

Algoritmo de Denavit-Hartenberg

Diego Armando Becerra Iñiguez

23 de septiembre de 2019

0.1. Introducción

Existe un estudio en la robótica, existe un algoritmo, llamado **El algoritmo de Denavit-Hartenberg**, que nos ayuda a establecer los sistemas de referencia para cada uno de los eslabones con los que cuenta el robot.

0.2. Algoritmo

0.2.1. Paso 0

Determinar el número de eslabones y el número de articulaciones. Utilizaremos un hipotético caso el cual tiene que el número de eslabones es $n+1$, con $n=7$ y el número de articulaciones es n ; por lo tanto hay 8 eslabones en este ejemplo. Para los eslabones, la numeración comienza en 0, el eslabón 0 es la base y el eslabón $n=7$ es el efector final. Las articulaciones comienzan a numerarse en 1.

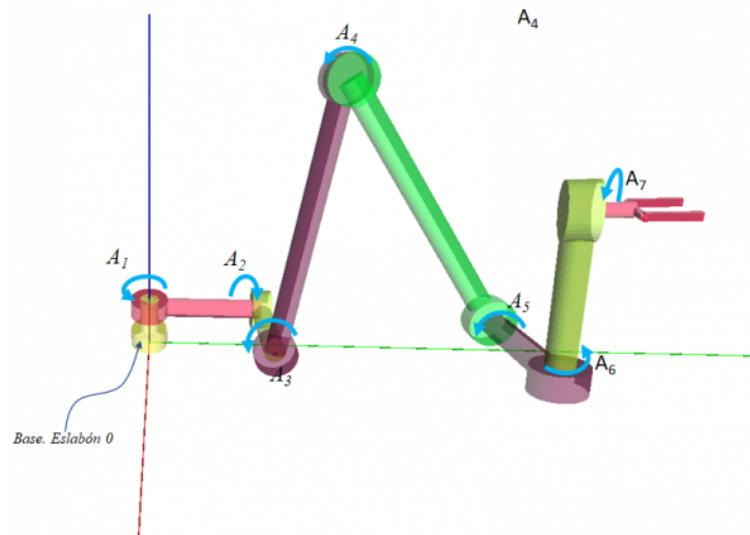


Figura 1: Identificación de las articulaciones del robot, siempre hay un eslabón más que el número de articulaciones.

Caso especial. Base (eslabón 0)

Determinar la dirección del eje z_0 . El eje z_0 se escoge de tal forma que este alineado (es decir además de paralelo debe estar en la misma línea) con el eje de la articulación A_1 (figura 3), el origen del sistema de referencia B_0 (base) se sitúa en cualquier punto del eje z_0 . Los ejes x_0, y_0, z_0 del sistema de referencia B_0 situado en el eslabón 0 (base) son fijos (no rotan), se encogen de tal manera que sea un sistema que **obedece a la regla de la mano derecha** (figura 2).

Caso especial. Efector final

(eslabón n) Para el último eslabón la elección del sistema de referencia B_n el eje x_n debe ser perpendicular al eje z_{n-1} ; si la articulación es revoluta al eje z_n está alineado (coincide) con el eje z_{n-1} (ver figura 8).

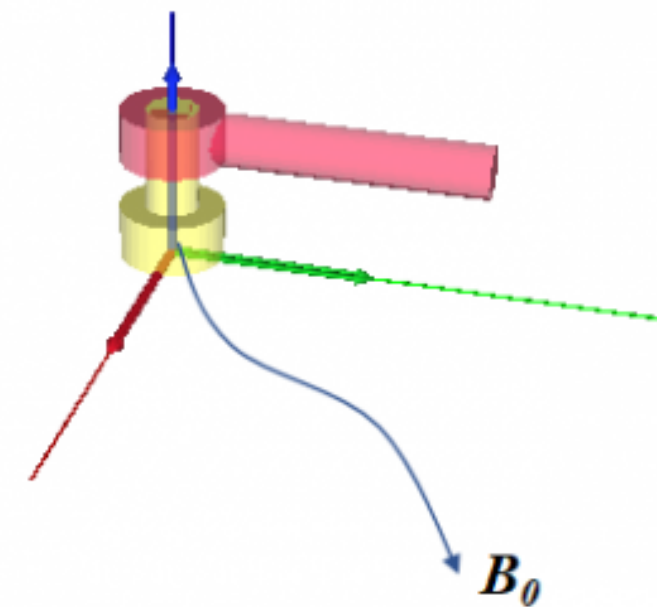


Figura 2: Eje z de eslabón 0 (base) que coincide con la dirección de la siguiente articulación



Figura 3: Articulación A_1

0.2.2. Paso 1

Para cada eslabón $i=1,2,3,\dots,n-1$ (en este ejemplo $n-1=6$, el $i=0$ es la base y para el efector final $i=7$, véase paso 0) hay tres pasos a realizar para elegir la dirección z_i y la dirección x_i , con ello el eje y_i se elige simplemente de tal forma que el sistema de referencia B_i sea un sistema que obedece a la regla de la mano derecha(dextrógiro).

Determinar la dirección de los ejes z_i con $i=1,2,3,\dots,n-1$.

El eje z_i se escoge de tal forma que este alineado(en la misma línea) con el de la articulación A_{i+1} .

Cada eje z_i esta montado sobre el eslabon i .

Para el eslabón 1, según el robot SSRMS de ejemplo en estudio, a continuación se muestra la configuración del eslabón 1 con el eslabón 2, aún sin representar el eje z_i . De acuerdo

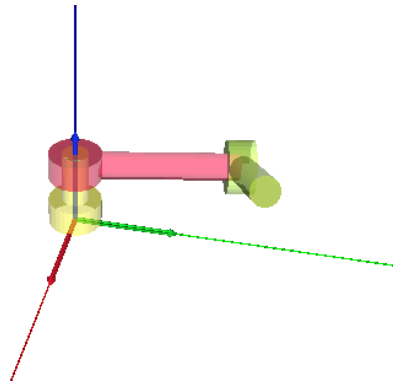


Figura 4: Aún no se ha especificado la dirección del eje z_1 montando en el eslabón 1

eje de la articulación A_2

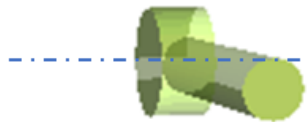


Figura 5: Eslabón 2

con la figura 5, el eje z del eslabón 1 queda como se muestra en la figura 6, es decir, de tal manera que al ensamblar el robot el eje z_1 esté alineado con el eje de la articulación A_2 .

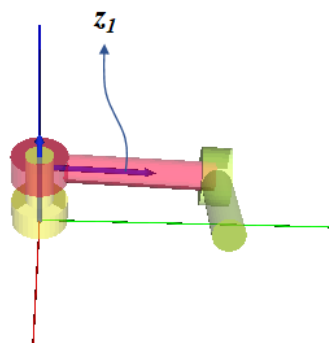


Figura 6: Ilustración de la elección correcta del eje z del eslabón 1.

Continuando de esta manera el conjunto de ejes z_i con $i=0,1,2,3\dots n-1$, se ilustra en la figura 7.

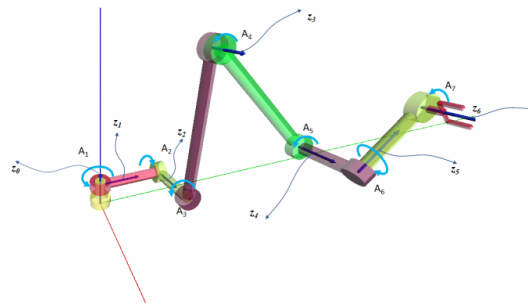


Figura 7: Ejes z_i alineado con eje de articulación A_{i+1}

0.2.3. Paso 2

Determinar la dirección de los ejes x_i con $i=1,2,3\dots n-1$

Caso 1

Si los ejes z_i y z_{i-1} se intersecan, la dirección del eje x_i está dada por la dirección del vector $x_i = z_i \times z_{i-1}$.

Para el caso 1, donde ocurre tal intersección se coloca el origen del sistema de referencia B_i . De la figura 8, observe que este caso se cumple para los ejes x_i con $i=1,2,5,n-1$.

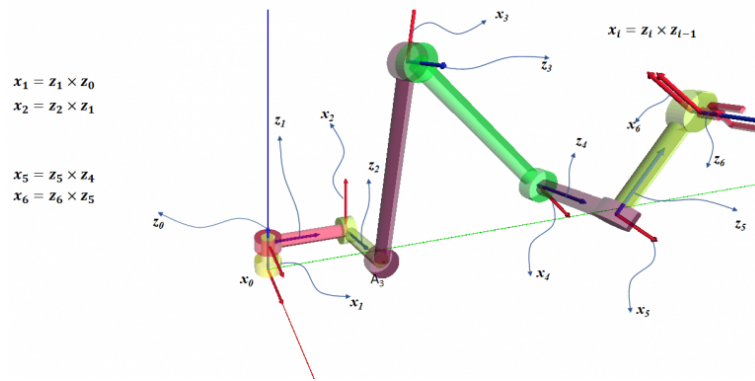


Figura 8:

Caso 2

Si los ejes z_i y z_{i-1} son paralelos, hay un número infinito de normales comunes, escoja alguna de ellas (la más adecuada o cómoda), la dirección del eje x_i está dada por la dirección de lo normal común que eligió, ésta se dirige del eje z_{i-1} al eje z_i .

De la figura 8, observe que los ejes z_2 y z_3 , así como los ejes z_3 y z_4 son paralelos y por lo tanto esto implica que este caso aplica para definir la dirección de los ejes x_3 y x_4 .

Caso 3

Si los ejes z_i y z_{i-1} no son paralelos ni se intersecan, la dirección del eje x_i esta dada por la dirección de la normal común entre dichos ejes, esta se dirige del eje z_{i-1} al eje z_i en el robot SSRMS no ocurre en este caso.

Para el caso 2 y 3 el origen del sistema de referencia B_i se elige donde ocurre la intersección de la normal común de los ejes z_i y z_{i-1} con el eje de la articulación A_{i+1} .

En la figura 9 se ilustra la ubicación de los orígenes para cada uno de los sistemas de referencias B_i con $i=1,2,\dots,n-1$; observe que el origen B_3 se ubica en la intersección del eje de la articulación A_4 con la normal común entre el eje z_2 y z_3 . Análogamente, el origen B_4 se ubica en la intersección del eje de la articulación A_5 con la normal común entre el eje z_3 y z_4 .

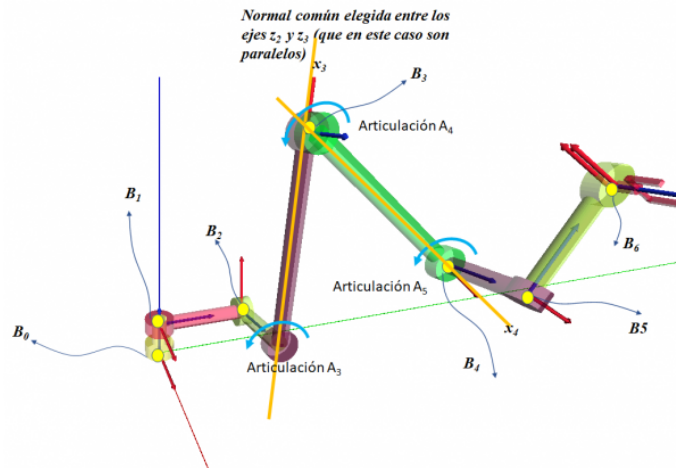


Figura 9: La elección de los orígenes se ha realizado según el caso correspondiente. Observe que no siempre se coloca un origen en cada articulación.

Con la elección de los orígenes B_i así como de los ejes z_i y x_i (el eje y_i) se encuentra fácilmente, ver paso 3) ya se puede comenzar a diseñar y a orientar cada pieza en el sistema de referencia del modelado (sistema de referencia local).

Durante el diseño de la pieza, debe conocerse a priori la dirección del eje de la articulación siguiente, de esta manera el eje z en el sistema de referencia local (donde se modela la pieza), una vez que se ensambla el robot, debe estar alineado con el eje de la articulación siguiente (para la base ver figura 10 y para eslabón 1 ver figura 12).

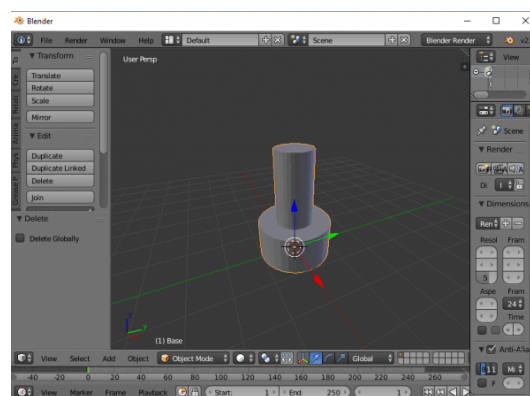


Figura 10: Diseño correcto de la base, observe el sistema de referencia local (rojo eje X, verde eje Y, azul eje Z). Al ensamblar el robot el eje z de este eslabón 0 coincide con el eje de la articulación A_1

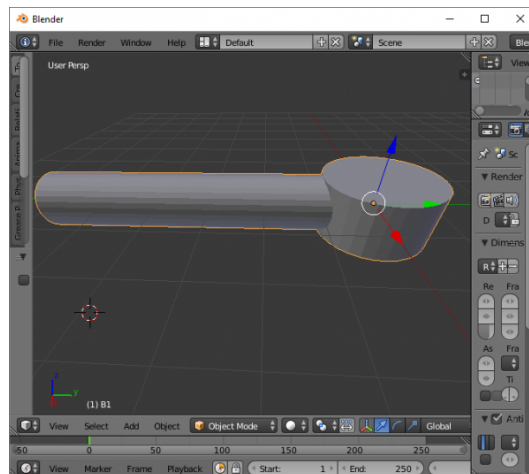


Figura 11: Diseño incorrecto de eslabón 1.

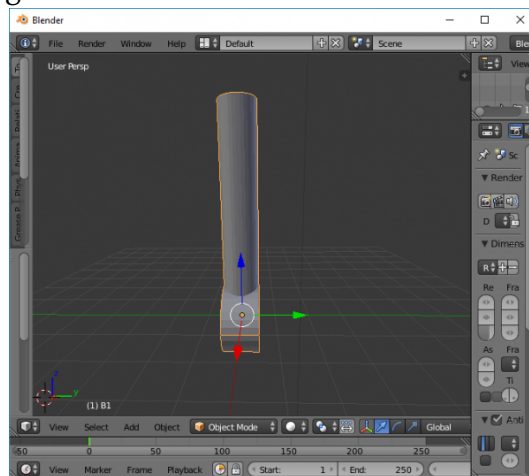


Figura 12: Diseño correcto de eslabón 1. El eje z coincide con el eje de la articulación A2 al ensamblar el robot.

De esta forma, al ensamblar el robot, el eje z local del eslabón 1 coincide con la dirección el eje de la articulación A_2 como se ilustra en la figura 6 y el eje x queda como ya se había establecido (figura 8). Continuando este procedimiento para cada eslabon, el sistema de referencia local en cada eslabón debe ser como se muestra en la figura 13.

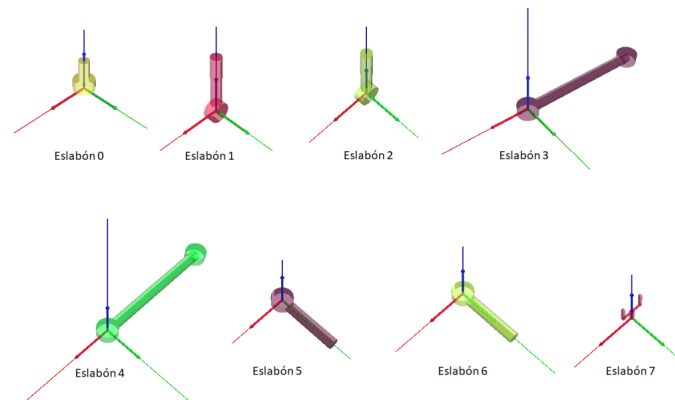


Figura 13: Sistema de referencia local apropiado, intente ensamblar el robot cumpliendo con los pasos anteriores y note que el resultado es como el de la figura 14. No es necesario hacer todo el ensamble mentalmente, hágalo con cada par de eslabones contiguos, recuerde que el eje z de cada eslabón es el eje de rotación alrededor del cual rota el siguiente eslabón.

0.2.4. Paso 3

Determinar la dirección de los ejes y_i . El eje $y_i = z_i \times x_i$.

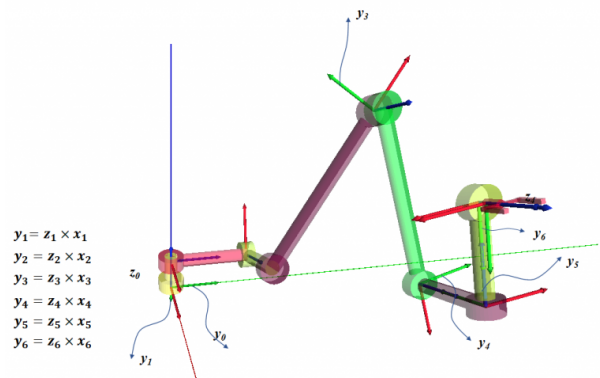


Figura 14: Elección de la dirección de los ejes y para formar sistemas que obdezcán a la regla de la mano derecha.

Descripción de las transformaciones

Es natural que durante el diseño se deseen conocer las dimensiones de cada eslabón, así también la forma deben rotar los sistemas de referencia de cada eslabón para que las orientaciones resultantes cumplan con la convención DH; esto es precisamente una tarea que debe realizarse antes de realizar la simulación o animación; existen un conjunto de parámetros que caracterizan la configuración DH de un robot y son precisamente los que permiten realizar un ensamble que cumpla con el algoritmo DH, dichos parámetros que conforman un sistema de coordenadas, llamado sistema de coordenadas DH, son los que

debemos medir para poder construir la simulación que ejecute una cinemática directa del robot.

Para referencia se ilustran las medidas (sin unidades) de los eslabones. Para referencia

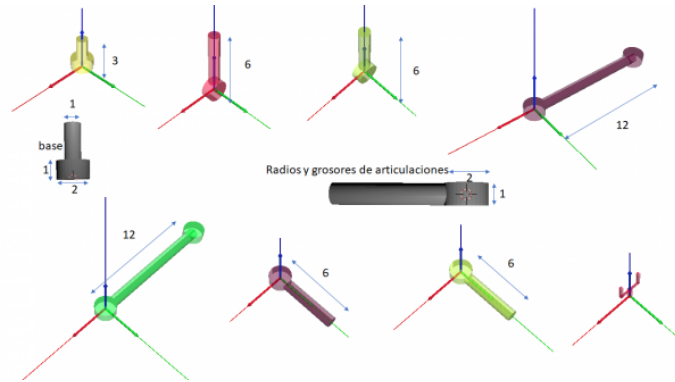


Figura 15: Dimensiones de los eslabones

nos apoyamos en la figuras 15 y 16.

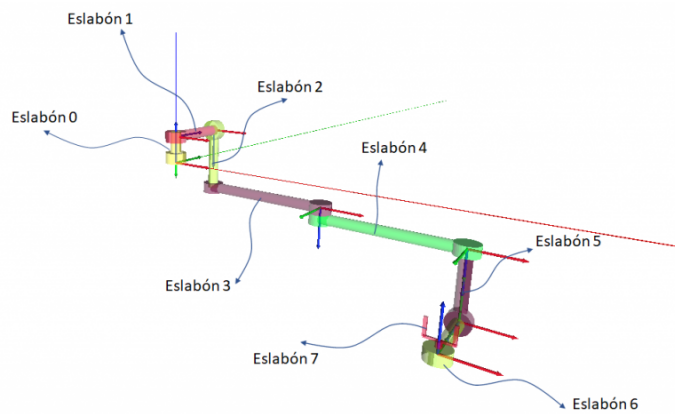


Figura 16: Configuración DH

Para describir las transformaciones que sufre cada eslabón, nos concentraremos en los ejes de cada eslabón en forma individual y en el eslabón siguiente que se muestran en la figura 16 (no en figura 14, ya que esa figura representa al robot cuando ya se han realizado rotaciones alrededor de algunos de los ejes z), analizamos los cambios de orientación entre los sistemas de referencia de un eslabón y su sucesor. Lo interesante de la convención DH es que el cambio de orientación de un sistema de referencia está dado por el producto de dos transformaciones homogéneas que tienen la forma simplificada y dado que en nuestro

$$T_x[\alpha, x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_z[\theta, z] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 17: Forma de las transformaciones homogéneas que experimenta cada eslabón en una configuración DH

caso de estudio hay 8 eslabones la posición(r) respecto del sistema de referencia global de un punto (rp) medido en el sistema de referencia del efector final está dado por.

$$T(r) = T_0 * T_1 * T_2 * T_3 * T_4 * T_5 * T_6 * T_7(rp)$$

Donde cada T_i con $i=1,2,3,4,5,6,7$ está dada por el producto de dos transformaciones homogéneas que tienen la forma:

$$T_i = T_{z_{i-1}}[\theta_i, z] * T_{x_{xi-1}}[\alpha_1, x]$$

En código fuente se expresa:

```
void Robot::DefinirTHz(float dtheta, vector3d d){
    THz.aij[0][0]=-cos(dtheta);
    THz.aij[0][1]=-sin(dtheta);
    THz.aij[0][2]=0;
    THz.aij[0][3]=-d.x;

    THz.aij[1][0]=sin(dtheta);
    THz.aij[1][1]=cos(dtheta);
    THz.aij[1][2]=0;
    THz.aij[1][3]=-d.y;

    THz.aij[2][0]=0;
    THz.aij[2][1]=0;
    THz.aij[2][2]=1;
    THz.aij[2][3]=-d.z;

    THz.aij[3][0]=0;
    THz.aij[3][1]=0;
    THz.aij[3][2]=0;
    THz.aij[3][3]=1;
}
```

0.3. Referencias

@articlebarrientos2012modelado, title=Modelado de Cadenas Cinemáticas mediante Matrices de Desplazamiento. Una alternativa al método de Denavit-Hartenberg, author=Barrientos, A and Álvarez, M and Hernández, JD and Del Cerro, J and Rossi, Claudio, journal=Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial, volume=9, number=4, pages=371–382, year=2012 [?]