Tarea: Fila de espera con capacidad infinita y s ¿1

David Alejandro Acuña Orozco

September 2024

Problema

- Hay dos empresas de taxis que dan servicio a una población. Cada empresa es dueña de dos taxis, y se sabe que las dos empresas comparten partes iguales del mercado. Esto se ve porque llegan ocho llamadas por hora a la oficina de cada empresa. El tiempo promedio en el viaje es de 12 minutos.
- Las llamadas llegan siguiendo una distribución de Poisson, y el tiempo de viaje es exponencial.
- Hace poco, un inversionista compró las dos empresas, y le interesa consolidarlas en una sola oficina para dar mejor servicio a los clientes.
- Analice la propuesta del nuevo dueño.
- Calcule $\lambda_{\text{ef}}, P_0, L, W, L_q, W_q$.
- Nota: realice estimaciones para 2 y 4 taxis, especifique ¿por qué debe hacer así?

Caso 1:

Este primer caso ocurre cuando las dos empresas se mantienen separadas. Cada una recibe su cantidad habitual de llamadas y tiene solo dos taxis.

$$\lambda = 8\,\text{c/hora} \quad \mu = 5\,\text{c/hora} \quad s = 2 \quad N = \infty$$

Ya que se trata de un sistema con capacidad infinita (las llamadas siempre pueden seguir ingresando): $\lambda_{\text{ef}} = \lambda = 8\,\text{c/hora}$

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{1}{s - \frac{\lambda}{s\mu}} \right) \right)^{-1} = 0.111111$$

$$L_q = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!\left(s\left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)\right)^2} = 2.84444$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 2.84444 + \frac{8}{5} = 4.44444$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.84444}{8} = 0.35556$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.35556 + \frac{1}{5} = 0.5556$$

Caso 2:

Ocurre cuando las dos empresas se fusionan, obteniendo la suma de ambas cantidades de llamadas, la suma de los vehículos, pero manteniendo la tasa de servicio.

$$\lambda = 16\,\text{c/hora} \quad \mu = 5\,\text{c/hora} \quad s = 4 \quad N = \infty$$

Ya que se trata de un sistema con capacidad infinita (las llamadas siempre pueden seguir ingresando): $\lambda_{\text{ef}} = \lambda = 16\,\text{c/hora}$

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{1}{s - \frac{\lambda}{s\mu}} \right) \right)^{-1} = 0.0273$$

$$L_q = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!\left(s\left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)\right)^2} = 2.38573$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 2.38573 + \frac{16}{5} = 5.58573$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.38573}{16} = 0.1491$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.1491 + \frac{1}{5} = 0.3491$$

Tabla de resultados

	λ_{ef}	P_0	L_q	L	W_q	W
Empresas Separadas	8	0.1111	2.8444	4.4444	0.3556	0.5556
Empresas Fusionadas	16	0.0273	2.3857	5.5857	0.1491	0.3491

Table 1: Comparación de Métricas: Empresas Separadas vs Empresas Fusionadas

Al fusionar las empresas, los clientes tendrán que esperar menos tiempo en la fila para ser atendidos (0.15 comparado con 0.36). Además, las filas serán más cortas (2.38 frente a 2.84*2, considerando la suma de las filas en las empresas individuales). Dado que el factor de utilización del sistema permanece constante, la fusión parece ser la mejor opción, ya que mejora la experiencia del cliente sin afectar la eficiencia en el uso de los recursos.

Problema

En el problema de la sala de emergencia del Hospital General, el ingeniero administrador ha concluido que los casos de emergencia llegan casi de manera aleatoria (*proceso de entrada de Poisson*), por lo que los tiempos entre llegadas tienen una distribución exponencial. También llegó a la conclusión de que el tiempo que necesita un médico para atender a los pacientes sigue aproximadamente una *distribución exponencial*.

Con base en este contexto, eligió el modelo $M/M/s$ para hacer un estudio preliminar de este sistema de colas. Al proyectar los datos disponibles del turno de la tarde al año próximo, estima que los pacientes llegarán a una tasa promedio de uno cada media hora. Un médico requiere un promedio de 20 minutos para atender al paciente.

Las dos alternativas bajo consideración son:

- Continuar con un solo médico durante este turno ($s = 1$).
- Agregar un segundo médico ($s = 2$).

¿Cuál debe elegirse y por qué?

Caso 1:

Este caso se presenta si se decide continuar con un único médico durante el turno.

$$\lambda = 2\,p/\text{hora} \quad \mu = 3\,p/\text{hora} \quad s = 1 \quad N = \infty$$

Se calculan algunas propiedades del sistema para poder compararlo con el caso 2:

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{1}{s - \frac{\lambda}{s\mu}}\right) \right)^{-1} = 0.3333$$

$$L_q = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s! \left(s\left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)\right)^2} = 1.3333$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1.3333 + \frac{2}{3} = 2$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.3333}{2} = 0.66667$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.66667 + \frac{1}{3} = 1$$

$$\rho = \frac{2}{3}$$

Caso 2:

Este caso se presenta si se decide contratar un médico adicional durante el turno.

$$\lambda = 2\,p/\text{hora} \quad \mu = 3\,p/\text{hora} \quad s = 2 \quad N = \infty$$

Se calculan algunas propiedades del sistema para poder compararlo con el caso 1:

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{1}{s - \frac{\lambda}{s\mu}}\right) \right)^{-1} = 0.5$$

$$L_q = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!\left(s\left(1-\frac{\lambda}{s\mu}\right)\right)^2} = 0.08333$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0.08333 + \frac{2}{3} = 0.75$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.08333}{2} = 0.04167$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.04167 + \frac{1}{3} = 0.375$$

$$\rho = \frac{1}{3}$$

Tabla comparativa:

	P_0	L_q	L	W_q	W	ρ
Con 1 doctor	0.3333	1.3333	2	0.6667	1	0.6667
Con 2 doctores	0.5	0.0833	0.75	0.0416	0.375	0.3333

Table 2: Comparación de Métricas: 1 Doctor vs 2 Doctores

Si se contrata un médico adicional, prácticamente no habría filas, pero la utilización del sistema se reduciría a la mitad, lo que significa que el tiempo en el que se paga a los médicos sería utilizado solo a la mitad de lo que era antes. Si se mantiene solo un médico, este estaría atendiendo el 67% del tiempo (sin que ello implique sobrecarga laboral), habría en promedio una persona en la fila y el tiempo de espera sería de aproximadamente 40 minutos.

En el caso de un consultorio para chequeos generales, sugeriría ser más conservador y mantener un solo médico, pero dado que se trata de una sala de emergencias, esperar 40 minutos no es una opción. Por lo tanto, recomiendo contratar al segundo médico para evitar la formación de filas.