MA0501 – Tarea 2

Diego Alberto Vega Víquez - C38367 José Carlos Quintero Cedeño - C26152
Gabriel Valverde Guzmán - C38060

2025-09-03

Tabla de contenidos

Ejercicio 1

Instrucción

Desarrolle funciones iterativas y recursivas en R para los algoritmos de los métodos de:

- iteración de punto fijo,
- bisección,
- método de Newton–Raphson,
- método de la secante, y
- método de Steffensen vistos en clase,

y el método Regula–Falsi que se describe en el ejercicio 11.

Solución

Ejercicio 2

Instrucción

Use el procedimiento `Bisección` para resolver las siguientes ecuaciones, con por lo menos 5 dígitos significativos. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente `R`.

a) $\cos^2(x) = 2\sin(x)$ para $0 \leq x \leq 1$

b) $-x^3 + x + 1 = 0$ para $1 \leq x \leq 2$

Para cada una de las ecuaciones anteriores, de acuerdo con los teoremas de error vistos en clase, calcule el número de iteraciones necesarias para obtener la precisión pedida, y compare estos resultados con los obtenidos con **R**.

Solución

Ejercicio 3

Instrucción

Use el procedimiento `Bisección` para resolver las siguientes ecuaciones, con por lo menos 4 dígitos significativos. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente `R`.

a) $e^x + 4x - 5 = 0$

b) $x^4 - 2x - 1 = 0$

Determine gráficamente un intervalo inicial $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{Z}$.

Solución

Ejercicio 4

Instrucción

Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine el intervalo $[a, b]$ en el cual la iteración de punto fijo converge. Estime el número de iteraciones necesarias para obtener aproximaciones con 5 dígitos significativos, y efectúe los cálculos con el procedimiento `PuntoFijo`. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente `R`.

a) $e^{-x} - x = 0$

b) $e^x = 3x$

Solución

Ejercicio 5

Instrucción

Repita el ejercicio anterior usando el método de Steffensen.

Solución

Ejercicio 6

Instrucción

Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine una función g y un intervalo $[a, b]$ en el cual la iteración de punto fijo converja a una solución positiva de la ecuación. Debe probar que $g(x)$ cumple las hipótesis del teorema de Banach. Encuentre esta solución usando el procedimiento `PuntoFijo`. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente **R**.

a) $3x^2 - e^x = 0$

b) $x - \cos(x) = 0$

Solución

Ejercicio 7

ℹ Instrucción

Use el procedimiento `Newton` para resolver las siguientes ecuaciones, con por lo menos 4 dígitos significativos. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente `R`.

a) $\cos(x) - x^2 = 0$

b) $4\sin(x) = e^x$

Solución

Ejercicio 8

ℹ Instrucción

Repita el ejercicio anterior usando el procedimiento `Secante`, y compare los resultados.

Solución

Ejercicio 9

ℹ Instrucción

Suponga que p es un cero de multiplicidad m de f donde $f^{(m)}$ es continua en un intervalo abierto que contiene a p. Demuestre que el método de punto fijo siguiente:

$$g(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$$

cumple que $g'(p) = 0$.

Solución

Ejercicio 10

Instrucción

Demuestre que el método de Newton aplicado a $x^m - R$ y a $1-(R/x^m)$ para calcular $\sqrt[m]{R}$ da dos fórmulas diferentes de iterativas. Para $R > 0$ y $m \geq 0$, ¿cuál fórmula es mejor y por qué?

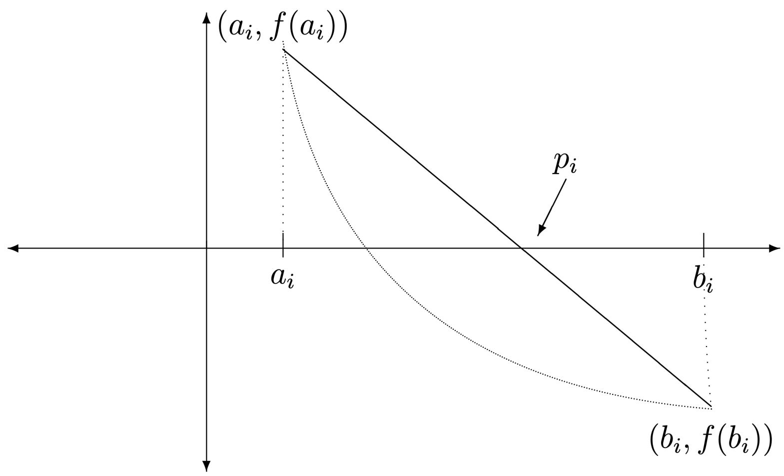
Solución

Ejercicio 11

Instrucción

Método Regula Falsi: Este es otro método para encontrar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ que se encuentra en el intervalo $[a, b]$. El método es similar al de la bisección en que se generan intervalos $[a_i, b_i]$ encerrando la raíz de $f(x) = 0$, y es similar al método de la secante en la forma de obtener los nuevos intervalos aproximados.
Suponiendo que el intervalo $[a_i, b_i]$ contiene una raíz de $f(x) = 0$, calculamos la intersección con el eje x de la recta que pasa por los puntos $(a_i, f(a_i))$ y $(b_i, f(b_i))$, denotando este punto por p_i.

- Si $f(p_i)f(a_i) < 0$, se define $a_{i+1} = a_i$ y $b_{i+1} = p_i$;
- En caso contrario, se define $a_{i+1} = p_i$ y $b_{i+1} = b_i$.
    a) Dé una interpretación geométrica del método Regula Falsi con ayuda del siguiente gráfico:



    b) Calcule la ecuación de la recta que pasa por $(a_i, f(a_i))$ y $(b_i, f(b_i))$.
    c) Pruebe que:

$$p_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

d) Escriba un algoritmo en pseudocódigo para el método *Regula Falsi*.

e) Escriba una función en R para este algoritmo.

Ejercicio 12

Instrucción

Use el método de *Regula Falsi* para aproximar la solución de las siguientes ecuaciones con 6 dígitos significativos, determine el intervalo inicial gráficamente. Compare los resultados con los que se obtienen usando directamente **R**.

a) $\log(1+x) - x^2 = 0$

b) $x^3 + 2x - 1 = 0$

Solución

Ejercicio 13

Instrucción

Pruebe que la sucesión construida por:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{a + (m-1)x_n^m}{m x_n^{m-1}} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

converge a $\sqrt[m]{a}$, con $a > 0$.

Solución

Ejercicio 14

Instrucción

Demuestre que las siguientes sucesiones (x_n) convergen linealmente a $x = 0$. Encuentre cuántos términos deben generarse antes de que $|x_n - x| \leq 5 \times 10^{-2}$.

a) $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 0$

b) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 0$

Solución

Ejercicio 15

Instrucción

Demuestre que la sucesión definida por $x_n = 1/n^k$, $n \geq 1$, para cualquier entero positivo k, converge linealmente a $x = 0$. Para cada par de enteros k y m, determinar un número N para el cual $1/N^k < 10^{-m}$.

Solución

Ejercicio 16

Instrucción

Demostrar que la sucesión $x_n = 10^{-2^n}$ converge cuadráticamente a cero.

Solución

Ejercicio 17

Instrucción

Para las siguientes sucesiones (x_n), linealmente convergentes, use el método Δ^2 de Aitken para generar una sucesión $(\bar{x}_n)$ hasta que $|\bar{x}_n - x| \leq 5 \times 10^{-2}$.

a) $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 0$

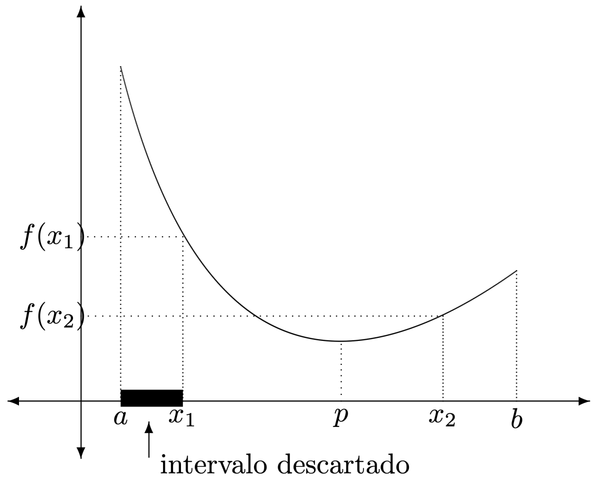
b) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 0$

Solución

Ejercicio 18

Instrucción

Un conocido método numérico para minimizar funciones *estrictamente unimodales* (una función f que decrece estrictamente (o crece estrictamente) hasta su punto mínimo (máximo)) se llama la función estrictamente unimodal en un intervalo $[a, b]$, y uno de ellos es el **Método Igualmente Espaciado**. La idea geométrica se ilustra en el siguiente gráfico:



Se toma $a_1 = a$ y $b_1 = b$, y además:

$$x_1 := \frac{2a+b}{3}, \qquad x_2 := \frac{a+2b}{3}$$

Entonces, como se ilustra en el gráfico:

- Si $f(x_1) > f(x_2)$, entonces se toma:

  $$a_2 = x_1, \quad b_2 = b_1, \quad p_1 = a_2$$

  y el nuevo intervalo es:

  $$[a_2, b_2] = [x_1, b_1] = \left[\frac{2a+b}{3}, b\right]$$

- En caso contrario, se toma:

  $$a_2 = a_1, \quad b_2 = x_2, \quad p_1 = b_2$$

  y el nuevo intervalo es:

  $$[a_2, b_2] = [a_1, x_2] = \left[a_1, \frac{a+2b}{3}\right]$$

Con el nuevo intervalo se aplica el proceso de nuevo, y así sucesivamente hasta que a_n y b_n estén suficientemente cerca. La sucesión (p_n) converge al punto p donde f alcanza el mínimo.

a) De acuerdo con lo anterior, pruebe que $x_1 < x_2$.

b) Construya un algoritmo en pseudocódigo y la correspondiente función en **R** para el método *Igualmente Espaciado* descrito anteriormente.

c) Pruebe que el intervalo construido con el algoritmo anterior satisface la relación:

$$|b_n - a_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (b-a)$$

¿Qué se puede concluir, respecto al error absoluto?

Solución

Ejercicio 19

Instrucción

En este ejercicio se presenta el **Método Dicotómico** para minimizar funciones estrictamente unimodales. En este método primeramente se evalúa la función $f(x)$ en dos puntos que están a una distancia de $\varepsilon/2$ del punto medio del intervalo $[a, b]$, es decir se calculan:

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) \quad \text{y} \quad f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

y se procede a compararlos. Si

a)

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) \leq f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

entonces se descarta el intervalo $\left]\frac{a+b+\varepsilon}{2}, b\right]$ y así el punto mínimo x^* debe estar en el intervalo $\left[a, \frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$, el cual será el nuevo intervalo de búsqueda.
Si

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) > f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

entonces se descarta el intervalo $\left[a, \frac{a+b-\varepsilon}{2}\right[$ y en este caso el punto mínimo x^* debe estar en el intervalo $\left[\frac{a+b-\varepsilon}{2}, b\right]$.
Pruebe que en cualquiera de los casos la longitud del intervalo de búsqueda se reduce de $b-a$ a $\frac{b-a+\varepsilon}{2}$.

b)

Suponga que se tiene el caso:

$$f\left(\frac{a+b-\varepsilon}{2}\right) \leq f\left(\frac{a+b+\varepsilon}{2}\right),$$

entonces se descarta el intervalo $\left]\frac{a+b+\varepsilon}{2}, b\right]$, y el nuevo intervalo de búsqueda es $\left[a, \frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$.
Ahora se debe calcular:

$$f\left(\frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right) \quad \text{y} \quad f\left(\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right),$$

y surgen de nuevo dos posibilidades. Si

$$f\left(\frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right) \leq f\left(\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right),$$

entonces se descarta el intervalo $\left]\frac{3a+b+3\varepsilon}{4}, \frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$ y el nuevo intervalo de búsqueda es $\left[a, \frac{3a+b+3\varepsilon}{4}\right]$. En el otro caso se descarta el intervalo $\left[a, \frac{3a+b-\varepsilon}{4}\right]$ y el nuevo intervalo de búsqueda es $\left[\frac{3a+b-\varepsilon}{4}, \frac{a+b+\varepsilon}{2}\right]$.
Pruebe que en cualquiera de los casos la longitud del intervalo de búsqueda se reduce de $\frac{b-a+\varepsilon}{2}$ a $\frac{b-a+3\varepsilon}{4}$.

c)

Repitiendo el proceso n veces deben calcularse:

$$f\left(\frac{(2^n-1)a+b-\varepsilon}{2^n}\right) \quad \text{y} \quad f\left(\frac{(2^n-1)a+b+(2^n-1)\varepsilon}{2^n}\right),$$

pruebe que en cualquiera de los dos casos la longitud del intervalo de búsqueda es

$$\frac{b-a+(2^n-1)\varepsilon}{2^n}.$$

Con lo cual, si x_n representa la n-ésima aproximación del punto mínimo x^*, entonces pruebe que:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a+(2^n-1)\varepsilon}{2^n}.$$

El proceso se ilustra en la Figuras 1 y 2.

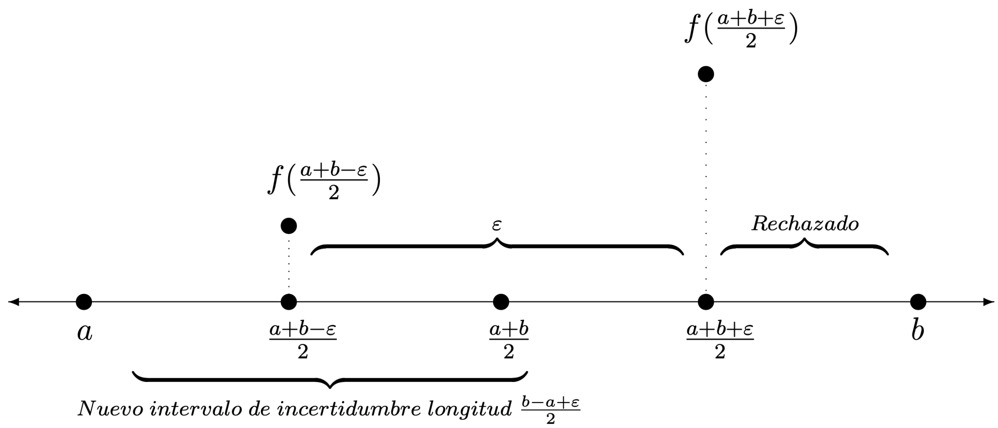


Figura 1: Figura 1

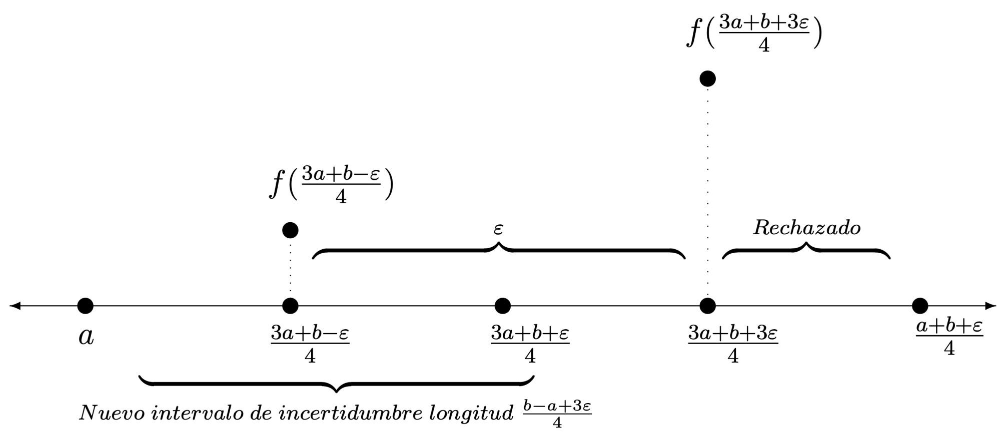


Figura 2: Figura 2

d)

Construya un algoritmo en pseudocódigo y la correspondiente función **R** para el *Método Dicotómico* descrito anteriormente.

e)

¿Cuántas iteraciones se requieren teóricamente para minimizar

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$$

en el intervalo $[1, 4]$ si se desea que el resultado tenga un error absoluto menor a 10^{-5}? Encuentre el mínimo.

Solución

Ejercicio 20

Instrucción

El objetivo de este ejercicio es demostrar la convergencia del método de Newton–Raphson sin utilizar el Teorema de punto fijo de Banach.

Teorema: Sea $f \in C^2[a,b]$. Si $x \in [a,b]$ con $f(x) = 0$ y $f'(x) \neq 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el método de Newton–Raphson:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

genera una sucesión que está bien definida y converge a x cuando $n \to \infty$, para todo $x_0 \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.

Para esto haga lo siguiente:

a) Pruebe que si $(r_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de números positivos o nulos que verifican:

$$r_{n+1} \leq r_n^2,$$

y si $r_0 < 1$, entonces (r_n) converge a 0. Además, pruebe que:

$$r_n \leq (r_0)^{2^n}.$$

b) Pruebe que:

$$x_{n+1} - x = \frac{(x_n - x)f'(x_n) - f(x_n) + f(x)}{f'(x_n)}. \tag{1}$$

c) Pruebe que existen números estrictamente positivos ϵ_1 y M tales que:

$$\text{para todo } y \in [x-\epsilon_1, x+\epsilon_1] \text{ se tiene que } |f'(y)| \geq M.$$

d) Justifique por qué:

$$\max_{y\in[x-\epsilon_1, x+\epsilon_1]} |f''(y)| := L < \infty.$$

e) Pruebe que el valor absoluto de la parte derecha del numerador de la ecuación (1) es igual a:

$$\left| \int_{x_n}^{x} f''(t)(x-t)\, dt \right|. \tag{2}$$

f) Pruebe que (2) está acotado por:

$$\frac{L}{2}|x_n - x|^2.$$

g) Pruebe que si se define

$$r_n := \frac{L}{2M}|x_n - x| \quad \text{entonces} \quad r_{n+1} \leq r_n^2.$$

h) Sea $\epsilon = \min\left(\epsilon_1, \frac{2M}{L}\right)$, pruebe que si $|x_n - x| < \epsilon$, entonces use la parte (a) para probar que $|x_{n+1} - x| < \epsilon$, y concluya el resultado.

Solución

Ejercicio 21

Instrucción

Demuestre que en el caso de ceros de multiplicidad m, el **Método de Newton Modificado**:

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

es cuadráticamente convergente. Sugerencia: Use series de Taylor.

Solución

Ejercicio 22

Instrucción

El objetivo de este ejercicio es demostrar la convergencia del método de la **Secante** sin utilizar el Teorema de punto fijo de Banach.

Teorema:

Sea f una función de clase $C^2[a, b]$, con $a < b$. Si existe un punto x tal que $f(x) = 0$ y $f'(x) \neq 0$, entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que si x_0 y x_1 están dentro del intervalo ([x - , x +]), la sucesión generada por el método de la secante

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

está bien definida dentro del intervalo ([x - , x +]) y converge a x, cero de la ecuación $f(x) = 0$.

a) Sea (r_n) una sucesión de números reales positivos tales que:

$$r_{n+1} \leq r_n r_{n-1}$$

Pruebe que si $r_0 < 1$ y $r_1 < 1$, entonces la sucesión (r_n) está acotada por 1 y converge a 0. Además, pruebe que existe una constante C tal que:

$$r_n \leq C r^{\rho},$$

donde r es un número estrictamente menor que 1, y

$$\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

b) Se denota:

$$f[x_n, x_{n-1}] := \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

pruebe que:

$$f(x_n) = (x_n - x)f[x_n, x]$$

c) Pruebe que:

$$x_{n+1} - x = (x_n - x) \cdot \frac{f[x_n, x_{n-1}] - f[x_n, x]}{f[x_n, x_{n-1}]}$$

d) Pruebe que:

$$x_{n+1} - x = \frac{(x_n - x)(x_n - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, x]}{f[x_n, x_{n-1}]},$$

donde:

$$f[x_n, x_{n-1}, x] := \frac{f[x_n, x_{n-1}] - f[x_n, x]}{x_n - x}$$

e) Sea $[x - \epsilon_1, x + \epsilon_1]$ un intervalo sobre el cual $|f'(x)| \geq M$.

Pruebe que si x_n y x_{n-1} están dentro del intervalo, entonces:

$$|f[x_n, x_{n-1}]| \geq M$$

f) Sea L la cota superior de $|f''|$ en el intervalo $[x - \epsilon_1, x + \epsilon_1]$. Pruebe que si x_n y x_{n-1}

están dentro del intervalo, entonces:

$$|f[x_n, x_{n-1}, x]| \leq \frac{L}{2}$$

g) Pruebe que:

$$|x_{n+1} - x| \leq \frac{L}{2M}|x_n - x| \cdot |x_{n-1} - x|$$

h) Tome:

$$r_n := \frac{L}{2M}|x_n - x|, \quad \text{y} \quad \varepsilon < \min\left(\epsilon_1, \frac{2M}{L}\right)$$

usando (a), concluya que si x_0 y x_1 están dentro del intervalo $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, entonces x_n está dentro del intervalo para todo n, y $|x_n - x| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Solución

Ejercicio 23

Instrucción

Pruebe los Teoremas 7, 10, 11 y 12 de la presentación de la clase.

Solución

Teorema 7

Sea f una función de clase $C^2[a,b]$ con $a < b$.
Si existe un punto x tal que $f(x) = 0$ y $f'(x) \neq 0$, entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que si x_0 y x_1 están dentro del intervalo $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, la sucesión generada por el **método de la secante**

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-2} - x_{n-1})f(x_{n-1})}{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}$$

está bien definida dentro del intervalo $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ y **converge a** x, **cero de la ecuación** $f(x) = 0$.

Prueba

Teorema 10

Sea f una función de clase $C^2[a,b]$.
Si existe un punto $\tilde{x}$ tal que $f(\tilde{x})=0$, $f'(\tilde{x})\neq 0$ y $f''(\tilde{x})\neq 0$, entonces existe un número $\varepsilon>0$ tal que si x_0 y x_1 están dentro del intervalo $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, la sucesión generada por el **método de la secante**

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-2}-x_{n-1})f(x_{n-1})}{f(x_{n-2})-f(x_{n-1})}$$

converge a $\tilde{x}$ **con orden de al menos** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$.

Prueba

Pruebe que:

$$|e_{n+1}| \approx C\cdot|e_n|\cdot|e_{n-1}| \tag{1.10}$$

con $C := \dfrac{|f'''(\tilde{x})|}{2|f'(\tilde{x})|}$.
Por la definición 1 se busca una solución aproximada a la ecuación:

$$|e_n| = \lambda|e_{n-1}|^{\alpha} \tag{1.11}$$

con $\lambda>0$ y $\alpha\geq 1$.
Sustituyendo esta expresión en la anterior, se tiene:

$$\lambda|e_n|^{\alpha} = \lambda\lambda^{\alpha}|e_{n-1}|^{\alpha^2} = C\lambda|e_{n-1}|^{\alpha+1}. \tag{1.12}$$

Por tanto, para que se cumpla esta igualdad para n suficientemente grandes, debe cumplirse:

$$\lambda^{\alpha} = C \text{ y } \alpha^2 = \alpha+1$$

De donde se obtiene que:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } \lambda = C^{1/\alpha} \qquad \blacksquare$$

Teorema 11

Sea (x_n) una sucesión que converge a x con orden lineal con constante asintótica $\lambda<1$, además se asume que $e_n = x_n - x \neq 0$ para todo n. Entonces la sucesión $(\tilde{x}_n)$, definida en (1.14), converge a x más rápido que (x_n).

Prueba

Teorema 12

Si el método de punto fijo $x_{n+1} = g(x_n)$ converge linealmente, entonces el orden de convergencia del método de Steffensen es al menos dos.

Prueba

Suponga que $g(x)$ es un número suficientemente de veces derivable, luego pruebe que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \tilde{x}|}{|x_n - \tilde{x}|^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{g'(\tilde{x})g''(\tilde{x})}{g'(\tilde{x}) - 1}\right| := \lambda \neq 0.$$