



REVISIÓN ARTÍCULO

Analytical solutions for the quantum Brownian motion of a particle during a quantum quench.

Acosta V. Diego A.¹

RESUMEN

Este trabajo describe el movimiento de una partícula cuántica afectada por fuerzas fluctuantes originadas por su interacción con un entorno cuántico. Se modela el sistema como una partícula de masa m confinada en un potencial armónico e interactuando con un reservorio compuesto por un continuo de osciladores armónicos. El análisis se enfoca en el régimen transitorio y parte de la suposición de acoplamiento lineal entre la partícula y el entorno. A través de una cuantización canónica del sistema total, se obtienen soluciones analíticas exactas para las correlaciones cuánticas del movimiento de la partícula. Esto permite caracterizar su energía en el tiempo sin recurrir a aproximaciones perturbativas, observando en particular la conservación energética entre la partícula y el entorno.

Palabras clave: Movimiento browniano cuántico, cuantización canónica, correlaciones cuánticas, ecuaciones con memoria, soluciones analíticas.

1. THE MODEL LAGRANGIAN

Para describir el sistema, consideramos una partícula puntual de masa m confinada en un potencial armónico y acoplada linealmente a un entorno (reservorio) constituido por un continuo de osciladores armónicos etiquetados por su frecuencia $\nu > 0$.

El Lagrangiano total es:

$$L = L_p + L_R + L_{\text{int}}, \quad (1)$$

siendo cada término:

LAGRANGIANO DE LA PARTÍCULA

$$L_p = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2, \quad (2)$$

que describe una partícula en un potencial armónico con frecuencia natural ω_0 .

LAGRANGIANO DEL RESERVORIO

$$L_R = \frac{\mu}{2} \int_0^\infty d\nu \left(\dot{R}^2(t, \nu) - \nu^2 R^2(t, \nu) \right), \quad (3)$$

donde $R(t, \nu)$ es la coordenada del oscilador etiquetado por ν , y μ es una constante de densidad de masa efectiva.

LAGRANGIANO DE INTERACCIÓN

Se impone un acoplamiento lineal y local en el tiempo entre $x(t)$ y $\dot{R}(t, \nu)$:

$$L_{\text{int}} = x(t) \int_0^\infty d\nu \beta(\nu, t) \dot{R}(t, \nu), \quad (4)$$

donde $\beta(\nu, t)$ es un coeficiente de acoplamiento que puede depender del tiempo (caso de quench).

ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a $x(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = \int_0^\infty d\nu \beta(\nu, t) \dot{R}(t, \nu) \quad (6)$$

Y para cada modo $R(t, \nu)$:

$$\mu \ddot{R}(t, \nu) + \mu \nu^2 R(t, \nu) = -\frac{d}{dt} (\beta(\nu, t) x(t)) \quad (7)$$

Estas ecuaciones muestran cómo la partícula actúa sobre el entorno y cómo éste responde, cerrando un sistema dinámico acoplado con memoria.

¹20211107024, dacosta@udistrital.edu.co

2. ENERGY CONSERVATION

La conservación de la energía en este sistema compuesto puede analizarse construyendo el Hamiltoniano total del sistema a partir del Lagrangiano total. Recordando que para sistemas con acoplamiento explícito entre grados de libertad, el Hamiltoniano se define como:

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (8)$$

donde q_i corre sobre todas las coordenadas generalizadas del sistema: $x(t)$ y $R(t, \nu)$.

Calculamos las cantidades necesarias:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (9)$$

$$Q(\nu) = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}(t, \nu)} = \mu \dot{R}(t, \nu) + x(t)\beta(\nu, t) \quad (10)$$

Por tanto, el Hamiltoniano total se obtiene como:

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}p + \int_0^\infty d\nu \dot{R}(t, \nu)Q(\nu) - L \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 + \int_0^\infty d\nu \left[\frac{(Q(\nu) - x\beta)^2}{2\mu} + \frac{\mu\nu^2}{2}R^2(t, \nu) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Desarrollando el cuadrado, el Hamiltoniano se expresa como:

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_e^2}{2}x^2 - \frac{x}{\mu} \int_0^\infty d\nu \beta(\nu, t)Q(\nu) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \left(\frac{Q^2(\nu)}{\mu} + \mu\nu^2 R^2 \right) \end{aligned} \quad (12)$$

donde la frecuencia efectiva es:

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{m\mu} \int_0^\infty d\nu \beta^2(\nu, t) \quad (13)$$

Esta forma muestra explícitamente cómo la energía total se conserva (no depende de t) si las funciones $\beta(\nu, t)$ y las soluciones dinámicas satisfacen las ecuaciones de movimiento.

3. CANONICAL QUANTIZATION

El proceso de cuantización canónica consiste en promover las variables dinámicas y sus conjugados a operadores, e imponer relaciones de conmutación. Consideramos las coordenadas x , $R(t, \nu)$ y sus momentos conjugados p , $Q(\nu)$:

$$[x, p] = i\hbar, \quad (14)$$

$$[R(\nu), Q(\nu')] = i\hbar\delta(\nu - \nu'), \quad (15)$$

mientras que todos los demás conmutadores son nulos. Usualmente se trabaja en unidades naturales con $\hbar = 1$.

A continuación, se define el campo compuesto:

$$\Psi(t, \nu) = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t, \nu) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

cuya dinámica acoplada puede analizarse de forma conjunta.

Se construye un producto interno sesquilineal conservado de la forma:

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \Psi' \rangle &= i \left[m(\Psi_1^* \partial_t \Psi'_1 - \Psi'_1 \partial_t \Psi_1^*) + \right. \\ &\quad \mu \int_0^\infty d\nu (\Psi_2^* \partial_t \Psi'_2 - \Psi'_2 \partial_t \Psi_2^*) \\ &\quad \left. - \int_0^\infty d\nu \beta(\nu, t) (\Psi_1^* \Psi'_2 - \Psi'_1 \Psi_2^*) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Este producto interno es constante en el tiempo si las funciones Ψ y Ψ' satisfacen las ecuaciones de movimiento.

Se realiza la expansión en modos normales del campo total:

$$\Psi = \sum_\omega (a_\omega \Psi_\omega + a_\omega^\dagger \Psi_\omega^*), \quad (18)$$

con operadores bosónicos que satisfacen:

$$[a_\omega, a_{\omega'}^\dagger] = \delta_{\omega, \omega'}. \quad (19)$$

La parte observable $x(t)$ se reconstruye mediante:

$$x(t) = \sum_\omega (a_\omega \Psi_{1, \omega}(t) + a_\omega^\dagger \Psi_{1, \omega}^*(t)), \quad (20)$$

donde $\Psi_{1, \omega}(t)$ es la primera componente del modo Ψ_ω .

Esta formulación permite analizar directamente correlaciones y promedios en el estado del vacío $|0\rangle$, definido por $a_\omega|0\rangle = 0$ para todo ω .

La elección del conjunto de modos normales positivos depende del régimen físico. Para $t < 0$, se escoge el vacío del sistema no interactuante, donde los modos positivos incluyen:

$$\Psi_{\omega_0, 1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0 m}} e^{-i\omega_0 t}, \quad (21)$$

$$\Phi_\omega(t, \nu) = \frac{\delta(\nu - \omega)}{\sqrt{2\mu\omega}} e^{-i\omega t}. \quad (22)$$

A partir de estas funciones, el campo total antes de la interacción se expande como:

$$\Psi = a_{\omega_0} \Psi_{\omega_0} + a_{\omega_0}^* \Psi_{\omega_0}^* + \int_0^\infty d\omega [b_\omega \Phi_\omega + b_\omega^* \Phi_\omega^*]. \quad (23)$$

Entonces, para $x(t)$ antes del acoplamiento se obtiene:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0 m}} (a_{\omega_0} e^{-i\omega_0 t} + a_{\omega_0}^* e^{i\omega_0 t}). \quad (24)$$

Después del quench ($t > 0$), los modos positivos se reescriben como:

$$\Psi_\omega(t) = \int d\omega' [c_{\omega'} \Gamma_{\omega'}(t) + d_{\omega'}^* \Gamma_{\omega'}^*(t)], \quad (25)$$

$$\Phi_\omega(t, \nu) = \int d\omega' [c_{\omega'}^{\text{res}} \Gamma_{\omega'}(t, \nu) + d_{\omega'}^{\text{res}*} \Gamma_{\omega'}^*(t, \nu)], \quad (26)$$

con coeficientes definidos por:

$$c_\omega = (\Psi_{\omega_0}, \Gamma_\omega)|_{t=0^+}, \quad d_\omega^* = -(\Psi_{\omega_0}, \Gamma_\omega^*)|_{t=0^+}, \quad (27)$$

$$c_{\omega\omega'} = (\Phi_\omega, \Gamma_{\omega'})|_{t=0^+}, \quad d_{\omega\omega'}^* = -(\Phi_\omega, \Gamma_{\omega'}^*)|_{t=0^+}. \quad (28)$$

La solución general para los modos acoplados $\Gamma_\omega(t)$ se obtiene resolviendo una ecuación diferencial de segundo orden con memoria. Se puede expresar como:

$$(\omega^2 - \omega_0^2) \Gamma_{\omega,1}^0(t) + \frac{i\omega}{m} \int_0^t ds \beta^2(s) \Gamma_{\omega,1}^0(s) = 0. \quad (29)$$

La solución homogénea se escribe como:

$$\Gamma_{\omega,1}^0(\nu) = \frac{i\omega}{\nu^2 - \omega^2} \frac{\beta(\nu)}{\mu} \Gamma_{\omega,1}^0 + A_\omega \delta(\nu - \omega), \quad (30)$$

con constante de normalización:

$$\Gamma_{\omega,1}^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi m \omega}} \sqrt{\zeta_i(\omega)}, \quad (31)$$

siendo $\zeta(\omega)$ la función compleja:

$$\zeta(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega}{2m\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2(\nu)}{\omega + i\epsilon - \nu} d\nu, \quad (32)$$

con $\zeta_i(\omega) = \text{Im}[\zeta(\omega)]$.

Finalmente, la cuantización se completa imponiendo:

$$[a_\omega, a_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega'), \quad [b_\omega, b_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega'), \quad (33)$$

$$[\gamma_\omega, \gamma_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega'), \quad [\gamma_\omega, \gamma_{\omega'}] = 0, \quad (34)$$

donde γ_ω son los operadores de partículas en el régimen acoplado, relacionados por transformaciones de Bogoliubov con a_ω, b_ω .

La importancia de las relaciones de conmutación impuestas a los operadores $a_\omega, b_\omega, \gamma_\omega$ radica en que definen de manera única la estructura de vacío del sistema. Si el sistema hubiera sido cuantizado en el régimen interactuante, se tendría que el estado de vacío satisface $\gamma_\omega|0\rangle_{\text{AP}} = 0$. En nuestro análisis, usamos el vacío $|0\rangle$ definido por $a_\omega|0\rangle = b_\omega|0\rangle = 0$ para todo $\omega > 0$.

El operador de posición $x(t)$ se expande, para $t > 0$, como:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\zeta_i(\omega)} \left[\frac{\gamma_\omega}{\zeta(\omega)} e^{-i\omega t} + \text{H.c.} \right], \quad (35)$$

lo cual permite verificar la relación de conmutación canónica en la imagen de Heisenberg:

$$[x(t), p(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{\omega}{\zeta(\omega)}, \quad p(t) = m\dot{x}(t). \quad (36)$$

La integral anterior debe evaluarse considerando la estructura analítica de $\zeta(\omega)$ en el plano complejo. Dado que $\zeta(\omega)$ es analítica en el semiplano inferior, con la propiedad de que $\zeta(\omega) \rightarrow -\omega^2$ para $|\omega| \rightarrow \infty$, podemos cerrar el contorno por el semiplano inferior y usar el teorema de Cauchy para obtener:

$$[x(t), p(t)] = \frac{i}{\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_\pi^{2\pi} d\theta \frac{r^2 e^{2i\theta}}{\zeta(re^{i\theta})} = i, \quad (37)$$

demonstrando así que la estructura cuántica del sistema es consistente con las reglas de la mecánica cuántica.

4. TWO-POINT CORRELATION FUNCTION FOR AN EXACTLY SOLVABLE CASE

El objetivo de esta sección es obtener las correlaciones cuadráticas del operador de posición $x(t)$ en un caso exactamente resoluble, con lo cual se puede estudiar el comportamiento energético de la partícula bajo la influencia del entorno.

Para ello, se consideran los modos normales positivos $\Psi_\omega(t)$ definidos tras el quench cuántico. Como el estado de vacío $|0\rangle$ es aniquilado por todos los operadores γ_ω , se tiene:

$$\langle x(t)x(s) \rangle = \frac{1}{\pi m} \int_0^\infty d\omega \frac{\zeta_i(\omega)}{|\zeta(\omega)|^2} \cos[\omega(t-s)], \quad (38)$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{\pi m} \int_0^\infty d\omega \frac{\zeta_i(\omega)}{|\zeta(\omega)|^2}, \quad (39)$$

$$\langle \dot{x}^2(t) \rangle = \frac{1}{\pi m} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \frac{\zeta_i(\omega)}{|\zeta(\omega)|^2}. \quad (40)$$

Estas expresiones se obtienen al insertar la expansión modal del campo $x(t)$ en términos de los operadores γ_ω y aplicar la definición de valor esperado en el vacío.

El valor esperado de la energía de la partícula se reconstruye como:

$$\langle H_p(t) \rangle = \frac{m}{2} \langle \dot{x}^2(t) \rangle + \frac{m\omega_0^2}{2} \langle x^2(t) \rangle. \quad (41)$$

También se puede derivar esta correlación a partir de una representación integral de tipo función de Green. Esta satisface:

$$m\ddot{G}(t,s) + m\omega_0^2 G(t,s) + \int_0^t d\tau \Gamma(t,\tau) G(\tau,s) = \delta(t-s), \quad (42)$$

con $\Gamma(t, s)$ siendo el kernel de memoria inducido por el entorno.

Si se define la fuerza efectiva como:

$$F(t) = \int_0^\infty dv \beta(v, t) \dot{R}(t, v), \quad (43)$$

y la correlación de fuerzas en el vacío del reservorio como:

$$\langle F(t)F(s) \rangle = \int_0^\infty dv \int_0^\infty dv' \beta(v, t) \beta(v', s) \langle \dot{R}(t, v) \dot{R}(s, v') \rangle, \quad (44)$$

entonces la correlación de posición toma la forma general:

$$\langle x^2(t) \rangle = \int_0^t ds \int_0^t ds' G(t, s) G(t, s') \langle F(s)F(s') \rangle. \quad (45)$$

Este resultado expresa la generalización cuántica de la relación de fluctuación-disipación, válida para entornos con memoria y acoplamiento no trivial.

5. QUANTUM BROWNIAN MOTION

La noción de movimiento browniano cuántico en este modelo se construye a partir de la cantidad de energía que la partícula adquiere del entorno. Como se ha visto en secciones anteriores, dicha energía está caracterizada por el valor esperado del Hamiltoniano de la partícula

$$\langle H_p(t) \rangle = \frac{m}{2} \langle \dot{x}^2(t) \rangle + \frac{m\omega_0^2}{2} \langle x^2(t) \rangle. \quad (46)$$

Se analizan dos regímenes de interés: el régimen de tiempo tardío (*late-time regime*) y el régimen transitorio (*transient regime*).

5.1. LATE-TIME REGIME

Para tiempos grandes ($t \rightarrow \infty$), la energía de la partícula alcanza un valor constante. En esta región, los términos transitorios desaparecen y las correlaciones como $\langle x^2(t) \rangle$ y $\langle \dot{x}^2(t) \rangle$ se estabilizan. Se puede entonces definir una energía asintótica:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle H_p(t) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\zeta_i(\omega)}{|\zeta(\omega)|^2} \left[\frac{m}{2} \omega^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} \right]. \quad (47)$$

Esta expresión muestra que el valor final de la energía depende únicamente de las propiedades espectrales del entorno (a través de ζ) y del acoplamiento.

5.2. TRANSIENT REGIME

Durante la activación del acoplamiento ($t > 0$), la partícula absorbe energía del reservorio. Esta evolución es no trivial y depende de cómo se conectan inicialmente el sistema y el entorno. Se observa que $\langle H_p(t) \rangle$ crece rápidamente hasta alcanzar el valor asintótico.

Esta dinámica transitoria es una manifestación del efecto subvacío: por un corto tiempo, las correlaciones pueden adquirir valores negativos (como se vio en el modelo de Yu & Ford), aunque la energía total sigue siendo positiva. La solución completa permite observar cómo el entorno excita modos que modifican la dispersión de $x(t)$.

En conjunto, esta sección muestra que el movimiento browniano cuántico no solo describe la fluctuación de posición o velocidad, sino el proceso físico completo por el cual el sistema absorbe energía del entorno cuántico de forma controlada.

En este trabajo se presentó un modelo exactamente resoluble para el movimiento browniano cuántico inducido por una interacción con un reservorio de osciladores armónicos. A diferencia de aproximaciones perturbativas o métodos estocásticos efectivos como la ecuación de Langevin, aquí se construyó una descripción completa a partir de la cuantización canónica del sistema total.

Entre los resultados más destacados se encuentran:

- La derivación explícita de correlaciones cuadráticas $\langle x^2(t) \rangle$ y $\langle \dot{x}^2(t) \rangle$ mediante funciones de Green y modos normales.
- La interpretación energética del movimiento browniano cuántico, reflejada en $\langle H_p(t) \rangle$, como una medida directa del intercambio con el entorno.
- La confirmación de la validez de las relaciones de conmutación canónicas incluso en presencia de memoria cuántica.

El marco aquí desarrollado permite analizar con precisión fenómenos no estacionarios en mecánica cuántica abierta y ofrece herramientas formales para extender el estudio a configuraciones más generales como interacción dependiente del tiempo, múltiples modos acoplados o incluso análisis relativistas.