) Interpolar $f(x)$ usando el polinomio de Hermite con el algoritmo de diferencias divididas de Newton.
> d) Interpolar $f(x)$ usando el "Splines" cúbicos naturales y sujetos.
>
> Luego en general programe una función que permita graficar el polinomio de interpolación y la función correspondiente (si la hay).

Solución Neville

```r
# Neville: interpolacion en un punto x a partir de un vector de nodos (xi) y otro de valores (f

# Retorna una lista con el valor interpolado y la matriz completa Q (la que posee todos los pol

neville <- function(nodos, valores, x) {
  stopifnot(is.numeric(nodos),
            is.numeric(valores),
            length(nodos) == length(valores))
  n <- length(nodos)
  Q <- matrix(NA_real_, nrow = n, ncol = n)

  # Columna inicial con valores de Y
  Q[, 1] <-  valores

  # Construccion de la tabla de Neville
  for (i in 2:n) {
    for (j in 2:i) {
      numerador <- ((x - nodos[i - j + 1]) * Q[i, j - 1] - (x - nodos[i]) * Q[i -
                                                                                1, j - 1])
      denominador <- nodos[i] - nodos[i - j + 1]
      Q[i, j] <-  numerador / denominador
```

```
    }
  }
  return(list(valor = Q[n, n], tabla = Q))
}
```

Lagrange por diferencias divididas de Newton

```
# Lagrange.Newton: interpolacion en un punto x function# Lagrange.Newton: interpolacion en un p

# Retorna una lista con el valor interpolado, la matriz para la construccion de los coeficiente

lagrange.newton <- function(nodos, valores, x) {
  stopifnot(is.numeric(nodos),
            is.numeric(valores),
            length(nodos) == length(valores))
  n <- length(nodos)
  Q <- matrix(NA_real_, nrow = n, ncol = n)

  Q[, 1] <- valores

  # Construccion de la tabla de diferencias de Newton
  for (i in 2:n) {
    for (j in 2:i) {
      numerador <- Q[i, j - 1] - Q[i - 1, j - 1]
      denominador <- nodos[i] - nodos[i - j + 1]
      Q[i, j] <-  numerador / denominador
    }
  }
  coeficientes <- diag(Q)

  valor = Q[1, 1]
  producto = 1

  for (i in 2:n) {
    producto <- producto * (x - nodos[i - 1])
    valor <- valor + coeficientes[i] * producto
  }
  return(list(
```

```
    valor = valor,
    tabla = Q,
    coeficientes = coeficientes
  ))
}
```

Hermite por diferencias divididas de Newton

```
# Hermite.newton: interpolacion en un punto x a partir de un vector de nodos, otro de valores y

# Retorna una lista con el valor interpolado, la matriz para la construccion de los  y un vecto

hermite.newton <- function(nodos, valores, derivadas, x) {
  stopifnot(
    is.numeric(nodos),
    is.numeric(valores),
    is.numeric(derivadas),
    length(nodos) == length(valores),
    length(nodos) == length(derivadas)
  )
  n <- length(nodos)

  Z <- numeric(2 * n)
  Q <- matrix(0, nrow = 2 * n, ncol = 2 * n)


  # Set-up inicial de la matriz
  for (i in 1:n) {
    z0 <- 2 * i - 1
    z1 <- 2 * i
    Z[z0] <- nodos[i]
    Z[z1] <- nodos[i]
    Q[z0, 1] <- valores[i]
    Q[z1, 1] <- valores[i]
    Q[z1, 2] <- derivadas[i]
    if (i != 1) {
      Q[z0, 2] <- (Q[z0, 1] - Q[z0 - 1, 1]) / (Z[z0] - Z[z0 - 1])
    }
```

```
  }
  # Rellenar el resto de la matriz a partir de estos valores
  for (i in 3:(2 * n)) {
    for (j in 3:i) {
      Q[i, j] <- (Q[i, j - 1] - Q[i - 1, j - 1]) / (Z[i] - Z[i - j + 1])
    }
  }

  coeficientes <- diag(Q)

  valor <- Q[1, 1]
  producto <- 1

  for (i in 2:(2 * n)) {
    producto <- producto * (x - Z[i - 1])
    valor <- valor + coeficientes[i] * producto
  }
  return(list(
    valor = valor,
    tabla = Q,
    coeficientes = coeficientes
  ))
}
```

Splines cubicos naturales

```
# spline.natural: funcion que calcula la interpolacion por splines a partir de unos nodos y sus

# Retorna los valores de los coeficientes a, b, c, d de cada una de las n-1 ecuaciones generada
spline.natural <- function(nodos, valores, x) {
  # Note que los valores de a corresponden a los valores de los nodos en la funcion, por lo que
  n <- length(nodos)

  h <- numeric(n - 1)
  alfa <- numeric(n - 1)
  alfa[1] <- 0

  # Paso 1 y 2: definir los h's y alfas
```

```
for (i in 1:(n - 1)) {
  h[i] <- nodos[i + 1] - nodos[i]
  if (i != 1) {
    alfa[i] <- (3 / h[i]) * (valores[i + 1] - valores[i]) - (3 / h[i - 1]) *
      (valores[i] - valores[i - 1])
  }
}

#Paso 3: definir valores iniciales de l, m, y z
l <- numeric(n) # creo que el tamano de esto puede ser n-1
l[1] <- 1
m <- numeric(n - 1)
m[1] <- 0
z <- numeric(n) # creo que el tamano de esto puede ser n-1
z[1] <- 0

# Paso 4: rellenar vectores l, m, z
for (i in 2:(n - 1)) {
  l[i] <- 2 * (nodos[i + 1] - nodos[i - 1]) - h[i - 1] * m[i - 1]
  m[i] <- h[i] / l[i]
  z[i] <- (alfa[i] - h[i - 1] * z[i - 1]) / l[i]
}

# Paso 5: definir valores finales
l[n] <- 1 #creo que esto no hace falta
z[n] <- 0 #esto tampoco
c <- numeric(n)
c[n] <- 0
b <- numeric(n)
d <- numeric(n)

# Paso 6: sustitucion hacia atras
for (j in (n - 1):1) {
  c[j] <- z[j] - m[j] * c[j + 1]
  b[j] <- (valores[j + 1] - valores[j]) / h[j] - (h[j] / 3) * (c[j + 1] +
                                                               2 * c[j])
```

```
    d[j] <- (c[j + 1] - c[j]) / (3 * h[j])
  }

  # Paso extra: evaluar la interpolacion en el punto x especificado

  ## Encontramos los dos nodos que estan prensando al intervalo
  indice <- NULL
  for (i in 1:(n - 1)) {
    if (x >= nodos[i] && x < nodos[i + 1]) {
      indice <- i
    }
  }
  if(x == nodos[n]){
    indice <- n
  }
  if (is.null(indice)) {
    return("El valor de interpolacion debe estar entre dos nodos")
  }
  ## evaluamos en la funcion asociada

  valor <- valores[indice] + b[indice] * (x - nodos[indice]) + c[indice] * (x - nodos[indice])^

  return(list(
    a = valores,
    b = b,
    c = c,
    d = d,
    valor = valor
  ))
}
```

Splines cubicos sujetos

```
# spline.sujeto: funcion que calcula la interpolacion por splines a partir de unos nodos y sus

# Retorna los valores de los coeficientes a, b, c, d de cada una de las n-1 ecuaciones generada
spline.sujeto <- function(nodos, valores, derivadas, x) {
  # Note que los valores de a corresponden a los valores de los nodos en la funcion, por lo que
```

```
stopifnot(length(derivadas) == 2)
n <- length(nodos)

h <- numeric(n - 1)
alfa <- numeric(n)

# Paso 1 y 2: definir los h's y alfas
for (i in 1:(n - 1)) {
  h[i] <- nodos[i + 1] - nodos[i]
  if (i != 1) {
    alfa[i] <- (3 / h[i]) * (valores[i + 1] - valores[i]) - (3 / h[i - 1]) *
      (valores[i] - valores[i - 1])
  }
}

alfa[1] <- 3 * ((valores[2] - valores[1]) / h[1] - derivadas[1])
alfa[n] <- 3 * (derivadas[2] - (valores[n] - valores[n - 1]) / h[n - 1])

#Paso 3: definir valores iniciales de l, m, y z
l <- numeric(n) # creo que el tamano de esto puede ser n-1
l[1] <- 2 * h[1]
m <- numeric(n - 1)
m[1] <- 1 / 2
z <- numeric(n) # creo que el tamano de esto puede ser n-1
z[1] <- alfa[1] / l[1]

# Paso 4: rellenar vectores l, m, z
for (i in 2:(n - 1)) {
  l[i] <- 2 * (nodos[i + 1] - nodos[i - 1]) - h[i - 1] * m[i - 1]
  m[i] <- h[i] / l[i]
  z[i] <- (alfa[i] - h[i - 1] * z[i - 1]) / l[i]
}

# Paso 5: definir valores finales
l[n] <- h[n - 1] * (2 - m[n - 1])
z[n] <- (alfa[n] - h[n - 1] * z[n - 1]) / l[n]
```

```r
c <- numeric(n)
c[n] <- z[n]
b <- numeric(n)
d <- numeric(n)

# Paso 6: sustitucion hacia atras
for (j in (n - 1):1) {
  c[j] <- z[j] - m[j] * c[j + 1]
  b[j] <- (valores[j + 1] - valores[j]) / h[j] - (h[j] / 3) * (c[j + 1] + 2 * c[j])
  d[j] <- (c[j + 1] - c[j]) / (3 * h[j])
}

# Paso extra: evaluar la interpolacion en el punto x especificado

## Encontramos los dos nodos que estan prensando al intervalo
indice <- NULL
for (i in 1:(n - 1)) {
  if (x >= nodos[i] && x < nodos[i + 1]) {
    indice <- i
  }
}
if (x == nodos[n]) {
  indice <- n
}
if (is.null(indice)) {
  return("El valor de interpolacion debe estar entre dos nodos")
}
## evaluamos en la funcion asociada

valor <- valores[indice] + b[indice] * (x - nodos[indice]) + c[indice] * (x - nodos[indice])^

return(list(
  a = valores,
  b = b,
  c = c,
  d = d,
```

```
    valor = valor
  ))
}
```

Funcion de graficacion

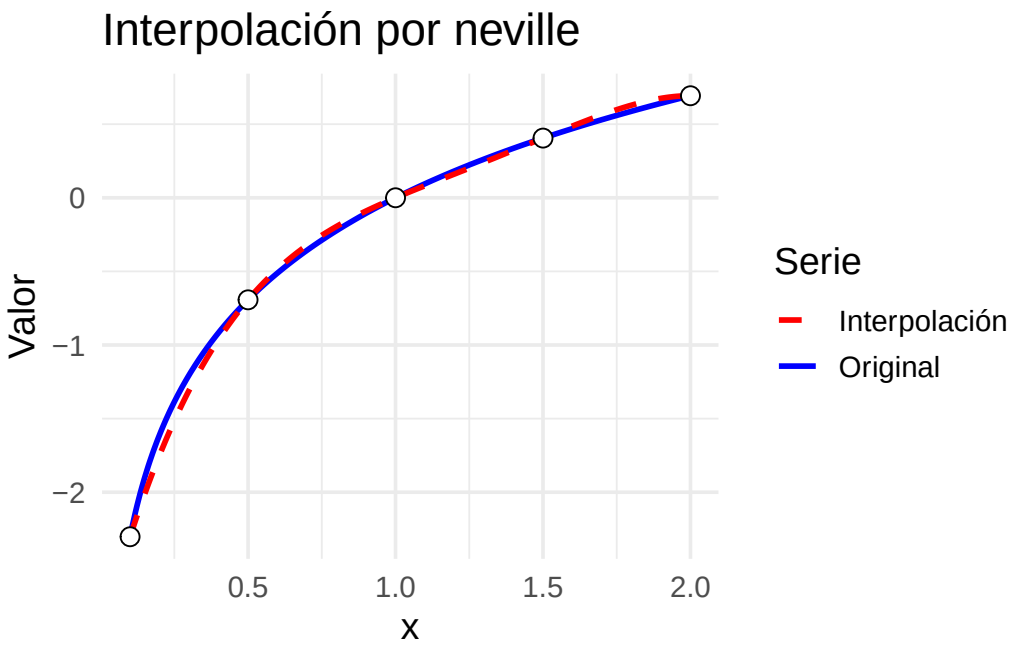
```
library(tidyverse)

graficar.polinomio <- function(nodos,
                               a,
                               b,
                               metodo,
                               f = NULL,
                               valores = NULL,
                               df = NULL,
                               derivadas = NULL,
                               derivadas.clamped = NULL) {

  stopifnot(is.numeric(nodos), length(nodos) >= 2)

  # Validación: exactamente uno de f o valores
  if (is.null(f) == is.null(valores)) {
    stop("Debe proveer exactamente uno: 'f' (función) o 'valores' (numérico).")
  }

  # Valores en nodos
  if (!is.null(f)) {
    stopifnot(is.function(f))
    valores_nodos <- f(nodos)
  } else {
    stopifnot(is.numeric(valores), length(valores) == length(nodos))
    valores_nodos <- valores
  }

  # ---- Derivadas en nodos (si aplica) ----
  derivadas_nodos <- NULL

  # Si llegan ambos, priorizamos 'derivadas' y avisamos
```

```r
if (!is.null(df) && !is.null(derivadas)) {
  warning("Se pasaron 'df' y 'derivadas'; se usará 'derivadas'.")
}

if (!is.null(derivadas)) {
  stopifnot(is.numeric(derivadas), length(derivadas) == length(nodos))
  derivadas_nodos <- derivadas
} else if (!is.null(df)) {
  if (is.function(df)) {
    derivadas_nodos <- df(nodos)
  } else if (is.numeric(df)) {
    stopifnot(length(df) == length(nodos))
    derivadas_nodos <- df
  } else {
    stop("`df` debe ser función o vector numérico de derivadas en los nodos.")
  }
}

# Wrapper vectorizado para el método (con o sin derivadas)
if (!is.null(derivadas_nodos)) {
  H <- function(x)
    vapply(x, function(xx)
      metodo(nodos, valores_nodos, derivadas_nodos, xx)$valor, numeric(1))
} else {
  if (is.null(derivadas.clamped)) {
    H <- function(x)
      vapply(x, function(xx)
        metodo(nodos, valores_nodos, xx)$valor, numeric(1))
  } else {
    H <- function(x)
      vapply(x, function(xx)
        spline.sujeto(nodos, valores_nodos, derivadas.clamped, xx)$valor, numeric(1))
  }
}

# Malla y data frames
```

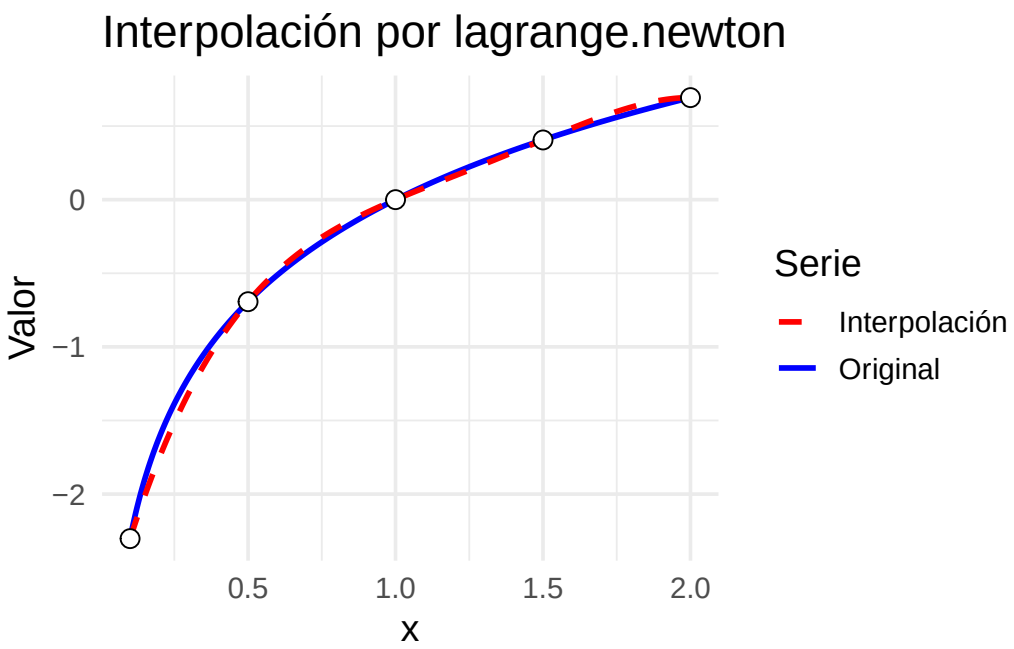
```
  xi <- seq(a, b, length.out = 400)
  df_plot <- data.frame(
    x  = xi,
    Hx = H(xi),
    fx = if (!is.null(f)) f(xi) else NA_real_
  )
  df_nodos <- data.frame(x = nodos, y = valores_nodos)

  # Gráfico
  p <- ggplot(df_plot, aes(x = x))
  if (!is.null(f)) {
    p <- p +
      geom_line(aes(y = fx, color = "Original"), linewidth = 1) +
      geom_line(aes(y = Hx, color = "Interpolación"),
                linewidth = 1, linetype = "dashed") +
      scale_color_manual(values = c("Original" = "blue", "Interpolación" = "red"))
  } else {
    p <- p +
      geom_line(aes(y = Hx, color = "Interpolación"), linewidth = 1) +
      scale_color_manual(values = c("Interpolación" = "red"))
  }

  p +
    geom_point(data = df_nodos, aes(x = x, y = y),
               shape = 21, size = 3, fill = "white") +
    labs(title = paste0("Interpolación por ", deparse(substitute(metodo))),
         y = "Valor", color = "Serie") +
    theme_minimal(base_size = 14)
}
```

Pruebas

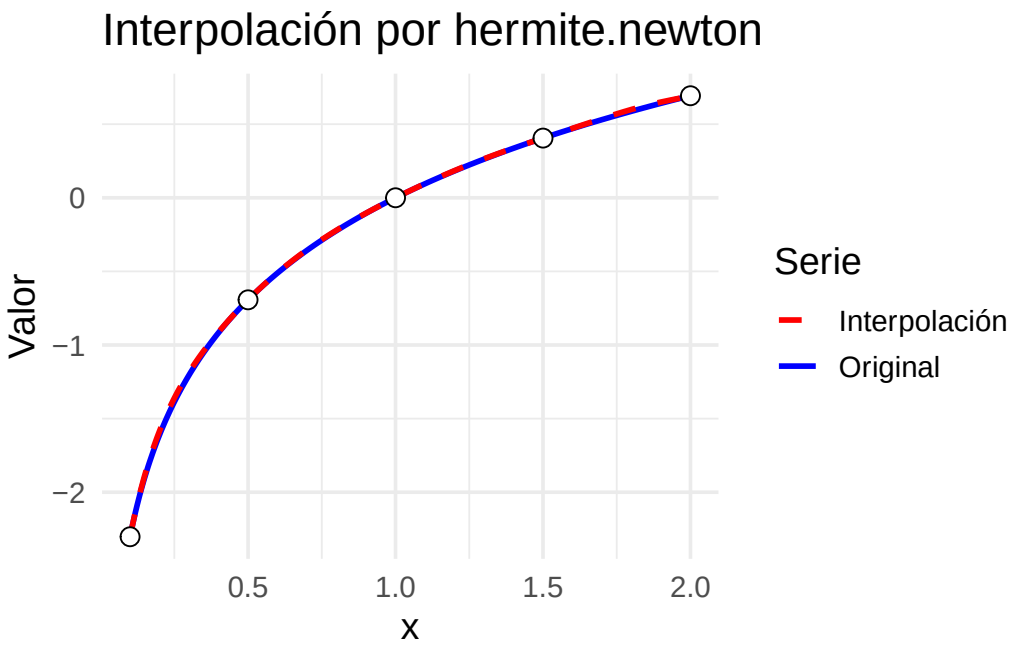
```
f <- function(x) log(x)
df <- function(x) 1/x
nodos <- c(0.1, 0.5, 1, 1.5, 2)
graficar.polinomio(nodos, nodos[1], nodos[length(nodos)], neville, f)
```



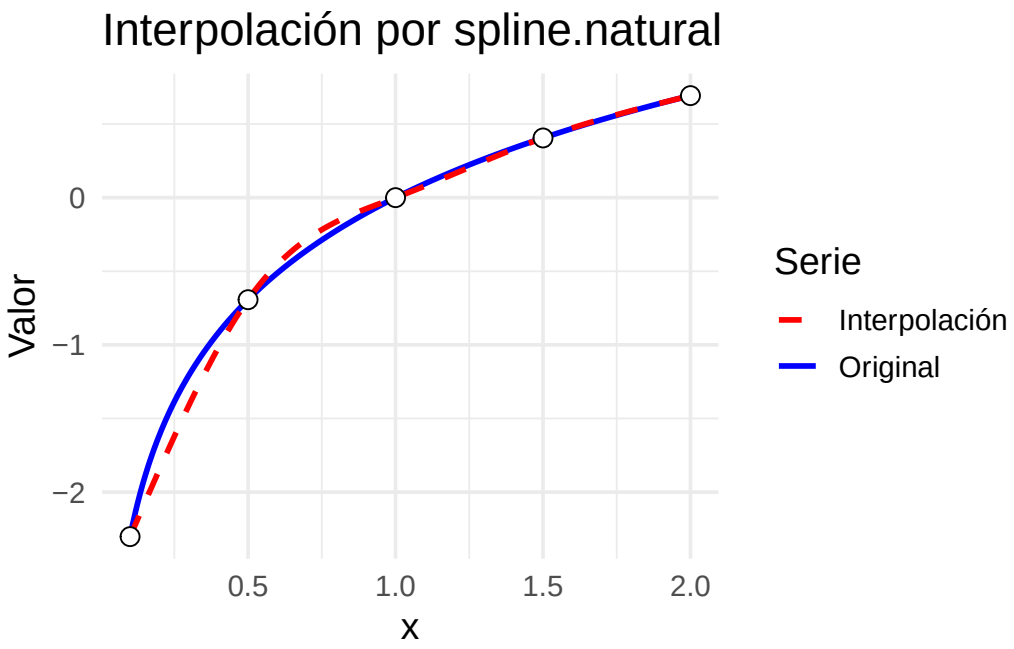

```
graficar.polinomio(nodos, nodos[1], nodos[length(nodos)], lagrange.newton, f)
```



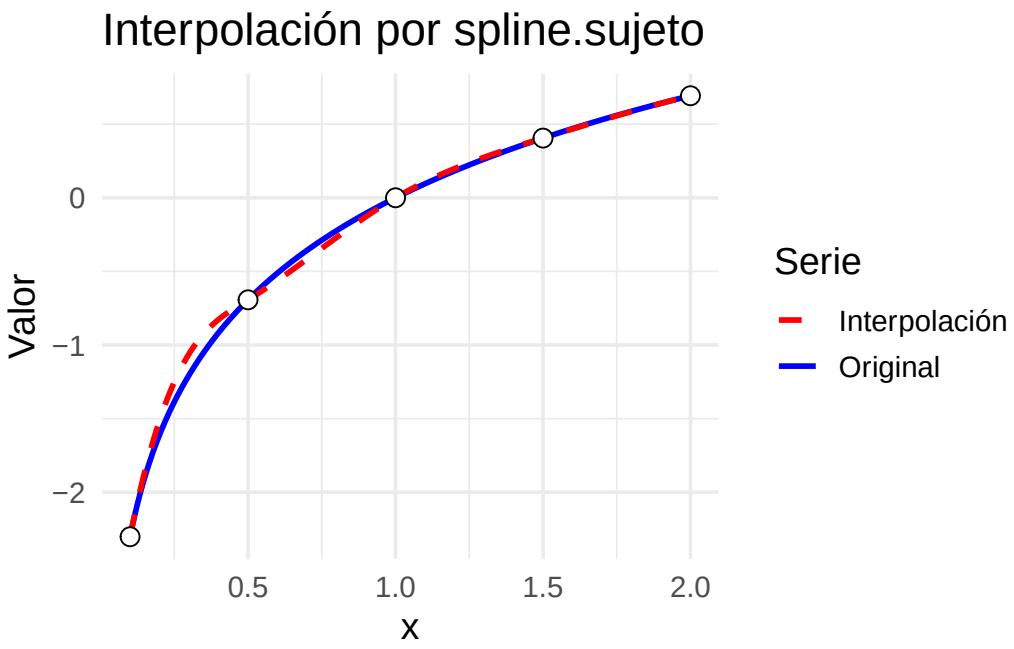

```
graficar.polinomio(nodos, nodos[1], nodos[length(nodos)], hermite.newton, f = f, df = df)
```




```
graficar.polinomio(nodos, nodos[1], nodos[length(nodos)], spline.natural, f)
```




```
graficar.polinomio(nodos, nodos[1], nodos[length(nodos)], spline.sujeto, f = f, derivadas.clamp
```



Ejercicio 3

Instrucción del ejercicio 3

Para el polinomio de Bernstein $B_n(x)$ hacer lo siguiente:

a) Demostrar que para $k \leq n$ se tiene

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k}.$$

b) Pruebe que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

c) Use (b) y (c) para probar que para $f(x) = x^2$

$$B_n(x) = \binom{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n}x.$$

Solución

Ejercicio 4

Instrucción del ejercicio 4

Dada la siguiente tabla de datos para $f(x)$:

x	$f(x)$
0.2	0.9798652
0.4	0.9177710
0.6	0.8080348
0.8	0.6386093
1.0	0.3843735

Aproxime $f(0.5)$ usando el procedimiento **Neville**.

Solución

```
neville(c(0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0), c(0.9798652, 0.9177710, 0.8080348, 0.6386093, 0.3843735), 0
```

```
$valor
[1] 0.8693047


$tabla
          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
[1,] 0.9798652        NA        NA        NA        NA
[2,] 0.9177710 0.8867239        NA        NA        NA
[3,] 0.8080348 0.8629029 0.8688582        NA        NA
[4,] 0.6386093 0.8927476 0.8703641 0.8696111        NA
[5,] 0.3843735 1.0199630 0.8609437 0.8687940 0.8693047
```

Ejercicio 5

Instrucción del ejercicio 5

a) Use el algoritmo de Neville para aproximar $f(1.03)$ con $P_{0,1,2}$ para la función

$$f(x) = 3xe^x - e^{2x}$$

usando $x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$ y $x_2 = 1.07$.

b) Suponga que la aproximación en (a) no es suficientemente exacta. Calcule $P_{0,1,2,3}$ donde $x_3 = 1.04$.

c) Compare el error real en (a) y (b) con la cota del error teórica según los teoremas vistos en clase.

Solución

a)

```
f <- function(x) 3*x*exp(x) - exp(2*x)
nodos <- c(1, 1.05, 1.07)
valores <- f(nodos)

valor.a <- neville(nodos, valores, 1.03)$valor
valor.a
```

```
[1] 0.8094418
```

b)

```
nodos <- c(nodos, 1.04)
valores <- f(nodos)

valor.b <- neville(nodos, valores, 1.03)$valor
valor.b
```

```
[1] 0.8093228
```

c) **FALTA METER ERROR TEORICO**

```
error.real.a <- abs(valor.a-f(1.03))
error.real.a
```

```
[1] 0.0001181866
```

```
error.real.b <- abs(valor.b-f(1.03))
error.real.b
```

```
[1] 8.490499e-07
```

```
# FALTA METER ERROR TEORICO
```

Ejercicio 6

> **Instrucción del ejercicio 6**
>
> Repita el ejercicio anterior usando el polinomio de interpolación de Hermite, compare resultados.

Solución

a)

```
f <- function(x) 3*x*exp(x) - exp(2*x)
df <- function(x) 3*x*exp(x) + 3*exp(x) -2*exp(2*x)
nodos <- c(1, 1.05, 1.07)
valores <- f(nodos)
derivadas <- df(nodos)

valor.a <- hermite.newton(nodos, valores, derivadas, 1.03)$valor
valor.a
```

```
[1] 0.8093236
```

b)

```
nodos <- c(nodos, 1.04)
valores <- f(nodos)
derivadas <- df(nodos)

valor.b <- hermite.newton(nodos, valores, derivadas, 1.03)$valor
valor.b
```

```
[1] 0.8093236
```

c) **FALTA METER ERROR TEORICO**

```
error.real.a <- abs(valor.a-f(1.03))
error.real.a
```

```
[1] 3.61008e-10
```

```
error.real.b <- abs(valor.b-f(1.03))
error.real.b
```

```
[1] 1.776357e-15
```

```
# FALTA METER ERROR TEORICO
```

FALTA COMPARAR RESULTADOS # Ejercicio 7

> **i** Instrucción del ejercicio 7
>
> Use el algoritmo de Diferencias Divididas para construir el polinomio interpolante de grado 4 según la siguiente tabla:
>
> | x | $f(x)$ |
> |---|---|
> | 0.0 | -7.00000 |
> | 0.1 | -5.89483 |
> | 0.3 | -5.65014 |
> | 0.6 | -5.17788 |
> | 1.0 | -4.28172 |
>
> Grafique este polinomio.

Solución

```
nodos <- c(0, 0.1, 0.3, 0.6, 1)
valores <- c(-7, -5.89483, -5.65014, -5.17788, -4.28172)

lagrange.newton(nodos, valores, 1)
```

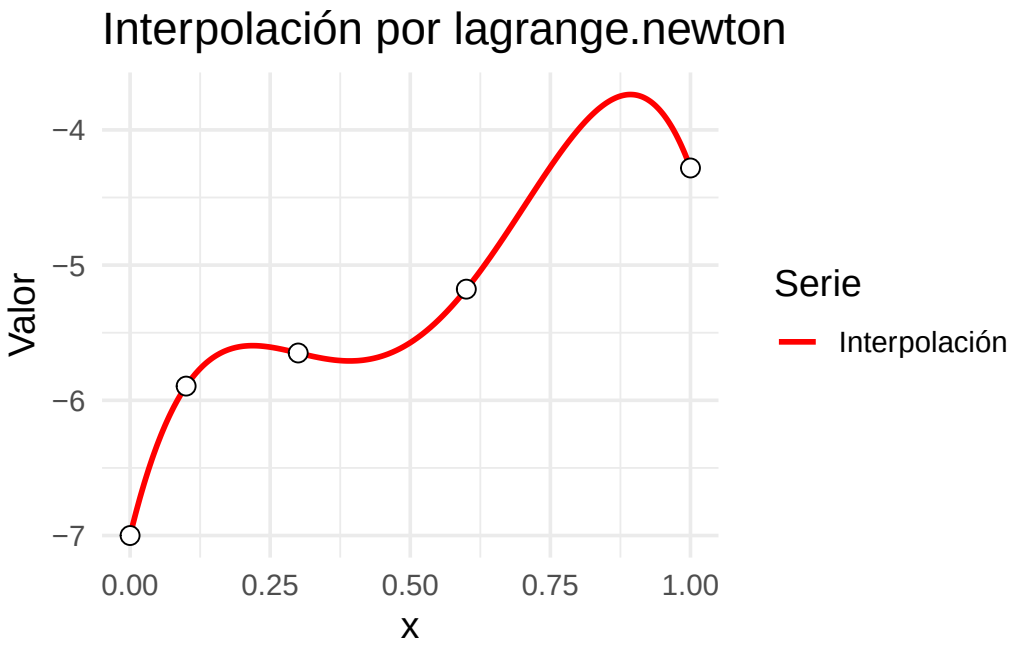
```
$valor
[1] -4.28172

$tabla
         [,1]     [,2]        [,3]       [,4]       [,5]
[1,] -7.00000       NA          NA         NA         NA
[2,] -5.89483 11.05170          NA         NA         NA
[3,] -5.65014  1.22345 -32.7608333         NA         NA
[4,] -5.17788  1.57420   0.7015000 55.7705556         NA
[5,] -4.28172  2.24040   0.9517143  0.2780159 -55.49254

$coeficientes
[1]  -7.00000  11.05170 -32.76083  55.77056 -55.49254
```

A partir de lo obtenido por el algoritmo de diferencias divididas de Newton, se obtiene que el

polinomio de grado 4 que interpola a f(x) es:

$P_4(x) = -7 + 11.05170x - 32.76083x(x-0.1) + 55.77056x(x-0.1)(x-0.3) - 55.49254x(x-0.1)(x-0.3)(x-0.6)$

```
graficar.polinomio(nodos, 0, 1, lagrange.newton, valores = valores)
```



Ejercicio 8

Instrucción del ejercicio 8

Use el algoritmo de Hermite para construir el polinomio interpolante de Hermite dada la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.2	0.9798652	0.20271
0.4	0.9177710	0.42279
0.6	0.8080348	0.68414
0.8	0.6386093	1.02964
1.0	0.3843735	1.55741

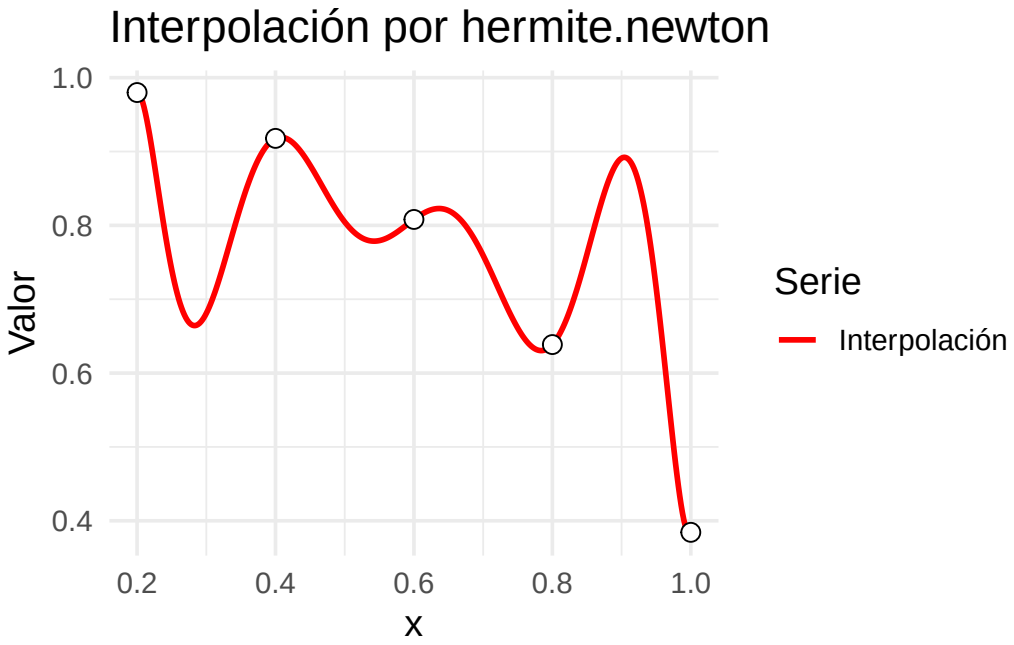
Grafique este polinomio.

Solución

```r
nodos     <- c(0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0)
valores   <- c(0.9798652, 0.9177710, 0.8080348, 0.6386093, 0.3843735)
derivadas <- c(0.20271,   0.42279,   0.68414,   1.02964,   1.55741)

hermite.newton(nodos, valores, derivadas, 0.2)
```

```
$valor
[1] 0.9798652

$tabla
           [,1]       [,2]       [,3]      [,4]      [,5]       [,6]       [,7]
 [1,] 0.9798652  0.0000000   0.000000   0.00000    0.0000     0.0000      0.000
 [2,] 0.9798652  0.2027100   0.000000   0.00000    0.0000     0.0000      0.000
 [3,] 0.9177710 -0.3104710  -2.565905   0.00000    0.0000     0.0000      0.000
 [4,] 0.9177710  0.4227900   3.666305  31.16105    0.0000     0.0000      0.000
 [5,] 0.8080348 -0.5486810  -4.857355 -21.30915 -131.1755     0.0000      0.000
 [6,] 0.8080348  0.6841400   6.164105  55.10730  191.0411   805.5416      0.000
 [7,] 0.6386093 -0.8471275  -7.656337 -34.55111 -224.1460  -691.9786 -2495.867
 [8,] 0.6386093  1.0296400   9.383837  85.20087  299.3800  1308.8149  3334.656
 [9,] 0.3843735 -1.2711790 -11.504095 -52.21983 -343.5518 -1071.5529 -3967.280
[10,] 0.3843735  1.5574100  14.142945 128.23520  451.1376  1986.7234  5097.127
           [,8]      [,9]    [,10]
 [1,]     0.000      0.00     0.00
 [2,]     0.000      0.00     0.00
 [3,]     0.000      0.00     0.00
 [4,]     0.000      0.00     0.00
 [5,]     0.000      0.00     0.00
 [6,]     0.000      0.00     0.00
 [7,]     0.000      0.00     0.00
 [8,]  9717.538      0.00     0.00
 [9,] -9127.419 -23556.20     0.00
[10,] 15107.344  30293.45 67312.06

$coeficientes
 [1]  9.798652e-01  2.027100e-01 -2.565905e+00  3.116105e+01 -1.311755e+02
 [6]  8.055416e+02 -2.495867e+03  9.717538e+03 -2.355620e+04  6.731206e+04
```

```r
graficar.polinomio(nodos, 0.2, 1, hermite.newton, valores = valores, derivadas = derivadas)
```



Ejercicio 9

i Instrucción del ejercicio 9

Use el algoritmo de Diferencias Divididas para calcular el polinomio de interpolación de Lagrange $p(x)$ de cuarto grado para:

$$f(x) = x^3 \sin(x)$$

con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.
Grafique en un mismo plano $f(x)$ y $p(x)$ y luego imprima.

Solución

Ejercicio 10

i Instrucción del ejercicio 10

Probar que los polinomios $L_k(x)$ vistos en clase se pueden expresar de la forma:

$$L_k(x) = \frac{\psi(x)}{(x - x_k)\psi'(x_k)}$$

donde:

$$\psi(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

y que por lo tanto el polinomio interpolante de Lagrange se puede expresar como:

$$p(x) = \psi(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\psi'(x_k)}.$$

Solución

Partimos de la definición vista en clase del polinomio de Lagrange:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Ahora definimos el polinomio:

$$\psi(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

Este se puede factorizar como:

$$\psi(x) = (x - x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n}(x - x_j) \quad \Rightarrow \quad \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n}(x - x_j) = \frac{\psi(x)}{x - x_k}$$

También observamos que la derivada de $\psi(x)$ evaluada en x_k es:

$$\psi'(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n}(x_k - x_j)$$

ya que al derivar el producto total y evaluar en x_k, solo sobrevive el término en el que se deriva $(x - x_k)$.

🔥 Demostración de $\psi'(x)$ por inducción

Queremos probar que si definimos el polinomio:

$$\psi(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

entonces, para cualquier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, se cumple:

$$\psi'(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)$$

Esta es la derivada del producto evaluada en uno de los nodos x_k. Usaremos **inducción matemática sobre** n.

Paso base: $n = 1$

$$\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

Entonces su derivada es:

$$\psi'(x) = (x - x_0)'(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_1)' = (x - x_1) + (x - x_0)$$

Evaluamos en $x = x_0$:

$$\psi'(x_0) = (x_0 - x_1) + 0 = x_0 - x_1 = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{1}(x_0 - x_j)$$

Y en $x = x_1$:

$$\psi'(x_1) = 0 + (x_1 - x_0) = x_1 - x_0 = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{1}(x_1 - x_j)$$

Por tanto, el paso base se cumple.

Paso inductivo: suponer cierto para n**, probar para** $n + 1$

Supongamos que para:

$$\psi_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

se cumple:

$$\psi_n'(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)$$

Queremos probar que para:

$$\psi_{n+1}(x) = \psi_n(x)(x - x_{n+1})$$

se cumple:

$$\psi_{n+1}'(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n+1}(x_k - x_j)$$

Aplicamos la derivada del producto:

$$\psi_{n+1}'(x) = \psi_n'(x)(x - x_{n+1}) + \psi_n(x)$$

Evaluamos en $x = x_k$ con $k \leq n$. Como $\psi_n(x_k) = 0$ (por definición de raíz), el segundo término desaparece:

$$\psi_{n+1}'(x_k) = \psi_n'(x_k)(x_k - x_{n+1})$$

Por hipótesis inductiva:

$$\psi_n'(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)$$

Entonces:

$$\psi_{n+1}'(x_k) = \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)\right)(x_k - x_{n+1}) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n+1}(x_k - x_j)$$

Lo cual demuestra que la fórmula también es válida para $n + 1$.

Conclusión:

Por el principio de inducción matemática, se cumple que:

$$\boxed{\psi'(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)}$$

para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Sustituyendo todo en la fórmula original de $L_k(x)$:

$$L_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)} = \frac{\psi(x)}{(x - x_k)\psi'(x_k)}$$

Esto completa la prueba de la fórmula para $L_k(x)$.

Finalmente, como el polinomio interpolante de Lagrange se define como:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)$$

entonces sustituyendo la expresión obtenida para $L_k(x)$:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\psi(x)}{(x - x_k)\psi'(x_k)} = \psi(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\psi'(x_k)}$$

Ejercicio 11

Instrucción del ejercicio 11

Demostrar que si $f(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a n, entonces el polinomio de grado menor o igual a n que interpola $f(x)$ en $x_0, x_1, \dots, x_n$ es el mismo $f(x)$.

Solución

Sea $f(x)$ un polinomio de grado menor o igual a n y $P_n(x)$ el polinomio que lo interpola en $x_0, x_1, ..., x_n$.

Note que $f^{(n+1)}(x) = 0$, pues es un polinomio de grado menor o igual a n.

Además, se sabe que el error absoluto entre $f(x)$ y su interpolacion viene dado por:

$|f(x) - P_n(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(\psi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$, con $\psi_x \in [a, b]$, donde $[a, b]$ es el intervalo donde estamos interpolando.

Juntando estas dos cosas, se concluye que $|f(x) - P_n(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = P_n(x)$

Ejercicio 12

Instrucción del ejercicio 12

Usar el ejercicio anterior para probar que:

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$$

Solución

Instrucción del ejercicio 13

Para las siguientes funciones:

- $f(x) = 3x^2 \ln(x) + 2x$ con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2.5$ y $x_4 = 3$.
- $f(x) = x^2 \sin(x) - 3\cos(x)$ con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.
- $f(x) = x\cos(x) - 2x^2 + 3x - 1$ con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.

a) Encuentre el polinomio de interpolación de Lagrange $P^{\star}(x)$ en los nodos indicados, grafique $f(x)$ y $P^{\star}(x)$ en el mismo plano.

b) Encuentre el polinomio de interpolación usando Splines cúbicos $P^{\star\star}(x)$ en los nodos indicados, grafique $f(x)$ y $P^{\star\star}(x)$ en el mismo plano, luego imprima.

c) Encuentre el polinomio de interpolación de Hermite $P^{\star\star\star}(x)$ en los nodos indicados, grafique $f(x)$ y $P^{\star\star\star}(x)$ en el mismo plano.

d) Grafique $f(x)$, $P^{\star}(x)$, $P^{\star\star}(x)$ y $P^{\star\star\star}(x)$ en el mismo plano. ¿Qué se puede concluir?

Solución

Ejercicio 13

Instrucción del ejercicio 13

Para las siguientes funciones:

- $f(x) = 3x^2 \ln(x) + 2x$ con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2.5$ y $x_4 = 3$.
- $f(x) = x^2 \sin(x) - 3\cos(x)$ con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.
- $f(x) = x\cos(x) - 2x^2 + 3x - 1$ con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.

a) Encuentre el polinomio de interpolación de Lagrange $P^{\star}(x)$ en los nodos indicados, grafique $f(x)$ y $P^{\star}(x)$ en el mismo plano.

b) Encuentre el polinomio de interpolación usando Splines cúbicos $P^{\star\star}(x)$ en los nodos indicados, grafique $f(x)$ y $P^{\star\star}(x)$ en el mismo plano; luego imprima.

c) Encuentre el polinomio de interpolación de Hermite $P^{***}(x)$ en los nodos indicados, grafique $f(x)$ y $P^{***}(x)$ en el mismo plano.

d) Grafique $f(x)$, $P^{*}(x)$, $P^{**}(x)$ y $P^{***}(x)$ en el mismo plano. ¿Qué se puede concluir?

Solución

Preparación

```
# Funciones
f1 <- function(x) 3 * x^2 * log(x) + 2 * x
f2 <- function(x) x^2 * sin(x) - 3 * cos(x)
f3 <- function(x) x * cos(x) - 2 * x^2 + 3 * x - 1

# Derivadas
df1 <- function(x) 6 * x * log(x) + 3 * x + 2
df2 <- function(x) 2 * x * sin(x) + x^2 * cos(x) + 3 * sin(x)
df3 <- function(x) cos(x) - x * sin(x) - 4 * x + 3
```

a)

```
graficar.polinomio(c(1, 1.5, 2, 2.5, 3), 1, 3, lagrange.newton, f = f1)
```

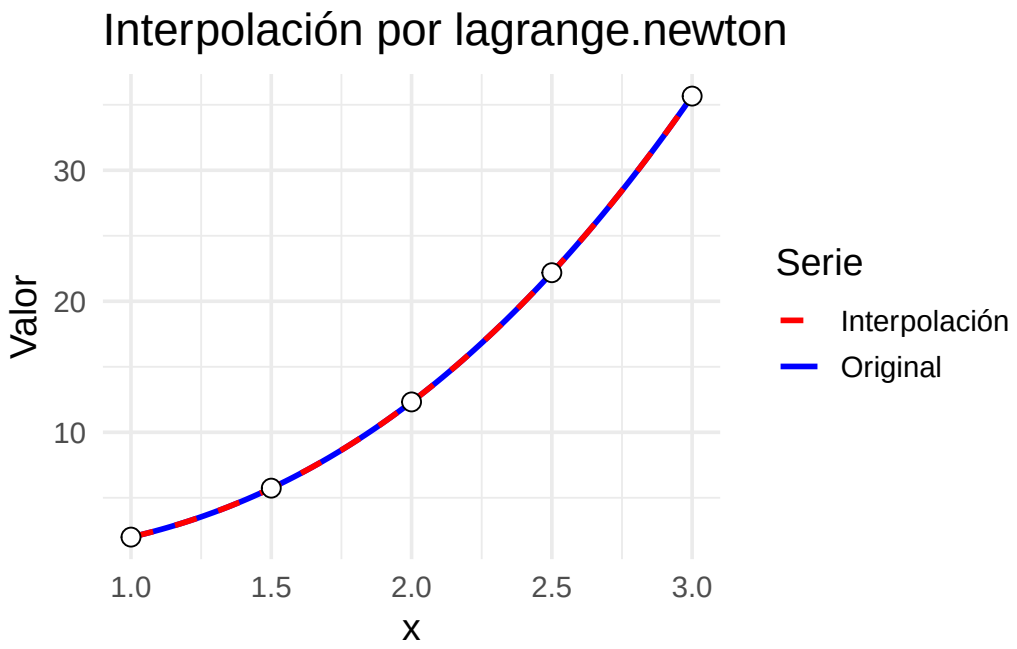


Figura 2: Interpolación de Lagrange - Función 1

```r
graficar.polinomio(c(1, 2, 3, 4, 5), 1, 5, lagrange.newton, f = f2)
```

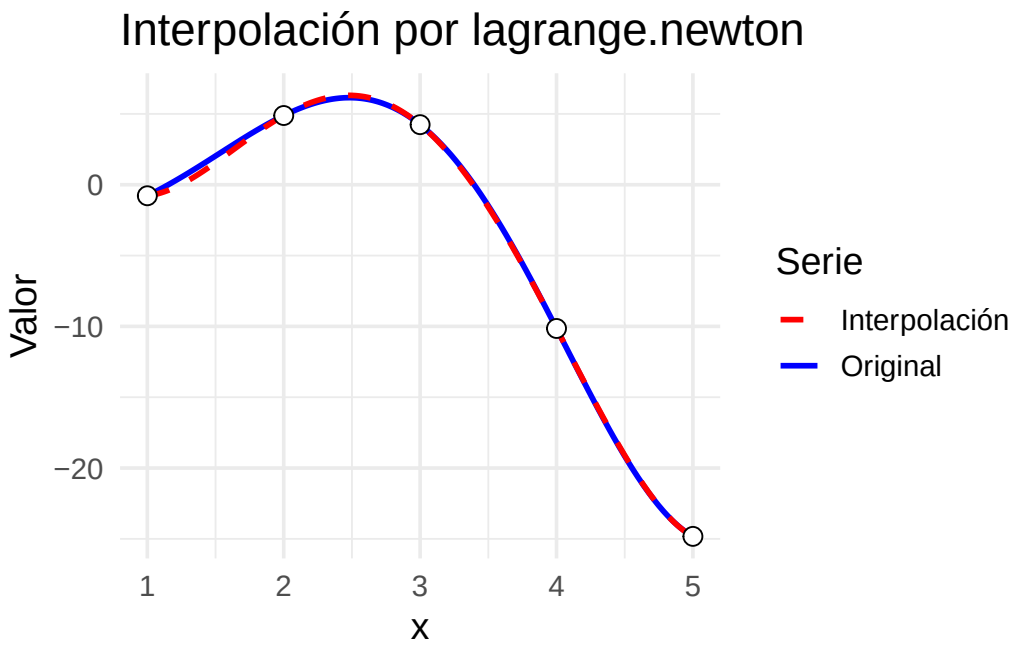


Figura 3: Interpolación de Lagrange - Función 2

```r
graficar.polinomio(c(1, 2, 3, 4, 5), 1, 5, lagrange.newton, f = f3)
```

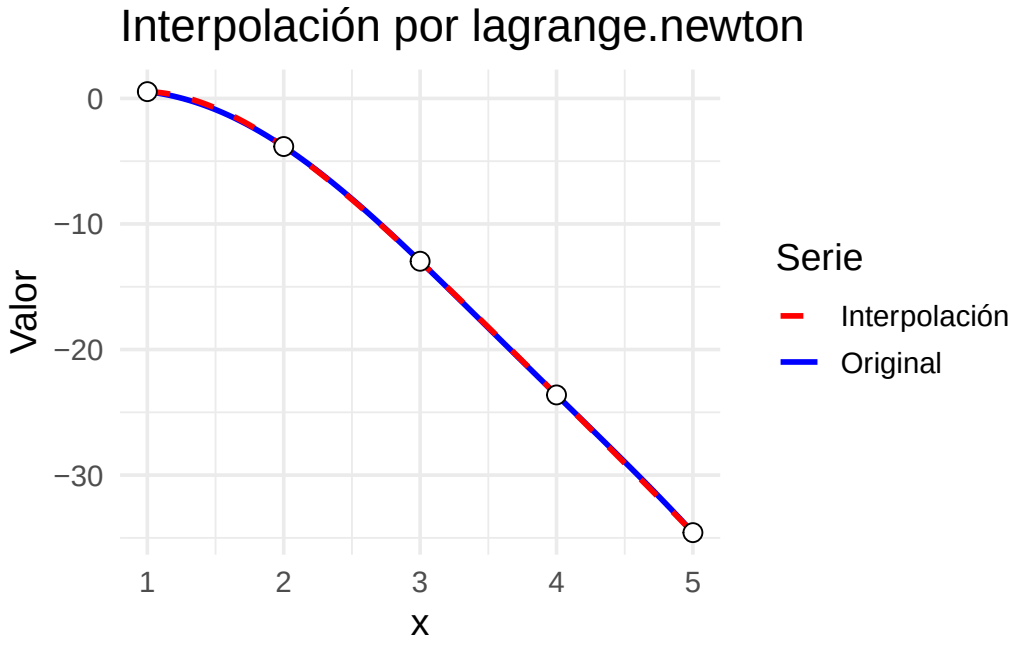


Figura 4: Interpolación de Lagrange - Función 3

b)

```r
graficar.polinomio(c(1, 1.5, 2, 2.5, 3), 1, 3, spline.natural, f = f1)
```

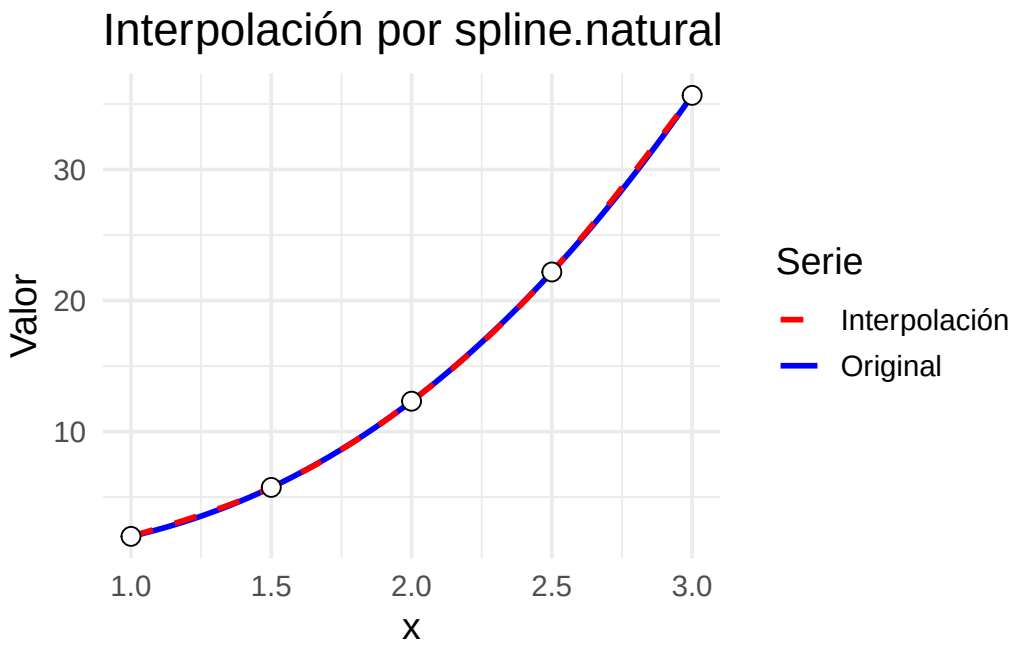


Figura 5: Interpolación por Splines naturales - Función 1

```r
graficar.polinomio(c(1, 2, 3, 4, 5), 1, 5, spline.natural, f = f2)
```

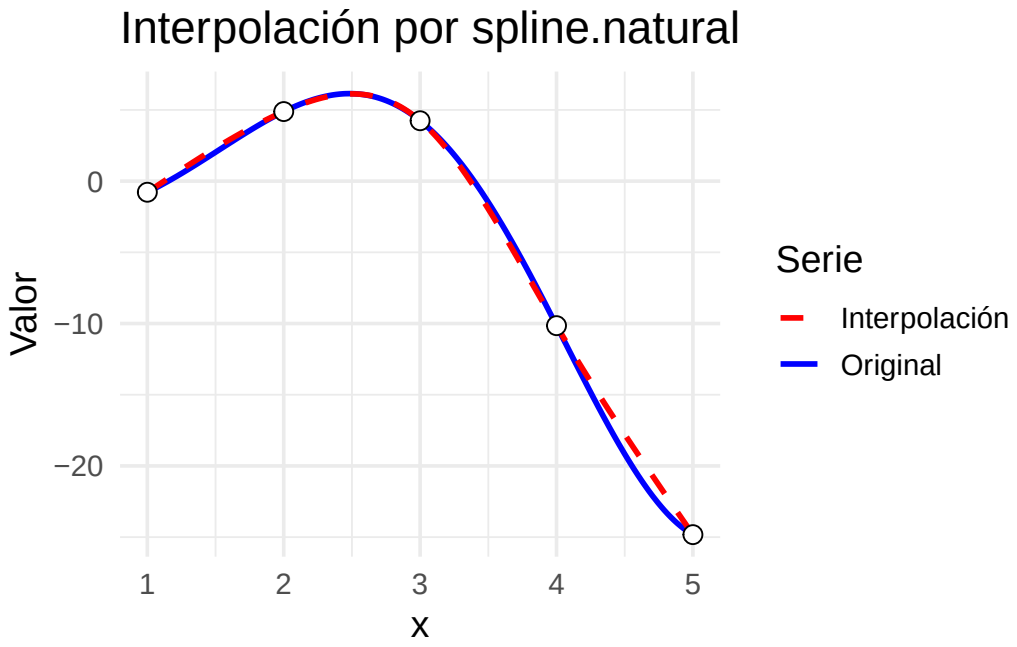


Figura 6: Interpolación por Splines naturales - Función 2

```
graficar.polinomio(c(1, 2, 3, 4, 5), 1, 5, spline.natural, f = f3)
```

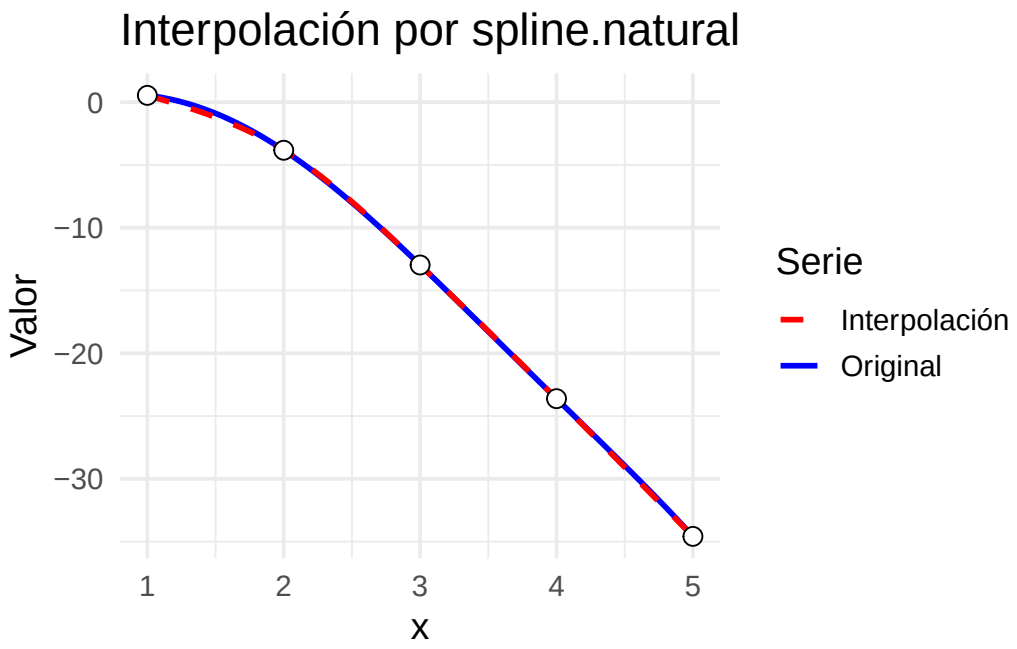


Figura 7: Interpolación por Splines naturales - Función 3

c)

```
graficar.polinomio(c(1, 1.5, 2, 2.5, 3), 1, 3, hermite.newton, f = f1, df = df1)
```

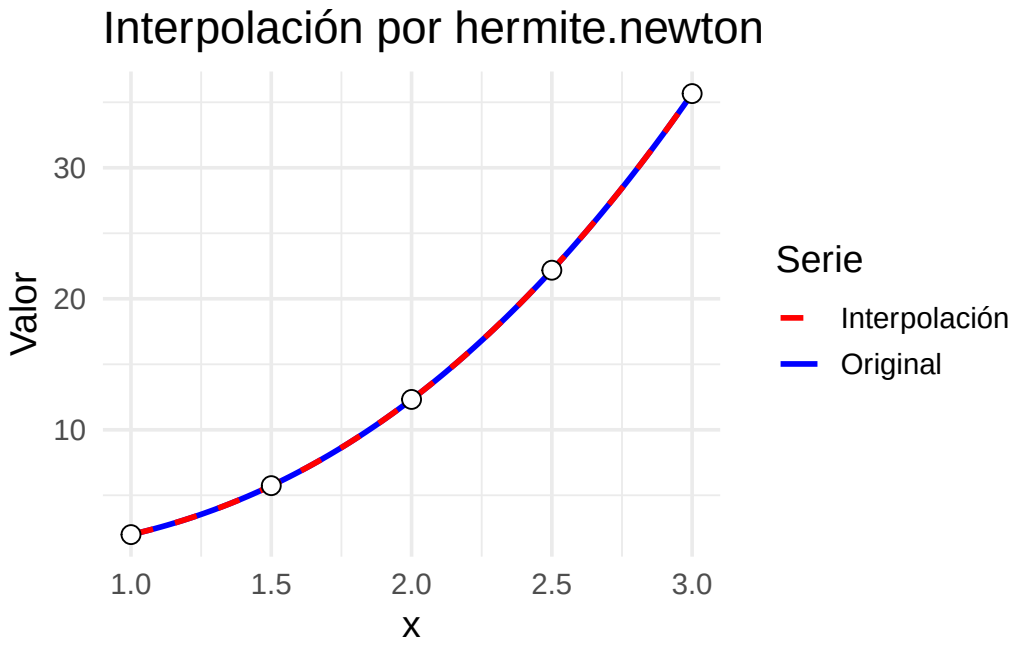


Figura 8: Interpolación de Hermite - Función 1

```r
graficar.polinomio(c(1, 2, 3, 4, 5), 1, 5, hermite.newton, f = f2, df = df2)
```

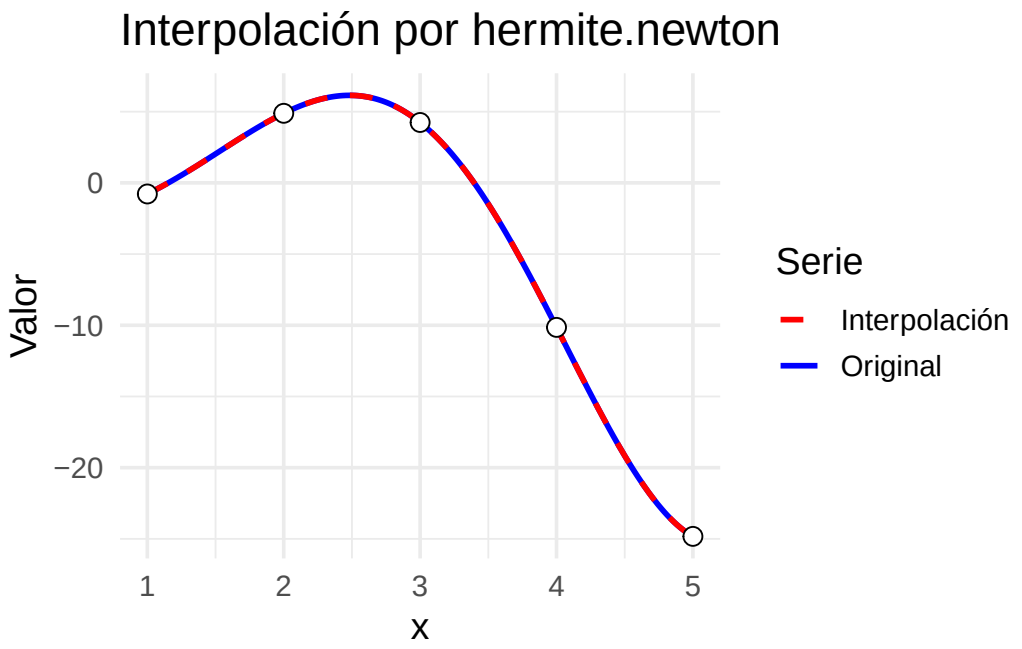


Figura 9: Interpolación de Hermite - Función 2

```r
graficar.polinomio(c(1, 2, 3, 4, 5), 1, 5, hermite.newton, f = f3, df = df3)
```

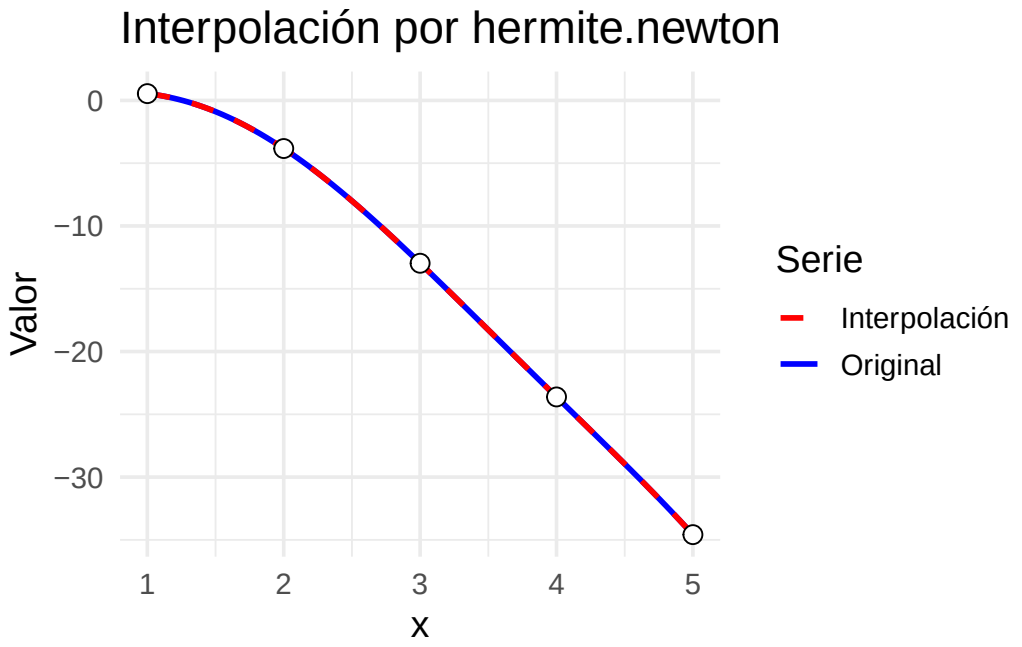


Figura 10: Interpolación de Hermite - Función 3

d)

```r
nodos1 <- c(1, 1.5, 2, 2.5, 3)
valores1 <- f1(nodos1)
derivadas1 <- df1(nodos1)

xi <- seq(1, 3, length.out = 400)
df_comp1 <- tibble(
  x = xi,
  `f(x)` = f1(xi),
  Lagrange = vapply(xi, function(x) lagrange.newton(nodos1, valores1, x)$valor, numeric(1)),
  Hermite = vapply(xi, function(x) hermite.newton(nodos1, valores1, derivadas1, x)$valor, numer
  Splines = vapply(xi, function(x) spline.natural(nodos1, valores1, x)$valor, numeric(1))
) |> pivot_longer(-x, names_to = "Método", values_to = "y")

ggplot(df_comp1, aes(x = x, y = y, color = Método)) +
  geom_line(linewidth = 1) +
  geom_point(data = tibble(x = nodos1, y = valores1),
             aes(x = x, y = y, color = "Nodos"),
             shape = 21, fill = "white", size = 2) +
  labs(title = "Comparación de métodos de interpolación - Función 1") +
  theme_minimal(base_size = 14)
```

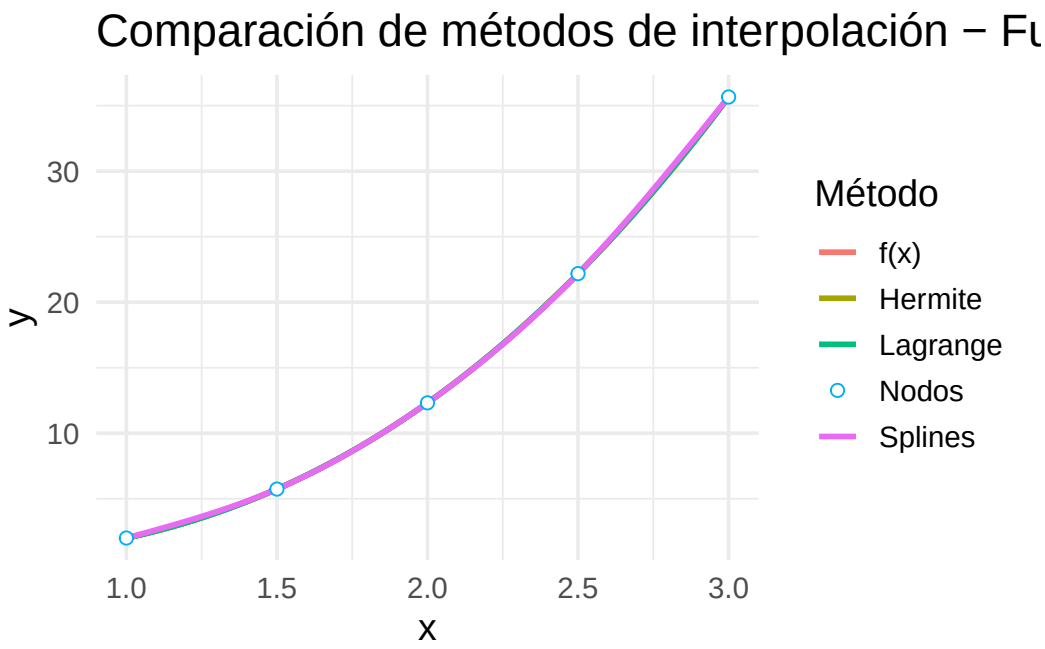


Figura 11: Comparación de métodos - Función 1

```r
nodos2 <- c(1, 2, 3, 4, 5)
valores2 <- f2(nodos2)
derivadas2 <- df2(nodos2)

xi2 <- seq(1, 5, length.out = 400)
df_comp2 <- tibble(
  x = xi2,
  `f(x)` = f2(xi2),
  Lagrange = vapply(xi2, function(x) lagrange.newton(nodos2, valores2, x)$valor, numeric(1)),
  Hermite = vapply(xi2, function(x) hermite.newton(nodos2, valores2, derivadas2, x)$valor, nume
  Splines = vapply(xi2, function(x) spline.natural(nodos2, valores2, x)$valor, numeric(1))
) |> pivot_longer(-x, names_to = "Método", values_to = "y")

ggplot(df_comp2, aes(x = x, y = y, color = Método)) +
  geom_line(linewidth = 1) +
  geom_point(data = tibble(x = nodos2, y = valores2),
             aes(x = x, y = y, color = "Nodos"),
             shape = 21, fill = "white", size = 2) +
  labs(title = "Comparación de métodos de interpolación - Función 2") +
  theme_minimal(base_size = 14)
```

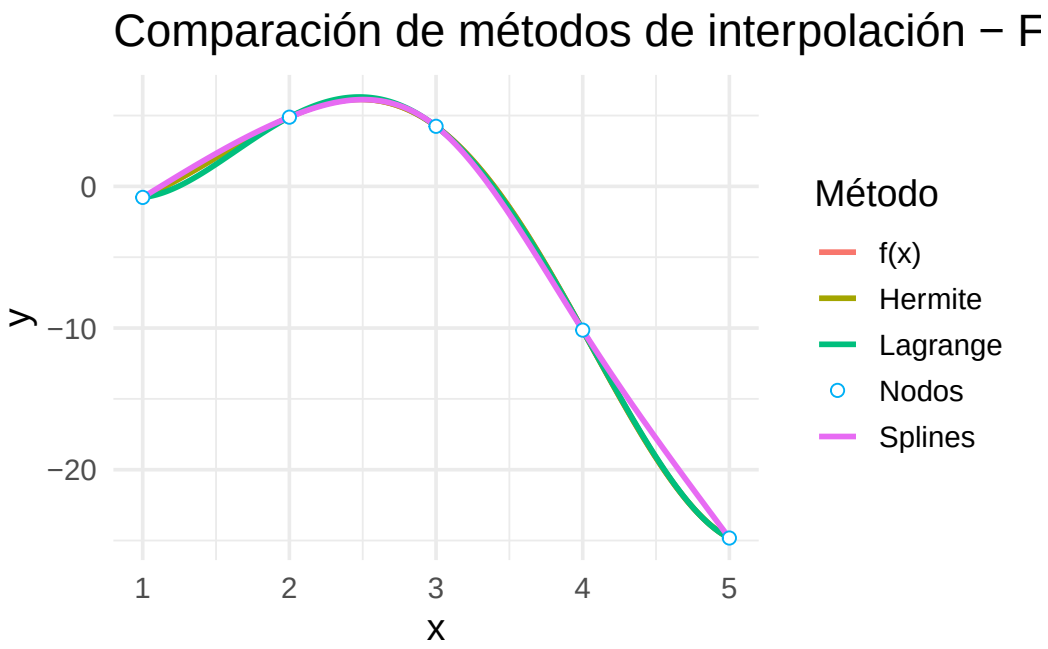


Figura 12: Comparación de métodos de interpolación - Función 2

```r
nodos3 <- c(1, 2, 3, 4, 5)
valores3 <- f3(nodos3)
derivadas3 <- df3(nodos3)

xi3 <- seq(1, 5, length.out = 400)
df_comp3 <- tibble(
  x = xi3,
  `f(x)` = f3(xi3),
  Lagrange = vapply(xi3, function(x) lagrange.newton(nodos3, valores3, x)$valor, numeric(1)),
  Hermite = vapply(xi3, function(x) hermite.newton(nodos3, valores3, derivadas3, x)$valor, nume
  Splines = vapply(xi3, function(x) spline.natural(nodos3, valores3, x)$valor, numeric(1))
) |> pivot_longer(-x, names_to = "Método", values_to = "y")

ggplot(df_comp3, aes(x = x, y = y, color = Método)) +
  geom_line(linewidth = 1) +
  geom_point(data = tibble(x = nodos3, y = valores3),
             aes(x = x, y = y, color = "Nodos"),
             shape = 21, fill = "white", size = 2) +
  labs(title = "Comparación de métodos de interpolación - Función 3") +
  theme_minimal(base_size = 14)
```

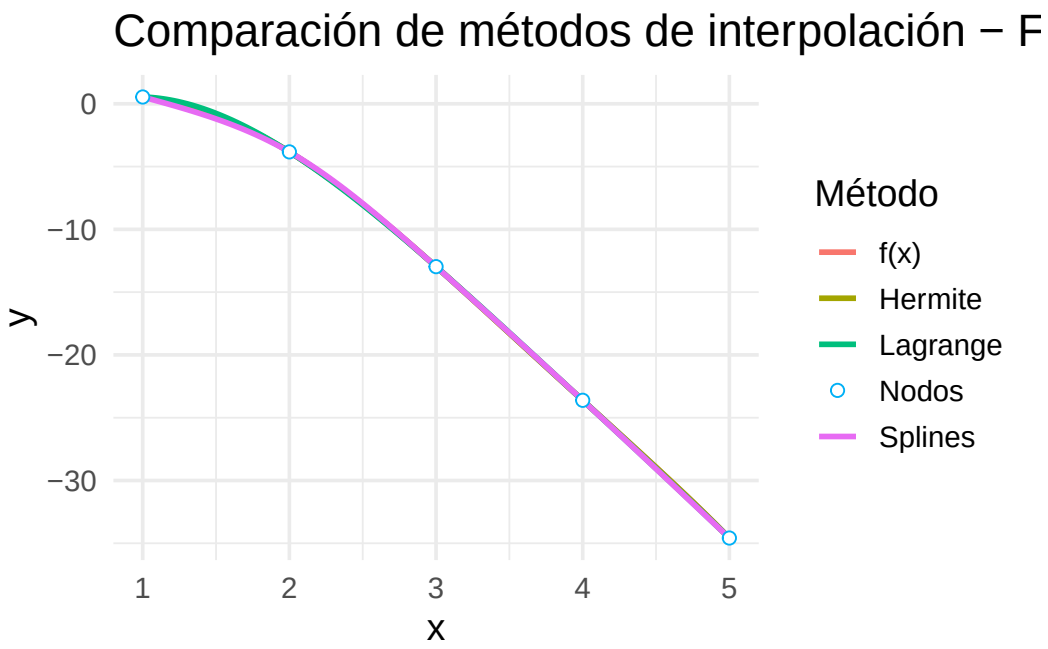


Figura 13: Comparación de métodos de interpolación - Función 3

¿Conclusion?

Función 1: $f(x) = 3x^2 \ln(x) + 2x$

- Los tres métodos coinciden visualmente con la función original.
- La función es suave y bien comportada en $[1, 3]$, y los nodos están bien distribuidos.
- **Todos los métodos son adecuados**; no hay oscilaciones ni errores notables.

Función 2: $f(x) = x^2 \sin(x) - 3\cos(x)$

- Se observan diferencias leves entre Lagrange y los otros métodos, especialmente en los extremos.
- **Hermite y Splines** ofrecen mejor ajuste, aprovechando la información de derivadas o la suavidad estructural.
- **Lagrange tiende a oscilar más** en funciones con más curvatura.

Función 3: $f(x) = x\cos(x) - 2x^2 + 3x - 1$

- Los tres métodos coinciden perfectamente con la función en el intervalo.
- La función es suave y casi polinómica, lo que facilita la interpolación.
- **Todos los métodos funcionan bien en este caso**.

Ejercicio 14

Instrucción del ejercicio 14

¿Existen a, b, c, d tal que la función:

$$S(x) = \begin{cases} ax^3 + x^2 + cx, & -1 \leq x \leq 0, \\ bx^3 + x^2 + dx, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

sea el spline cúbico natural que coincide con la función $f(x) = |x|$ en los nodos $-1, 0, 1$?

Solución

Una de las primeras condiciones que deben ocurrir es que $S_{-1}(-1) = 1$ y $S_0(1) = 1$

$$\begin{cases} S_{-1}(-1) = -a + 1 - c = 1 \\ S_0(1) = b + 1 + d = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -c \\ b = -d \end{cases}$$

Por otra parte, debe suceder que $S'_{-1}(0) = S'_0(0)$

$$3ax^2 + 2x + c = 3bx^2 + 2x + d \text{ en } x = 0 \Rightarrow c = d \Rightarrow a = -c = -d = b \Rightarrow a = b$$

Finalmente, se debe cumplir la condicion natural: $S''_{-1}(-1) = 0$ y $S''_0(1) = 0$

$$\begin{cases} 6a(-1) + 2 = 0 \\ 6b(1) + 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -1/3 \end{cases} \Longrightarrow a = -b \Rightarrow\Leftarrow$$

Por lo tanto, no existen a, b, c, d tal que $S(x)$ sea el spline cubico natural de $|x|$ en los nodos $-1, 0, 1$

Ejercicio 15

Instrucción del ejercicio 15

Encuentre los valores de a, b, c, d y e tal que la función $S(x)$ es un spline cúbico natural:

$$S(x) = \begin{cases} a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^3 + ex^2 - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Solución

Ejercicio 16

Instrucción del ejercicio 16

Encuentre los valores de a, b, c y d tal que la función $S(x)$ es un spline cúbico y cumple que $\int_0^2 [S''(x)]^2 \, dx$ es mínimo (esta condición sustituye a la condición para ser spline natural o sujeto):

$$S(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Solución

1) Condiciones de continuidad en $x = 1$ (de S y S') y de empalme de S'':

- Para $x \leq 1$:
  $S_0(x) = 3 + x - 9x^3, \;\; S'_0(x) = 1 - 27x^2, \;\; S''_0(x) = -54x.$

- Para $x \geq 1$:
  $S_1(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$,
  $S_1'(x) = b + 2c(x-1) + 3d(x-1)^2$,
  $S_1''(x) = 2c + 6d(x-1)$.

En $x = 1$:

$$S_0(1) = 3 + 1 - 9 = -5 \Rightarrow a = -5,$$
$$S_0'(1) = 1 - 27 = -26 \Rightarrow b = -26,$$
$$S_0''(1) = -54 = 2c \Rightarrow c = -27.$$

2) Minimización de la energía de curvatura:

$$J(d) = \int_0^1 \left[S_0''(x)\right]^2 dx + \int_1^2 \left[S_1''(x)\right]^2 dx.$$

El primer término no depende de d:

$$\int_0^1 \left(-54x\right)^2 dx = \frac{54^2}{3}.$$

Para el segundo, ponga $y = x - 1 \in [0,1]$, con $A = -54$ y $B = 6d$:

$$\int_1^2 \left(-54 + 6d(x-1)\right)^2 dx = \int_0^1 (A + By)^2 dy$$
$$= A^2 + AB + \frac{B^2}{3} = 2916 - 324d + 12d^2.$$

Luego

$$J(d) = \text{cte} + 12d^2 - 324d, \qquad J'(d) = 24d - 324 = 0 \Rightarrow d = \frac{324}{24} = 13.5.$$

Resultado final:

$$\boxed{a = -5, \quad b = -26, \quad c = -27, \quad d = 13.5}$$

■

Ejercicio 17

Instrucción del ejercicio 17

El objetivo de este ejercicio es estudiar e implementar un algoritmo para **Aproximación discreta por mínimos cuadrados**. Para esto:

a) El problema en general es aproximar una tabla de datos $\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$ por un polinomio de grado $n < m - 1$ denotado por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

La idea es encontrar constantes $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ tal que se minimice el error:

$$E = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - P_n(x_i)\right)^2.$$

Pruebe que este mínimo se alcanza en la solución del sistema de **ecuaciones normales** (n+1)×(n+1) para las incógnitas $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ dado por:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

b) Dada una tabla de datos para f, escriba una función en **R** que permita generar el sistema de ecuaciones normales del inciso (a).

c) Luego escriba una función en **R** que encuentre los coeficientes del polinomio de mínimos cuadrados y luego lo grafique.

d) Construir la **aproximación de mínimos cuadrados de grado 3** para la siguiente tabla y **construir el gráfico**.

x_i	y_i
4.0	102.56
4.2	113.18
4.5	130.11
4.7	142.05
5.1	167.53
5.5	195.14
5.9	224.87
6.3	256.73
6.8	299.50

7.1 326.72

Solución a)

Para encontrar el minimo de E, hay que derivarlo con respecto a cada uno de los a_j, con $j = 0, 1, ..., n$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k) \cdot \frac{-\partial}{\partial a_k}(\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k) = 0$$

Note que $\frac{\partial}{\partial a_j}(\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k) = x_i^j$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \cdot \sum_{i=1}^{m}(y_i - \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k) \cdot x_i^j = 0 \Rightarrow -\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^{k+j} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j$$

b)

```
# Funcion para plantear el sistema de ecuaciones asociado al ajuste de minimos cuadrados
# Retorna matriz asociada a los coeficientes (A) y vector de solucion (B)
sistema.minimos <- function(nodos, valores, n){
  stopifnot(is.numeric(nodos), is.numeric(valores),
            length(nodos) == length(valores),
            is.numeric(n), n >= 0, n < length(nodos))
  m <- length(nodos)
  A <- matrix(NA_real_, nrow = n + 1, ncol = n + 1)
  B <- numeric(n + 1)
  for (j in 0:n){
    for (k in 0:n) {
      A[j + 1, k + 1] <- sum(nodos^(j + k))
    }
    B[j + 1] <- sum(nodos^(j) * valores)
  }
  return(list(A = A, B = B))
}
```

c)

```
# Funcion para encontrar coeficientes del polinomio que surge del ajuste de minimos cuadrados y
ajuste.minimos.cuadrados <- function(nodos, valores, n, a, b){
```

```
  stopifnot(is.numeric(nodos), is.numeric(valores),
            length(nodos) == length(valores),
            is.numeric(a), is.numeric(b), a < b,
            is.numeric(n), n >= 0)
  sistema <- sistema.minimos(nodos, valores, n)

  coef <- as.numeric(solve(sistema$A, sistema$B))

  # Polinomio ajustado
  f_hat <- function(z) vapply(z, function(zz) sum(coef * zz^(0:n)), numeric(1))

  # Datos para el gráfico
  xi <- seq(a, b, length.out = 400)
  df_plot <- data.frame(x = xi, Hx = f_hat(xi))
  df_pts  <- data.frame(x = nodos, y = valores)

  # Gráfico
  p <- ggplot(df_plot, aes(x = x)) +
    geom_line(aes(y = Hx, color = "Ajuste (MC)"),
              linewidth = 1, linetype = "dashed") +
    scale_color_manual(values = c("Ajuste (MC)" = "red")) +
    geom_point(data = df_pts, aes(x = x, y = y),
               shape = 21, size = 3, fill = "white") +
    labs(title = paste0("Interpolación por ajuste de\nmínimos cuadrados (grado ", n, ")"),
         y = "Valor", color = "Serie") +
    theme_minimal(base_size = 14)

  return(list(coeficientes = coef, f.ajuste = f_hat, grafico = p))
}
```

d)

```
nodos   <- c(4.0, 4.2, 4.5, 4.7, 5.1, 5.5, 5.9, 6.3, 6.8, 7.1)
valores <- c(102.56, 113.18, 130.11, 142.05, 167.53, 195.14, 224.87, 256.73, 299.50, 326.72)
n <- 3
a <- min(nodos)
b <- max(nodos)
```

```r
x <- ajuste.minimos.cuadrados(nodos, valores, n, a, b)
x
```

```
$coeficientes
[1]  3.42909439 -2.37922111  6.84557777 -0.01367456

$f.ajuste
function (z)
vapply(z, function(zz) sum(coef * zz^(0:n)), numeric(1))
<bytecode: 0x10a490198>
<environment: 0x119b64f28>

$grafico
```

Ejercicio 18

Instrucción del ejercicio 18

El objetivo de este ejercicio es **generalizar la aproximación discreta por mínimos cuadrados**.

Dada una función $f \in C[a,b]$, se requiere un polinomio $\tilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de manera tal que las constantes $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ minimicen el error:

$$E = \int_a^b \left(f(x) - \tilde{P}_n(x)\right)^2 dx.$$

Pruebe que este mínimo se alcanza en la solución del sistema de $(n+1)$ **ecuaciones normales** y $(n+1)$ incógnitas $\{a_k\}_{k=0}^n$ dado por:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k}\, dx \;=\; \int_a^b x^j f(x)\, dx, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

a) Dada una función f escriba una función en **R** que permita **generar el sistema de ecuaciones (2)**.

b) Luego escriba una función en **R** que **encuentre los coeficientes** del polinomio $\tilde{P}_n(x)$ y luego lo grafique.

c) Encuentre la **aproximación polinómica** $\tilde{P}_n(x)$ de grado 2, 4 y 6 para $f(x) = \cos(\pi x)$ en el intervalo $[-1, 1]$. Además, **construya los gráficos**.

Solución

a)

```
sistema.minimos.integrados <- function(a, b, f, n){
  A <- matrix(NA_real_, nrow = n + 1, ncol = n + 1)
  B <- numeric(n + 1)

  for (j in 0:n) {
    for (k in 0:n) {
      A[j + 1, k + 1] <- integrate(function(x) x^(j + k), a, b)$value
    }
    B[j + 1] <- integrate(function(x) f(x) * x^j, a, b)$value
  }
  return(list(A = A, B = B))
}
```

b)

```
ajuste.minimos.cuadrados.integrados <- function(a, b, f, n){
  sistema <- sistema.minimos.integrados(a, b, f, n)

  coef <- as.numeric(solve(sistema$A, sistema$B))

  # Polinomio ajustado
```

```
  f_hat <- function(z) vapply(z, function(zz) sum(coef * zz^(0:n)), numeric(1))

  # Datos para el gráfico
  xi <- seq(a, b, length.out = 400)
  df_plot <- data.frame(x = xi, Hx = f_hat(xi), fx = f(xi))

  # Gráfico
  p <- ggplot(df_plot, aes(x = x)) +
    geom_line(aes(y = fx, color = "Original"), linewidth = 1) +
    geom_line(aes(y = Hx, color = "Ajuste (MC)"),
              linewidth = 1, linetype = "dashed") +
    scale_color_manual(values = c("Ajuste (MC)" = "red", "Original" = "blue")) +
    labs(title = paste0("Interpolación por ajuste de\nmínimos cuadrados (grado ", n, ")"),
         y = "Valor", color = "Serie") +
    theme_minimal(base_size = 14)

  invisible(list(coeficientes = coef, f_ajuste = f_hat, grafico = p))
}
```

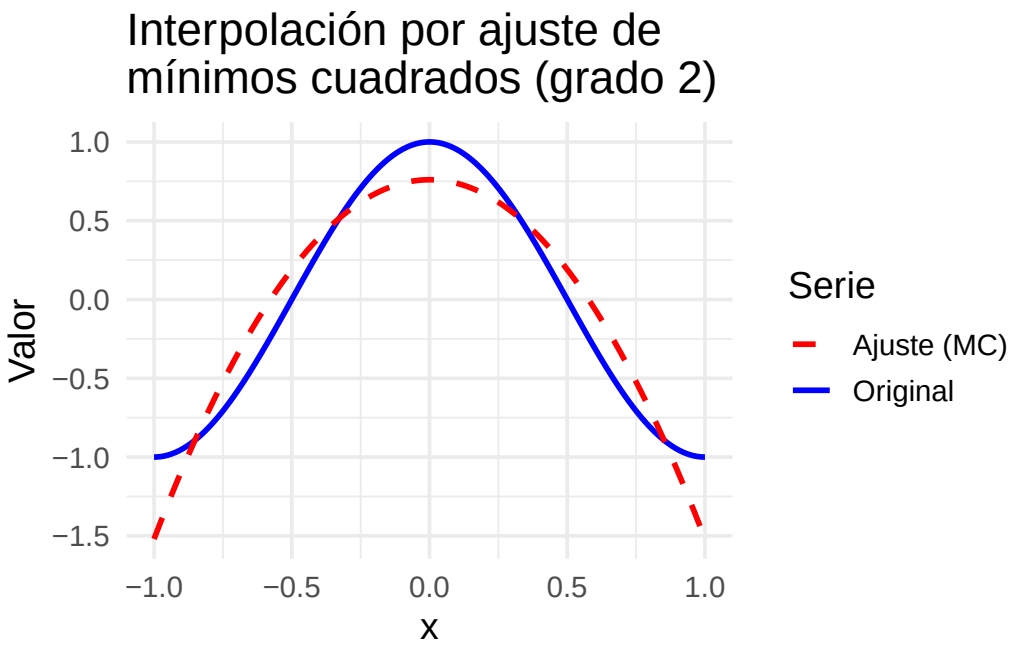
c)

```
grado.2 <- ajuste.minimos.cuadrados.integrados(-1,1, function(x) cos(pi * x),2)
grado.4 <- ajuste.minimos.cuadrados.integrados(-1,1, function(x) cos(pi * x),4)
grado.6 <- ajuste.minimos.cuadrados.integrados(-1,1, function(x) cos(pi * x),6)
```

```
# Coeficientes de P2
print(grado.2$coeficientes)
```

```
[1]  0.7599089  0.0000000 -2.2797266
```

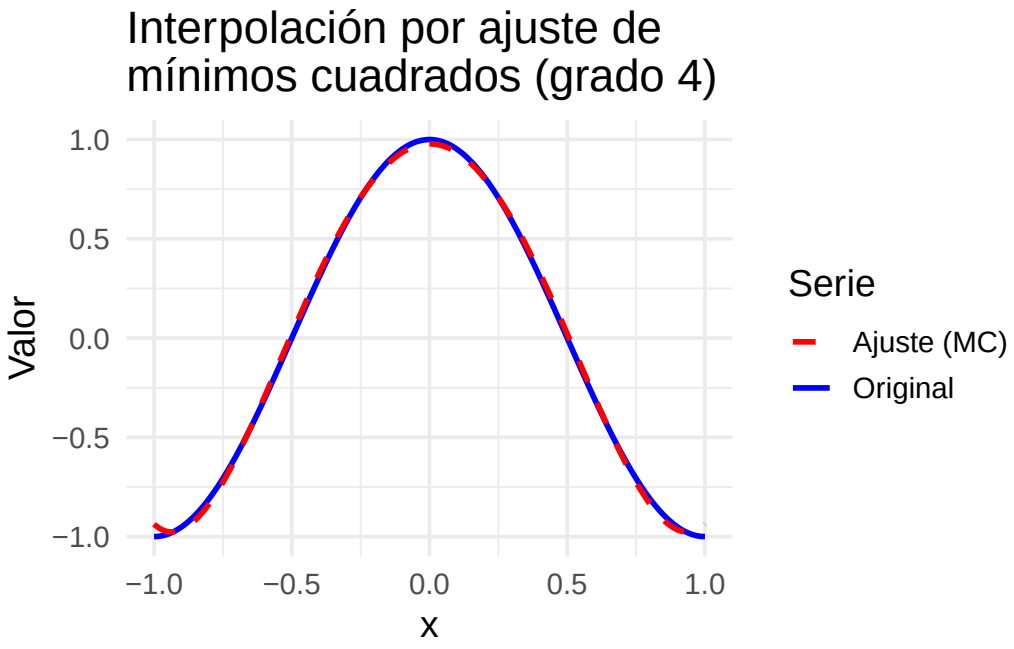
```
print(grado.2$grafico)
```




```
# Coeficientes de P4
print(grado.4$coeficientes)
```

```
[1]  0.9783264  0.0000000 -4.4639018  0.0000000  2.5482043
```

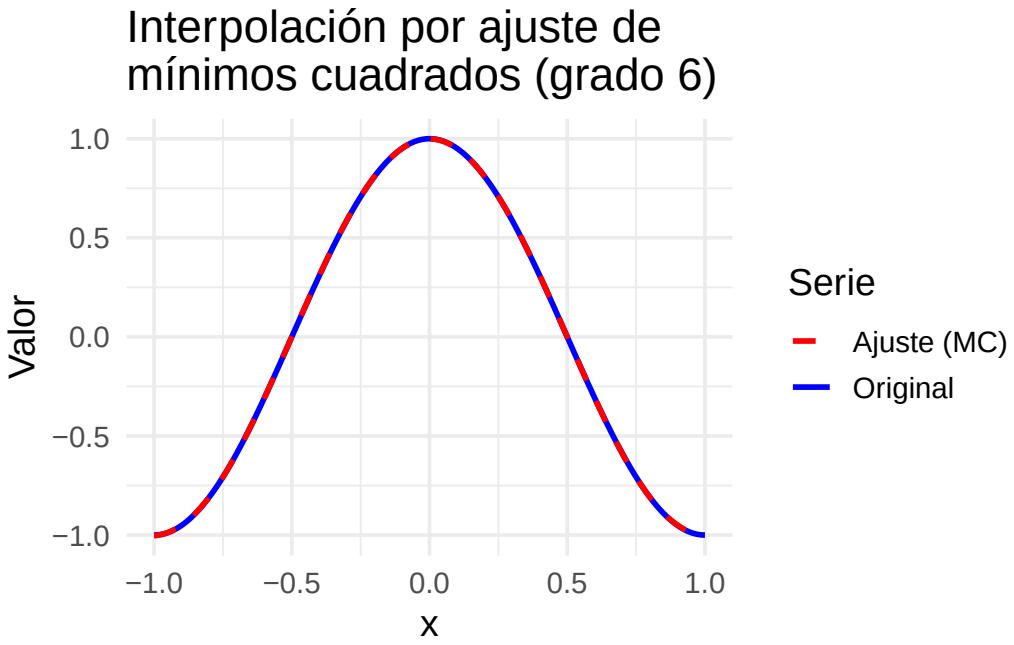
```
print(grado.4$grafico)
```




```
# Coeficientes de P6
print(grado.6$coeficientes)
```

```
[1]  0.9989872  0.0000000 -4.8977782  0.0000000  3.8498335  0.0000000 -0.9545280
```

```
print(grado.6$grafico)
```



Ejercicio 19

i Instrucción del ejercicio 19

a) Demuestre que el **Polinomio de Hermite** visto en clase $H_{2n+1}(x)$ es **único**.
Sugerencia: Suponga que existe otro polinomio $P(x)$ que cumple las condiciones de interpolación de Hermite y considere $D = H_{2n+1}(x) - P(x)$ y D' en $x_0, x_1, \dots, x_n$.

b) Demuestre que el **error absoluto** en este caso está dado por:

$$\left|f(x) - H_{2n+1}(x)\right| = \left|\frac{(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)\right|, \quad \text{con } \xi \in (a,b).$$

Sugerencia: Use el mismo método que usamos para demostrar la fórmula del error absoluto en el caso de Lagrange, pero con:

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \frac{(t-x_0)^2 \cdots (t-x_n)^2}{(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2}\Big[f(x) - H_{2n+1}(x)\Big].$$

Solución