MA0501 – Tarea 3

Diego Alberto Vega Víquez - C38367 José Carlos Quintero Cedeño - C26152
Gabriel Valverde Guzmán - C38060

2025-09-14

Tabla de contenidos

Ejercicio 1

Instrucción del ejercicio 1

Complete las demostraciones que quedaron pendientes en la clase.

Solución

Ejercicio 2

Instrucción del ejercicio 2

Implemente en R los algoritmos de interpolación polinómica vistos en clase.

Los métodos que se deben implementar son:

a) Interpolar $f(x)$ usando el polinomio de Lagrange con el algoritmo de Neville.
b) Interpolar $f(x)$ usando el polinomio de Lagrange con el algoritmo de diferencias divididas de Newton.
c) Interpolar $f(x)$ usando el polinomio de Hermite con el algoritmo de diferencias divididas de Newton.
d) Interpolar $f(x)$ usando el "Splines" cúbicos naturales y sujetos.

Luego en general programe una función que permita graficar el polinomio de interpolación y la función correspondiente (si la hay).

Solución

Ejercicio 3

Instrucción del ejercicio 3

Para el polinomio de Bernstein $B_n(x)$ hacer lo siguiente:

a) Demostrar que para $k \leq n$ se tiene

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k}.$$

b) Pruebe que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

c) Use (b) y (c) para probar que para $f(x) = x^2$

$$B_n(x) = \binom{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x.$$

Solución

Ejercicio 4

Instrucción del ejercicio 4

Dada la siguiente tabla de datos para $f(x)$:

x | $f(x)$ |

||| | 0.2 | 0.9798652 | | 0.4 | 0.9177710 | | 0.6 | 0.8080348 | | 0.8 | 0.6386093 | | 1.0 | 0.3843735 |

Aproxime $f(0.5)$ usando el procedimiento **Neville**.

Solución

Ejercicio 5

Instrucción del ejercicio 5

a) Use el algoritmo de Neville para aproximar $f(1.03)$ con $P_{0,1,2}$ para la función

$$f(x) = 3xe^x - e^{2x}$$

usando $x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$ y $x_2 = 1.07$.

b) Suponga que la aproximación en (a) no es suficientemente exacta. Calcule $P_{0,1,2,3}$ donde $x_3 = 1.04$.

c) Compare el error real en (a) y (b) con la cota del error teórica según los teoremas vistos en clase.

Solución

Ejercicio 6

ℹ Instrucción del ejercicio 6

Repita el ejercicio anterior usando el polinomio de interpolación de Hermite, compare resultados.

Solución

Ejercicio 7

ℹ Instrucción del ejercicio 7

Use el algoritmo de Diferencias Divididas para construir el polinomio interpolante de grado 4 según la siguiente tabla:
x | $f(x)$ |
||| | 0.0 | -7.00000 | | 0.1 | -5.89483 | | 0.3 | -5.65014 | | 0.6 | -5.17788 | | 1.0 | -4.28172 |
Grafique este polinomio.

Solución

Ejercicio 8

ℹ Instrucción del ejercicio 8

Use el algoritmo de Hermite para construir el polinomio interpolante de Hermite dada la siguiente tabla:
x | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|||| | 0.2 | 0.9798652 | 0.20271 | | 0.4 | 0.9177710 | 0.42279 | | 0.6 | 0.8080348 | 0.68414 | | 0.8 | 0.6386093 | 1.02964 | | 1.0 | 0.3843735 | 1.55741 |
Grafique este polinomio.

Solución

Ejercicio 9

> **i** Instrucción del ejercicio 9
>
> Use el algoritmo de Diferencias Divididas para calcular el polinomio de interpolación de Lagrange $p(x)$ de cuarto grado para:
>
> $$f(x) = x^3 \sin(x)$$
>
> con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.
> Grafique en un mismo plano $f(x)$ y $p(x)$ y luego imprima.

Solución

Ejercicio 10

> **i** Instrucción del ejercicio 10
>
> Probar que los polinomios $L_k(x)$ vistos en clase se pueden expresar de la forma:
>
> $$L_k(x) = \frac{\psi(x)}{(x - x_k)\psi'(x_k)}$$
>
> donde:
>
> $$\psi(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$
>
> y que por lo tanto el polinomio interpolante de Lagrange se puede expresar como:
>
> $$p(x) = \psi(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x - x_k)\psi'(x_k)}.$$

Solución

Ejercicio 11

> **i** Instrucción del ejercicio 11
>
> Demostrar que si $f(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a n, entonces el polinomio de grado menor o igual a n que interpola $f(x)$ en $x_0, x_1, \dots, x_n$ es el mismo $f(x)$.

Solución

Ejercicio 12

Instrucción del ejercicio 12

Usar el ejercicio anterior para probar que:

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$$

Solución

Ejercicio 13

Instrucción del ejercicio 13

Para las siguientes funciones:

- $f(x) = 3x^2 \ln(x) + 2x$ con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2.5$ y $x_4 = 3$.
- $f(x) = x^2 \sin(x) - 3\cos(x)$ con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.
- $f(x) = x\cos(x) - 2x^2 + 3x - 1$ con nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.

a) Encuentre el polinomio de interpolación de Lagrange $P^{\star}(x)$ en los nodos indicados, grafique $f(x)$ y $P^{\star}(x)$ en el mismo plano.

b) Encuentre el polinomio de interpolación usando Splines cúbicos $P^{\star\star}(x)$ en los nodos indicados, grafique $f(x)$ y $P^{\star\star}(x)$ en el mismo plano, luego imprima.

c) Encuentre el polinomio de interpolación de Hermite $P^{\star\star\star}(x)$ en los nodos indicados, grafique $f(x)$ y $P^{\star\star\star}(x)$ en el mismo plano.

d) Grafique $f(x)$, $P^{\star}(x)$, $P^{\star\star}(x)$ y $P^{\star\star\star}(x)$ en el mismo plano. ¿Qué se puede concluir?

Solución

Ejercicio 14

Instrucción del ejercicio 14

¿Existen a, b, c, d y e tal que la función:

$$S(x) = \begin{cases} ax^3 + x^2 + cx, & -1 \leq x \leq 0, \\ bx^3 + x^2 + dx, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

sea el spline cúbico natural que coincide con la función $f(x) = |x|$ en los nodos $-1, 0, 1$?

Solución

Ejercicio 15

Instrucción del ejercicio 15

Encuentre los valores de a, b, c, d y e tal que la función $S(x)$ es un spline cúbico natural:

$$S(x) = \begin{cases} a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^3 + ex^2 - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Solución

Ejercicio 16

Instrucción del ejercicio 16

Encuentre los valores de a, b, c y d tal que la función $S(x)$ es un spline cúbico y cumple que $\int_0^2 \left[S''(x)\right]^2 dx$ es mínimo (esta condición sustituye a la condición para ser spline natural o sujeto):

$$S(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Solución

Ejercicio 17

Instrucción del ejercicio 17

El objetivo de este ejercicio es estudiar e implementar un algoritmo para **Aproximación discreta por mínimos cuadrados**. Para esto:

a) El problema en general es aproximar una tabla de datos $\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ por un polinomio de grado $n < m - 1$ denotado por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

La idea es encontrar constantes $\{a_k\}_{k=0}^n$ tal que se minimice el error:

$$E = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - P_n(x_i)\right)^2.$$

Pruebe que este mínimo se alcanza en la solución del sistema de **ecuaciones normales** (n+1)×(n+1) para las incógnitas $\{a_k\}_{k=0}^n$ dado por:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

b) Dada una tabla de datos para f, escriba una función en **R** que permita generar el sistema de ecuaciones normales del inciso (a).

c) Luego escriba una función en **R** que encuentre los coeficientes del polinomio de mínimos cuadrados y luego lo grafique.

d) Construir la **aproximación de mínimos cuadrados de grado 3** para la siguiente tabla y **construir el gráfico**.

x_i	y_i
4.0	102.56
4.2	113.18
4.5	130.11
4.7	142.05
5.1	167.53
5.5	195.14
5.9	224.87
6.3	256.73
6.8	299.50
7.1	326.72

Solución

Ejercicio 18

Instrucción del ejercicio 18

El objetivo de este ejercicio es **generalizar la aproximación discreta por mínimos cuadrados**.

Dada una función $f \in C[a,b]$, se requiere un polinomio $\tilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de manera tal que las constantes $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ minimicen el error:

$$E = \int_a^b \left(f(x) - \tilde{P}_n(x)\right)^2 dx.$$

Pruebe que este mínimo se alcanza en la solución del sistema de $(n+1)$ **ecuaciones normales** y $(n+1)$ incógnitas $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ dado por:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k}\, dx \;=\; \int_a^b x^j f(x)\, dx, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

a) Dada una función f escriba una función en **R** que permita **generar el sistema de ecuaciones (2)**.

b) Luego escriba una función en **R** que **encuentre los coeficientes** del polinomio $\tilde{P}_n(x)$ y luego lo grafique.

c) Encuentre la **aproximación polinómica** $\tilde{P}_n(x)$ de grado 2, 4 y 6 para $f(x) = \cos(\pi x)$ en el intervalo $[-1, 1]$. Además, **construya los gráficos**.

Solución

Ejercicio 19

Instrucción del ejercicio 19

a) Demuestre que el **Polinomio de Hermite** visto en clase $H_{2n+1}(x)$ es **único**.

Sugerencia: Suponga que existe otro polinomio $P(x)$ que cumple las condiciones de interpolación de Hermite y considere $D = H_{2n+1}(x) - P(x)$ y D' en $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

b) Demuestre que el **error absoluto** en este caso está dado por:

$$\left|f(x) - H_{2n+1}(x)\right| \;=\; \left|\frac{(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)\right|, \quad \text{con } \xi \in (a,b).$$

Sugerencia: Use el mismo método que usamos para demostrar la fórmula del error absoluto en el caso de Lagrange, pero con:

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) \; - \; \frac{(t-x_0)^2 \cdots (t-x_n)^2}{(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2} \Big[f(x) - H_{2n+1}(x) \Big].$$

Solución