Revisión del artículo: *Analytical solutions for the quantum Brownian motion of a particle during a quantum quench.*[1]

Diego Alejandro Acosta Vega - 20211107024

Mecánica Cuántica Avanzada - Programa Académico de Física - Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales - Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen

Este paper pretende describir el movimiento de una partícula cuántica afectada por *fuerzas fluctuantes* tras su interacción con un sistema externo cuántico. Para cumplir este propósito se plantea el modelo de una partícula de masa m confinada en un potencial armónico donde se le permite interactuar con un reservorio modelado como un continuo de osciladores, haciendo énfasis en el régimen transitorio. Asumiendo linealidad entre la partícula y el reservorio se logra la cuantización canónica del sistema, lo que lleva a expresiones analíticas para las correlaciones cuánticas que darán información sobre las fluctuaciones de los observables. La búsqueda de expresiones analíticas evita el uso de métodos pertubativos y encontrar una solución exacta en la conservación de la energía.

Consideración de Yu & Ford.

De acuerdo con *Yu & Ford* en [2], una partícula de masa m y carga q se libera en un tiempo $t = 0$ y una distancia d de un espejo plano perfecto, si la posición de la partícula no varía de forma apreciable la dispersión de velocidades en camino Browniano cuántico está dada por

$$\left\langle v_{\perp}^2 \right\rangle = \frac{q^2}{\pi^2 m^2} \cdot \frac{t}{32d^3} \cdot \ln\left(\frac{2d+t}{2d-t}\right)^2 \tag{1}$$

$$\left\langle v_{\parallel}^2 \right\rangle = \frac{q^2}{8\pi^2 m^2}\left[\frac{t}{8d^3} \cdot \ln\left(\frac{2d+t}{2d-t}\right)^2 - \frac{t^2}{d^2(t^2-4d^2)}\right] \tag{2}$$

donde $v_{\perp}$ y $v_{\parallel}$ son los componentes de la velocidad ortogonal y paralelo al espejo, respectivamente. Donde $\varepsilon_0 = \hbar = c = 1$.

Teniendo en cuenta que dentro del enfoque de *Yu & Ford* $x(t) \leqslant d$, esto lleva a

$$\left\langle v_{\parallel}^2 \right\rangle < 0 \quad \text{para} \quad t > 2d \tag{3}$$

El modelo Lagrangiano

Lagrangiano de la partícula L_p

Partícula de masa m confinada en un potencial armónico, frecuencia característica ω_0, el Lagrangiano estará dado por

$$L_p = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 \tag{4}$$

lo anterior representa un oscilador armónico clásico con un potencial cuadrático centrado en $x = 0$.

Lagrangiano del reservorio L_R

Se pretende modelar un continuo de osciladores armónicos independientes bajo el siguiente Lagrangiano

$$L_R = \frac{\mu}{2}\int_0^{\infty} d\nu \left(\dot{R}^2(t,\nu) - \nu^2 R^2(t,\nu)\right) \tag{5}$$

cada oscilador se etiqueta por su frecuencia bajo la restricción $\nu > 0$, este arreglo se conoce comúnmente como *Baño de osciladores*, el reservorio representa entonces un entorno con el cual la partícula puede intercambiar energía, cada ν representa una forma de absorber o devolver energía.

Lagrangiano de interacción L_{int}

$$L_{int} = \int_0^{\infty} d\nu f(\nu) \cdot x(t) \cdot \dot{R}(t,\nu) \tag{6}$$

donde $f(\nu)$ es el coeficiente de acoplamiento que contiene las dimensiones apropiadas. Para modelar un *quench* cuántico este coeficiente puede depender del tiempo t

$$L_{int} = x(t)\int_0^{\infty} d\nu \beta(t,\nu) \cdot \dot{R}(t,\nu) \tag{7}$$

la elección de este tipo de lagangiano para la interacción entre la partícula y el reservorio permitirá generar términos con kernel de memoria $\Rightarrow$ Ecuaciones de movimiento con memoria.

Lagrangiano total y ecuaciones de movimiento

El lagrangiano del sistema total se puede ver como la suma total de dos partes

$$L = L_p + L_{int} + L_R \tag{8}$$

Ecuación de movimiento para la partícula:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}\int_0^{\infty} d\nu \beta \dot{R} \tag{9}$$

Ecuación de movimiento para el reservorio:

$$\ddot{R} + \nu^2 R = -\frac{1}{\mu}\frac{d}{dt}(\beta x) \tag{10}$$

entonces (9) tiene la forma de $m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = F$, pero la fuerza no es externa en el sentido usual $\Rightarrow$ Retroalimentación dinámica.

Partícula excita entorno $\Rightarrow$ Entorno responde

$\Rightarrow$ Acción devuelta sobre la partícula.

Conservación de la energía

El Hamiltoniano del sistema que se obtiene a partir de (8)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_e^2}{2}x^2 - \frac{x}{\mu}\int_0^{\infty} d\nu \beta Q + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} d\nu \left(\frac{Q^2}{\mu} + \mu\nu^2 R^2\right) \tag{11}$$

donde ω_e, la frecuencia efectiva, esta dada por

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{m\mu}\int_0^{\infty} d\nu \beta^2 \tag{12}$$

trabajando en la imagen de Heisenberg, se necesita

$$\begin{cases} H_p = \dfrac{m}{2}\dot{x}^2 + \dfrac{m\omega_0^2}{2}x^2 \\ H_R = \dfrac{\mu}{2}\displaystyle\int_0^{\infty} d\nu \left(\dot{R}^2 + \nu^2 R^2\right) \end{cases}$$

"La energía de la partícula aumentó/decreció en tal cantidad, y el resto fue absorbido/liberado por el entorno".

Cuantización canónica

Construcción del campo compuesto Ψ

Se define el campo compuesto de dos componentes:

$$\Psi = \begin{pmatrix} x(t) \\ R(t,\nu) \end{pmatrix} \tag{13}$$

lo que permite reformular el sistema acoplado como una única ecuación efectiva. La expansión modal se hará sobre Ψ, usando un producto interno sesquilineal definido como:

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \Psi' \rangle = i\Bigg[& m(\Psi_1^* \partial_t \Psi_1' - \Psi_1' \partial_t \Psi_1^*) + \mu\int_0^{\infty} d\nu \left(\Psi_2^* \partial_t \Psi_2' - \Psi_2' \partial_t \Psi_2^*\right) \\ & - \int_0^{\infty} d\nu\, \beta(\nu,t)(\Psi_1^* \Psi_2' - \Psi_1' \Psi_2^*)\Bigg] \end{aligned} \tag{14}$$

Este producto es conservado en el tiempo si Ψ y Ψ' satisfacen las ecuaciones de movimiento.

Expansión modal y operadores

Se realiza una expansión en modos normales positivos y negativos:

$$\Psi = \sum_{\omega}\left(a_\omega \Psi_\omega + a_\omega^\dagger \Psi_\omega^*\right) \tag{15}$$

Los operadores a_ω, $a_\omega^\dagger$ satisfacen conmutadores bosónicos y permiten expresar los observables, por ejemplo:

$$x(t) = \sum_{\omega}\left(a_\omega \Psi_{1,\omega}(t) + a_\omega^\dagger \Psi_{1,\omega}^*(t)\right) \tag{16}$$

Régimen no interactuante $(t < 0)$***:***

$$\Psi_{\omega_0,1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0 m}}e^{-i\omega_0 t} \quad ; \Phi_{\omega,2}(t,\nu) = \frac{\delta(\nu-\omega)}{\sqrt{2\nu\mu}}e^{-i\nu t} \tag{17}$$

para $t < 0$ tenemos la expresión general

$$\Psi = a_{\omega_0}\Psi_{\omega_0} + a_{\omega_0}^*\Psi_{\omega_0}^* + \int_0^{\infty} d\omega(b_\omega \Phi_\omega + b_\omega^* \Phi_\omega^*) \tag{18}$$

Régimen de interacción $(t > 0)$***:***

$$\Psi_{\omega_0}(t) = \int_0^{\infty} d\omega[c_\omega \Gamma_\omega(t) + d_\omega^* \Gamma_\omega^*(t)] \tag{19}$$

$$\Phi_\omega(t) = \int_0^{\infty} d\omega'[c_{\omega,\omega'}\Gamma_{\omega'}(t) + d_{\omega,\omega'}^*\Gamma_{\omega'}^*(t)] \tag{20}$$

para $t > 0$ tenemos la expresión general

$$\Psi(t) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \left[\gamma_\omega \Gamma_\omega(t) + \gamma_\omega^\dagger \Gamma_\omega^*(t)\right] \tag{21}$$

Relaciones de conmutación canónicas:

$$[a_{\omega_0}, b_\omega] = 0, \quad [b_\omega, b_{\omega'}] = 0 \tag{22}$$

$$\left[a_{\omega_0}, a_{\omega_0}^\dagger\right] = 1, \quad \left[b_\omega, b_{\omega'}^\dagger\right] = \delta(\omega - \omega') \tag{23}$$

Se define así el estado de vacío del sistema $|0\rangle$, definido por $a_{\omega_0}|0\rangle = b_\omega|0\rangle = 0$ para todo $\omega > 0$, correspondiendo al caso en que todos los osciladores están en su estado fundamental antes de que la interacción se active. Donde los operadores γ_ω están relacionados con los operadores de creación no interactuantes mediante la transformación de Bogoliubov.

$$\gamma_\omega = c_\omega a_{\omega_0} + d_\omega a_{\omega_0}^\dagger + \int_0^{\infty} \mathrm{d}\nu \left(c_{\nu,\omega} b_\nu + d_{\nu,\omega} b_\nu^\dagger\right). \tag{24}$$

Un cálculo extenso revela que los operadores γ_ω satisfacen

$$[\gamma_\omega, \gamma_{\omega'}] = 0, \tag{25}$$

$$[\gamma_\omega, \gamma_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega'). \tag{26}$$

Resultados y Discusión

1. *La función de dos puntos:*

$$\langle x(t)x'(t)\rangle = \langle x(t)x'(t)\rangle_{tr} + \langle x(t)x'(t)\rangle_{qp} \quad t, t' \geq 0 \tag{27}$$

donde:

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(t')\rangle_{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2\omega_0 m}\Bigg\{ & [(\omega_0 + i\partial_t)A(t)][(\omega_0 - i\partial_{t'})A^*(t')] \\ & + \frac{2\omega_0}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \zeta_i(\omega)\left[\frac{e^{-i\omega t}}{\zeta_-^*(\omega)}B_\omega^*(t') + B_\omega(t)\frac{e^{i\omega t'}}{\zeta_-(\omega)} + B_\omega(t)B_\omega^*(t')\right]\Bigg\} \end{aligned} \tag{28}$$

es la correlación transitoria

$$\langle x(t)x(t')\rangle_{\mathrm{qp}} = \frac{1}{m\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{\zeta_i(\omega)}{|\zeta(\omega)|^2}e^{-i\omega\Delta t}, \tag{29}$$

la correlación de cuasipartícula. Aquí se defeinen las funciones auxiliares

$$A(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{\sin\omega t}{\zeta(\omega)}, \tag{30}$$

$$B_\omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega'\, \frac{e^{i\omega' t}}{\zeta(\omega')}\frac{1}{\omega' + \omega + i\epsilon}. \tag{31}$$

Conclusión

El trabajo valida un marco de cuantización canónica que produce soluciones exactas para las correlaciones cuánticas del movimiento browniano

Referencias

[1] Ygor de Souza, Caio C. Holanda y Vitorio A. De Lorenci. "Analytical solutions for the quantum Brownian motion of a particle during a quantum quench". En: *arXiv (Cornell University)* (ene. de 2025). DOI: 10.48550/arXiv.2501.16611. (Visitado 10-01-2025).

[2] Hongwei Yu y L. H. Ford. "Vacuum fluctuations and Brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary". En: *Phys. Rev. D* (sep. de 2004). DOI: 10.1103/PhysRevD.70.065009. (Visitado 10-06-2025).