Guía Laboratorio 7
Procesamiento Digital de Señales

Camilo Vásquez, Paula Pérez, Alejandro Escobar, Jhon Lopera y Cristian Ríos

2020-1

NOTAS:

- Para la entrega debe enviar un archivo .html y un archivo .ipybn
- Enviar el informe del laboratorio con el siguiente nombre: *Apellido_Nombre.ipynb* y *Apellido_Nombre.html*

1. Transformada Rápida de Fourier para señales discretas

La Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform - FFT) es una herramienta fundamental en el procesamiento digital de señales. La técnica fue propuesta en 1965 por J. W. Cooley y J. W Tukey, quienes abordaron por primera vez el problema de la programación de un algoritmo para el cálculo de series complejas.

Ante todo debe quedar claro que la FFT no es una nueva transformada sino que se trata de un algoritmo para el cálculo de la Transformada Discreta de Fourier (DFT). Su importancia radica en el hecho que elimina una gran parte de los cálculos repetitivos a que está sometida la DFT, por lo tanto se logra un cálculo más rápido. Además, la FFT generalmente permite una mayor precisión en el cálculo de la DFT disminuyendo los errores de redondeo.

La transformada de Fourier para la señal x[n] se define de acuerdo con la siguiente ecuación.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{\frac{-j \cdot 2\pi k \cdot n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \mathbf{U}[k,n] \tag{1}$$

Donde $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N\times K}$ representa una matriz de transformación, que se puede definir con la ecuación 2. Donde N es el número de muestras de la señal, y NFFT es el número de puntos de la transformada de Fourier que se desea calcular (debe ser una potencia de 2).

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[exp\left(\frac{j \cdot 2\pi k \cdot n}{N} \right) \right]_{n\in\{0,N-1\},k\in 0,NFFT} \tag{2}$$

El número de puntos de la transformada de Fourier define la resolución en frecuencia, donde cada índice mapea el contenido de frecuencia de la señal en un rango normalizado entre 0 y 2π rad/seg. Cada índice también mapea la frecuencia de muestreo entre 0 y fs, por lo tanto, para encontrar la equivalencia entre la frecuencia normalizada, y la frecuencia en Hz, se debe multiplicar la frecuencia normalizada por $(fs/2)$. Luego de definir la matriz, se puede redefinir la Transformada de Fourier como una multiplicación de una matriz y un vector (columna).

$$X = \mathbf{U}^{*} \cdot \mathbf{x} \tag{3}$$

La siguiente función construye la matriz $\mathbf{U}$ de transformación.

```
def dftmatrix(N, Nfft):
    #construct DFT matrix
    k= np.arange(Nfft)
    if N is None: N = Nfft
    n = np.arange(N)
    U = np.matrix(np.exp(1j* 2*np.pi/Nfft *k*n[:,None]))
    return U/np.sqrt(Nfft)
```

Para calcular la transformada de Fourier de la señal x[n] se usa la siguiente expresión.

```
X=U.H*x # donde U.H significa el complejo conjugado de la matriz U
```

- Genere la señal de acuerdo al último número de su cédula (C):
  - $|\sin(2\pi * (C + 1) * 10 * t)|$ con fs=500*(C+1) Hz
- Calcule la matriz de transformación U, y calcule y grafique la transformada de Fourier de la señal asignada para al menos 4 distintos valores de $NFFT$ (128, 512, 1024 y 4096). Grafique los resultados usando subplots. ¿Que se puede concluir al respecto?

  Ejemplo con una señal senoidal con una frecuencia de 50 Hz, fs=400 Hz, y NFFT=512.

```
fs=400.0 # frec de muestreo
f=50.0 # frec de la senal
nfft=512 # numero de puntos de la transformada
t = np.arange(0, 0.1, 1/fs) # vector de tiempo
xt=np.sin(2*np.pi*f*t) # senal en el tiempo
xt.shape=(len(xt),1) # Convierto en vector columna para poder multiplicar con la matriz
U=dftmatrix(len(xt), nfft) # calculo la matriz de transformacion
Xf=U.H*xt[:] # calculo la fft
freq=np.hstack((np.arange(0, nfft/2-1), np.arange(-nfft/2, 1)))*fs/nfft # vector de frecuencias ...
    para poder graficar la fft en Hz
# genero graficas
plt.subplot(211)
plt.plot(t, xt)
plt.xlabel('Tiempo (seg)')
plt.subplot(212)
plt.plot(freq, np.abs(Xf))
plt.xlabel('Frecuencia (Hz)')
plt.show()
```

  Los resultados del ejemplo se observa en la figura 1

- Use la siguiente instrucción para calcular la transformada inversa en cada uno de los casos del ítem anterior.

```
inversa=np.fft.ifft(Xf.T) #Xf: Frequency-domain signal
inversa=np.hstack(inversa)
t2 = np.arange(0,len(inversa)/fs, 1/fs) # new time vector
```

- Grafique los resultados usando subplots y comparelos. ¿Puede observar alguna diferencia?, ¿a que se debe esto? Escriba sus conclusiones.

2. Modulación PSK

La modulación por retardos de fase (*Phase-shift keying*, PSK) es una de las modulaciones digitales más utilizadas para transmisión de datos. Consiste en la representación de una trama de bits en señales moduladas en una portadora con frecuencia f_c y diferentes fases. La modulación se obtiene cambiando señales senoidales y cosenoidales en un tiempo preciso. Este tipo de esquemas de modulación es ampliamente usado en redes inalámbricas, tecnologías RFID, y sistemas de Bluetooth.

Una de las formas más simples de modulación PSK es la PSK binaria, o BPSK, la cual usa dos fases, separadas 180°. Las señales para cada una de las dos fases se definen de acuerdo a las siguientes ecuaciones. Donde E_b es la energía de bit, y T_b es el tiempo de transmisión de cada bit.

$$s_0(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}\cos(2\pi f_c t + \pi) = -\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}\cos(2\pi f_c t) \;\; para\, el\, bit\, 0 \tag{4}$$

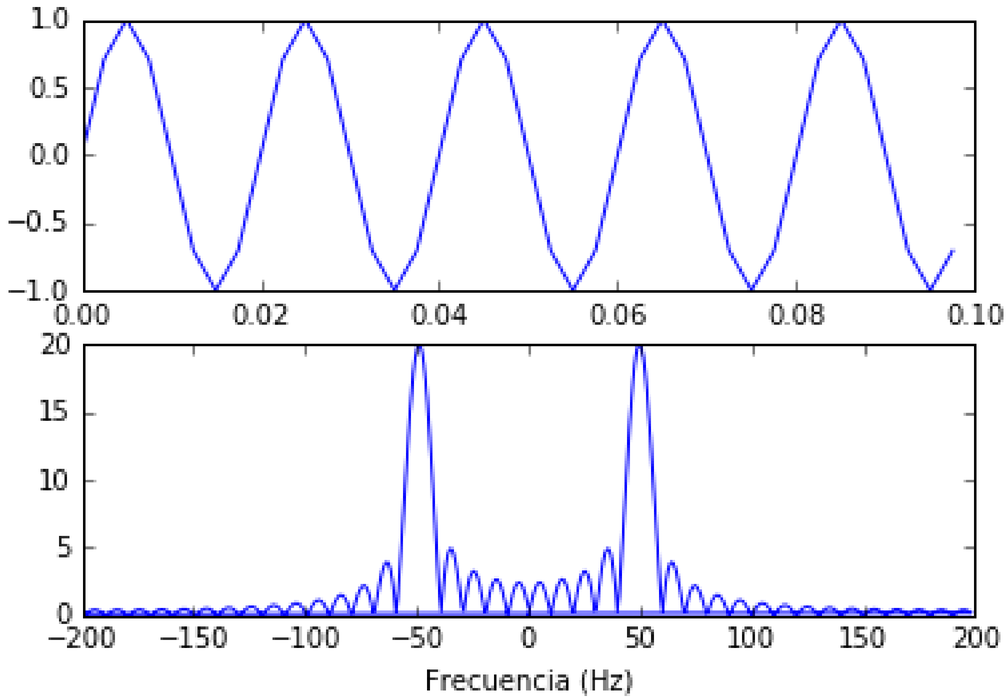

Figura 1: Ejemplo calculo de fft

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) \;\; para\, el\, bit\, 1 \tag{5}$$

- Codifique los dos últimos dígitos de su cédula en binario (4 bits por dígito), y arme una trama de bits para ser transmitida.
- Usando E_b=1, T_b=0.002, f_c=1000 Hz, fs=7000 Hz genere las señales s_0 y s_1 para la transmisión de la trama de bits.
- Calcule y grafique la FFT de amplitud y fase de las señales s_0 y s_1. Cual es la diferencia entre ambas?
- Concatene las señales s_0 y s_1 de acuerdo con la trama a enviar, por ejemplo: si la trama a enviar es '0010', la señal a enviar es [s_0, s_0, s_1, s_0].
- Grafique la señal obtenida en el tiempo. ¿Se puede distinguir cada uno de los bits
- Calcule y grafique la FFT de magnitud y fase de la señal concatenada. ¿Qué se puede apreciar?

3. Conclusiones

Realice conclusiones generales sobre la práctica. Recuerde que las conclusiones son parte fundamental de su evaluación en el laboratorio, tómese el tiempo de pensar las conclusiones.