LINEAS DE ESPERA

Una línea de espera es el efecto resultante en un sistema cuando la demanda de un servicio supera la capacidad de proporcionar dicho servicio. Este sistema está formado por un conjunto de entidades en paralelo que proporcionan un servicio a las transacciones que aleatoriamente entran al sistema

OBJETIVO

El objetivo es determinar qué nivel de servicio, ya sea por cantidad de entidades o por la velocidad de ellas, proporcionar para minimizar el costo total del sistema. Este costo está formado tanto por costo de servicio como por el que causa la espera.

MODELO DE LINEA DE ESPERA (MODELO DE FORMACION DE COLAS)

NOMENCLATURA

- **S** = número de servidores
- **n** = número de clientes en el sistema
- **N** = número máximo de clientes permitidos en el sistema
- **A, t** = flujo de clientes que entran cuando hay n clientes en el sistema
- **u,7l** = capacidad del servidor cuando hay n clientes en el sistema.
- **E(t)** = tiempo promedio de proceso por cliente
- **V(t)** = variancia del tiempo de proceso
- **E(á)** = tiempo promedio entre llegadas
- **V(a)** = variancia del tiempo entre llegadas
- **CQ** = coeficiente cuadrado de variación del flujo de clientes que entran al sistema
- **CS`** = coeficiente cuadrado de variación del tiempo de servicio
- **Cp** = coeficiente cuadrado de variación del flujo de clientes que salen del sistema PIJ probabilidad de que el sistema cambie de un estado i a un estado y después de un intervalo de tiempo.
- **Pn** = probabilidad en estado estable de que existan n clientes en el sistema
- **L** = número promedio de clientes en el sistema
- **Lq** = número promedio de clientes en la fila
- **W** = tiempo promedio de permanencia en el sistema
- **Wq** = tiempo promedio de permanencia en la fila
- **p** = utilización promedio del servicio
- **Ct** = costo total promedio del sistema de líneas de espera por unidad de tiempo.
- **Ce** = costo promedio de servicio por cliente por unidad de tiempo
- **Cq** = costo promedio de espera por cliente por unidad de tiempo

FORMULAS

1. Factor de Utilización

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Probabilidad que no existan unidades en el sistema

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

λ= Tasa media de llegadas del sistema

μ= Tasa media de servicio de cada canal

K= Número de canales

3. Probabilidad que no existan unidades en el sistema

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\left(\frac{K\mu}{K\mu - \lambda}\right)}$$

4. Numero promedio de unidades en cola

$$Lq = \frac{(\lambda/\mu)^k \lambda\mu}{(k-1)!\,(k\mu - \lambda)^2} * P_0$$

5. Numero promedio de unidades en el sistema

$$L_S = Lq + \frac{\lambda}{\mu}$$

6. Tiempo promedio que dura una unidad en cola

$$Tq = \frac{Lq}{\lambda}$$

7. Tiempo promedio que dura una unidad en el sistema

$$Ts = Tq + \frac{1}{\mu}$$

8. Probabilidad que exista N unidades en el sistema cuando

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 \qquad \rightarrow \qquad n \leq K$$

9. Probabilidad que existan N unidades en el sistema cuando

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{K!\,K^{(n-K)}} P_0 \qquad \rightarrow \qquad n > K$$

10. Numero promedio de unidades en el sistema

$$L_s = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

11. Tiempo promedio que una unidad pasa en cola

$$Tq = \frac{Lq}{\lambda}$$

12. Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema

$$T_s = \frac{Ls}{\lambda}$$

EJEMPLOS

1.

Un promedio de 10 automóviles por hora llegan a un cajero con un solo servidor que proporciona servicio sin que uno descienda del automóvil. Suponga que el tiempo de servicio promedio por cada cliente es 4 minutos, y que tanto los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son exponenciales. Conteste las preguntas siguientes:

1 ¿Cuál es la probabilidad de que el cajero esté ocioso?

2 ¿Cuál es el número promedio de automóviles que están en la cola del cajero? (Se considera que un automóvil que está siendo atendido no está en la cola esperando).

3 ¿Cuál es la cantidad promedio de tiempo que un cliente pasa en el estacionamiento del banco (incluyendo el tiempo en servicio)?

4 ¿Cuántos clientes atenderá en promedio el cajero por hora?

Solución De acuerdo con las premisas, estamos trabajando con un sistema de colas de $M/M/1/GD/\infty/\infty$ para el cual $\lambda = 10$ automóviles por hora y $\mu = 15$ automóviles por hora. Por lo tanto, $\rho = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

1 Según (24), $\pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, el cajero estará ocioso un promedio de un tercio del tiempo.

2 Determinemos L_q. A partir de (27),

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(\frac{2}{3})^2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \quad \text{clientes}$$

3 Estimemos W. A partir de (28), $W = \frac{L}{\lambda}$. Entonces, según (26),

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2 \quad \text{clientes}$$

Por lo tanto, $W = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ h $= 12$ minutos (W tiene las mismas unidades de λ).

4 Si el cajero siempre estuviera ocupado, atendería un promedio de $\mu = 15$ clientes por hora. Según la parte (1), sabemos que el cajero está ocupado sólo dos tercios del tiempo. Por lo tanto, durante cada hora, el cajero atenderá un promedio de $(\frac{2}{3})(15) = 10$ clientes. Éste debe ser el caso porque, en el estado estable, 10 clientes llegan cada hora, de modo que 10 clientes deben dejar cada hora el sistema.

$$\rho = \lambda/\mu = 10/15 = 2/3$$

1) 1- ρ = 1/3

$P_0 + 2/3\ P_0 + (2/3)^2 P_0 + ... + (2/3)^n P_0 = 1$

P_0 [$1 + (2/3) + ... + (2/3)^n = 1$

P_0 ($1/(1-2/3) = 1 \Rightarrow P_0 = (1-2/3) = 1/3$

3) $L = 0\ P0 + 1\ P1 + 2\ P2 + ... + n\ Pn = 0 + 1\ \lambda/\mu\ P_0 + 2\ (\lambda/\mu)^2 P_0 + ... + n\ (\lambda/\mu)^n\ P_0$

$L = 2/3\ P_0\ (1+2\ (2/3)^2 + 3\ (2/3)^3 + ... + n\ (2/3)^{n-1} = 2/3 * P_0 * [1/(1-2/3)^2] = 2$

$L = \lambda . W$ y por lo tanto, $Lq = \lambda . Wq$ Ley de Little.

$W = L/\lambda = 2 / 10 = 1/5$ de hors = 12 min

2) $L - Lq = \rho \Rightarrow Lq = 2 - 2/3 = 4/3$

2. El Banco Nacional de Occidente piensa abrir una ventanilla de servicio en automóvil para servicio a los clientes. La gerencia estima que los clientes llegarán a una tasa de 15 por hora. El cajero que estará en la ventanilla puede atender clientes a una tasa de uno cada tres minutos.

Suponiendo que las llegadas son de Poisson y que el servicio es exponencial, encuentre:

1. La utilización del cajero.
2. El número promedio en cola.
3. Número promedio en el sistema.
4. Tiempo promedio de espera en cola.
5. Tiempo promedio de espera en el sistema (incluyendo el servicio).

1) $\rho = \lambda/\mu = 15/20 = ¾$

2) $L - Lq = \rho \Rightarrow Lq = 3 - 3/4 = 9/4 = 2,25$

3) $L = 0\ P0 + 1\ P1 + 2\ P2 + ... + n\ Pn = 0 + 1\ \lambda/\mu\ P_0 + 2\ (\lambda/\mu)^2 P_0 + ... + n\ (\lambda/\mu)^n\ P_0$

$L = 3/4\ P_0\ (1+2\ (3/4)^2 + 3\ (3/4)^3 + ... + n\ (3/4)^{n-1} = 4/3 * P_0 * [1/(1-3/4)^2] = 3$

$P_0 + 3/4\ P_0 + (3/4)^2 P_0 + ... + (3/4)^n P_0 = 1$

P_0 [1 + (3/4)+.....+ $(3/4)^n$ = 1

P_0 (1/ (1-3/4) = 1 => P_0 = (1-3/4) = ¼

4) L = λ . W y por lo tanto, Lq = λ . Wq Ley de Little.

Wq = Lq/ λ = 2,25/15 = 0,15 de hors = 9 min

5) W = L/ λ = 3/15 = 0,2 de hors = 12 min

3. El número de tarros de cerveza pedidos en el Dick's Pub sigue una distribución de Poisson con promedio de 30 cervezas por hora.

1. Calcule la probabilidad de que se pidan exactamente 60 cervezas entre las 10 p.m. y las 12 de la noche.
2. Determine el promedio y la desviación estándar del número de cervezas pedidas entre las 9 p.m. y la 1 a.m.
3. Calcule la probabilidad de que el tiempo entre dos pedidos consecutivos sea entre 1 y 3 minutos.

Solución:

1. El número de cervezas pedido entre las 10 p.m. y las 12 de la noche sigue una distribución de Poisson con parámetro 2(30) = 60. La probabilidad de que se pidan 60 cervezas entre las 10 p.m. y la medianoche es:

$$\frac{e^{-60}60^{60}}{60!}$$

2. λ = 30 cervezas por hora; t = 4 horas. Entonces, el número promedio de cervezas pedidas entre las 9 p.m. y la 1 am es 4(30) = 120 cervezas. La desviación estándar del número de cervezas pedido entre las 9 p.m. y la 1 a.m. es (120)1/2 = 10.95.

3. Sen X el tiempo en minutos entre pedidos sucesivos de cerveza. El tiempo promedio de pedidos por minuto es exponencial con parámetro, o razón, 30/60 = .5 cervezas por minuto.

Entonces la función de densidad de probabilidad del tiempo ente pedidos de cerveza es:

$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 a(t)dt = \int_1^3 .5e^{-.5t}dt = e^{-.5} - e^{-1.5} = .38$$

4. Suponga que los nacimientos en un país están separados en el tiempo, de acuerdo con una distribución exponencial, presentándose un nacimiento cada 7 minutos en promedio.

Solución:

Como el tiempo promedio entre arribos (entre nacimientos) es de 7 minutos, la tasa de nacimiento en el país se calcula como:

$$\lambda = \frac{24x60}{7} = 205.7 nacimientos / dia$$

El número de nacimientos en el país por año está dado por:

λ t = 205.7x365 = 75080 nacimientos/año

La probabilidad de ningún nacimiento en cualquier día es:

$$p_o = \frac{(205.7x1)^0 e^{-205.7x1}}{0!} \approx 0$$

Suponga que nos interesa la probabilidad de emitir 45 actas de nacimiento al final de un periodo de 3 horas, si se pudieron emitir 35 actas en las primeras 2 horas.

Observamos que debido a que los nacimientos ocurren según un proceso de Poisson, la probabilidad requerida reduce a tener 45-35=10 nacimientos en una hora (3-2 =1).

Dado λ=60/7=8.57 nacimientos/hora, obtenemos:

$$_{p10}(19) = \frac{(8.57x1)^{10} e^{-8.57x1}}{10!} = 0.11172$$