Pregunta 1

Consideraciones iniciales

Se tiene tiene que el Banco Credit Solutions (BCS) ofrece 100 millones de colones con las siguientes condiciones:

- Denotaremos $i^{(2)}$ a la tasa de interés nominal convertible semestralmente. Para este caso $i^{(2)} = 14\,\%$,
- El pago de los intereses se debe realizar al final de cada semestre. Esto quiere decir que se trabajará con anualidades inmediatas con $i = i^{(2)}/2$. El interés efectivo semestral lo denotaremos i.
- La forma de liquidación del crédito corresponde a *one lump-sum payment*. Es decir que se debe devolver el monto del crédito al final de los cinco años.
- Se va a utilizar un fondo de amortización (sinking fund) en el que realizaría depósitos al final de cada trimestre por los 5 años con una tasa de interés anual efectiva de 7.5 %.

Dado que se tiene la tasa de interés anual efectiva de 7.5 % para el fondo de amortización y los depósitos al mismo fondo se realizarán trimestralmente, conviene saber la tasa de interés efectiva que se acumula cada trimestre, esta corresponde a i_{trim} la cual se calcula de la siguiente forma:

$$(1 + i_{trim})^4 = (1 + 7{,}5\,\%) \implies i_{trim} = \sqrt[4]{1,075} - 1 \tag{1}$$

En la presente sección se entiende

- $K \cdot S_{\overline{n|}\,i}$ Como el valor futuro del pago de K unidades monetarias al final de n periodos a una tasa de interés i .
- $K \cdot \left(\dfrac{S_{\overline{n|}\,i}}{S_{\overline{m|}\,i}} \right)$ Como el valor futuro del pago de K unidades monetarias con m periodos de conversión del interés en un periodo de pago. n sería el plazo de la anualidad medido en periodos de conversión del interés. Finalmente i corresponde la tasa de interés por periodo de conversión del interés.
- X como la cantidad de la que debe disponer la empresa ABC por trimestre para cubrir los gastos del crédito otorgado por BCS.

Desarrollo

La siguiente ecuación permite calcular el valor de X, que representa la cantidad (en millones de colones) que la empresa ABC debe disponer por trimestre:

$$X \cdot S_{\overline{20|}\,i=i_{trim}} - 7 \cdot \left(\frac{S_{\overline{20|}\,i_{trim}}}{S_{\overline{2|}\,i_{trim}}} \right) = 100 \tag{2}$$

Esta ecuación expresa que el valor futuro de los pagos trimestrales de X millones al final de los 20 trimestres (5 años) menos el valor futuro de los pagos de 7 millones, realizados al final de cada dos trimestres (semestralmente), debe ser igual a 100 millones. Este último valor corresponde al monto requerido para liquidar un crédito mediante un pago único final (*one lump-sum payment*) al término de los 5 años.

Desglose de la ecuación:

- Primera parte:

$$X \cdot S_{\overline{20|}\, i=i_{trim}}$$

Representa los abonos que la empresa realiza trimestralmente a la cuenta de amortización. Aquí, $S_{\overline{20|}\, i=i_{trim}}$ el factor de acumulación (valor futuro) para 20 trimestres, capitalizado trimestralmente al tipo de interés efectivo trimestral.

- Segunda parte:

$$7 \cdot \left(\frac{S_{\overline{20|}\, i_{trim}}}{S_{\overline{2|}\, i_{trim}}} \right)$$

Representa los pagos de 7 millones realizados al final de cada dos trimestres (semestralmente). Aquí, se utiliza el cociente entre los factores de acumulación: $S_{\overline{20|}\, i_{trim}}$ y $S_{\overline{2|}\, i_{trim}}$ para 2 trimestres. Este cociente ajusta los valores al horizonte de 20 trimestres.

Interpretación de la ecuación:

El lado izquierdo de la ecuación considera las entradas y salidas de la cuenta de amortización:

- Entradas: Los pagos trimestrales de X, cuyo valor futuro se acumula al final del período de 20 trimestres.
- Salidas: Los pagos de 7 millones realizados semestralmente, ajustados para el mismo horizonte temporal (20 trimestres).

El lado derecho de la ecuación, igualado a 100, corresponde al monto total requerido al final del período para liquidar la deuda del crédito inicial.

Solución de la ecuación:

Para esta parte es importante recordar la definición del factor de acumulación de una anualidad inmediata de n periodos a una tasa efectiva i por periodo.

$$S_{\overline{n|}\, i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{3}$$

A hora bien aplicando explícitamente (1) y (3) a la ecuación (2), la ecuación queda de la siguiente forma:

$$X \cdot \left(\frac{(1 + (\sqrt[4]{1,075} - 1))^{20} - 1}{(\sqrt[4]{1,075} - 1)} \right) - 7 \cdot \left(\frac{\left[(1 + (\sqrt[4]{1,075} - 1))^{20} - 1\right] / (\sqrt[4]{1,075} - 1)}{\left[(1 + (\sqrt[4]{1,075} - 1))^{2} - 1\right] / (\sqrt[4]{1,075} - 1)} \right) = 100$$

Haciendo un poco de cálculos es fácil ver que

$$X = \frac{100 \left(\sqrt[4]{1,075} - 1\right)}{\left(\sqrt[4]{1,075}\right)^{20} - 1} + \frac{7 \left(\sqrt[4]{1,075} - 1\right)}{\left(\sqrt[4]{1,075}\right)^{2} - 1} \approx 7,65646270$$

De esta forma se puede concluir que la cuota mensual que debe destinarse cada trimestre corresponde a ₡7,656,462.70.

Adicional

Este cálculo también podría haberse resuelto utilizando ecuaciones en diferencias. En particular, sería necesario resolver el caso general de la siguiente ecuación:

$$S_n = (1 + i_{trim}) \cdot S_{n-1} + \left(X - \tfrac{1+(-1)^n}{2} \cdot 7\right)$$

Con la condición inicial $S_0 = 0$. En esta ecuación, S_n representa el saldo de la cuenta de amortización al final del n-ésimo trimestre. Una vez resuelta la ecuación y obtenido un criterio para S_n que dependa únicamente de n, basta con evaluar la solución en $n = 20$ e igualarla a 100.

La solución general a esta ecuación es:

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \left(X - \frac{1+(-1)^r}{2} \cdot 7\right)(1 + i_{trim})^{n-r}$$

De esta forma, si consideramos la ecuación (1), planteamos $S_{20} = 100$ y resolvemos para X. Este procedimiento produce el mismo resultado que el obtenido previamente. Este enfoque se menciona porque fue el método utilizado para derivar la ecuación (2).

Tabla de Amortización

La tabla presentada a continuación detalla los flujos financieros de la cuenta de amortización diseñados para liquidar una deuda mediante un pago único al final de un periodo de 20 trimestres. Este instrumento permite visualizar la evolución del saldo en la cuenta, considerando tanto los depósitos trimestrales como los intereses generados para cumplir con las obligaciones intermedias.

Cuadro 1: Tabla de Amortización Trimestral

Fecha	**Periodo**	**Int. Pagado**	**Depósitos**	**Int. Fondo**	**Saldo**	**Amortización**
31/10/2024	Trimestre 0	₡0.00	₡0.00	₡0.00	₡0.00	₡100,000,000.00
31/01/2025	Trimestre 1	₡0.00	₡7,656,462.70	₡0.00	₡7,656,462.70	₡92,343,537.30
01/05/2025	Trimestre 2	₡7,000,000.00	₡656,462.70	₡139,689.11	₡8,452,614.52	₡91,547,385.48
31/07/2025	Trimestre 3	₡0.00	₡7,656,462.70	₡154,214.58	₡16,263,291.80	₡83,736,708.20
31/10/2025	Trimestre 4	₡7,000,000.00	₡656,462.70	₡296,717.27	₡17,216,471.78	₡82,783,528.22
31/01/2026	Trimestre 5	₡0.00	₡7,656,462.70	₡314,107.66	₡25,187,042.14	₡74,812,957.86
01/05/2026	Trimestre 6	₡7,000,000.00	₡656,462.70	₡459,527.54	₡26,303,032.38	₡73,696,967.62
31/07/2026	Trimestre 7	₡0.00	₡7,656,462.70	₡479,888.33	₡34,439,383.42	₡65,560,616.58
31/10/2026	Trimestre 8	₡7,000,000.00	₡656,462.70	₡628,332.81	₡35,724,178.94	₡64,275,821.06
31/01/2027	Trimestre 9	₡0.00	₡7,656,462.70	₡651,773.39	₡44,032,415.04	₡55,967,584.96
01/05/2027	Trimestre 10	₡7,000,000.00	₡656,462.70	₡803,353.85	₡45,492,231.59	₡54,507,768.41
31/07/2027	Trimestre 11	₡0.00	₡7,656,462.70	₡829,987.62	₡53,978,681.92	₡46,021,318.08
31/10/2027	Trimestre 12	₡7,000,000.00	₡656,462.70	₡984,819.52	₡55,619,964.14	₡44,380,035.86
31/01/2028	Trimestre 13	₡0.00	₡7,656,462.70	₡1,014,764.06	₡64,291,190.90	₡35,708,809.10
01/05/2028	Trimestre 14	₡7,000,000.00	₡656,462.70	₡1,172,967.13	₡66,120,620.74	₡33,879,379.26
31/07/2028	Trimestre 15	₡0.00	₡7,656,462.70	₡1,206,344.35	₡74,983,427.80	₡25,016,572.20
31/10/2028	Trimestre 16	₡7,000,000.00	₡656,462.70	₡1,368,042.73	₡77,007,933.23	₡22,992,066.77
31/01/2029	Trimestre 17	₡0.00	₡7,656,462.70	₡1,404,979.02	₡86,069,374.96	₡13,930,625.04
01/05/2029	Trimestre 18	₡7,000,000.00	₡656,462.70	₡1,570,301.41	₡88,296,139.07	₡11,703,860.93
31/07/2029	Trimestre 19	₡0.00	₡7,656,462.70	₡1,610,927.84	₡97,563,529.62	₡2,436,470.38
31/10/2029	Trimestre 20	₡107,000,000.00	₡656,462.70	₡1,780,007.68	₡100,000,000.00	₡0.00

De la anterior tabla es importante mencionar que los meses impares se paga la totalidad dispuesta para ese trimestre $X = 7,656,462{,}70$ y los impares se paga X menos los intereses que se le deben pagar a BCS. Además cabe destacar que se asume que los depósitos se empiezan a realizar a finales de enero del siguiente año (31/01/2025). Este esquema permite a la empresa ABC garantizar que el fondo acumulado sea suficiente para realizar el pago único (*one lump-sum payment*) al final del plazo. Además, destaca la eficiencia del mecanismo de capitalización de intereses, que contribuye significativamente al crecimiento del saldo acumulado.