- **Fecha máxima de entrega:** Jueves 23 de octubre @ 19:00 h.

---

1. Considere $\boldsymbol{U} = (U_1, \dots, U_n)$ una muestra aleatoria de una población U distribuida uniformemente en el intervalo $(\theta, \theta + 2)$. Determine el estimador de θ por el método de momentos $\tilde{\theta}$ y por el método de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$.

   En *Canvas/Archivos/Tareas/Tarea 2/tarea21.dat* encontrará asociada a su clave única la muestra observada de tamaño $n = 20$. Encuentre su estimaciones de $\tilde{\theta}$ y $\hat{\theta}$.

2. Considere $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria (*m. a.*) de $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Sea $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$. Determine que el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$, donde

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{y} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

   y compruebe que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ corresponde a un máximo verificando que la matriz hessiana $\mathcal{H}\left(\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right)$ es definida negativa.

3. Sea $X_1, \dots, X_n$ una *m. a.* de una población X con función de densidad de probabilidad (*f. d. p.*) dada por

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}\mathbb{1}_{[\mu - \sqrt{3}\sigma,\ \mu + \sqrt{3}\sigma]}(x)$$

   Muestre que los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ están dados por

$$\hat{\mu}_{MV} = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)}), \qquad \hat{\sigma}_{MV} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(X_{(n)} - X_{(1)})$$

   donde $X_{(i)}$ denota el i-ésimo estadístico de orden de la muestra.

4. En *Canvas/Archivos/Tareas/Tarea 2/tarea22.dat* encontrará asociada a su clave única la muestra observada de tamaño $n = 30$, proveniente de una población que es modelada mediante una **distribución gamma**, $X \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \lambda)$, con función de densidad

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

   con el **parámetro de forma** $\alpha > 0$ y el **parámetro tasa** $\lambda > 0$.

   Para cada uno de los miembros del equipo responda los siguientes incisos:

   a) Encuentre los correspondientes estimadores de momentos EMM, $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\lambda}$.

   b) Mediante algún método numérico encuentre $\hat{\alpha}$ y $\hat{\lambda}$, los correspondiente estimadores por máxima verosimilitud EMV. Incluya los detalles de los primeros 5 pasos de su algoritmo de optimización. A saber,

k	L_k	ℓ_k	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\lambda}_k$	Δ_k
1					
$\vdots$					
5					

   donde L_k es el valor de la función de verosimilitud, ℓ_k el valor de $\ln(L)$, $\hat{\alpha}_k, \hat{\lambda}_k$ las correspondientes estimaciones y Δ_k el cambio en la aproximación $|L_k - L_{k-1}|$. Utilice las estimaciones EMM como valores iniciales en su procedimiento.

c) Construya un histograma de la distribución de cada uno de sus estimadores del parámetro de forma $\hat{\alpha}$ y del **parámetro de escala** $\hat{\beta}$ $(= 1/\hat{\lambda})$ para una simulación de $N = 3000$. Comente.

5. **Una distribución angular**. (Rice, 2007)

El ángulo θ al cual son emitidos los electrones en el decaimiento de *muones* tiene una función de densidad dada por

$$f(x;\alpha) = \frac{1+\alpha x}{2}\, \mathbb{1}_{[-1,+1]}(x) \tag{1}$$

donde $x = \cos(\theta)$. El parámetro α está relacionado con la polarización. Consideraciones físicas indican que $|\alpha| \leq 1/3$, pero se puede ver que $f(x;\alpha)$ es una función de densidad *propia* para $|\alpha| \leq 1$.

Muestre que los estimadores por el método de momentos ($\tilde{\alpha}$) y el de máxima verosimilitud ($\hat{\alpha}$) están dados respectivamente por

$$\tilde{\alpha} = 3\bar{X} \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+\hat{\alpha}x_i} = 0$$

a) Muestre que

$$\operatorname{var}(\tilde{\alpha}) = \frac{3-\alpha^2}{n}$$

b) Utilice el Teorema Central de Límite para aproximar la distribución de $\tilde{\alpha}$. Si $n = 25$ y $\alpha = 0$, determine $\mathbb{P}(|\tilde{\alpha}| > 0.5)$.

c) Muestre que la **varianza asintótica** de $\hat{\alpha}$ está dada por $\operatorname{var}(\hat{\alpha}) \approx 1/nI(\alpha)$, donde

$$I(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^3}\left[\log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - 2\alpha\right]$$

d) ¿Cuál es la **eficiencia relativa** del estimador de α de momentos con respecto al de máxima verosimilitud?

e) La eficiencia relativa depende del verdadero valor de α. Construya una tabla para distintos valores de α y la correspondiente eficiencia relativa (ER). Grafíque sus resultados. Esto es, grafique ER(α) *vs.* α.

k	α	ER
1	0.00	1.0
2	0.10	·
3	0.20	·
4	0.30	·
5	0.40	·
6	0.50	·
7	0.60	·
8	0.70	·
9	0.80	·
10	0.90	·
11	0.93	·
12	0.95	·
13	0.96	·

Note que conforme el verdadero valor del parámetro α tiende a 1 la eficiencia relativa del $\tilde{\alpha}$ con respecto a $\hat{\alpha}$ tiende a cero. Esto es, si α es cercana a cero ambos estimadores se comportan de manera similar pero el de máxima verosimilitud es más eficiente conforme crece α.

f) Genere $N = 5000$ muestras de tamaño $n = 35$ de una población distribuida angularmente con parámetro $\alpha = 0.75$ (*f. d. p.* dada por la expresión (1)). Construya los correspondiente histogramas para las colecciones $\{\widetilde{\alpha}_i\}_{i=1}^N$ y $\{\widehat{\alpha}_i\}_{i=1}^N$. Comente sus resultados.

Ejemplos de muestras aleatorias por clave única:

cu	113631	113782	113967	114777	114881	114913	118181
1	0.38039097	0.1290546	1.12105023	0.37250971	0.49990618	0.2660915	1.15941244
2	0.27445390	0.3547473	0.48279558	0.23756804	0.16361542	0.8681683	0.09031719
3	0.20500119	0.4780459	0.37277708	0.71315353	0.38705120	1.0816001	0.02316735
4	0.06345743	0.3841396	0.13817720	1.26346860	0.78786147	0.7383521	0.25565398
5	1.44227589	0.9810354	1.22342582	1.25663039	0.66765661	0.7490550	0.60722278
..	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
26	0.08904010	0.8248389	1.33985522	0.61012473	3.31258441	0.9887233	1.73804771
27	0.36685792	0.6803544	0.17369323	0.21782797	1.02851770	2.2047927	0.40938466
28	1.89551861	0.3273592	0.66310191	0.40817712	0.09852448	1.7578147	0.29617464
29	0.50301247	0.5092466	1.03452177	0.64928545	1.06187908	0.2639917	0.67807246
30	1.02776349	0.5164276	0.17673210	0.13113027	0.41138994	0.6564900	0.68556126