Apuntes Teoría MA0501

Diego Alberto Vega Víquez

2025-08-21

Tabla de contenidos

Fundamentos de la Programación en Lenguaje R	nes
Funciones	2
Usando For, If y While	2
Algoritmos, aproximaciones y error	3
Aproximaciones y Error	3
Aritmética punto flotante	3
Problemas con la aritmética punto flotante	7
Algoritmos y convergencia	9
Origen del Error	13
Elementos de análisis funcional	16
Elementos de Análisis Funcional para Análisis Numérico	16
Espacios Normados	16
Productos escalares	21
Completitud	24
El teorema de punto fijo de Banach	27
El teorema de la mejor aprovimación	31

Fundamentos de la Programación en Lenguaje R

Funciones

A continuación un ejemplo de una función en ${\bf R}$

```
area.triangulo <- function(base,altura) {
    area <- (base*altura)/2
    return(area)
}
area.triangulo(2,5)</pre>
```

(1) Comunmente usamos el punto para separar las palabras en el nombre de las variables

[1] 5

Usando For, If y While

```
encuentra.cero.f <- function(v) {</pre>
  s <- -1
  for(i in 1:length(v)) {
    if((v[i]==0) \&\& (s == -1)) {
      s<-i
    }
  }
  if (s != -1) {
    return(s)
  }
  else {
    return("¡El vector no tiene ningún cero!")
  }
}
vec<-c(4,-7,2,1,9)
encuentra.cero.f(vec)
```

[1] "¡El vector no tiene ningún cero!"

La siguiente función calcula la suma del valor absoluto de las entradas de un vector, es de decir, la norma 1 del vector dada por

$$|v[1]| + |v[2]| + \dots + |v[n]|$$

```
norma1 <- function(v) {
    suma <- 0
    i = 1
    while (i <= length(v)) {
        suma <- suma + abs(v[i])
        i <- i + 1
    }
    return(suma)
}</pre>
```

[1] 14

Algoritmos, aproximaciones y error

Aproximaciones y Error

Aritmética punto flotante

Punto flotante

```
i Definición: Forma Punto Flotante
```

Un número real x está en **forma punto flotante** si se escribe de la forma

$$0.d_1d_2\cdots d_k\times 10^n,$$

 $\text{donde } 0 \leq d_i \leq 9,\, d_1 \neq 0,\, i=1,2,\ldots,k.$

Ejemplo

$$\pi = 0.31415 \times 10^{1}$$
.

Observación

- En análisis numérico todas las respuestas deben darse en notación de punto flotante.
- Si $x \in \mathbb{R}$, entonces se escribe como

$$x = 0.d_1 d_2 d_3 \cdots \times 10^n,$$

pero el computador solo puede almacenar una cantidad finita de dígitos por limitaciones de memoria.

Por lo tanto, quedan dos posibilidades:

1. Cortar

 $x \approx fl(x) = 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n,$

es decir, cortar a partir del dígito k+1.

2. Redondear y cortar

- Si $d_{k+1} \geq 5$ entonces sume 1 a d_k y corte.
- Si no, solamente corte.

Ejemplo

 $\pi = 3.14159265 \cdots$, con k = 5 tenemos:

$$fl(\pi) = 0.31415 \times 10^1 \quad (\textbf{Cortando})$$

$$fl(\pi) = 0.31416 \times 10^1$$
 (Redondeando)

i Definición: Error de Redondeo

El error que resulta de reemplazar x por fl(x) se denomina **Error de Redondeo.**

¿Cómo medir, controlar, la propagación del error?

i Definición: Error absoluto & Error relativo

Si P^* es una aproximación de P se llama:

Error absoluto
$$= |P - P^*|$$

Error relativo =
$$\frac{|P-P^*|}{|P|}$$
, para $P \neq 0$

i Teorema

Sea $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, entonces:

1. Si fl(x) se obtiene usando k-dígitos de x cortando, entonces:

$$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \le 10^{-k+1}.$$

2. Si fl(x) se obtiene usando k-dígitos de x redondeado, entonces:

$$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \le 0.5 \times 10^{-k+1} = 5 \times 10^{-k}.$$

• Ejemplo

Si $P=0.3000\times 10^1$ y $P^*=0.3100\times 10^1$ entonces:

$$|P - P^*| = 0.1 \times 10^0, \qquad \frac{|P - P^*|}{|P|} = 0.33 \times 10^{-1}$$

Pero si $P=0.3000\times 10^4$ y $P^*=0.3100\times 10^4$ entonces:

$$|P - P^*| = 0.1 \times 10^3, \qquad \frac{|P - P^*|}{|P|} = 0.33 \times 10^{-1}$$

♦ Prueba

1.

$$\begin{split} \left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| &= \left| \frac{0.d_1 d_2 \cdots \times 10^n - 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n}{0.d_1 d_2 \cdots \times 10^n} \right| \\ &= \left| \frac{0.d_{k+1} d_{k+2} \cdots \times 10^{n-k}}{0.d_1 d_2 \cdots \times 10^n} \right| \\ &= \left| \frac{0.d_{k+1} d_{k+2} \cdots}{0.d_1 d_2 \cdots} \right| \times 10^{-k} & \leq & \frac{1}{0.1} \times 10^{-k} \\ &= 10^{-k+1}. \end{split}$$

2. Ejercicio: por casos

- $d_{k+1} < 5$,
- $d_{k+1} \ge 5$.

i Definición: Dígitos significativos

Se dice que un número P^* aproxima a P con t dígitos significativos si $t \in \mathbb{N}$ es el número más grande tal que:

$$\frac{|P-P^*|}{|P|} < 5 \times 10^{-t} \ = \ 0.5 \times 10^{-t+1}.$$

• Ejemplo

$$x = \pi = 0. \underbrace{3141}_{4 \text{ dígitos}} 59265 \dots \times 10^{1}.$$

$$x^* = \frac{22}{7} = 0. \underbrace{3142}_{\text{dígitos distintos}} 8517 \times 10^1.$$

$$\frac{|x-x^*|}{|x|} = 0.402 \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-4+1}.$$

Por lo que x^* aproxima x con 4 dígitos significativos.

? Ejemplo

 \downarrow Qué valores puede tomar x^* para aproximar 1000 con **4 dígitos significativos**?

$$x = 1000 = 0.1000 \times 10^4$$
, luego tenemos que:

$$\left|\frac{x^*-1000}{1000}\right| < 5 \times 10^{-4} \qquad \Rightarrow \qquad -5 \times 10^{-4} < \frac{x^*-1000}{1000} < 5 \times 10^{-4},$$

$$\Rightarrow 999.5 < x^* < 1000.5.$$

Note que

$$x^* = 0.9996 \times 10^3$$

aproxima a x con **4 dígitos significativos**, pero

$$y = 0.1001 \times 10^4$$

 \mathbf{no} aproxima a x con 4 dígitos significativos.

Problemas con la aritmética punto flotante

• División:

Si $x \cong x + \varepsilon$ y se divide entre δ muy pequeño se tiene:

$$\frac{x}{\delta} \cong \frac{x+\varepsilon}{\delta} = \frac{x}{\delta} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{\delta}}_{(*)}$$

(*): Nuevo error enorme

• Resta de dos números casi iguales:

$$\begin{split} fl(x) &= 0.d_1d_2\cdots d_p\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\cdots\alpha_k\times 10^n\\ fl(y) &= 0.d_1d_2\cdots d_p\beta_{p+1}\beta_{p+2}\cdots\beta_k\times 10^n\\ x-y &\cong fl(x)-fl(y) &= 0.\underbrace{\gamma_{p+1}\gamma_{p+2}\cdots\gamma_k}_{(**)}\times 10^{n-p} \end{split}$$

(**): Podría ser basura.

i Notación

$$\begin{array}{lll} \Delta_x &=& |x-x^*|. \\ \\ \delta_x &=& \frac{|x-x^*|}{|x|} \,=\, \frac{\Delta_x}{|x|}. \end{array}$$

i Teorema

Si $x=x_1+x_2+\cdots+x_n$ y $x^*=x_1^*+x_2^*+\cdots+x_n^*$ con $x_i\geq 0$ entonces:

$$\begin{split} & \Delta_x \ \leq \ \sum_{i=1}^n \Delta_{x_i}. \\ & \delta_x \ \leq \ \max\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_n}\}. \end{split}$$

Prueba

$$\Delta_x = |x - x^*| = \left| \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i^* \right| \le \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^*| = \sum_{i=1}^n \Delta_{x_i}.$$

$$\begin{split} \text{Sabemos que} \quad & \delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} \leq \frac{\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \dots + \Delta_{x_n}}{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|}, \\ & \delta_{x_i} = \frac{\Delta_{x_i}}{|x_i|} \ \Rightarrow \ \Delta_{x_i} = \delta_{x_i} \, |x_i|, \\ \\ \Rightarrow \quad & \delta_x \leq \frac{|x_1|\delta_{x_1} + |x_2|\delta_{x_2} + \dots + |x_n|\delta_{x_n}}{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|} \\ \\ & \leq \frac{\max\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_n}\} \, (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)}{|x_1 + x_2 + \dots + x_n|} \\ \\ \leq \max\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_n}\}, \qquad \text{pues } x_i \geq 0 \ \forall i. \end{split}$$

Observación

Se debe evitar la pérdida de dígitos significativos:

Por ejemplo, al evaluar:

$$f(x) = 1 - \cos(x),$$

con x cercano a 0 se producirá una pérdida de dígitos significativos.

Esto se puede evitar racionalizando, como sigue:

$$f(x) = 1 - \cos(x) = \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}.$$

Algoritmos y convergencia

¿Qué es un algoritmo?

i Definición: Algoritmo

Un algoritmo es un procedimiento que describe, sin ninguna ambigüedad, una sucesión finita de pasos a realizar en orden específico, con el propósito de resolver un problema.

Características:

- Finito.
- Definido (no ambiguo).
- Entrada.
- Salida.
- Efectivo.
- Eficiente.

Para representar las instrucciones utilizaremos pseudocódigo.

Ejemplo

Para calcular

$$\sum_{k=a}^{\infty} f(x,k)$$

tenemos:

Entrada: ε, f, a, x .

Salida: Valor aproximado de

$$\sum_{k=a}^{\infty} f(x,k).$$

```
k <- a
s <- 0
T <- f(x,k)
while |T| < do
    s <- s + t
    t <- t * (f(x,k+1) / f(x,k))
    k <- k + 1
end while
return s</pre>
```

i Definición: Algoritmos Estables

Un algoritmo se dice **estable** si pequeños cambios en la entrada producen pequeños cambios en la salida.

En caso contrario, es decir, pequeños cambios en la entrada producen grandes cambios en la salida, entonces el algoritmo se dice inestable (caótico).

Notación

E = Error inicial.

 $E_n = \text{Error luego de } n \text{ pasos.}$

Definición: Crecimiento lineal del error

Si

$$|E_n| = CnE,$$

con C constante, entonces el crecimiento del error es **lineal**.

Definición: Crecimiento exponencial del error

Si

$$|E_n| = K^n E, \quad K > 1,$$

entonces el crecimiento del error es exponencial.

Observación

- Crecimiento del error lineal \Leftrightarrow estable.
- Crecimiento del error exponencial \Leftrightarrow inestable.

i Definición: Rapidez de convergencia

Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a α , se dice que $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge con una rapidez $\mathcal{O}(\beta_n)$, donde $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión $(\beta_n\neq 0\ \forall n)$ si:

$$\frac{|\alpha_n - \alpha|}{|\beta_n|} < K$$

para n suficientemente grande y K constante que no depende de n.

i Notación

$$\alpha_n = \alpha + \mathcal{O}(\beta_n).$$

$$\alpha_n \ \to \ \alpha \ \ \text{con rapidez} \ \mathcal{O}(\beta_n).$$

i Observación

$$\frac{|\alpha_n - \alpha|}{|\beta_n|} < K \quad \Longleftrightarrow \quad -K\beta_n + \alpha < \alpha_n < K\beta_n + \alpha.$$

Ejemplo

Si $\alpha_n = \frac{n+3}{n^3}$, entonces

$$\alpha_n = 0 + \mathcal{O}\!\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

pues:

$$\left|\frac{\alpha_n-\alpha}{\beta_n}\right|=\left|\frac{\frac{n+3}{n^3}-0}{\frac{1}{n^2}}\right|=\left|\frac{n^3+3n^2}{n^3}\right|=\left|1+\frac{3}{n}\right|\leq 4,\quad \text{si }n\to\infty.$$

Es decir, $\frac{n+3}{n^3}$ converge a 0 tan rápido como $\frac{1}{n^2}$ converge a 0.

Ejemplo

Si

$$\alpha_n = \frac{\sin(n)}{n},$$

entonces

$$\alpha_n = 0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

i Observación: Velocidad de convergencia de los ciclos

1. For[i=1, i++, i<=N, ...]

tiene una velocidad de convergencia $\mathcal{O}(N).$

2. For[i=1, i++, i<=N,

tiene una velocidad de convergencia $\mathcal{O}(N^2).$

3. For[i=1, i++, i<=N,

tiene una velocidad de convergencia $\mathcal{O}(N^3)$.

Origen del Error

Tipos de Error

Existen dos tipos de error: El error en los datos y el error computacional

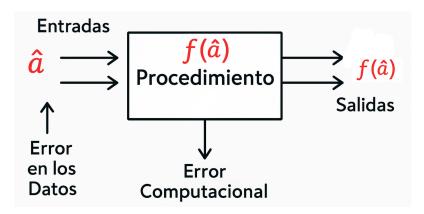


Figura 1: Tipos de Error

Definición: Propagación del error

Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea \hat{a} una aproximación de a y f una función o procedimiento, entonces

$$f(\hat{a}) - f(a)$$

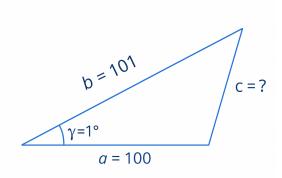
se llama propagación del error o error propagado.

Esto se ilustra en el siguiente gráfico

AGRAGAR GRAFICO ANDREY



Suponga que se desea calcular c en el siguiente triángulo:



Supongamos que a tiene un error y usamos 100.1.

Entonces el error se propaga como se muestra en la siguiente tabla:

Expresión	Exacto	Aproximado	Error relativo
\overline{a}	100	100.1	0.1 %
b-a	1	0.9	-10%
$(b-a)^2$	1	0.81	-19%
$4ab\sin^2(\frac{\gamma}{2})$	$3.0765\dots$	$3.0796\dots$	0.1%
$(b-a)^2 + 4ab\sin^2(\frac{\gamma}{2})$	$4.0765\dots$	$3.8896\dots$	-4.6%
c	2.0190	$1.9722\dots$	-2.3%
Error relativo inicial:	0.1%	Error relativo	-2.3%
		final:	

🥊 Ejemplo: Inestabilidad Numérica

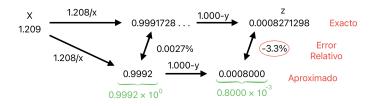
Suponga que se desea calcular

$$z = 1.000 - \frac{1.208}{x}$$

en una computadora que solamente utiliza 4 dígitos, con x = 1.209.

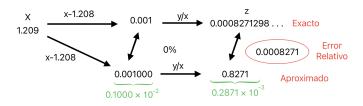
Algoritmo 1.

Calcule primero $y := \frac{1.208}{x}$ y luego z := 1.000 - y



Algoritmo 2.

Calcule primero y := x - 1.208y luego $z := \frac{y}{x}$



Principio Básico:

Si es posible, evite operaciones sensibles con operandos contaminados por la propagación del error.

💡 Ejemplo: Raíces cuadráticas y propagación del error

Usualmente, para calcular las raíces de una ecuación cuadrática se usa:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

pero si b > 0 es mejor usar:

$$x_1 = \frac{-2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

y si b < 0 es mejor usar:

$$x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

🥊 Ejemplos: Evitar cancelación numérica

Otros ejemplos que evitan problemas de cancelación cuando $x\approx y$ son:

$$\begin{split} x^2-y^2 &\longrightarrow (x-y)(x+y), \\ \cos(x)-1 &\longrightarrow 2\sin^2(\frac{x}{2})\,, \quad \text{para } x\to 0, \\ \ln(x)-\ln(y) &= \ln\left(\frac{x}{y}\right) \longrightarrow 2\tanh^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right), \\ e^x-e^y &\longrightarrow 2\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{\frac{x+y}{2}}. \end{split}$$

Elementos de análisis funcional

Elementos de Análisis Funcional para Análisis Numérico

Espacios Normados

i Definición: Espacio normado

Sea X un espacio vectorial complejo (o real).

Una función $\|\cdot\|:X\to\mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

- 1. $||x|| \ge 0$,
- 2. ||x|| = 0 si y solamente si x = 0,
- 3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- 4. $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$,

para todo $x,y\in X$ y para todo $\alpha\in\mathbb{C}$ (o \mathbb{R}),

se llama **norma** en X.

El espacio vectorial X provisto de una norma se llama **espacio normado**.

• Ejemplo

Algunas normas de \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n son:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|, \qquad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}, \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|,$$

para $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^t$.

Las normas anteriores son conocidas como las normas $\ell_1,\,\ell_2$ y ℓ_∞ respectivamente.

Las tres son casos particulares de la **norma** ℓ_p :

$$\|x\|_p:=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad p\geq 1.$$

16

La norma ℓ_{∞} es el límite de ℓ_p cuando $p \to \infty.$

i Proposición

Para toda norma se tiene la segunda desigualdad triangular:

$$|||x|| - ||y||| \le ||x - y||,$$

para todo $x, y \in X$.

🌢 Prueba

De la desigualdad triangular se tiene que

$$||x|| = ||x - y + y|| \le ||x - y|| + ||y||,$$

por lo tanto

$$||x|| - ||y|| \le ||x - y||.$$

Análogamente, cambiando el rol de x y y, se obtiene

$$||y|| - ||x|| \le ||y - x||,$$

y por lo tanto se cumple la desigualdad.

i Definición: Norma

Para dos elementos x, y en un espacio normado X la norma ||x-y|| se llama **distancia** entre x y y.

Definición: Sucesión Convergente

Una sucesión (x_n) de elementos en un espacio normado X se llama **convergente** si existe un elemento $x \in X$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0,$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero $N(\varepsilon)$ tal que $||x_n - x|| < \varepsilon$ para todo $n > N(\varepsilon)$. El elemento x es llamado el **límite** de la sucesión (x_n) y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

Si una sucesión no converge se llama divergente.

i Proposición

El límite de una sucesión convergente es único.

Prueba

 $(Ejercicio) \blacksquare$

i Definición: Normas Equivalentes

Dos normas en un espacio vectorial se llaman **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de sucesiones convergentes.

i Teorema

Dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ en un espacio vectorial X son equivalentes si y solamente si existen números positivos c y C tal que:

$$c\|x\|_a \ \leq \ \|x\|_b \ \leq \ C\|x\|_a, \quad \forall x \in X.$$

Prueba

Sean las normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ equivalentes. Suponga que no existe C>0 tal que $\|x\|_b\leq C\|x\|_a$ para todo $x\in X$, entonces existe una sucesión (x_n) con $\|x_n\|_a=1$ y $\|x_n\|_b\geq n^2$.

Luego la sucesión $y_n := x_n/n$ converge a cero con respecto a $\|\cdot\|_a$ pero no con respecto a $\|\cdot\|_b$, porque $\|y_n\|_b \ge n$.

Recíprocamente, si se tiene (2), entonces si $\|x_n-x\|_a \to 0$ es claro que $\|x_n-x\|_b \to 0$ y viceversa.

i Teorema

En un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes.

Prueba

Ejercicio. \blacksquare

i Definición: Subconjunto cerrado

- Un subconjunto U de un espacio normado se llama **cerrado** si este contiene el límite de todas las sucesiones convergentes de U.
- La clausura \overline{U} de un conjunto U de un espacio normado X es el conjunto de todos los límites de sucesiones convergentes de U.
- Un subconjunto U de X se llama **abierto** si su complemento $X \setminus U$ es cerrado.
- Un conjunto U se llama **denso** en otro conjunto V si $V \subset \overline{U}$, es decir, si cada elemento de V es el límite de una sucesión convergente de U.
- Para cada $x_0 \in X$ y r > 0 el conjunto

$$B[x_0, r] := \{x \in X \ : \ \|x - x_0\| \le r\}$$

es cerrado y se llama la **bola cerrada** de radio r y centro x_0 .

El conjunto

$$B(x_0,r) := \{x \in X \ : \ \|x - x_0\| < r\}$$

es abierto y se llama la **bola abierta** de radio r y centro x_0 .

Ejemplo

- Cerrado. $[0,1] \subset \mathbb{R}$ es cerrado: toda sucesión convergente de puntos en [0,1] converge a un punto en [0,1].
- Clausura. Si U =]0, 1[, entonces $\overline{U} = [0, 1]$. Si $U = \mathbb{Q}$, entonces $\overline{U} = \mathbb{R}$.
- Abierto. $]0,1[\subset \mathbb{R}$ es abierto porque su complemento es $\mathbb{R}\setminus]0,1[=]-\infty,0]\cup [1,\infty[.$
- Denso en V. \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$). También]0,1[es denso en [0,1] pues $\overline{[0,1[} = [0,1]$.
- Bolas (norma usual). En \mathbb{R} , con $x_0 = 2$, r = 3:

$$B[2,3] = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \le 3\} = [-1,5],$$

$$B(2,3) = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 3\} =]-1, 5[.$$

En \mathbb{R}^2 , con $x_0 = (1, 2), r = 2$:

$$B[(1,2),2]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\leq 2\},$$

$$B((1,2),2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < 2\}.$$

i Definición

Un conjunto U se llama **acotado** si existe un número positivo C tal que

$$||x|| < C$$
 para todo $x \in U$.

i Teorema

Toda sucesión acotada en un espacio normado de dimensión finita X contiene una subsucesión convergente.

Prueba

Sea u_1,u_2,\dots,u_n una base de X y sea (x_ν) una sucesión acotada. Entonces se puede escribir:

$$x_{\nu} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j\nu} u_{j}.$$

Como x_{ν} es una sucesión acotada y usando la norma

$$||x_{\nu}||_{\infty B} := \max_{j=1,2,\dots,n} |\alpha_{j\nu}|,$$

se tiene que cada una de las sucesiones $(\alpha_{j\nu})$ es acotada en $\mathbb C$ para cada $j=1,2,\ldots,n$.

Por lo tanto, usando el teorema de Bolzano–Weierstrass se puede seleccionar una subsucesión $\alpha_{j\nu(\ell)} \to \alpha_j$ cuando $\ell \to \infty$ para cada $j=1,2,\ldots,n$.

Esto implica que:

$$x_{\nu(\ell)} \to \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \in X, \quad \text{cuando } \ell \to \infty.$$

Productos escalares

i Definición: Producto interno y espacio pre-Hilbert

Sea X un espacio vectorial complejo (o real).

Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}) con las siguientes propiedades:

- 1. $\langle x, x \rangle \ge 0$,
- 2. $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si x = 0,
- 3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
- 4. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in X, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ (o \ \mathbb{R}),$

se llama **producto interno** en X.

Un espacio vectorial X provisto de un producto interno se llama **espacio pre-Hilbert**.

! Observación

Una consecuencia inmediata de 3. y 4. es la antilinealidad:

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle.$$

Ejemplo

Un ejemplo de producto interno en \mathbb{C}^n (o $\mathbb{R}^n)$ está dado por:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

donde $x:=(x_1,x_2,\dots,x_n)^t$ y $y:=(y_1,y_2,\dots,y_n)^t.$

i Teorema

Para todo producto interno se tiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \le \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

para todo $x, y \in X$. Además se tiene igualdad si para todo x, y son linealmente dependientes.

♦ Prueba

Si x = 0 la desigualdad es trivial.

Si $x \neq 0$, tome

$$z = y - \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x,$$

luego es claro que $\langle z, x \rangle = 0$ y que:

$$0 \leq \|z\|^2 = \left\langle y - \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x, \ y - \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} x \right\rangle = \langle y, y \rangle - \frac{\langle y, x \rangle \langle x, y \rangle}{\|x\|^2} = \|y\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|x\|^2},$$

de donde se tiene la desigualdad. Además se tiene igualdad si para todo x, y son linealmente dependientes (ejercicio). \blacksquare

i Teorema

Sea X un espacio vectorial complejo (o real).

Entonces la función:

$$||x|| := \langle x, x \rangle^{1/2}$$

define una norma en X, es decir, un espacio pre-Hilbert es siempre un espacio normado.

Prueba

Ejercicio (use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para probar la desigualdad triangular).

i Definición: Elementos Ortogonales

• Dos elementos x y y de un espacio pre-Hilbert se llaman **ortogonales** si:

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

- Dos subconjuntos U y V se llaman **ortogonales** si $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $u \in U$ y $v \in V$.
- Si dos elementos son ortogonales se denota $x \perp y$ y si dos conjuntos son ortogonales se denota $U \perp V$.
- Un subconjunto $U \subseteq X$ se llama un **sistema ortogonal** si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x, y \in U$ con $x \neq y$.
- Un sistema ortogonal U de X se llama **ortonormal** si ||x|| = 1 para todo $x \in U$.

i Teorema

Los elementos de un sistema ortogonal son linealmente independientes.

Prueba

Sea $\{q_1,q_2,\dots,q_n\}$ un sistema ortogonal.

Si

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k q_k = 0,$$

y se multiplica a ambos lados por $q_j,$ es inmediato que $\alpha_j=0$ para todo $j=1,2,\dots,n.$

i Teorema [Gram–Schmidt]

Sea $\{u_0, u_1, ...\}$ un conjunto finito o numerable de elementos linealmente independientes de un espacio de pre-Hilbert.

Entonces existe un sistema ortogonal único $\{q_0,q_1,\ldots\}$ de la forma:

$$q_n = u_n + r_n, \quad \text{para } n = 0, 1, \dots,$$
 (3)

con $r_0=0$ y $r_n\in \operatorname{gen}\{u_0,u_1,\dots,u_{n-1}\}$ para $n=1,2,\dots$

Además se tiene que:

$$gen\{u_0, u_1, \dots, u_n\} = gen\{q_0, q_1, \dots, q_n\}, \quad para \ n = 0, 1, \dots$$
 (4)

Prueba

Asumamos que hemos construido elementos de la forma (3) con la propiedad (4) hasta q_{n-1} . Por la propiedad (4) los elementos $\{q_0,q_1,\dots,q_{n-1}\}$ son linealmente independientes y por lo tanto $\|q_k\| \neq 0$ para $k=0,1,\dots,n-1$.

Por lo tanto:

$$q_n = u_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle u_n, q_k \rangle}{\langle q_k, q_k \rangle} q_k,$$

está bien definido, y usando la hipótesis de inducción es fácil notar que

$$\langle q_n, q_k \rangle = 0$$
, para $k = 0, 1, ..., n - 1$.

Es claro que

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle u_n, q_k \rangle}{\langle q_k, q_k \rangle} q_k \ \in \ \gcd\{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}\} = \gcd\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}.$$

La unicidad queda de ejercicio al lector. ■

Completitud

i Definición: Sucesión de Cauchy

Una sucesión de elementos en un espacio normado X se llama sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$||x_n - x_m|| < \varepsilon,$$

para todo $n,m\geq N(\varepsilon),$ es decir, si

$$\lim_{n \to \infty, \ m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

i Teorema

Toda sucesión convergente es de Cauchy

Prueba

Sea $x_n\to x$ cuando $n\to\infty.$ Entonces, para todo $\varepsilon>0$ existe un $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n-x\|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{para todo }n\geq N(\varepsilon).$$

Ahora, usando la desigualdad triangular:

$$\|x_n-x_m\|=\|x_n-x+x-x_m\|\leq \|x_n-x\|+\|x_m-x\|<\varepsilon,$$

para todo $n, m \ge N(\varepsilon)$.

Observación

El recíproco del teorema anterior no es válido en general, por esto tiene sentido dar la siguiente definición.

i Definición: Subconjunto Completo

Un subconjunto U de un espacio normado X se llama **completo** si toda sucesión de Cauchy de elementos de U converge a un elemento en U.

Un espacio normado completo se llama espacio de Banach.

Un espacio pre-Hilbert se llama **espacio de Hilbert** si este es un espacio completo.

Ejemplo

El espacio vectorial C[a, b] provisto con la norma:

$$\|f\|_{\infty}:=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

es un espacio de Banach.

Prueba

(Ejercicio) \blacksquare

Ejemplo

El espacio vectorial C[a, b] provisto con la norma L_1 :

$$\|f\|_1:=\int_a^b|f(x)|\,dx$$

NO es un espacio de Banach.

♦ Prueba

Es evidente que $||f||_1$ es una norma.

Sin pérdida de generalidad se toma [a, b] = [0, 2] y se escoge:

$$f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Para todo m > n se tiene que:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 (x^n - x^m) dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \to 0$$
 cuando $n, m \to \infty$,

por lo tanto (f_n) es una sucesión de Cauchy.

Ahora, supongamos que la sucesión (f_n) converge a una función continua f con respecto a la norma L_1 , es decir:

$$||f_n - f||_1 \to 0$$
 cuando $n \to \infty$.

Entonces:

$$\int_0^1 |f(x)| \, dx \leq \int_0^1 |f(x) - x^n| \, dx + \int_0^1 x^n \, dx \leq \|f - f_n\|_1 + \frac{1}{n+1} \to 0$$

cuando $n \to \infty$, de donde f(x) = 0 para $0 \le x \le 1$.

Además se tiene que

$$\int_1^2 |f(x)-1|\,dx = \int_1^2 |f(x)-f_n(x)|\,dx \leq \|f-f_n\|_1 \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

esto implica que f(x) = 1 para $1 \le x \le 2$.

Por lo tanto f no es continua, lo cual es una contradicción.

Ejemplo

El espacio vectorial C[a, b] provisto con la norma L_2 :

$$||f||_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

NO es un espacio de Banach.

♦ Prueba

Ejercicio (sug. use la misma sucesión del ejemplo anterior).

i Teorema

Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.

Prueba

Sea X un espacio normado con base u_1,u_2,\dots,u_n y sea (x_ν) una sucesión de Cauchy en X. Se puede escribir:

$$x_{\nu} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j\nu} u_{j}$$

usando el Teorema 1 se tiene que existe un C>0 tal que:

$$\max_{j=1,2,\dots,n} |\alpha_{j\nu} - \alpha_{j\mu}| \leq C \left\| x_{\nu} - x_{\mu} \right\|$$

para todo $\nu, \mu \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $(\alpha_{j\nu})$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb C$, entonces existen $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ tales que $\alpha_{j\nu}\to\alpha_j$ cuando $\nu\to\infty$ para cada $j=1,2,\dots,n$.

Por lo tanto (x_{ν}) converge a:

$$x_{\nu} \to x := \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \in X \quad \text{cuando } \nu \to \infty.$$

El teorema de punto fijo de Banach

i Definición: Contracción

Sea U un subconjunto de un espacio normado X.

Un operador (una función) $A:U\to X$ se llama una contracción si existe una constante $q\in[0,1[$ tal que:

$$||Ax - Ay|| \le q||x - y||, \quad \forall \, x, y \in U.$$

i Definición: Continuidad de un operador

Sea U un subconjunto de un espacio normado X, y sea Y un espacio normado.

• Una función $A:U\to Y$ se llama **continua en** $x\in U$ si para toda sucesión (x_n) de U tal que $\lim_{n\to\infty}x_n=x,$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty}Ax_n=Ax.$$

• Un operador $A: U \to Y$ se llama **continuo** si es continuo en x para todo $x \in U$.

i Proposición

Toda contracción es un operador continuo.

Prueba

La prueba es evidente, puesto que si $\|x_n-x\|\to 0$ cuando $n\to\infty$ entonces $\|Ax_n-Ax\|\to 0 \text{ cuando } n\to\infty \text{ ya que}$

$$||Ax_n - Ax|| \le q||x_n - x|| \to 0$$
 cuando $n \to \infty$.

i Definición: Operador Lipschitz

Un operador $A:U\to X$ se llama Lipschitz con constante de Lipschitz L si existe una constante positiva L tal que:

$$\|Ax-Ay\|\leq L\|x-y\|$$

para todo $x, y \in U$.

Es decir, una contracción es un operador Lipschitz con constante menor que uno.

i Definición: Operador lineal

Un operador $A: X \to Y$ donde X y Y son espacios normados se llama **lineal** si:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

para todo $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (o \mathbb{R}).

i Teorema

Un operador lineal es continuo si y solo si es continuo en un elemento.

Prueba

Sea $A:X\to Y$ un operador lineal continuo en $x_0\in X.$

Entonces, para todo $x \in X$ y para toda sucesión $(x_n) \to x$ cuando $n \to \infty$, se tiene que:

$$Ax_n = A(x_n - x + x_0) + A(x - x_0) \ \rightarrow \ A(x_0) + A(x - x_0) = Ax, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Observación

Como $x_n - x + x_0 \rightarrow x_0$, entonces se puede aplicar el límite dentro de la expresión.

i Definición: Punto fijo

Un elemento $x \in X$ (espacio normado) se llama **punto fijo** de un operador $A: U \subseteq X \to X$ si:

$$Ax = x$$
.

i Teorema

Toda contracción tiene a lo más un único punto fijo.

Prueba

Supongamos que x y y son puntos fijos de una contracción A, entonces

$$0 \neq ||x - y|| = ||Ax - Ay|| \le q||x - y||,$$

lo que implica que $q \ge 1$, lo cual es una contradicción. \blacksquare

i Teorema: (Banach)

Sea U un subconjunto completo de un espacio normado X y sea $A:U\to U$ una contracción. Entonces A tiene un punto fijo único.

Prueba

Sea $x_0 \in U$ entonces definimos recursivamente la siguiente sucesión en $U\colon$

$$x_{n+1} := Ax_n$$
, para $n = 0, 1, 2, ...$

De donde se tiene que:

$$\|x_{n+1}-x_n\|=\|Ax_n-Ax_{n-1}\|\leq q\|x_n-x_{n-1}\|,$$

luego, por inducción se deduce que:

$$\|x_{n+1}-x_n\| \leq q^n \|x_1-x_0\|, \quad \text{para } n=0,1,2,\dots$$

Por lo tanto para m > n se tiene que:

$$\begin{split} \|x_n - x_m\| & \leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \dots + \|x_{m-1} - x_m\| \\ & \leq (q^n + q^{n+1} + \dots + q^{m-1}) \|x_1 - x_0\| \\ & \leq \frac{q^n}{1 - a} \|x_1 - x_0\|. \end{split}$$

Como $q^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy y como U es completo entonces existe $x \in U$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Finalmente, por la continuidad de A se tiene que:

$$x = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} Ax_n = Ax.$$

La unicidad se tiene por el teorema anterior.

Ejemplo

Pruebe que la función $f(x)=\frac{x^2-2x}{6},\ x\in[-1,1]$ tiene un punto fijo único en [-1,1].

Solución: Como \mathbb{R} es un espacio de Banach con la norma valor absoluto, se debe probar que $f(x) \in [-1, 1] \quad \forall x \in [-1, 1].$

Como

$$f'(x) = \frac{1}{6}(2x - 2) = \frac{x - 1}{3} = 0 \iff x = 1$$

se tiene que los máximos y mínimos posibles están en x=-1 o x=1, así el valor máximo es

$$f(-1) = \frac{1}{2}$$

y el valor mínimo es

$$f(1) = -\frac{1}{6}.$$

Por lo que para todo $x \in [-1, 1]$ se tiene que $f(x) \in [-1, 1]$, o sea que f tiene un punto fijo en [-1, 1].

Para probar la unicidad, por el teorema del valor medio la constante L de Lipschitz está dada por:

$$L = \max_{x \in [-1,1]} |f'(x)| = \max_{x \in [-1,1]} \left| \frac{x-1}{3} \right| = \left| \frac{-1-1}{3} \right| = \frac{2}{3} < 1.$$

Por lo tanto f es una contracción en [-1,1], luego la unicidad se tiene por el teorema anterior.

El teorema de la mejor aproximación

i Definición: Mejor aproximación

Sea U un subconjunto de un espacio normado X y sea $w \in X$.

Un elemento $v \in U$ se llama la mejor aproximación a w con respecto a U si:

$$||w - v|| \le \inf_{u \in U} ||w - u||,$$

es decir, v es el elemento en U más cercano a w.

i Teorema

Sea U un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X.

Entonces, para todo elemento $w \in X$, existe una mejor aproximación con respecto a U.

🌢 Prueba

Sea $w \in X$ y escojamos una sucesión (u_n) tal que $u_n \in U$ y satisfaga lo siguiente:

$$\|w-u_n\|\to d:=\inf_{u\in U}\|w-u\|\quad \text{cuando }n\to\infty.$$

Como

$$\|u_n\|\leq \|w-u_n\|+\|w\|$$

entonces (u_n) es una sucesión acotada.

Por el Teorema 3 la sucesión (u_n) contiene una subsucesión convergente $(u_{n(\ell)})$ con límite $v \in U$.

Entonces:

$$\|w-v\|=\lim_{\ell\to\infty} \lVert w-u_{n(\ell)}\rVert=d,$$

con lo que se prueba el teorema. ■

i Teorema

Sea U un subespacio vectorial de un espacio de pre-Hilbert X.

Un elemento v es la mejor aproximación a $w \in X$ con respecto a U si y solo si:

$$\langle w-v,u\rangle=0$$

para todo $u \in U$.

Es decir, si y solamente si $w - v \perp U$.

Además, para cada $w \in X$ existe a lo más una única mejor aproximación con respecto a U.

♦ Prueba

(Ejercicio) ■

i Definición: Operador Acotado

Un operador $A: X \to Y$ donde X y Y son espacios normados, se llama **acotado** si existe un número positivo C tal que:

$$||Ax|| \le C||x||$$

para todo $x \in X$.

i Teorema

Un operador lineal $A:X\to Y$ es acotado si y solamente si:

$$||A|| := \sup_{||x||=1} ||Ax|| < \infty.$$

El número ||A|| es la más pequeña cota para A y se llama la **norma de** A.

Prueba

Asuma A es acotado con una cota C. Entonces

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < C < \infty,$$

y entonces $\|A\|$ es menor o igual que cualquier otra cota para A.

Inversamente, si $||A|| < \infty$, entonces usando la linealidad de la norma se tiene que:

$$||Ax|| = ||A(\frac{x}{||x||})|| ||x|| \le ||A|| ||x||,$$

para todo $x \neq 0$, por lo tanto A es acotado con cota C = ||A||.

i Teorema

Sea U un subespacio vectorial completo de un espacio pre-Hilbert X. Entonces para cada elemento $w \in X$ existe una única mejor aproximación con respecto a U.

• El operador $P: X \to U$ que le asigna a $w \in X$ su mejor aproximación es un operador lineal acotado con las siguientes propiedades:

$$P^2=P\quad {\bf y}\quad \|P\|=1.$$

- Este operador se conoce como la **proyección ortogonal** de X sobre U.

Prueba

(ejercicio) ■

i Corolario

Sea U un subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio pre-Hilbert X con base $u_1,u_2,\ldots,u_n.$

Entonces la combinación lineal

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$$

es la mejor aproximación para $w \in X$ con respecto a U si y solamente si los coeficientes

 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ satisfacen las ecuaciones normales:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \langle u_k, u_j \rangle = \langle w, u_j \rangle, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n.$$

Prueba

Es evidente que la ecuación (8) es equivalente a la ecuación (7).

i Corolario

Sea U un subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio pre-Hilbert X con base ortonormal $u_1,u_2,\ldots,u_n.$

Entonces la proyección ortogonal está dada por:

$$Pw = \sum_{k=1}^{n} \langle w, u_k \rangle u_k, \quad \text{con } w \in X.$$

Prueba

Es evidente de (8) puesto que

$$\langle u_k, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j, \\ 1 & \text{si } k = j, \end{cases}$$

luego $\alpha_k = \langle w, u_k \rangle$ para $k = 1, 2, \dots, n.$

Ejemplo

Sea $P_2[0,1]$ un subespacio de dimensión finita del espacio pre–Hilbert ${\cal C}[0,1]$ dotado del producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) \, dx.$$

Es fácil verificar que

$$\mathcal{B} = \{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$$

es una base ortonormal de $P_2[0,1]$.

Si tomamos $f(x)=e^x$, entonces la mejor aproximación de f(x) en $P_2[0,1]$ es:

$$Pf = \langle e^x, 1 \rangle \cdot 1 + \langle e^x, \sqrt{3}(2x-1) \rangle \cdot \sqrt{3}(2x-1) + \langle e^x, \sqrt{5}(6x^2-6x+1) \rangle \cdot \sqrt{5}(6x^2-6x+1),$$

es decir,

$$Pf = (e-1) + \sqrt{3}(3-e)\sqrt{3}(2x-1) + \sqrt{5}(7e-19)\sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$$

Por lo tanto,

$$Pf \approx 1.01 + 0.85x + 0.84x^2.$$

Gráficamente: Gráfico de e^x y polinomio cuadrático

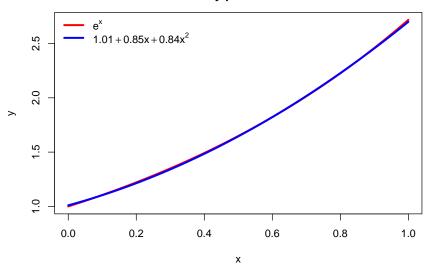


Figura 2: Gráfico de e^x y aproximación cuadrática