Optimización Dinámica en Macroeconomía

Del Hamiltoniano a las Aplicaciones Reales

Diego Omar Soto Rubio

UABC Tijuana

22 de noviembre de 2025

Estructura de la Presentación

1. El Problema del Planificador Central

El objetivo es maximizar la utilidad intertemporal de la sociedad en un horizonte infinito.

Función Objetivo (A Maximizar)

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c(t)) dt$$

Sujeto a la restricción de recursos:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n + \delta)k(t)$$

Donde: c: Consumo (Control), k: Capital (Estado), ρ: Impaciencia, δ: Depreciación.

2. Construcción del Hamiltoniano

Para resolver la optimización dinámica utilizamos el **Hamiltoniano de Valor Corriente**.

El Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = u(c) + \lambda \left[f(k) - c - (n+\delta)k \right]$$

- $\lambda(t)$: variable de co-estado.
- Es el *precio sombra* del capital.

3. Condiciones de Primer Orden (CPO)

Según el Principio del Máximo de Pontryagin:

1. Condición respecto al control:

$$\lambda = u'(c)$$

3. Condiciones de Primer Orden (CPO)

Según el Principio del Máximo de Pontryagin:

1. Condición respecto al control:

$$\lambda = u'(c)$$

2. Ecuación del co-estado:

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \lambda[f'(k) - (n + \delta)]$$

3. Condiciones de Primer Orden (CPO)

Según el Principio del Máximo de Pontryagin:

1. Condición respecto al control:

$$\lambda = u'(c)$$

2. Ecuación del co-estado:

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - \lambda[f'(k) - (n + \delta)]$$

3. Condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)k(t) = 0$$

4. Resultado: La Ecuación de Euler

Para utilidad CRRA: $u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$

Ecuación de Euler

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[f'(k) - \delta - \rho - n\right]$$

- Si $f'(k) - \delta > \rho$, el consumo crece.
- Si somos muy impacientes, cae el consumo.

Dinámica de Transición

El sistema dinámico es:

$$\dot{c} = \frac{c}{\theta}[f'(k) - (\delta + n + \rho)] \tag{1}$$

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + \delta)k \tag{2}$$

- Estado estacionario: $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$.
- Senda de estabilidad (saddle path): única trayectoria óptima.

Aplicación 1: Política Fiscal (Impuestos)

Escenario: El gobierno impone un impuesto τ al retorno del capital.

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[(1-\tau)f'(k) - \delta - \rho - n\right]$$

Efecto Matemático

- Menor retorno neto del capital.
- Menor capital estacionario.

Efecto Económico

- Menores incentivos al ahorro.
- PIB per cápita más bajo a largo plazo.

Aplicación 2: Recursos Naturales (Hotelling)

[Imagen ilustrativa: plataforma petrolera]

Escenario: Recurso no renovable con stock $S(t)$.

- El recurso bajo tierra es un activo financiero.
- Si lo dejo bajo tierra, espero que su precio crezca.
- Si lo vendo hoy, obtengo interés r.

Regla de Hotelling

$$\frac{\dot{P}}{P} = r$$

Aplicación 3: Choques Tecnológicos

[Imagen ilustrativa: brazo robótico en manufactura]

$$Y = Af(k)$$

1. Aumento del producto marginal del capital.
2. Mayor atractivo de invertir.
3. **Transición:** el consumo puede ajustarse y el ahorro sube.
4. Nuevo estado estacionario más alto.

Conclusión

La optimización dinámica es central en macroeconomía porque:

1. Modela previsión racional de los agentes.
2. Une transición y estado estacionario.
3. Permite evaluar políticas con efectos en bienestar futuro.

¡Gracias!