Profesor: Dr. Oldemar Rodríguez Rojas
MA0501 Análisis Numérico 1
Fecha de Entrega: Lunes 1 de septiembre - 11:59 p.m.

Tarea Número 2

1. Suponga que $p^\star$ aproxima a p con 3 dígitos significativos. Encuentre el intervalo en el cual $p^\star$ debe estar, si:

   (a) $p = 150$.
   (b) $p = 900$.
   (c) $p = 1500$.
   (d) $p = 90$.

2. Considere el los siguientes valores para p y $p^\star$:

   (a) $p = \pi \quad p^\star = 3.1$.
   (b) $p = 1/3 \quad p^\star = 0.333$.
   (c) $p = \frac{\pi}{1000} \quad p^\star = 0.0031$.
   (d) $p = \frac{100}{3} \quad p^\star = 33.3$.

   ¿Cuál es el error absoluto y relativo al aproximar p por $p^\star$?

3. Sea $\alpha_n = \dfrac{n+10}{n^5}$, pruebe que

$$\alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

   ¿Qué se puede concluir?

4. Suponga que $fl(x)$ es una aproximación de x con redondeo a k dígitos. Demuestre que:

$$\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1},$$

5. Si se calcula la raíz menor en valor absoluto de la ecuación:

$$f(x) = x^2 + 0.4002 \times 10^0 x + 0.8 \times 10^{-4} = 0.$$

   con la fórmula cuadrática usual, entonces se produce una pérdida de dígitos significativos (¿Porqué?). Encuentre una para fórmula para efectuar este cálculo sin que se produzca tal pérdida y encuentre la raíz de menor magnitud.

6. Escriba una función en **R** que verifique para cualquier n la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix} = (x + a_1 + \cdots + a_n)(x - a_1)\cdots(x - a_n).$$

7. Escriba una función en **R** que verifique para cualquier n la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix} = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\cdots(a_n - b_n).$$

8. Se dice que una matriz es **rala** si esta tiene más entradas nulas que no nulas (mayor estricto). Escriba una función en **R** que permita determinar si una matriz es rala.

9. Se dice que una matriz $A \in M_{n\times m}$ **tiene forma de O** si todas las entradas de la fila 1, fila n, columna 1 y columna m son no nulas, y las demás entradas de la matriz son nulas. Escriba una función en **R** que permita determinar si una matriz está en forma de O.

10. En el capítulo de análisis funcional complete las demostraciones de los teoremas 2, 4, 5, 14, 16 y de los ejemplos 3, 5.

11. En el teorema 7, si tomamos como espacio pre–Hilbert a $\mathbb{R}^n$ con el producto punto clásico, escriba una función en **R** que reciba una base de un subespacio de $\mathbb{R}^n$ en una lista de listas y retorne la base ortogonal en una lista de listas, luego otra función que calcule la base ortonormal.

12. Repita el ejercicio anterior usando los espacios y el producto interno del ejemplo 7. ¿Será posible hacer una función que reciba también como parámetro el producto interno como una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y genere la base ortogonal y ortonormal usando este producto interno?

13. En el Corolario 2, si tomamos como espacio pre–Hilbert a $\mathbb{R}^n$ con el producto punto clásico, escriba una función en **R** que reciba una base de un subespacio U de $\mathbb{R}^n$ en una lista de listas, un vector de $\mathbb{R}^n$ y retorne en una lista la mejor aproximación a ese vector en U.

14. Repita el ejercicio anterior usando los espacios y el producto interno del ejemplo 7. ¿Será posible hacer una función que reciba también como parámetro el producto interno como una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y genere la mejor aproximación usando este producto interno?

15. Pruebe que la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ tiene un punto fijo único en $[0, 7]$.

16. Sea $f : X \to X$ una aplicación. Denotamos por F_f el conjunto de puntos fijos de la aplicación f. Pruebe las siguientes propiedades:

   (a) Sean $f, g : X \to X$ aplicaciones tales que $f \circ g = g \circ f$ entonces se tiene que:
   $$f(F_g) \subset F_g,$$
   $$g(F_f) \subset F_f.$$

   (b) Sean $f, g : X \to X$ aplicaciones, si $F_g = \{x^*\}$ y $f \circ g = g \circ f$ entonces $F_f \neq \emptyset$.

   (c) Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación. Si existe $n \in \mathbb{R}$ tal que $F_{f^n} = \{x^*\}$ entonces $F_f = \{x^*\}$.

   (d) Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación. Si $F_f \neq \emptyset$ entonces $F_{f^n} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

→ no es claro

Teorema 2 En un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes.

Basta con mostrar que cualquier norma $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$, pues, por transitividad, eso implicaría la equivalencia entre cualesquiera dos normas

Tome $x \in X$ (X tiene dimensión n), con base $(b_1, b_2, \dots, b_n)$

$\Rightarrow X = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$, donde $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $\forall k \in [1,n]$ y son únicos

$$\|x\| = \|\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n\| \leq |\alpha_1| \cdot \|b_1\| + \dots + |\alpha_n| \|b_n\|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \|b_i\|$$

Defina $C := \max_{1 \leq i \leq n} \|b_i\|$ y vea que $\|X\| \leq C \cdot \|x\|_1$

Ahora faltaría mostrar que $c\|X\|_1 \leq \|X\|$

- Hay que mostrar que $\|X\|$ es continua
- Tomamos el compacto $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$

$\Rightarrow \|X\|$ alcanza un mínimo en S (lo llamamos "c")

$$\|X\| = \|x\|_1 \cdot \left\| \frac{X}{\|x_1\|} \right\| \geq c\|X\|_1$$

$\Rightarrow \|X\| > c\|X\|_1$

Teorema 5 Sea X un espacio vectorial complejo (o real). Entonces la función:

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$$

define una norma en X, es decir un espacio pre–Hilbert es siempre un espacio normado.

Condición 1:

Dado que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno, se sabe que $\langle x,x \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$

Condición 2: Trivial

Condición 3:

$$\|\alpha x\| = \langle \alpha x, \alpha x \rangle^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|x\|$$

Condición 4:

$$\|X+Y\| = \langle x+y, x+y \rangle^{\frac{1}{2}} = (\langle x,x \rangle + 2\,\mathrm{Re}(\langle x,y \rangle) + \langle y,y \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

$\downarrow \leq$

Cauchy Schwarz $\leq (\|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= ((\|x\| + \|y\|)^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|x\| + \|y\|$$

Teorema 14 Sea U un subespacio vectorial de un espacio de pre–Hilbert X. Un elemento v es la mejor aproximación a $w \in X$ con respecto a U si y solo si: $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$

$$\langle w - v, u \rangle = 0 \tag{7}$$

para todo $u \in U$. Es decir, si y solamente si $w - v \perp U$. Además para cada $w \in X$ existe a lo más una única mejor aproximación con respecto a U.

($\Rightarrow$) Sea $r := w - v$ para cualquier $u \in U$ y todo $t \in \mathbb{R}$

Note que $v + tu \in U$

Como v es la mejor aproximación $\Rightarrow \|w - (v+tu)\|^2 \geq \|w - v\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \|r - tu\| = \|r\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle r, tu\rangle + \|tu\|^2 = \|r\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle r, u\rangle + t^2\|u\|^2 \geq \|r\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -2t\,\mathrm{Re}\langle r, u\rangle + t^2\|u\|^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

La única forma que esto ocurra $\forall t \in \mathbb{R}$ es que $\langle r, u\rangle = 0$

$\therefore \langle w - v, u\rangle = 0$

($\Leftarrow$) Sea $r := w - v$ y tome cualquier $u \in U$.

$v - u \in U \wedge \langle w - v, u\rangle = 0 \Rightarrow \|w - u\|^2 = \|(w-v) + (v-u)\|^2 = \|r\|^2 + \|v - u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\overset{0}{\cancel{\langle r, v-u\rangle}} = \|r\|^2 + \|v-u\|^2 \geq \|r\|^2$

$\Rightarrow \|w - u\| \geq \|r\| = \|w - v\| \quad \forall u \in U$

$\therefore$ v es la mejor aproximación de w en U

Unicidad:

Si $v, v' \in U$ fuesen dos mejores aproximaciones, por lo ya probado entonces $\langle w - v, u\rangle = \langle w - v', u\rangle = 0 \quad \forall u \in U$

$\Rightarrow \|w - v'\|^2 = \|w - v\|^2 + \|v' - v\|^2 \wedge \|w - v\|^2 = \|w - v'\|^2 + \|v - v'\|^2$

Esto implica que $\|v' - v\|^2 = 0 \Rightarrow v' = v$ //

Teorema 16
- Sea U un subespacio vectorial completo de un espacio pre–Hilbert X. Entonces para cada elemento $w \in X$ existe una única mejor aproximación con respecto a U. Ya está probado
- El operador $P : X \to U$ que le asigna a $w \in X$ su mejor aproximación es un operador lineal acotado con las siguientes propiedades:

$$P^2 = P \quad \text{y} \quad \|P\| = 1. \;= \sup(A)$$

- Este operador se conoce como la proyección ortogonal de X sobre U.

∘ Linealidad de P:

Sean $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

Defina $r_x := x - P(x) \in U^\perp$ y $r_y := y - P(y) \in U^\perp$

$\Rightarrow x = P(x) + r_x \wedge y = P(y) + r_y$

Entonces: $\alpha x + \beta y = (\alpha P(x) + \beta P(y)) + (\alpha r_x + \beta r_y)$
$\in U \qquad\qquad \in U^{\perp}$

Unicidad de la descomposición?

- $P^2 = P$

$u \in U \Rightarrow \langle u - P(u), u \rangle = 0$ por definición $(u - P(u) \in U^{\perp})$, pero también $u, P(u) \in U \Rightarrow u - P(u) \in U$

$\Rightarrow u - P(u) \in (U \cap U^{\perp}) \Rightarrow u - P(u) = 0 \Rightarrow P(u) = u$

$w \in X \Rightarrow P(w) \in U$

$\Rightarrow P(P(w)) = P(w) \quad \forall w \in X$

- $\|P\| = 1$

$w = \underbrace{P(w)}_{\in U} + \underbrace{w - P(w)}_{\in U^{\perp}}$

Por ortogonalidad y pitágoras:

$\|w\|^2 = \|P(w)\|^2 + \|w - P(w)\|^2 \Rightarrow \|P(w)\| \le \|w\| \Rightarrow \|P\| \le 1$

$u \in U \wedge \|u\| = 1 \Rightarrow P(u) = u \Rightarrow \|P(u)\| = \|u\| = 1$?

Ejemplo 3 El espacio vectorial $C[a,b]$ (funciones continuas) provisto con la norma:

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

es un espacio de Banach.

Prueba (Ejercicio) ■

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$.

Dado que $\{x_n\}$ es de Cauchy, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_n\|_\infty < \varepsilon \quad \forall m, n \ge n_0$

$\Rightarrow \sup_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \quad \forall m, n \ge n_0$

$\Rightarrow |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \quad \forall m, n \ge n_0, \ t \in [a,b]$

Para cada $t \in [a,b]$, sea $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Dado que $\mathbb{R}$ es completo, se obtiene que $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$

$x(t) \in \mathbb{R}, \ \forall t \in [a,b]$

Por tanto, x es una función de $[a,b]$ a $\mathbb{R}$.

HQM que $x \in C[a,b]$

Sea $t_0 \in [a,b]$.

Note que $|x(t)-x(t_0)| = |x(t) - x_{n_0}(t) + x_{n_0}(t) - x_{n_0}(t_0) + x_{n_0}(t_0) - x(t_0)|$

$$\leq |x(t) - x_{n_0}(t)| + |x_{n_0}(t) - x_{n_0}(t_0)| + |x_{n_0}(t_0) - x(t_0)| \quad \forall t \in [a,b]$$

Tomando límite cuando $m \to +\infty$ en $|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \quad \forall m,n \geq n_0,\ t \in [a,b]$

Entonces se tiene $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0,\ t \in [a,b]$

$\therefore |x_{n_0}(t) - x(t)| < \varepsilon,\ t \in [a,b]$

Dado que $x_{n_0} \in C[a,b] \Rightarrow x_{n_0}$ es continua en t_0

Entonces $\exists\ \delta > 0$ tq $|x_{n_0}(t) - x_{n_0}(t_0)| < \varepsilon,\ \forall |t-t_0| < \delta,\ t \in [a,b]$

Para $t \in [a,b]$ con $|t - t_0| < \delta$ se obtiene de $|x(t) - x(t_0)|$

$$\leq |x(t) - x_{n_0}(t)| + |x_{n_0}(t) - x_{n_0}(t_0)| + |x_{n_0}(t_0) - x(t_0)| \quad \forall t \in [a,b]$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \quad t, t_0 \in [a,b]$$

$\therefore x \in C[a,b]$

se obtiene que $\sup_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow \|x_n - x\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$\therefore x_n \to x \in C[a,b]$

$\therefore (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ es de Banach

(a) Sean $f, g : X \to X$ aplicaciones tales que $f \circ g = g \circ f$ entonces se tiene que:

$$f(F_g) \subset F_g,$$

$$g(F_f) \subset F_f.$$

Tome $x_i \in F_g$.

$\Rightarrow g(x_i) = x_i \Rightarrow f(g(x_i)) = f(x_i) \Leftrightarrow g(f(x_i)) = f(x_i) \Rightarrow f(F_g) \subset F_g$

La misma lógica se puede emplear para mostrar que $g(F_f) \subset F_f$

(b) Sean $f, g : X \to X$ aplicaciones, si $F_g = \{x^*\}$ y $f \circ g = g \circ f$ entonces $F_f \neq \emptyset$.

$F_g = \{x^*\} \Rightarrow g(x^*) = x^* \Rightarrow f(g(x^*)) = f(x^*) \Leftrightarrow g(f(x^*)) = f(x^*)$

El único punto fijo de g es x^* implica que $f(x^*) = x^*$ necesariamente $\Rightarrow \{x^*\} \subseteq F_f \Rightarrow F_f \neq \emptyset$

(c) Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación. Si existe $n \in \mathbb{R}$ tal que $F_{f^n} = \{x^*\}$ entonces $F_f = \{x^*\}$.

$f^n(x^*) = x^* \Rightarrow f(f^n(x^*)) = f(x^*) \Leftrightarrow f^n(f(x^*)) = f(x^*)$

$\Rightarrow f(x^*) = x^* \Rightarrow \{x^*\} \subseteq F_f$

Para mostrar unicidad, asuma que $\exists z \in F_f : z \neq x^*$

$\Rightarrow f(z) = z \Rightarrow f(f(z)) = f(z) = z \Rightarrow f(f(f(z))) = f(f(z)) = f(z) = z \overset{(\ldots)}{\Rightarrow} f^n(z) = z$

$\Rightarrow z \in F_{f^n} \Rightarrow z = x^* \Rightarrow \Leftarrow$

(d) Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación. Si $F_f \neq \emptyset$ entonces $F_{f^n} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$F_f \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in X : f(x) = x$

Caso base: $n = 1$ (Trivial)

Paso inductivo: Asuma que $F_{f^n} \neq \emptyset$. HQM que $F_{f^{n+1}} \neq \emptyset$

$F_{f^n} \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in X : f^n(x) = x$

$\Rightarrow f(f^n(x)) = f(x) = x$

$\Rightarrow f^{n+1}(x) = x \Rightarrow x \in F_{f^{n+1}} \Rightarrow F_{f^{n+1}} \neq \emptyset$

(e) Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación sobreyectiva, supóngase que $f_d^{-1} : X \to X$ es tal que $f \circ f_d^{-1} = I_X$ y $F_{f_d^{-1}} \neq \emptyset$ entonces $F_f \neq \emptyset$.

(f) Sea A un conjunto con un número impar de elementos y $f : A \to A$ tal que $f^2(x) = x$ para todo $x \in A$, se tiene entonces que $F_f \neq \emptyset$.

(f) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f continua y acotada entonces $F_f \neq \emptyset$.

(g) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f continua y periódica entonces $F_f \neq \emptyset$.

Entregables: Debe entregar un documento autreproducible HTML con todos los códigos y salidas, incluya pruebas de ejecución de las funciones programadas. No olvide poner un título para cada pregunta. Las demostraciones las puede entregar en papel a mano.

(e) Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \to X$ aplicación sobreyectiva, supóngase que $f_d^{-1} : X \to X$ es tal que $f \circ f_d^{-1} = I_X$ y $F_{f_d^{-1}} \neq \emptyset$ entonces $F_f \neq \emptyset$.

$F_{f_d^{-1}} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \hat{x} \in X : f_d^{-1}(\hat{x}) = \hat{x}$

$f \circ f_d^{-1} = I_x \Rightarrow f(f_d^{-1}(x)) = x \Rightarrow \underbrace{f(f_d^{-1}(\hat{x}))}_{\hat{x}} = f(\hat{x}) \Rightarrow \hat{x} \in F_f \Rightarrow F_f \neq \emptyset$

(f) Sea A un conjunto con un número impar de elementos y $f : A \to A$ tal que $f^2(x) = x$ para todo $x \in A$, se tiene entonces que $F_f \neq \emptyset$.

Se tiene que $f^2(x) = x \quad \forall x \in A$

Tome $a \in A$

Caso 1: $f(a) = a$: Esto implica que a es punto fijo de $f \Rightarrow F_f \neq \emptyset$

Caso 2: $f(a) \neq a$

$$\begin{aligned} f(f(a)) = a &\Rightarrow f(f(f(a))) = f(a) \\ &\Rightarrow f^4(a) = a \\ &\Rightarrow f^3(a) = f(a) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Esto implica que $\forall a \in A$ habría un $b \in A$ tal que $f(a) = b$ y $f(b) = a$

Esto a su vez implicaría que A tendría un número par de elementos, pues cada uno tendría una pareja

Sin embargo, A es impar $\Rightarrow\Leftarrow$

(f) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f continua y acotada entonces $F_f \neq \emptyset$.

$\exists k \in \mathbb{N} : |f(x)| \leq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Sea $g(x) := f(x) - x \Rightarrow g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

Tome $M > k$. Entonces

- $g(-M) = f(-M) + M \geq -k + M > 0$
- $g(M) = f(M) - M \leq k - M < 0$

Por el teorema de valor intermedio, existe $x^* \in [-M, M]$ tal que $g(x^*) = 0 \Rightarrow f(x^*) - x^* = 0 \Rightarrow f(x^*) = x^* \Rightarrow F_f \neq \emptyset$

(g) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f continua y periódica entonces $F_f \neq \emptyset$.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $T > 0$ un periodo : $f(x+T) = f(x)$

Defina $g(x) := f(x) - x \Rightarrow g$ es continua

Por periodicidad: $g(x+T) = f(x+T) - x - T = f(x) - x - T = g(x) - T$

Tome $x_0 \in \mathbb{R}$. Por lo anterior, $g(x_0 + kT) = g(x_0) - kT \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Tome $m, n \in \mathbb{Z}$ tq $m < n$ y $g(x_0) - mT > 0$ y $g(x_0) - nT < 0$

$\Rightarrow g(x_0 + mT) > 0$ y $g(x_0 + nT) < 0$

Por el Teorema de Valor Intermedio $\exists x^* \in [x_0 + mT, x_0 + nT]$ tq $g(x^*) = 0 \Rightarrow f(x^*) = x^* \Rightarrow F_f \neq \emptyset$