LÓGICA FUZZY

Marley Maria B.R. Vellasco

ICA: Núcleo de Pesquisa em Inteligência Computacional Aplicada

PUC-Rio

INTRODUÇÃO

- ***Lógica*** ➔ Procura modelar o ***raciocínio.***
- ***Lógica Fuzzy*** →
  - *inspirada na lógica tradicional*
  - *procura modelar os **modos imprecisos do raciocínio** que têm um papel fundamental na habilidade humana de tomar decisões*

INTRODUÇÃO

Lógica Fuzzy fornece o ferramental matemático para tratar ***informações de caráter impreciso ou vago.***

Serve de base para o ***raciocínio aproximado*** (“approximate reasoning”)

INTRODUÇÃO

- ***principais vantagens:***
  - *formulação através de regras linguísticas*
  - *não necessita de modelo matemático formal*
- ***regras linguísticas:***
  - *obtidas através de especialistas*
  - *geradas através de dados numéricos*

DEFINIÇÃO

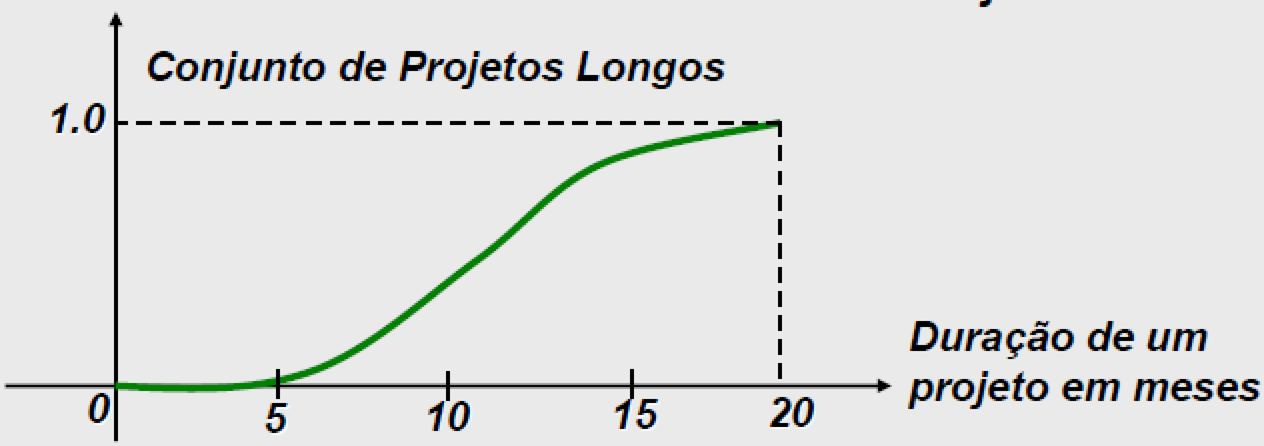
Sistema ***não-linear*** de mapeamento de um ***vetor de entrada*** em uma ***saída escalar***, capaz de incorporar tanto o ***conhecimento objetivo*** quanto o ***conhecimento subjetivo.***

DEFINIÇÃO

- ***Conhecimento Objetivo***
  - Dados históricos
- ***Conhecimento Subjetivo***
  - Representa a **informação lingüística** que é geralmente impossível de quantificar usando matemática tradicional

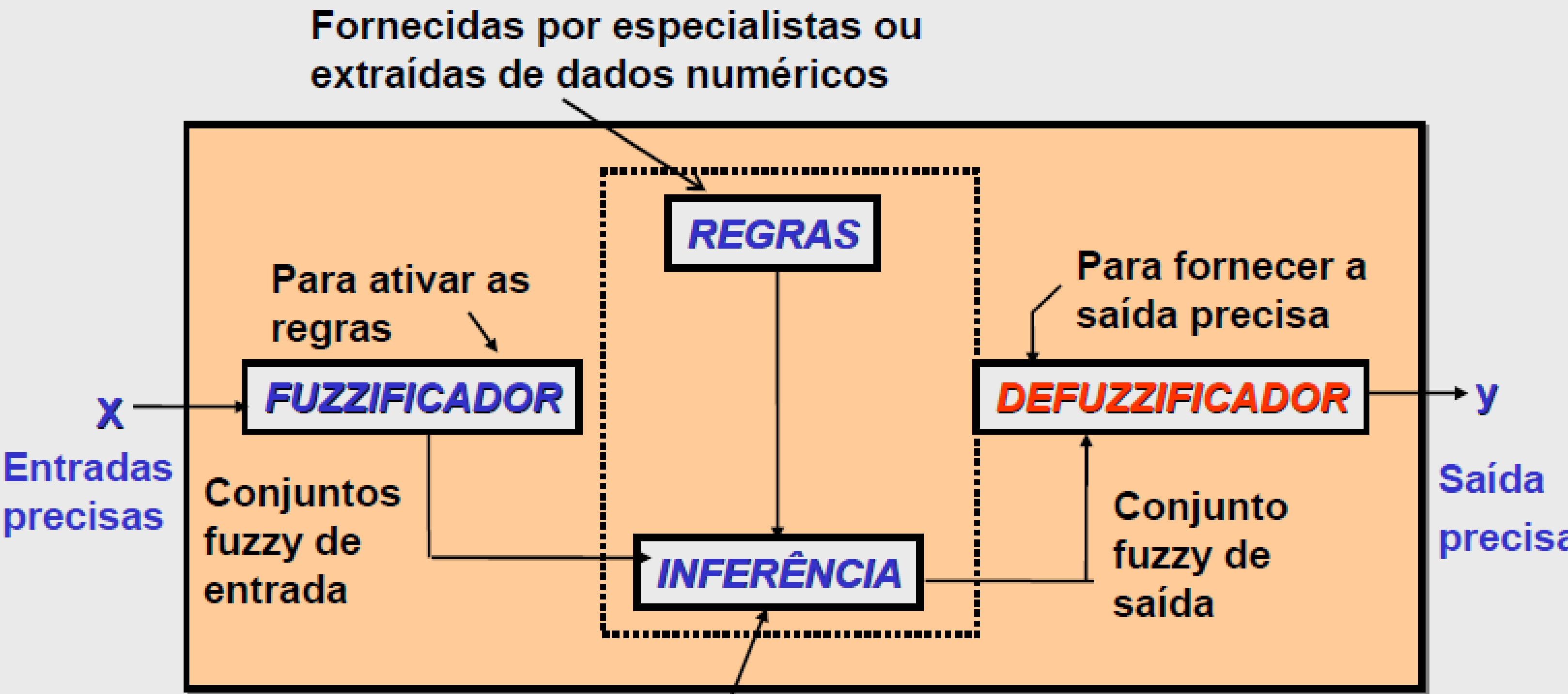
SISTEMA FUZZY

- ***Idéia Básica*** ⇨ **Conjuntos Fuzzy**
  - *Conjuntos Fuzzy* são funções que *mapeiam* um *valor escalar* em um número entre *0* e *1*, o qual indica o seu ***Grau de Pertinência*** a esse conjunto.



SISTEMA FUZZY

Visão Geral:



- Mapeia fuzzy sets em fuzzy sets
- Determina como as regras são ativadas e combinadas

REGRAS FUZZY

- ***Exemplo:***

  antecedente

  SE u_1 É *muito quente* E u_2 É *baixo*

  ENTÃO gire v *um pouco para a direita*

  consequente

- ***Conceitos Importantes:***
  - Variáveis Linguísticas (quente x 36°)
  - Quantificadores (muito, um pouco)
  - Conexões Lógicas (E/OU)
  - Implicações (SE A ENTÃO B)

Formas de Imprecisão

- ***Probabilidade X Lógica Fuzzy:***

Grau de Pertinência ➔ É o nível de compatibilidade de um elemento do conjunto com o conceito do conjunto

Ex: ❶ Pedro é ALTO com μ=0.85

*Indica que Pedro **é bem compatível** com o conceito **ALTO**.*

➔ *Tem-se uma idéia da altura de Pedro.*

❷ Pedro tem 0.85 de probabilidade de ser ALTO

*Indica que Pedro **tem grandes chances** de ser **ALTO**.*

➔ *NÃO se tem a menor idéia da altura de Pedro.*

CONJUNTOS CRISP x FUZZY

- **Conjuntos Ordinários (ou "Crisp")**

  A noção de pertinência é bem definida: elementos **pertencem** ou **não pertencem** a um dado conjunto *A* (em um universo *X*)

$$\boxed{f_A(x) = \begin{cases} 1 \ \ \text{se e somente se} \ \ x \in A \\ \\ 0 \ \ \text{se e somente se} \ \ x \notin A \end{cases}}$$

f **: função característica**

Conjuntos Crisp x Fuzzy

•***Entretanto:*** Existem conjuntos cujo ***limite*** entre pertinência e não-pertinência ***é vago***, com ***transição gradual*** entre esses dois grupos

Exemplos:

- conjunto de ***pessoas altas***
- conjunto de ***carros caros***
- números ***muito maiores que 1***

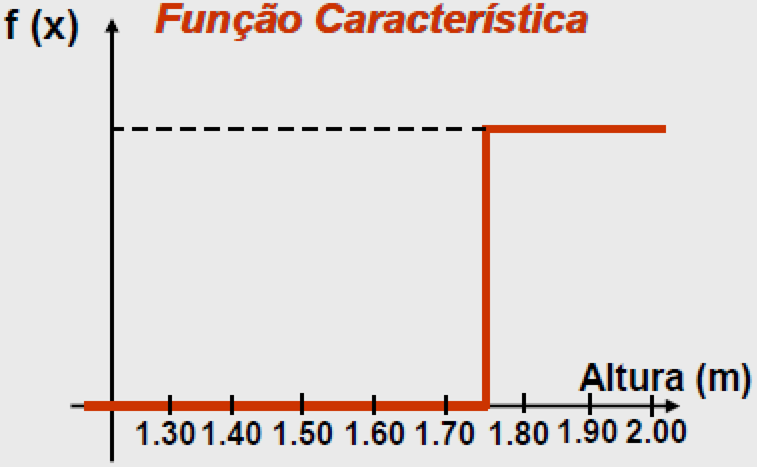
CONJUNTOS FUZZY

- **Conjuntos Fuzzy**
  - A função característica é generalizada, podendo assumir um número infinito de valores no intervalo [0,1] → *função de pertinência*
  - Um conjunto fuzzy ***A*** em um universo ***X*** é definido por uma *função de pertinência*

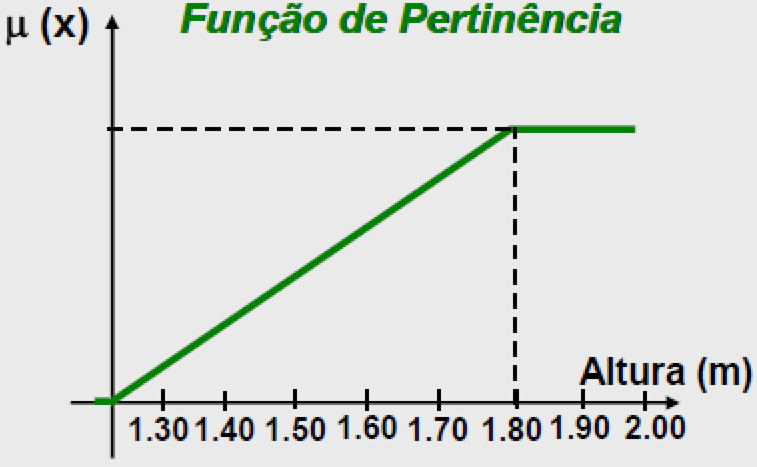
$$\mu_A(x)\colon X \to [0,1]$$

Conjuntos Crisp x Fuzzy

- **Exemplos:** ① *Pessoas Altas*



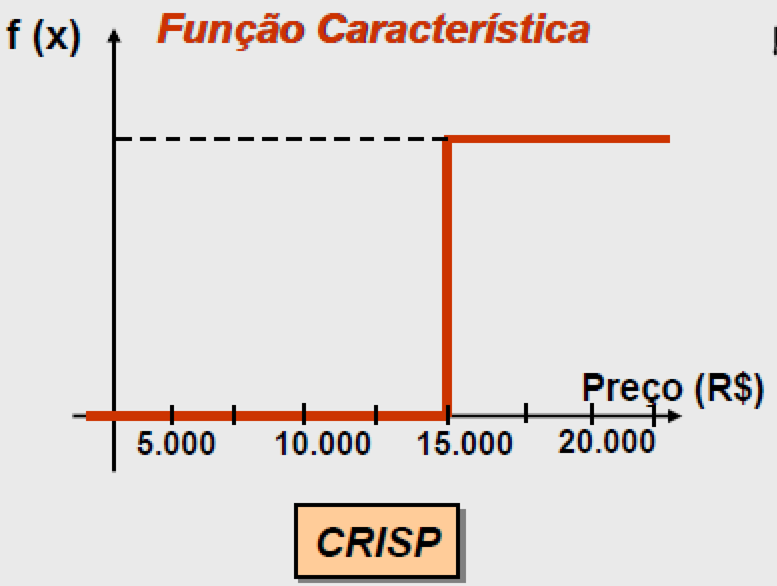
CRISP

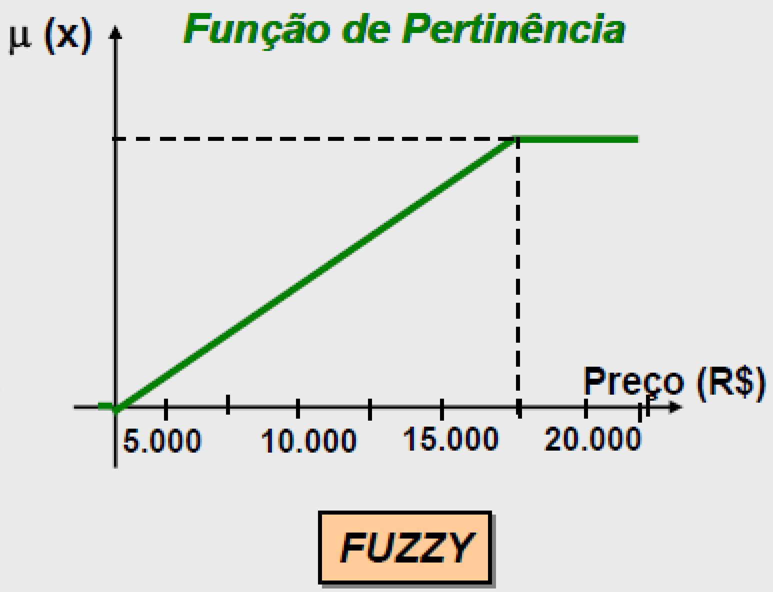


FUZZY

Conjuntos Crisp x Fuzzy

- **Exemplos:** ② Carros Caros



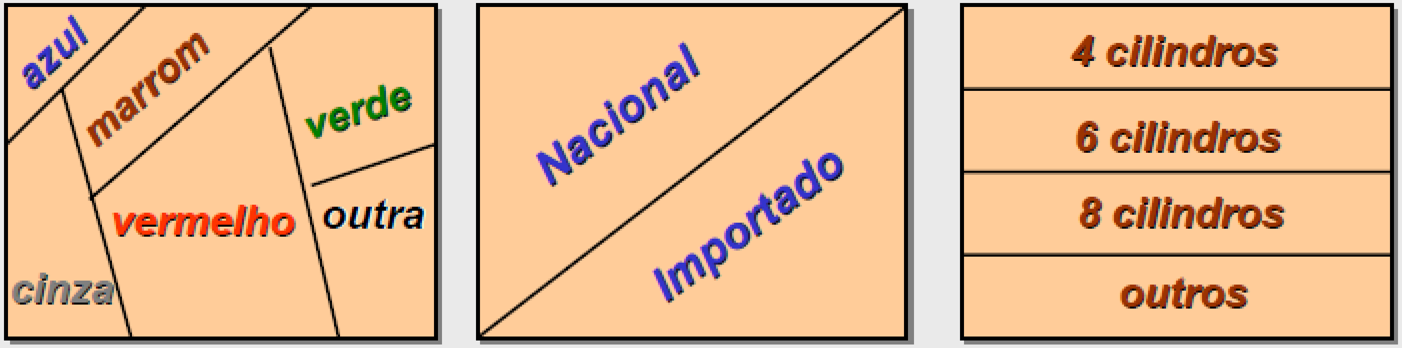


Conjuntos Crisp

- **Exemplos:**

U = todos os automóveis do Rio de Janeiro

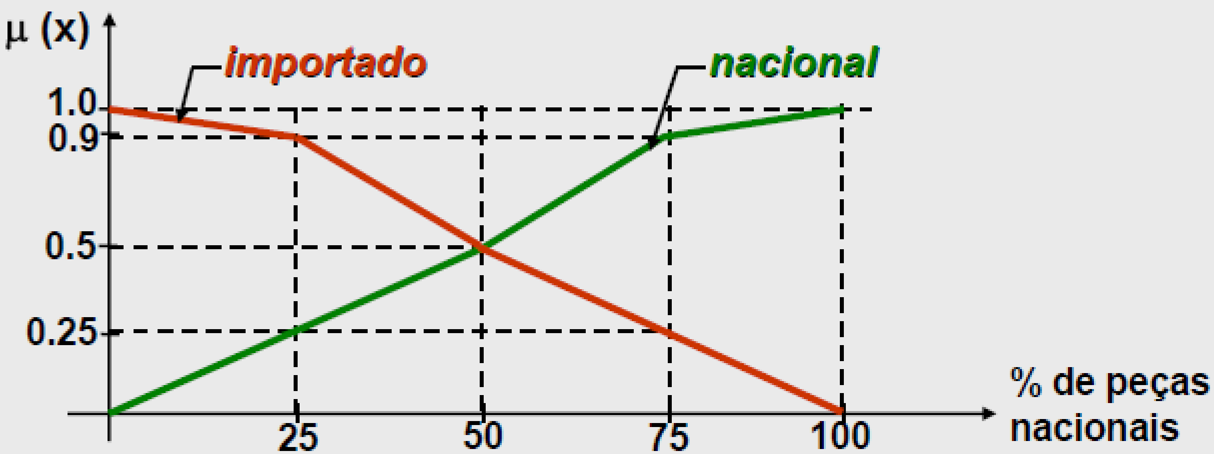
Sub-Conjuntos de U:



Conjuntos Fuzzy

- Conjunto ***A*** no Universo de Discurso ***U*** com $\underbrace{\mu_A(x) \in [0,1]}$

medida do grau de compatibilidade de um ***elemento <u>x</u> em <u>U</u>*** com o ***subconjunto <u>F</u>***



Conjuntos Fuzzy

- ***Representação:***
  - Um conjunto fuzzy ***A*** em ***X*** pode ser representado como um ***conjunto de pares ordenados*** de um elemento genérico ***x*** e seu ***grau de pertinência***

$$\boxed{A = \{\mu_A(x)/x\} \quad x \in X}$$

CONJUNTOS FUZZY

- ***Outra Representação:***

X contínuo:

$$\boxed{\int_X \mu_A(x) / x}$$

denota a coleção de todos os pontos $x \in X$ com função de pertinência $\mu(x)$

X discreto:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i) / x_i}$$

denota a união de todos os pontos $x_i \in X$ com graus de pertinência $\mu(x_i)$

Conjuntos Fuzzy

Exemplo: seja A = inteiros próximos de 10

X = {n° inteiros de 1 a 20}

$A = 0.1/7 + 0.5/8 + 0.8/9 + 1/10 + 0.8/11 + 0.5/12 + 0.1/13$

Observações:

❶ Os **inteiros não especificados** possuem $\mu_A(x) = 0$

❷ Os valores de $\mu_A(x)$ **são escolhidos** ⇨ exceto para $\mu_A(x)=1.0$, todos os outros valores podem ser modificados.

❸ A **Função de Pertinência**, neste caso específico, deve ser **simétrica**.

PROPRIEDADES

- ***Altura:***

*É o **maior grau de pertinência** permitido pela função de pertinência*

PROPRIEDADES

- **Normalização:**

*Um certo conjunto fuzzy é **normal** se a sua **altura** for **igual a 1***

Forma normal mínima
pelo menos um elemento tem $\mu(x) = 1$

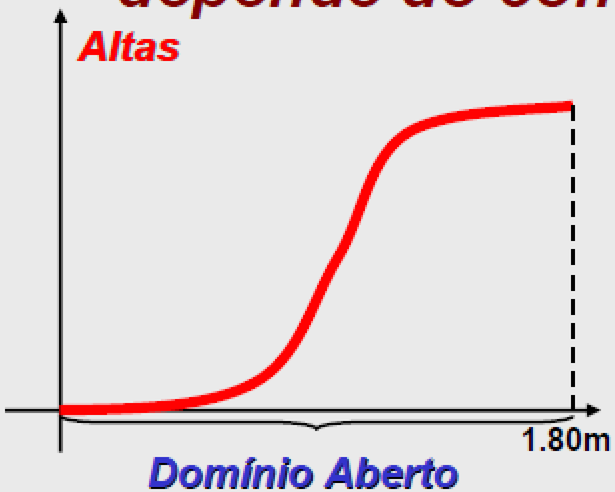
Forma normal máxima
pelo menos um elemento tem $\mu(x) = 1$ *e outro elemento tem* $\mu(x) = 0$

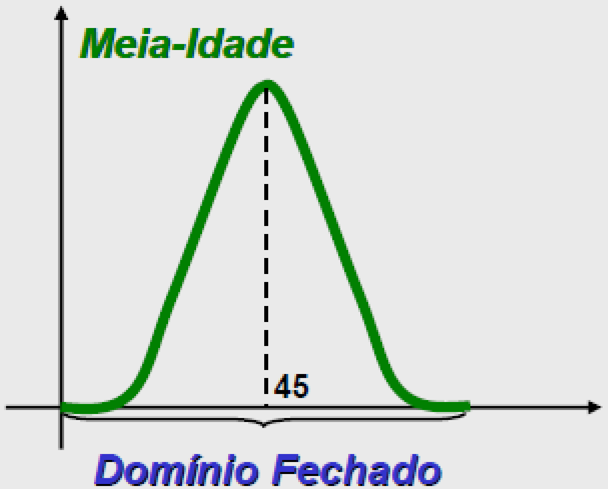
- ***Para um bom desempenho, os conjunto fuzzy devem ser normalizados***

ICA

PROPRIEDADES

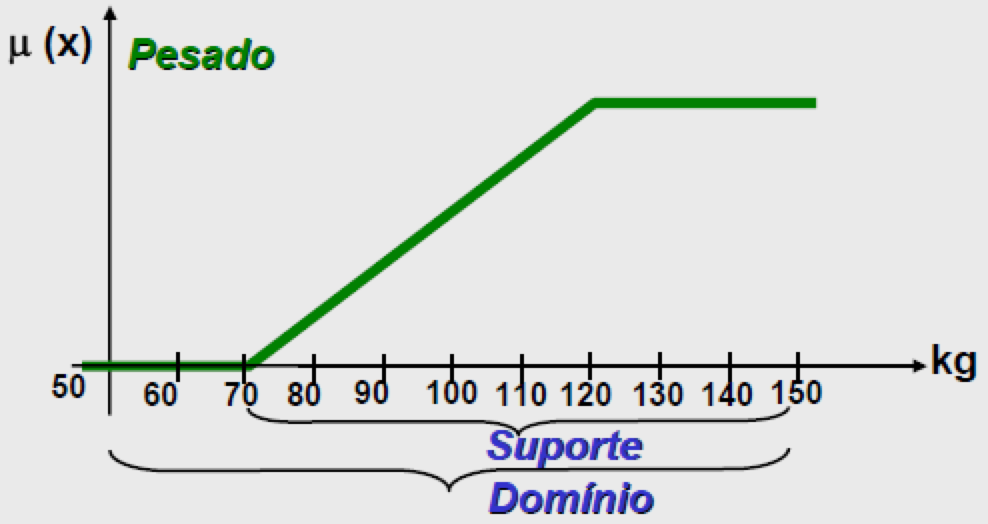
- **Domínio do Conjunto Fuzzy:**
  - É o universo total de valores possíveis para os elementos de um conjunto ➔ depende do contexto





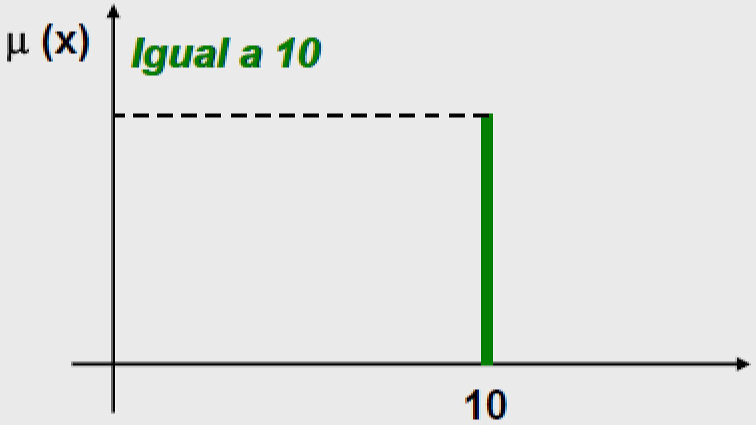
PROPRIEDADES

- **Suporte do Conjunto:**
  - É a área efetiva do domínio de um conjunto fuzzy que apresenta valores de $\mu(x) > 0$



PROPRIEDADES

- ***Observação:***
  - *O conjunto Fuzzy cujo **suporte** é um **único ponto em X**, com valor de μ (x) = 1, é chamado de **Conjunto Singleton***



PROPRIEDADES

- ***Conjunto α-cut:***
  - *É uma restrição (limite) imposta ao domínio, baseada no valor de α*
  - *Contém todos os elementos do domínio que possuam $\mu(x)$ acima de um certo valor de α*

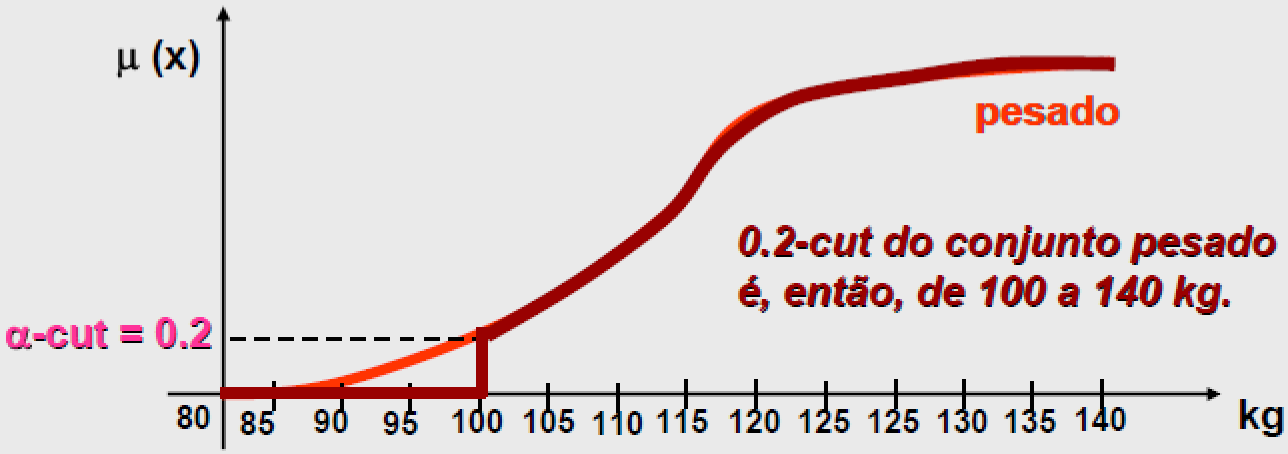
$\mu(x) \geq \alpha$ ➔ α-cut fraco

$\mu(x) > \alpha$ ➔ α-cut forte

PROPRIEDADES

- **Conjunto α-cut:**
  - *útil para as funções com longos "tails", que tendem a possuir valores **muito baixos de μ(x) por um domínio extenso***

    ➔ ***ajuda a reduzir ruído***



PROPRIEDADES

- **Conjunto α-cut:**

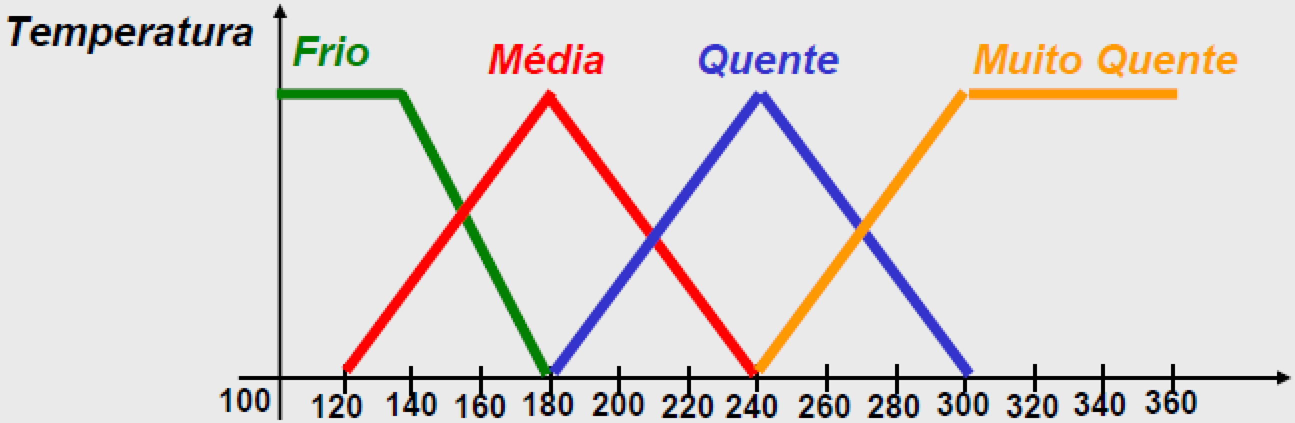
Idade	Criança	Jovem	Adulto	Velho
5	1	.1	0	0
10	.8	.3	0	0
20	.1	.8	.7	.1
30	0	.5	1	.2
40	0	.2	1	.4
50	0	.1	1	.6
60	0	0	1	.8
70	0	0	1	1
80	0	0	1	1

Conjuntos α-cut do conjunto VELHO:

- $velho_{.2} = \{30,40,50,60,70,80\}$
- $velho_{.8} = \{60,70,80\}$
- $velho_{1.0} = \{70,80\}$

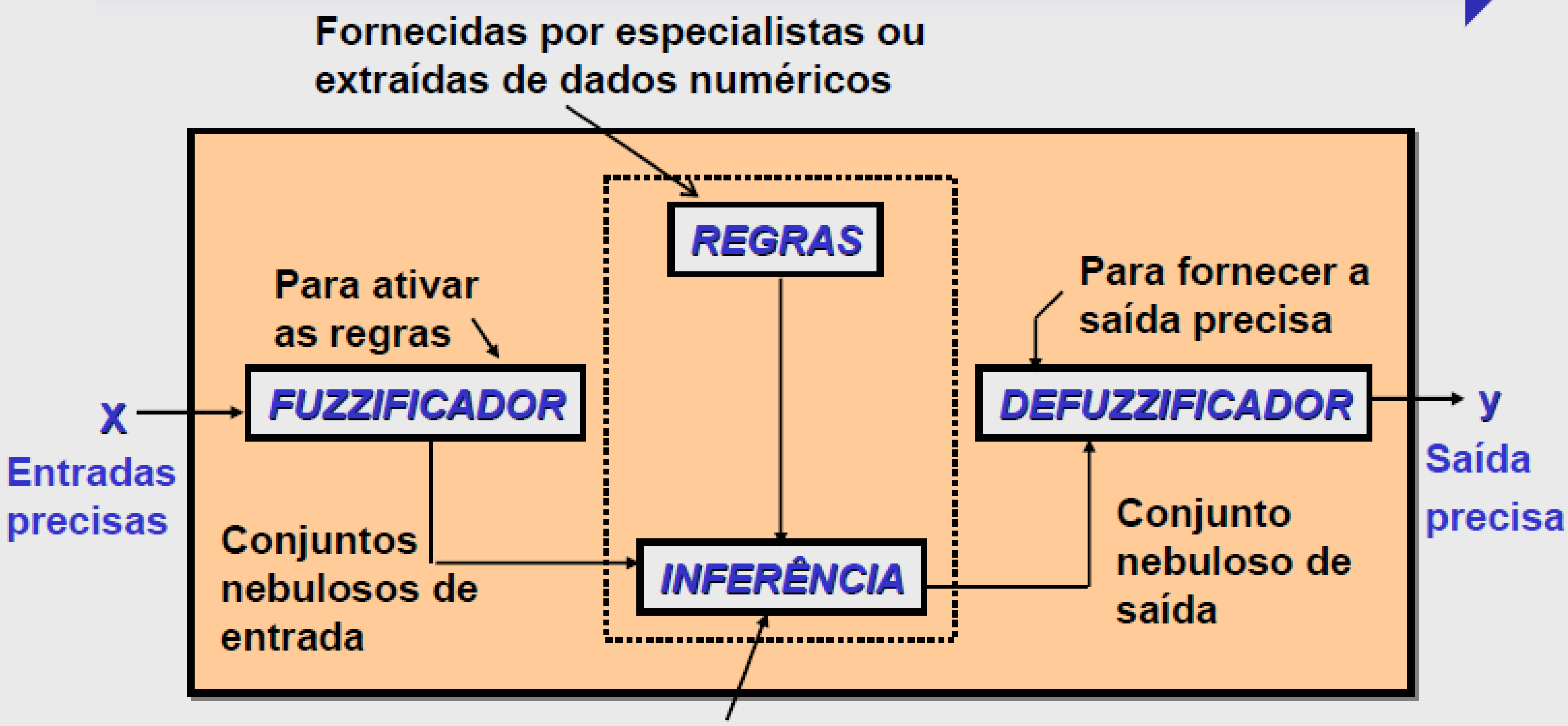
PROPRIEDADES

- ***Universo de Discurso:***
  - *É o espaço fuzzy completo de variação de **uma variável** do modelo.*



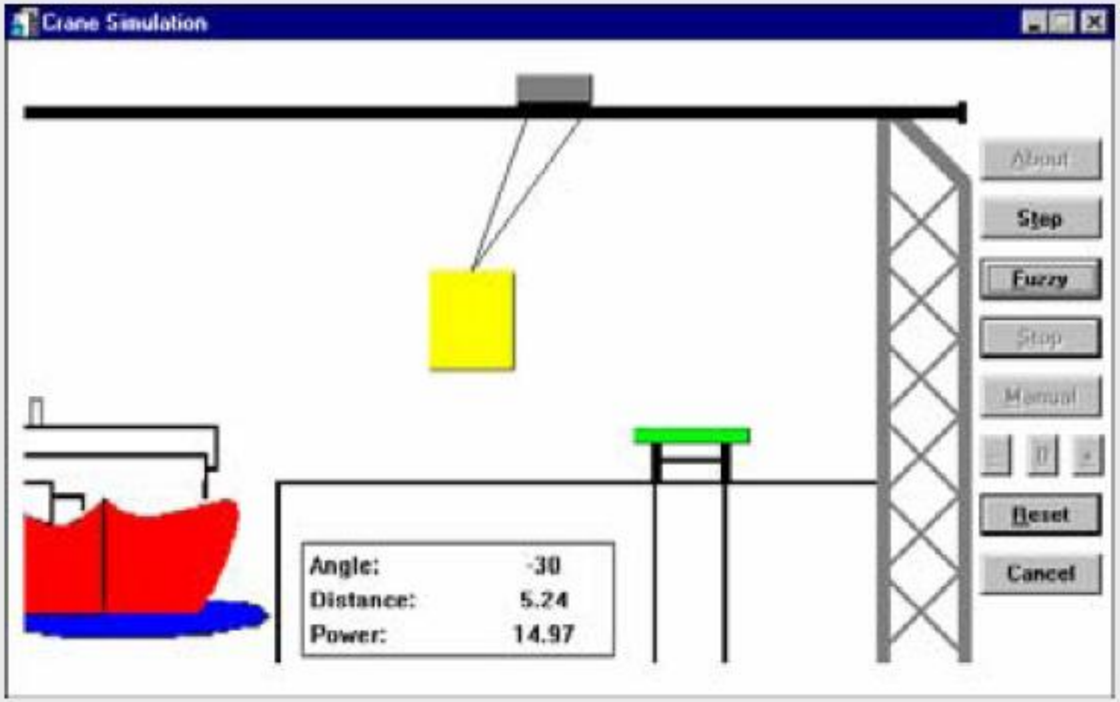
Universo de Discurso para a variável do modelo TEMPERATURA é de 100° a 360°

SISTEMA FUZZY



- Mapeia fuzzy sets em fuzzy sets
- Determina como as regras são ativadas e combinadas

Exemplo do Guindaste



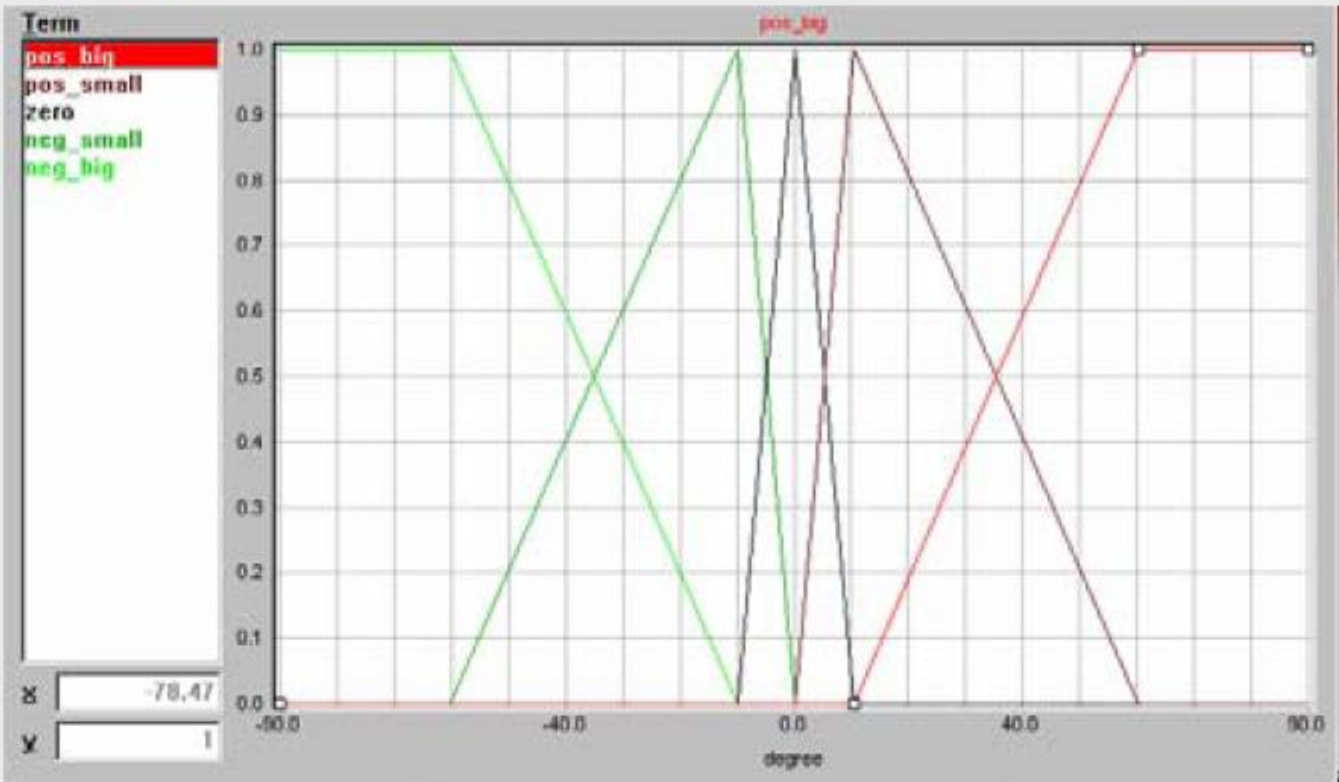
Conjuntos Nebulosos

- ***Variáveis de Entrada:***
  - distância
  - ângulo

- ***Variável de Saída:***
  - Potência

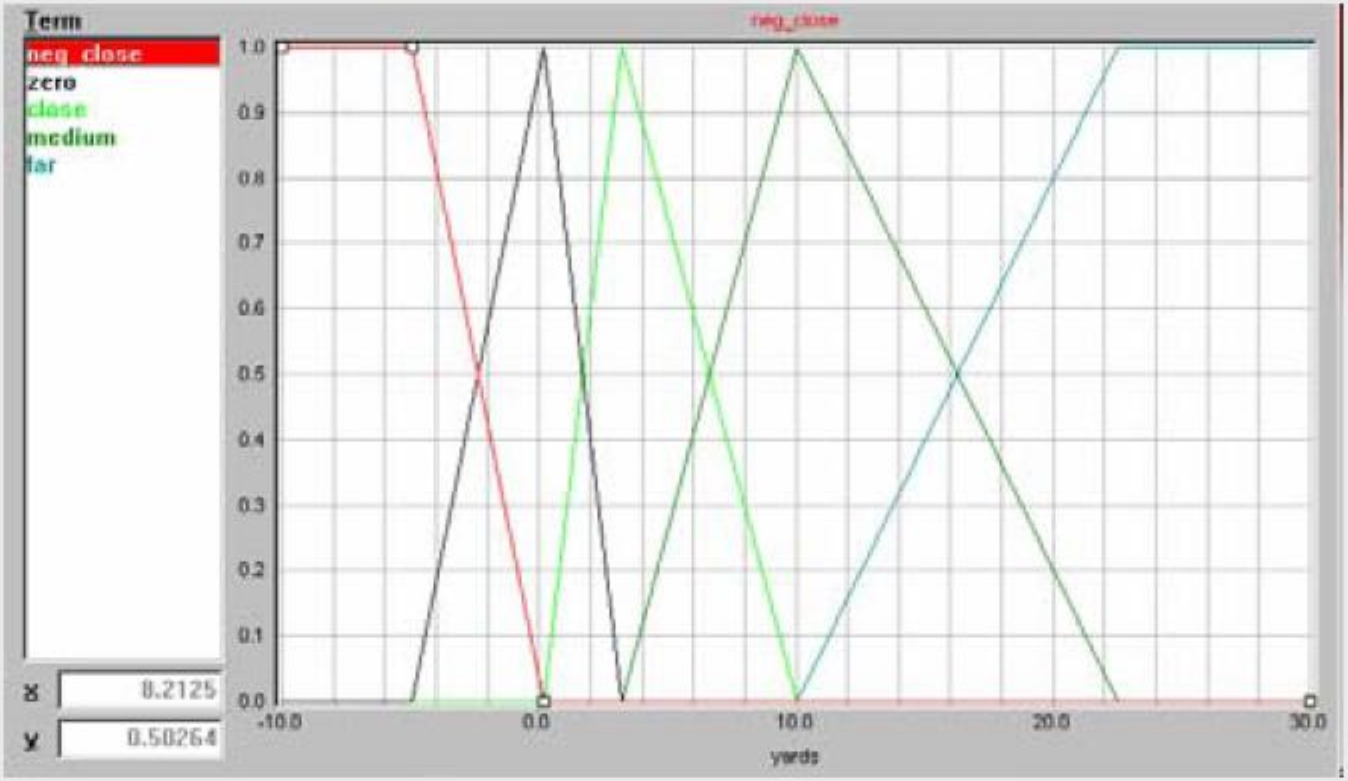
Variáveis de Entrada

Ângulo



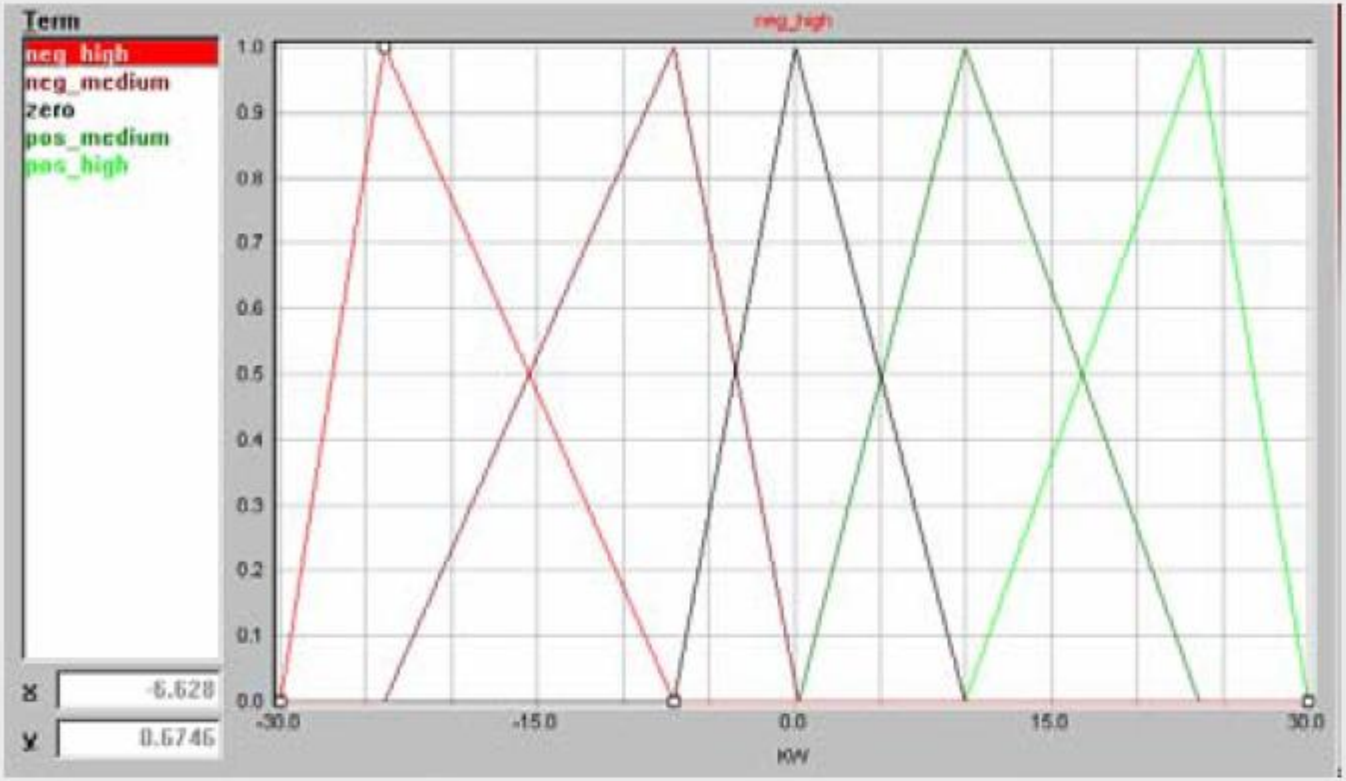
Variáveis de Entrada

Distância



Variável de Saída

Potência



MÓDULO DE REGRAS

REGRAS FUZZY

- ***Exemplos:***

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Zero**
Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**
Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**

Se **DISTÂNCIA** = **Medium** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**
Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**

INFERÊNCIA

INFERÊNCIA

Dados de Entrada:

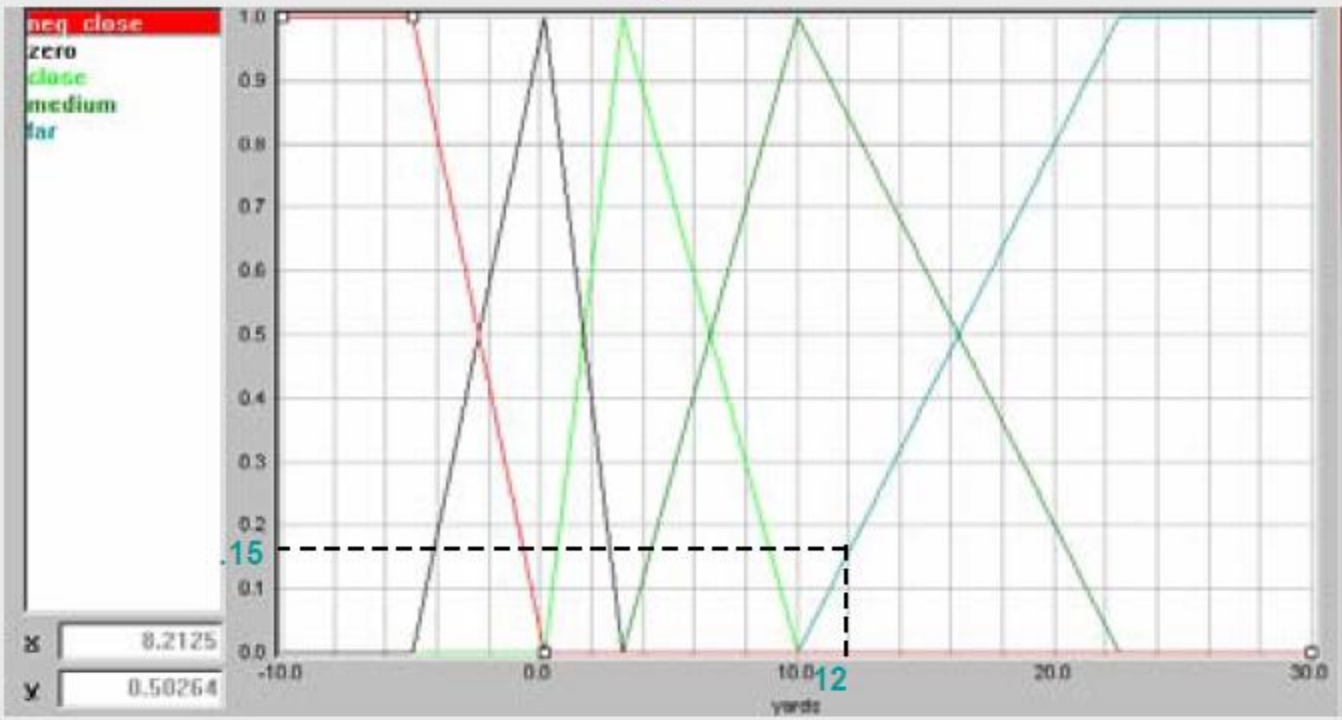
distância ⇨ 12 jardas

ângulo ⇨ -4°

REGRA NÚMERO 1

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Zero**

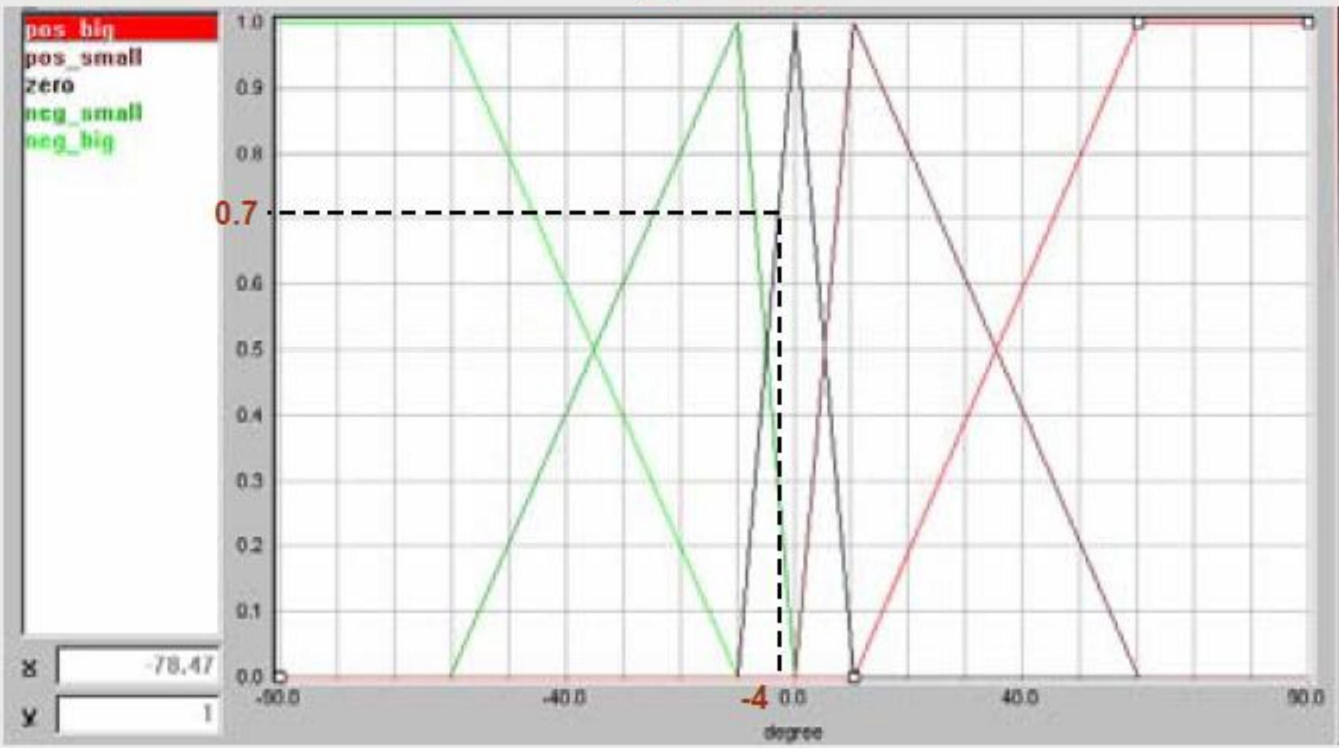
Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**



REGRA NÚMERO 1

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Zero**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**



INFERÊNCIA - Antecedente

- ***Portanto:***
  - Cálculo do antecendente da regra 1:

Se $\boxed{\textbf{DISTÂNCIA} = \textbf{Far}}$ e $\boxed{\textbf{ÂNGULO} = \textbf{Zero}}$

Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**

$\mu_{FAR}(x) = 0.15 \quad \cap \quad \mu_{ZERO}(x) = 0.7$

$\Downarrow$

$\mu_{Far \cap zero} = 0.15$

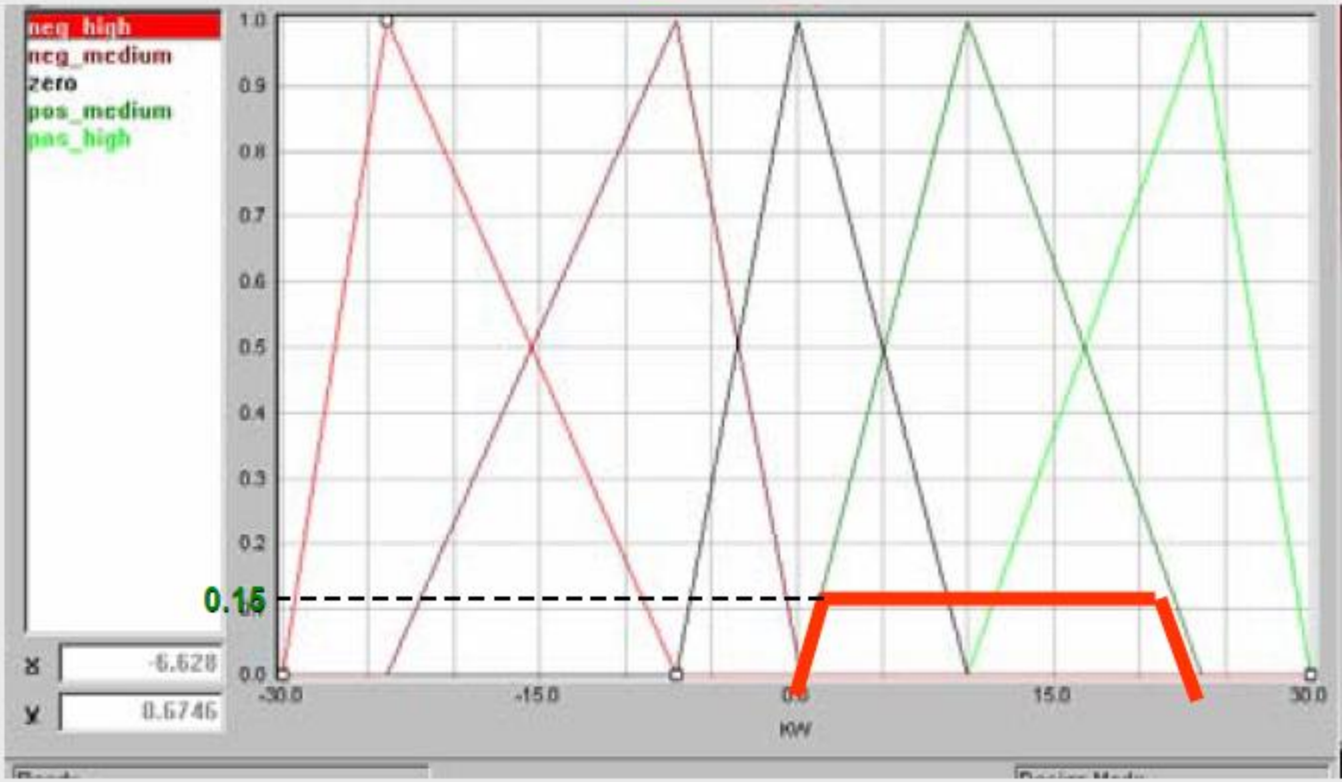
INFERÊNCIA - Consequente

- Como o ***antecedente*** é ***verdadeiro*** com grau de pertinência ***0.15***, o ***consequente*** deve ter ***no máximo*** um grau de veracidade de ***0.15***.

INFERÊNCIA - Consequente

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Zero**

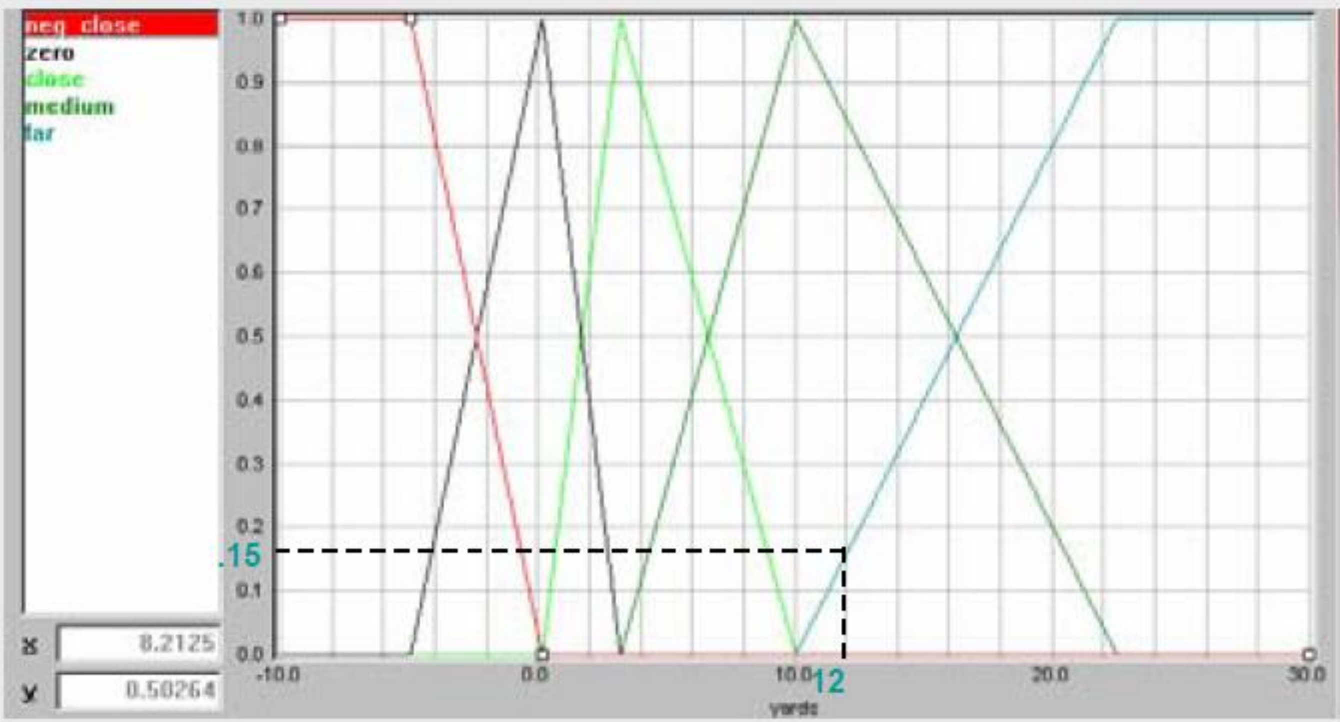
Então **POTÊNCIA** = **Pos_Medium**



REGRA NÚMERO 2

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

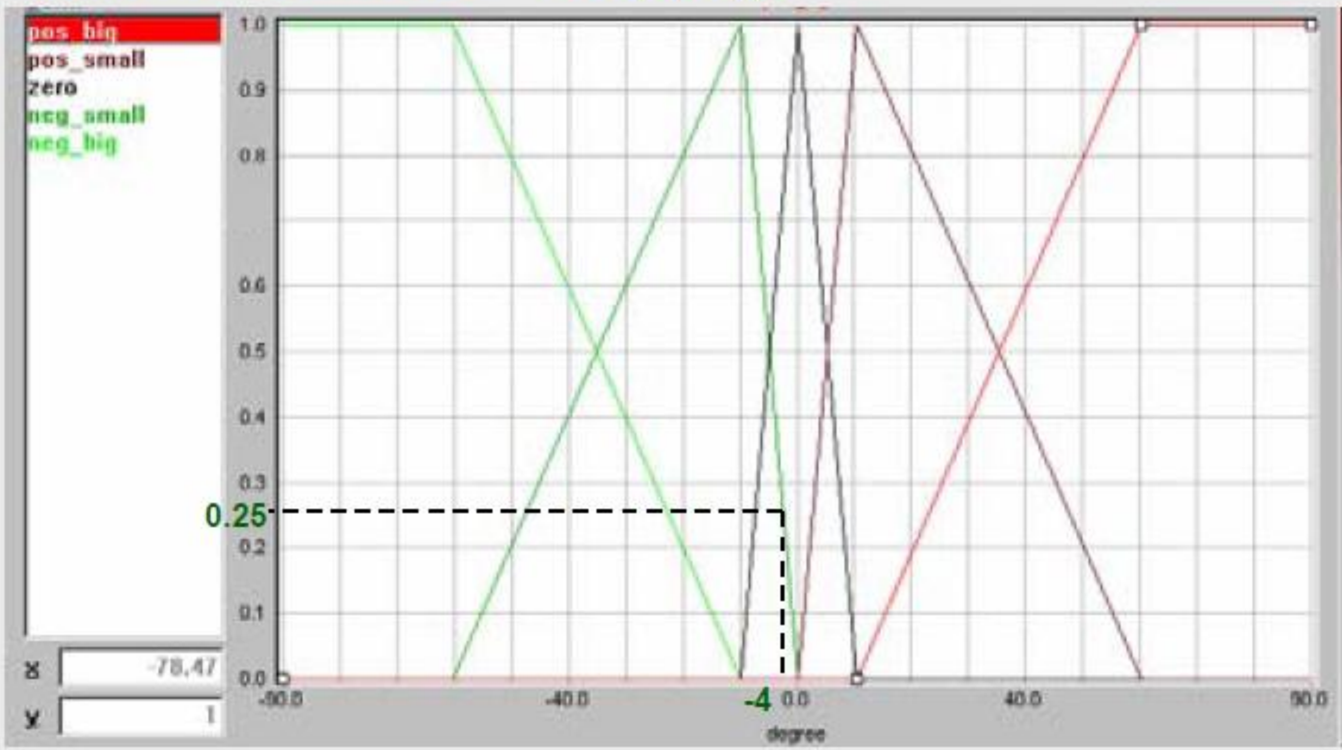
Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**



REGRA NÚMERO 2

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**



INFERÊNCIA - Antecedente

- ***Portanto:***
  - Cálculo do antecendente da regra 2:

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**

$\mu_{FAR}(x) = 0.15 \quad \cap \quad \mu_{NEG\_SMALL}(x) = 0.25$

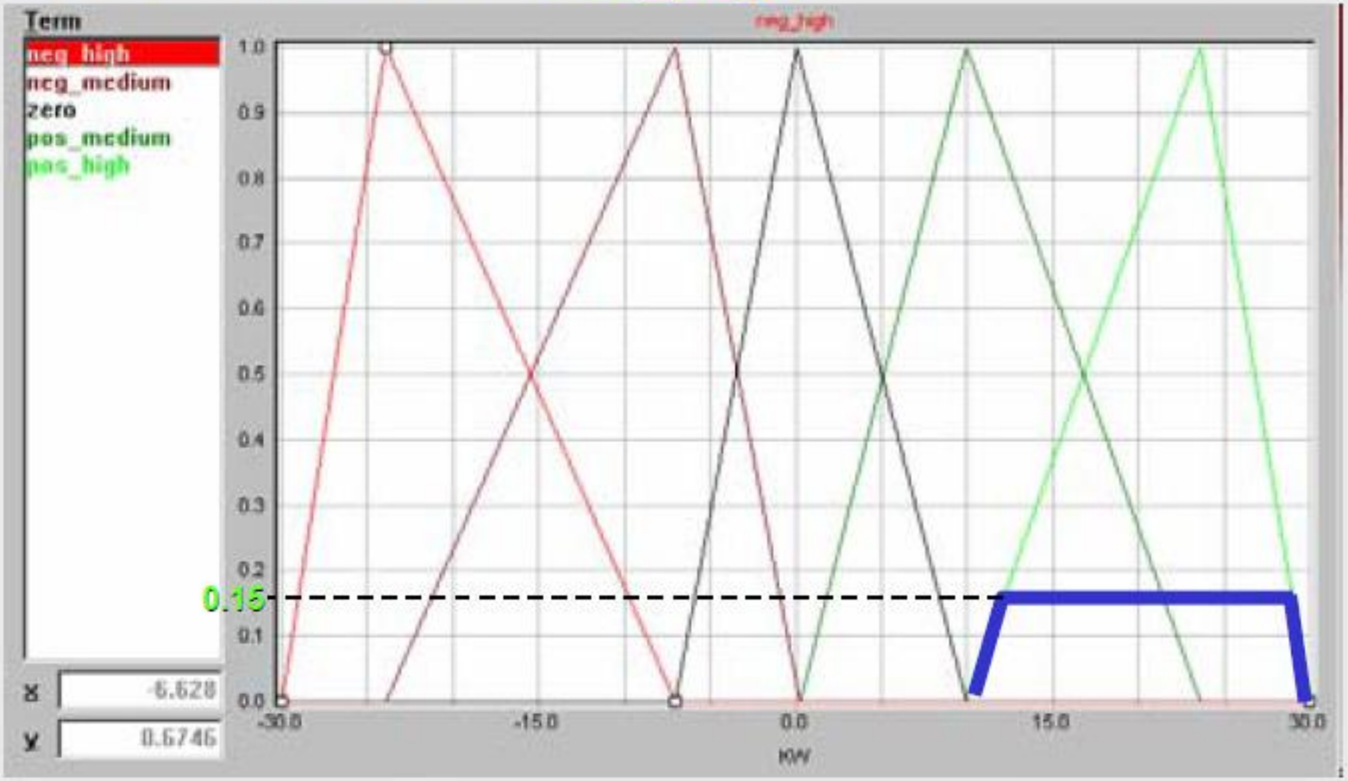
$\Downarrow$

$\mu_{FAR \cap NEG\_small} = 0.15$

INFERÊNCIA - Consequente

Se **DISTÂNCIA** = **Far** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

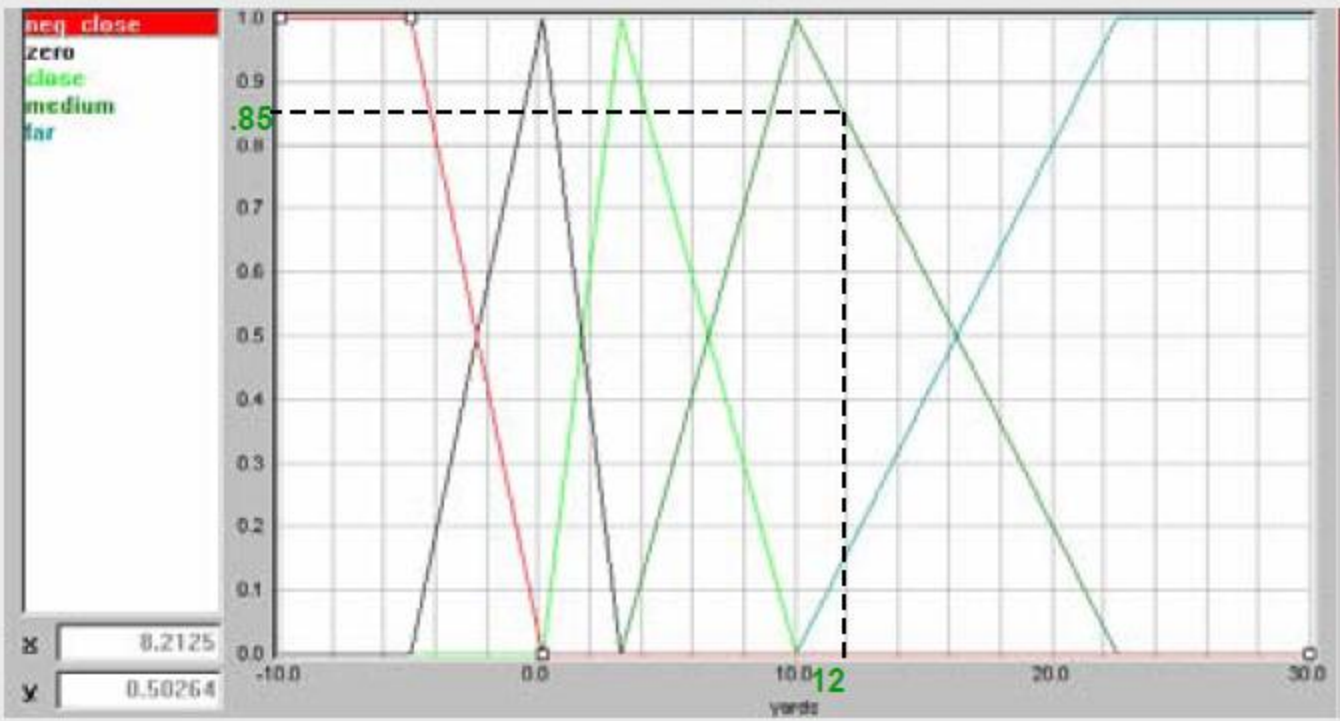
Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**



REGRA NÚMERO 3

Se **DISTÂNCIA** = **Medium** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

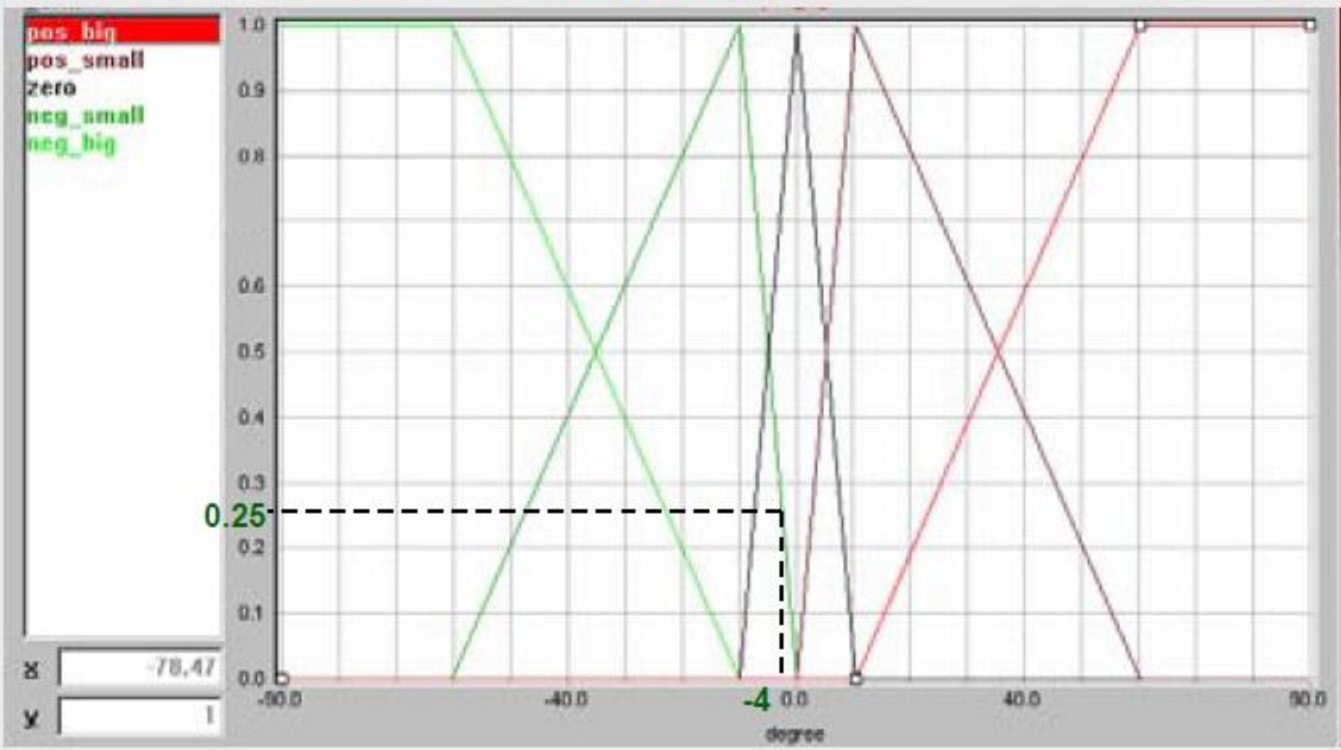
Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**



REGRA NÚMERO 3

Se **DISTÂNCIA** = **Medium** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**



INFERÊNCIA - Antecedente

- ***Portanto:***
  - Cálculo do antecendente da regra 3:

Se **DISTÂNCIA** = **Medium** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**

$$\mu_{MEDIUM}(x) = 0.85 \quad \cap \quad \mu_{NEG\_SMALL}(x) = 0.25$$

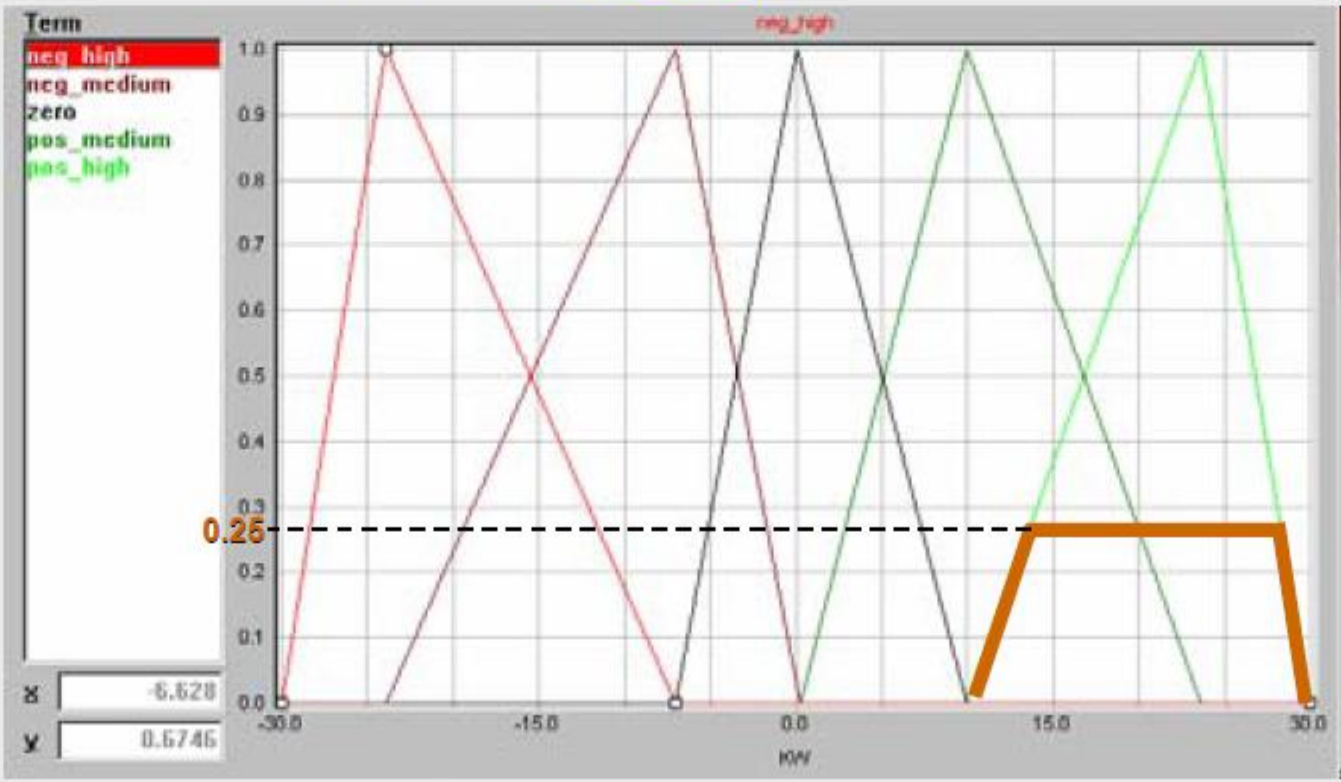
$$\Downarrow$$

$$\mu_{medium \cap NEG\_small} = 0.25$$

INFERÊNCIA - Consequente

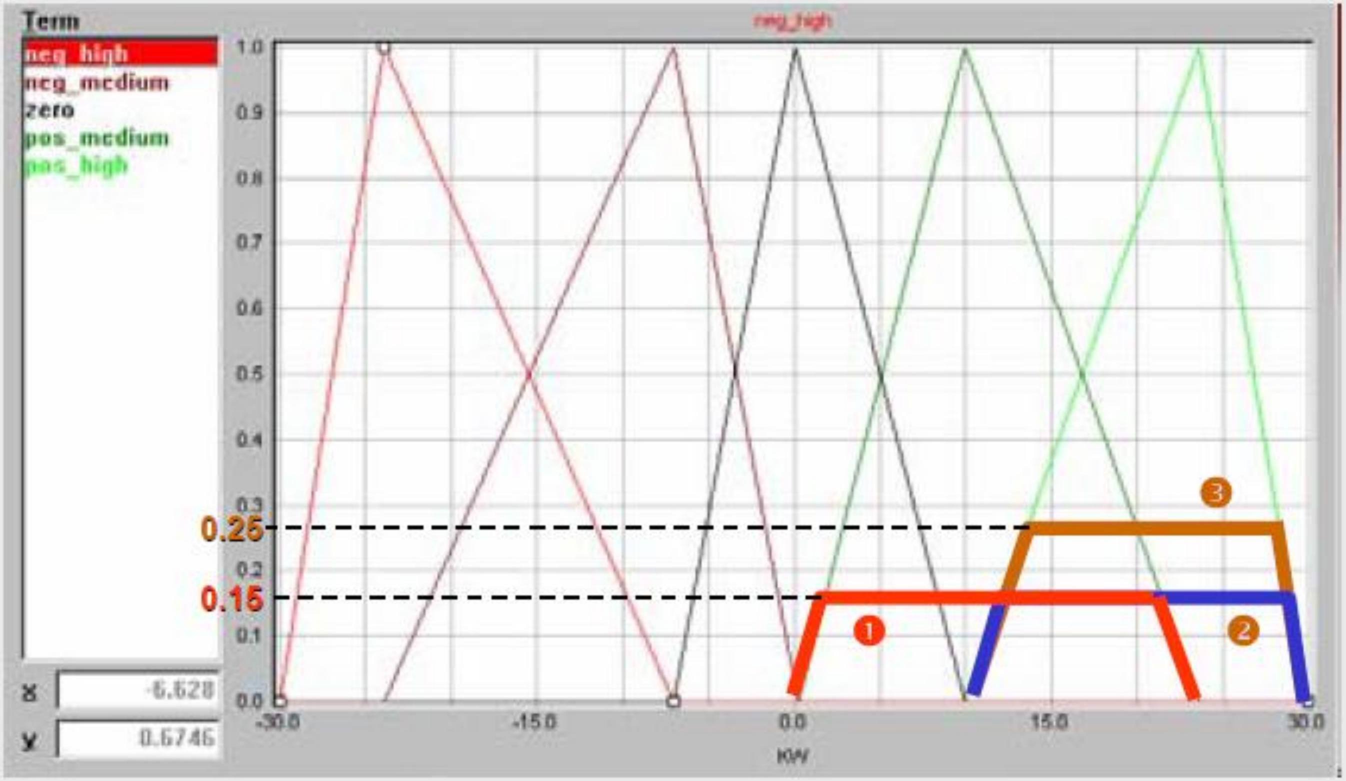
Se **DISTÂNCIA** = **Medium** e **ÂNGULO** = **Neg_Small**

Então **POTÊNCIA** = **Pos_High**



INFERÊNCIA

Composição ➔ União de **TODAS** as regras com ***Grau de ativação*** diferente de **ZERO**



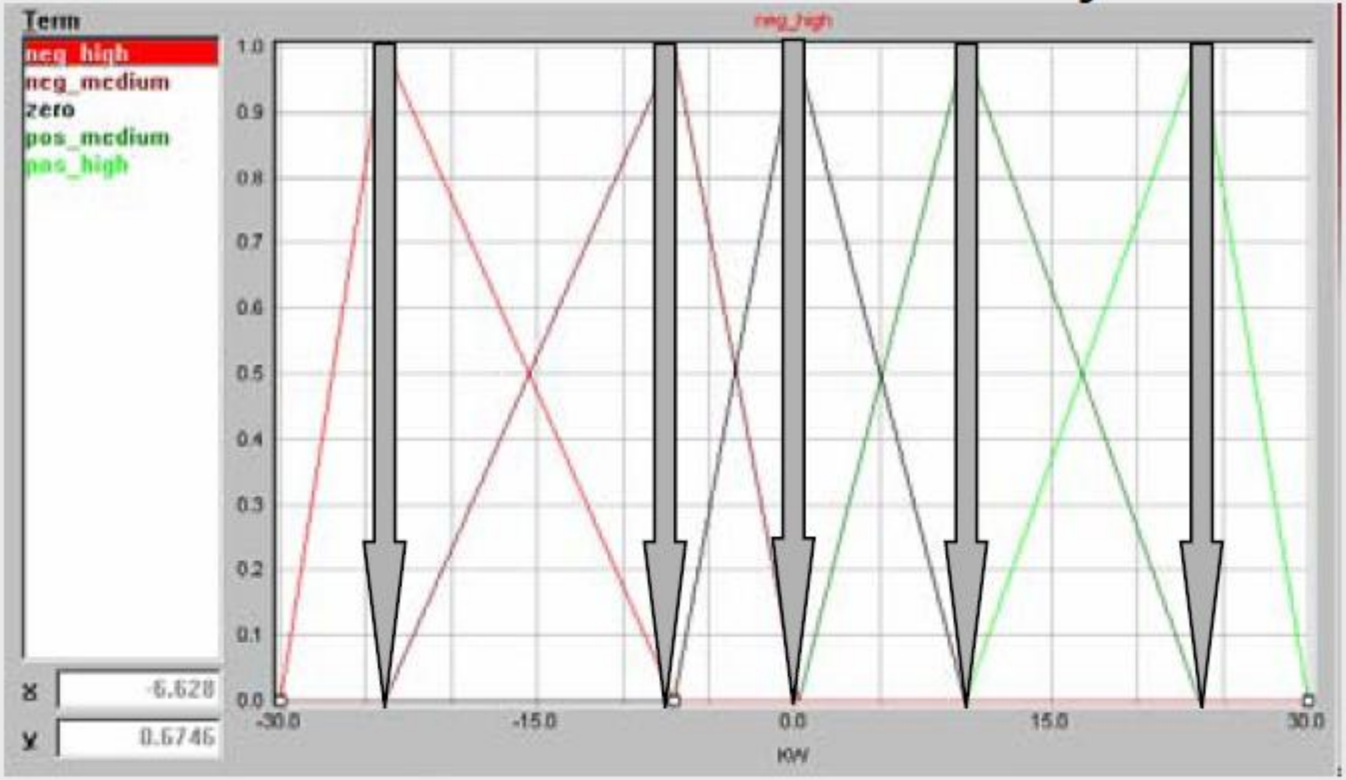
DEFUZZIFICADOR

DEFUZZIFICADOR

Transforma o **conjunto nebuloso** obtido pela **Inferência** e transforma em um **valor preciso**

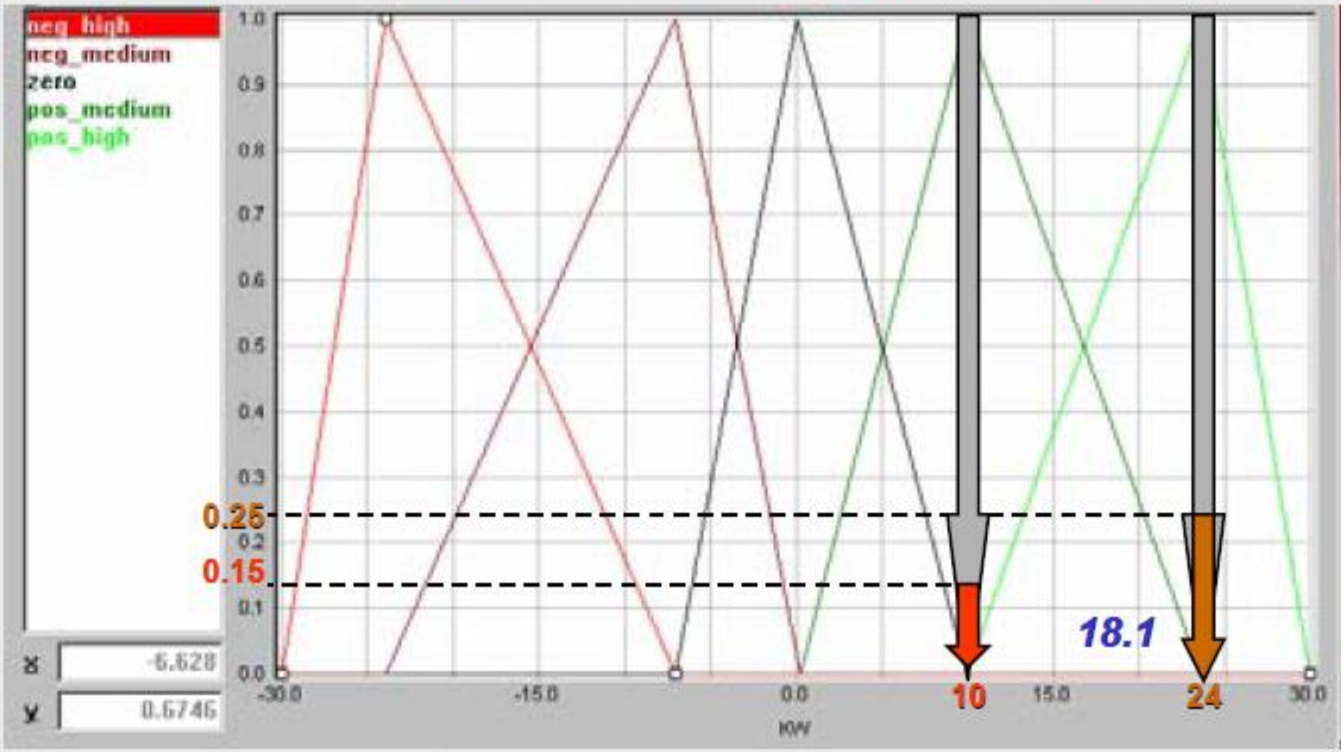
DEFFUZIFICADOR

Um Método possível: *Avalia-se os valores* ***TÍPICOS*** *de cada conjunto*



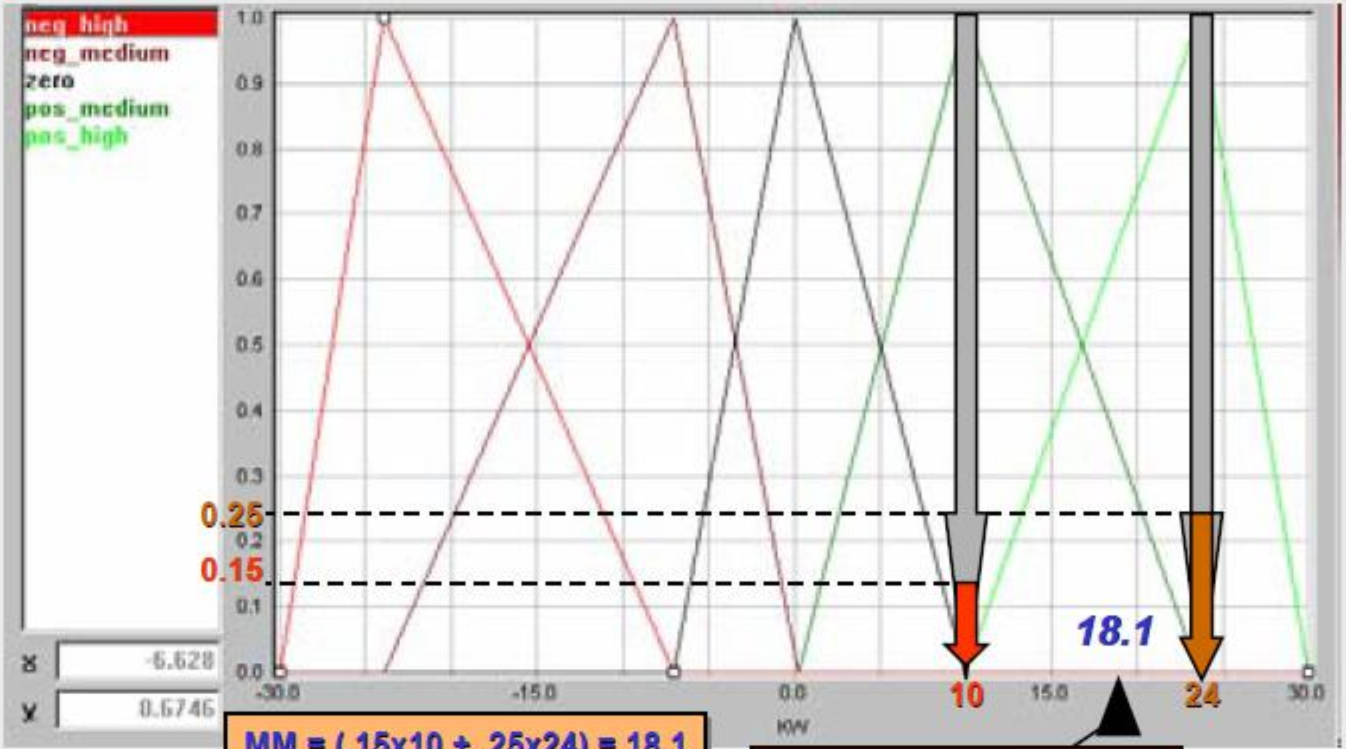
INFERÊNCIA

Pondera-se o valor típico com o seu grau de pertinência



INFERÊNCIA

Pondera-se o valor típico com o seu grau de pertinênci



$$MM = \frac{(.15 \times 10 + .25 \times 24)}{(.15 + .25)} = 18.1$$

Média dos Máximos

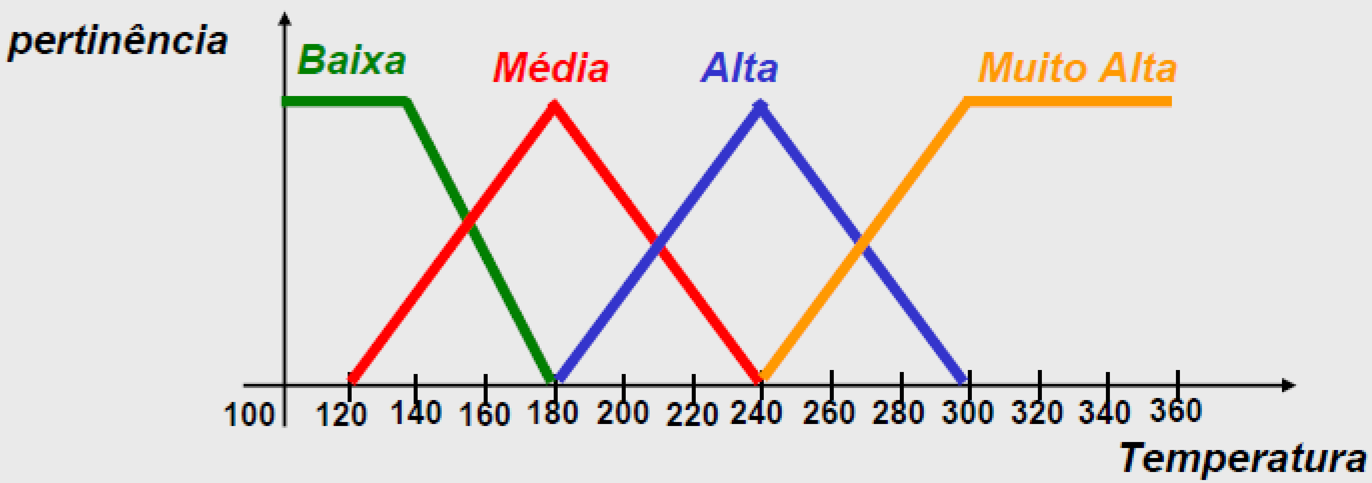
Variáveis Linguísticas

- Têm a função de fornecer uma maneira sistemática para uma **caracterização aproximada de fenômenos complexos** ou mal definidos
- Por exemplo:
  - temperatura;
  - idade.

Variáveis Linguísticas

- ***Variável linguística:*** variável cujos ***valores*** são nomes de conjuntos fuzzy

Exemplo: temperatura de um processo



Variáveis Linguísticas

- ***Formalismo:*** caracterizada por uma quíntupla (N, $T(N)$, X, G, M), onde:

  N: nome da variável
  ex: temperatura

  T(*N*): conjunto de termos de N, ou seja, o **conjunto de nomes dos valores linguísticos** de N
  {baixa, média, alta, muito alta}

  X: **universo de discurso** (espaço fuzzy completo de variação de uma variável do modelo)
  100 a 360 °C

Variáveis Linguísticas

G: **regra sintática para gerar os *valores* de N** como uma composição de termos de ***T*(*N*), conectivos lógicos, modificadores e delimitadores**

temperatura *não baixa*

temperatura *não muito alta*

M: **regra semântica**, para associar a cada valor gerado por *G* um conjunto fuzzy em *X*

associa os *valores* acima a *conjuntos fuzzy* cujas *funções de pertinência* exprimem seus significados

Funções de Pertinência

- Aos ***termos*** de uma ***variável linguística*** (ou aos seus ***valores***) faz-se corresponder conjuntos fuzzy, definidos por suas *funções de pertinência*

- Podem ter formas padrão ou definidas pelo usuário

Funções de Pertinência

- ***Contínuas***: podem ser definidas por meio de funções analíticas

$$\boxed{\mu_A(x) = (1 + (a(x - c))^b)^{-1}}$$

$$\mu_{pequeno}(x) = (1 + 9x^2)^{-1}$$

$$\mu_{médio}(x) = (1 + 9(x - 0{,}5)^2)^{-1}$$

$$\mu_{grande}(x) = (1 + 9(x - 2)^2)^{-1}$$

Funções de Pertinência

- ***Discretas***: consistem em valores discretos correspondendo a elementos (discretos) do universo

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mu_{pequeno}(x) = \{0{,}3;\ 0{,}7;\ 1;\ 0{,}7;\ 0{,}3;\ 0;\ 0\}$$

$$\mu_{médio}(x) = \{0;\ 0;\ 0{,}3;\ 0{,}7;\ 1;\ 0{,}7;\ 0{,}3\}$$

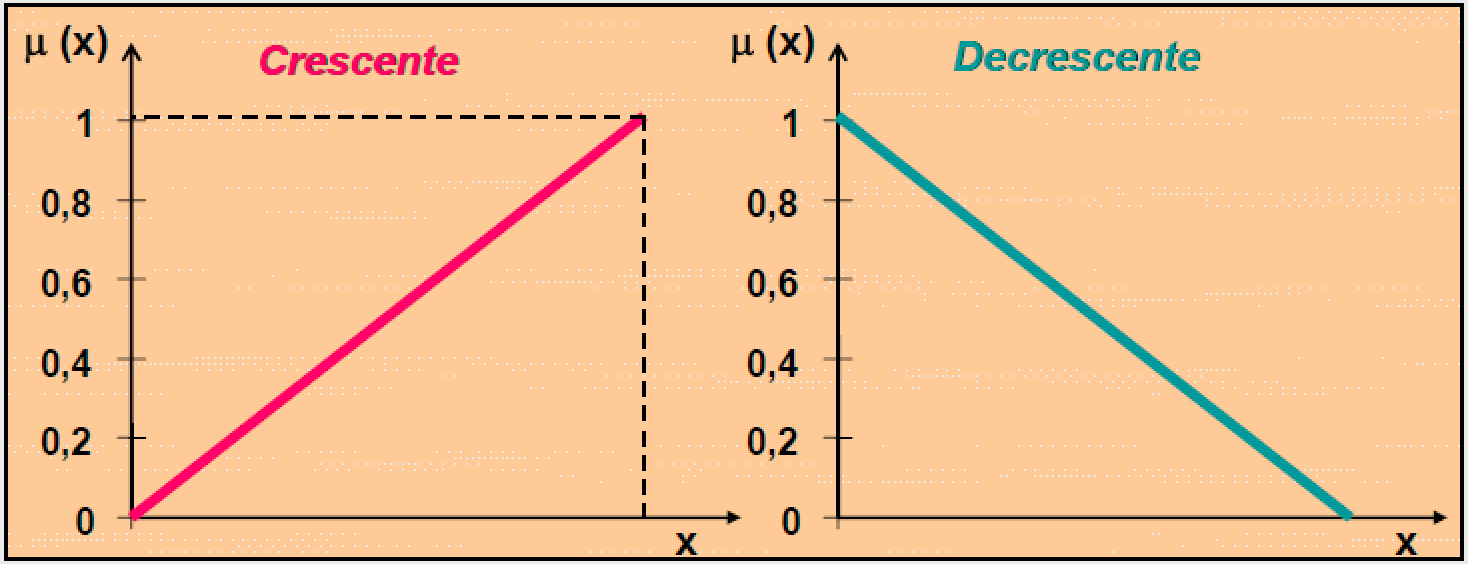
$$\mu_{grande}(x) = \{0;\ 0;\ 0;\ 0\ \ 0{,}3;\ 0{,}7;\ 1\}$$

Funções de Pertinência

- ✓ *Linear*
- ✓ *Trapezoidal*
- ✓ *Triangular*
- ✓ *Formato S*
- ✓ *Formato Z*
- ✓ *Formato PI*
- ✓ *Gaussiana*
- ✓ *Singleton*
- ✓ *Irregulares*

Formatos dos Conjuntos

- ***Linear:***
  - É o conjunto mais simples, sendo uma boa escolha na aproximação de conceitos não bem compreendidos



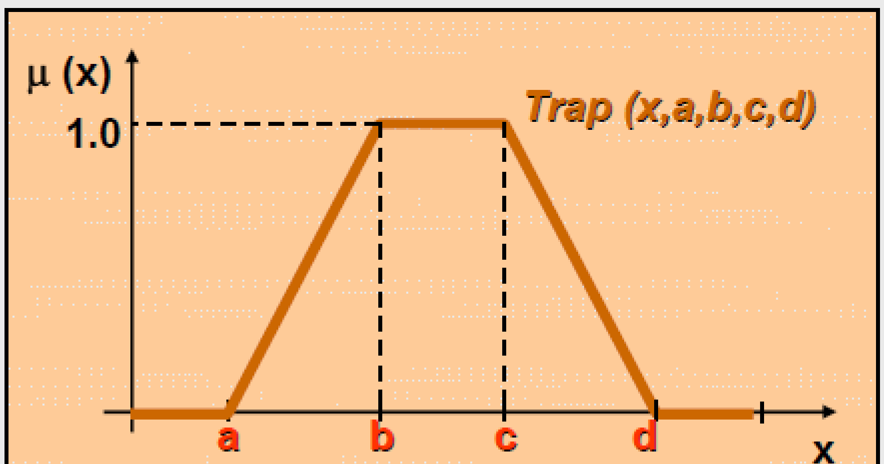
Formatos dos Conjuntos

- ***Trapezoidal:***
  - ➲ Rápido processamento
  - ➲ Contém descontinuidades

Variável independente

Parâmetros do formato

$$\text{Trap}(x,a,b,c,d) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 1 - (b - x)/(b - a) & a < x \leq b \\ 1 & b < x \leq c \\ (d - x)/(d - c) & c < x \leq d \\ 0 & x > d \end{cases}$$



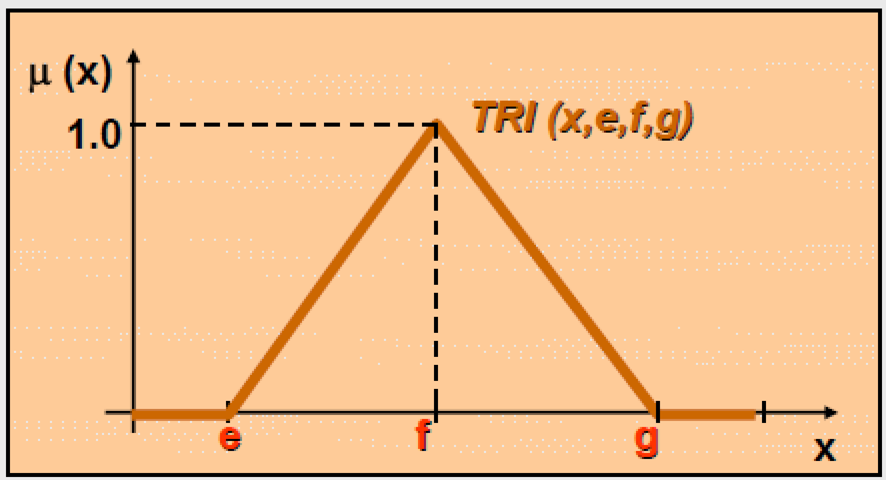
Formatos dos Conjuntos

- ***Triangular:*** Mais simples que a Trapezoidal

Variável independente

Parâmetros do formato

$$TRI\,(x,\underbrace{e,f,g}) = \begin{cases} 0 & x \le e \\ 1 - (f - x)/(f - e) & e < x \le f \\ (g - x)/(g - f) & f < x \le g \\ 0 & x > g \end{cases}$$



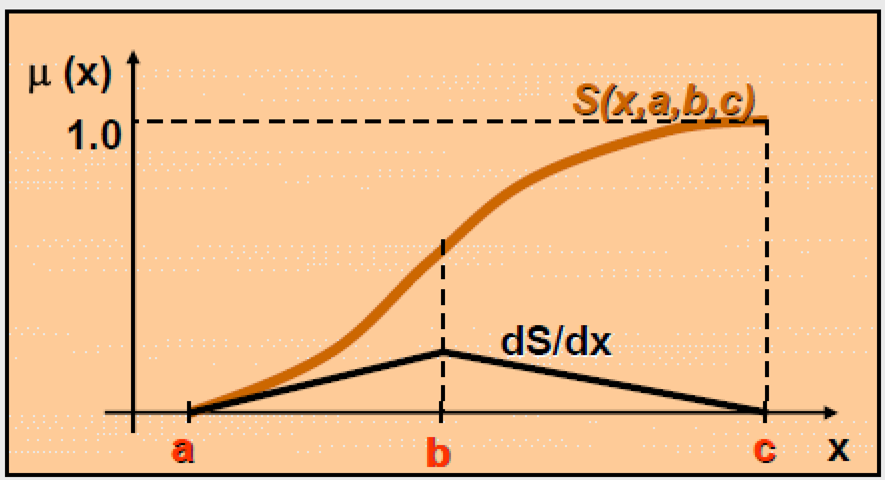
Formatos dos Conjuntos

- ***Formato S:*** Equação Quadrática

$$S\,(x,\underbrace{a,b,c}) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ 2\,[(x-a)/(c-a)]^2 & a \le x \le b \\ 1 - 2\,[(x-c)/(c-a)]^2 & b \le x \le c \\ 1 & x \ge c \end{cases}$$

Variável independente

Parâmetros do formato



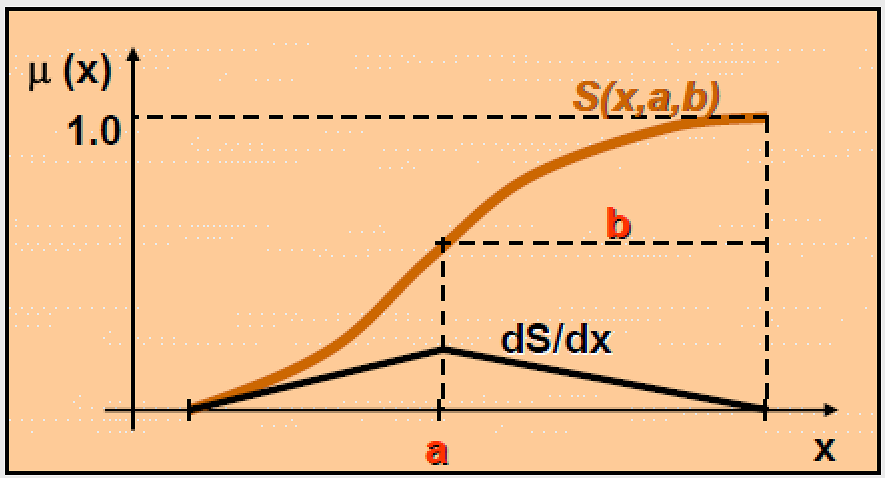
Formatos dos Conjuntos

- **Formato S com 2 parâmetros:**

Variável independente

Parâmetros do formato

$$S(x,\underbrace{a,b}) = \begin{cases} 0 & x \leq a - b \\ [x - (a - b)]^2 / 2b^2 & a - b \leq x \leq a \\ 1 - [(a + b) - x]^2 / 2b^2 & a < x \leq a + b \\ 1 & x > a + b \end{cases}$$



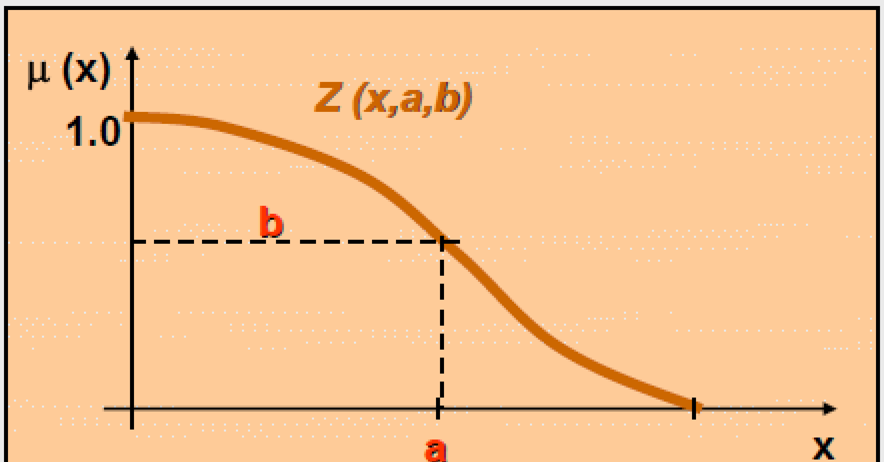
Formatos dos Conjuntos

- ***Formato Z:*** $Z(x,a,b) = 1 - S(x,a,b)$

Variável independente

Parâmetros do formato

$$Z(\underbrace{x}_{\text{}},\underbrace{a,b}_{\text{}}) = \begin{cases} 1 & x < a - b \\ 1 - [x - (a - b)]^2 / 2b^2 & a - b \leq x \leq a \\ [(a + b) - x]^2 / 2b^2 & a < x \leq a + b \\ 0 & x > a + b \end{cases}$$



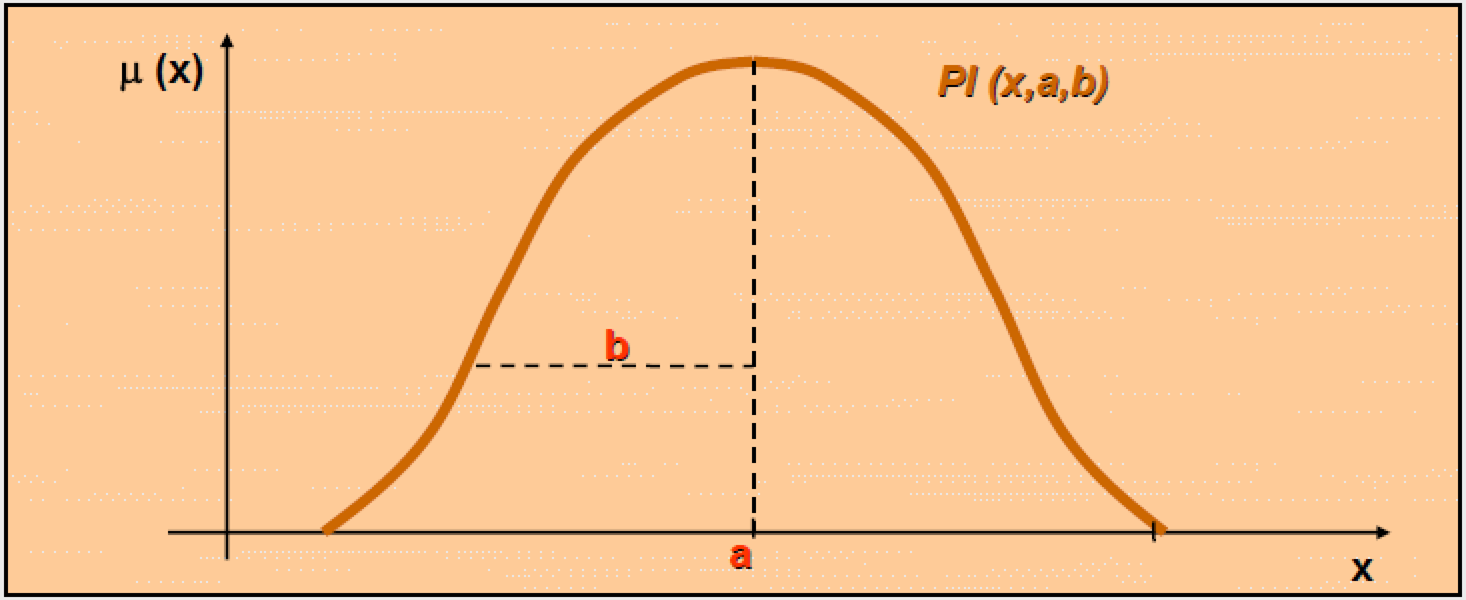
Formatos dos Conjuntos

- ***Formato PI:*** Junção das curvas S e Z

Variável independente

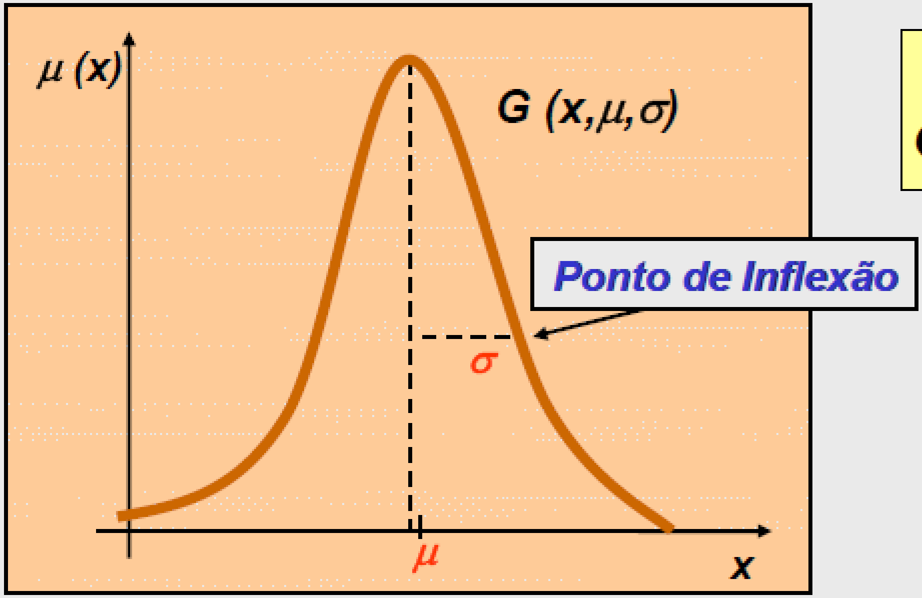
Parâmetros do formato

$$PI(x,a,b) = \begin{cases} S(x, a - b/2, b/2) & x \le a \\ Z(x, a + b/2, b/2) & x \ge a \end{cases}$$



Formatos dos Conjuntos

- *Gaussiana:* - distribuição normal
  - cai a zero para valores muito maiores ou muito menores do que a média



$$G(x,\mu,\sigma) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

μ = média

σ = desvio padrão

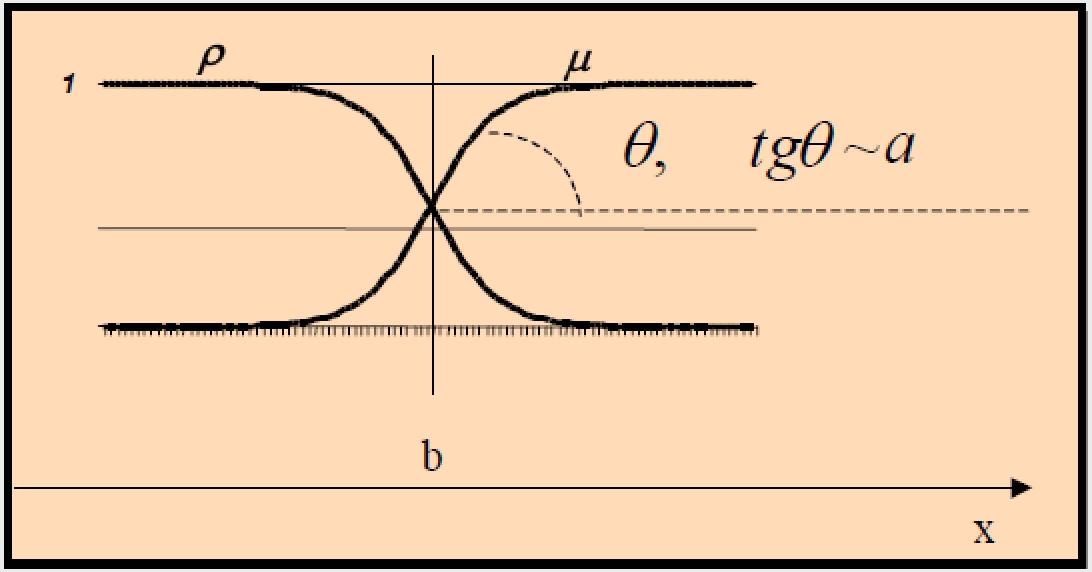
Formatos dos Conjuntos

- ***Sigmoidal:***

Variável independente

Parâmetros do formato

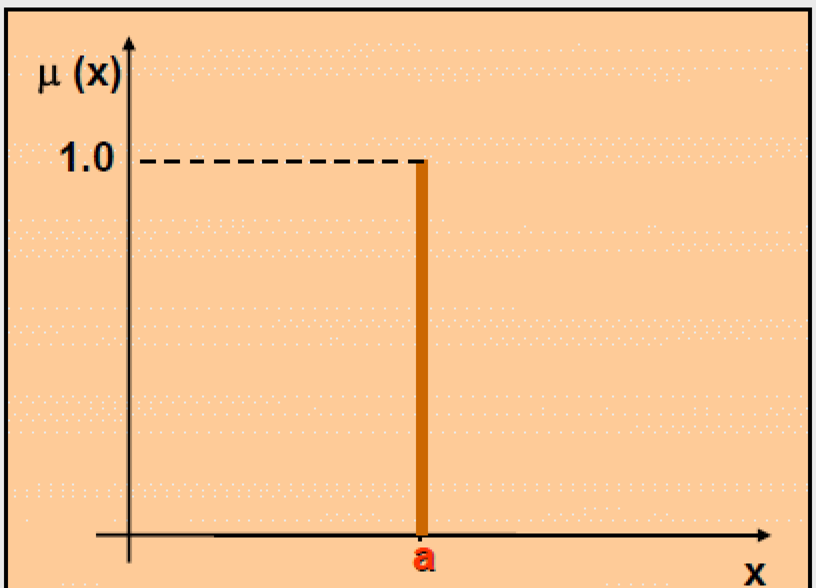
$$S\,(\underbrace{x}_{}, \underbrace{a,b}_{}) = \; = \frac{1}{1+e^{-a(x-b)}}$$



Formatos dos Conjuntos

- ***Singleton:*** - na verdade **não é um conjunto fuzzy**

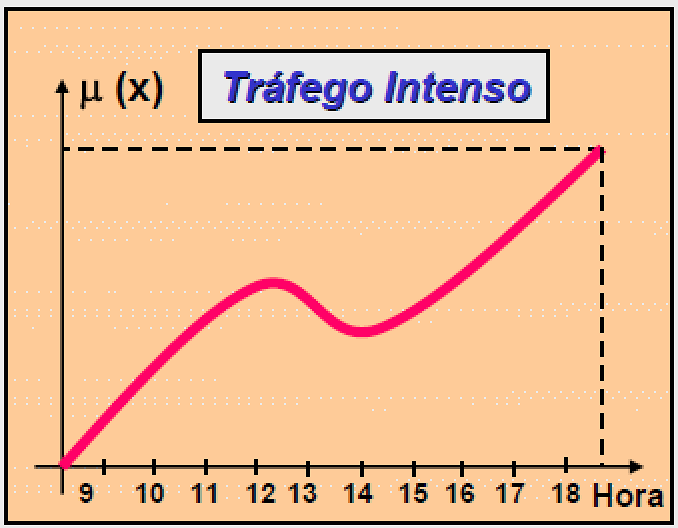
  - Simplifica os cálculos para produzir as saídas fuzzy.

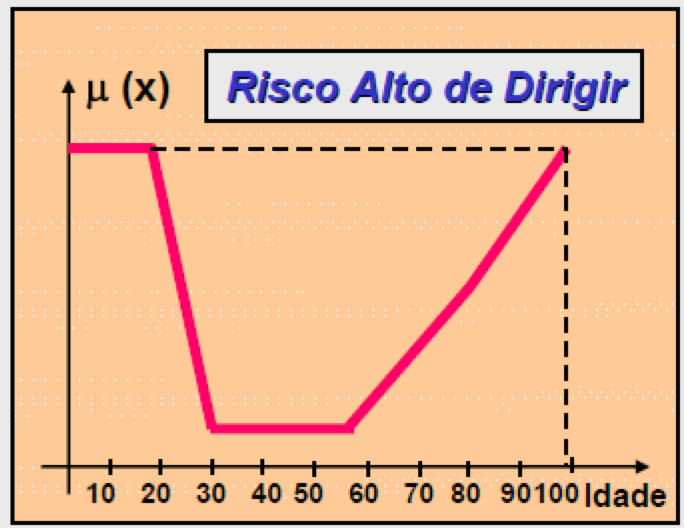


$$Sgl\,(x,a) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

Formatos dos Conjuntos

- ***Irregulares:*** - Ocasionalmente as formas padrões não conseguem capturar a semântica de uma variável ➔ **representações arbitrárias**.





Propriedades

Conjuntos ordinários:

$$A \cap A' = \varnothing \quad \text{e} \quad A \cup A' = X$$

Conjuntos fuzzy:

$$\mu_{A \cap A'}(x) = \mu_A(x) \wedge (1 - \mu_A(x)) \neq 0 \Rightarrow A \cap A' \neq \varnothing$$

$$\mu_{A \cup A'}(x) = \mu_A(x) \vee (1 - \mu_A(x)) \neq 1 \Rightarrow A \cup A' \neq X$$

Operações Conjuntos Fuzzy

- ***Lei da Não Contradição:*** → **INVÁLIDA!!**
  - $A \cap \sim A \neq \phi$
- ***Lei da Exclusão Mútua:*** → **INVÁLIDA!!**
  - $A \cup \sim A \neq U$

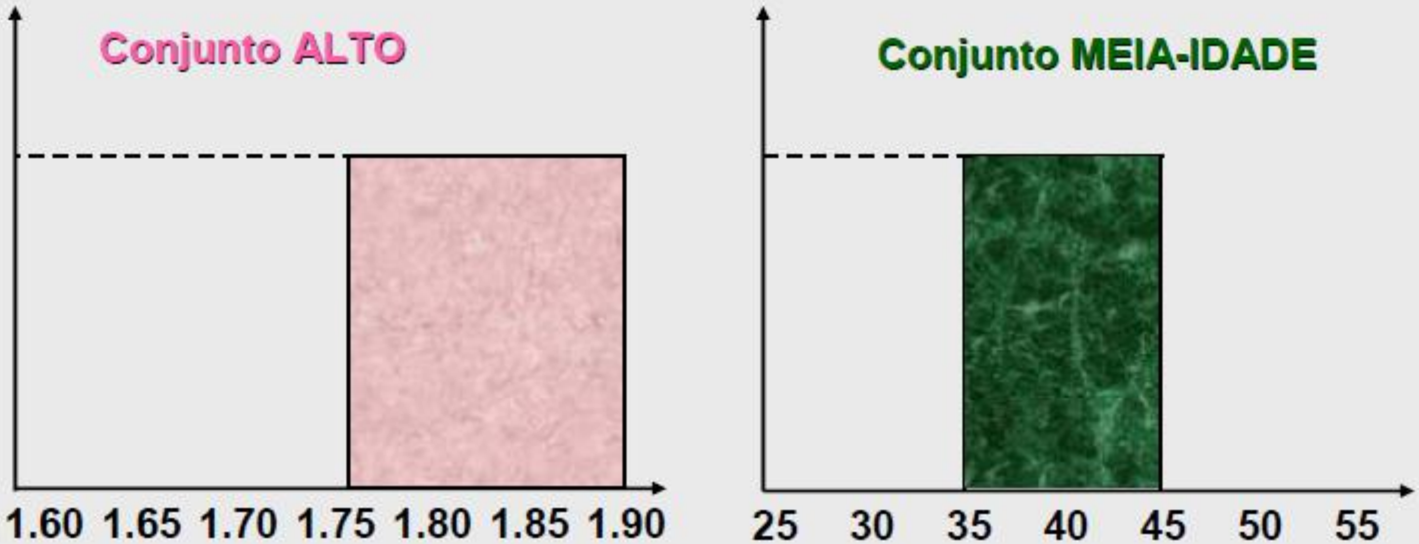
Lei da Não-Contradição

Ex. 1: Quais os membros que são de ***MEIA- IDADE*** e ***não-MEIA-IDADE*** ao mesmo tempo?

Ex. 2: Quais os membros que são ***ALTOS*** e ***não-ALTOS*** ao mesmo tempo?

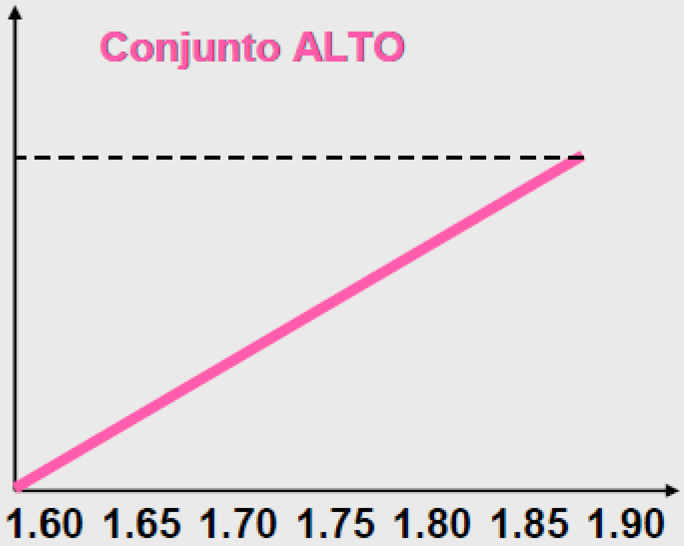
INTERSEÇÃO

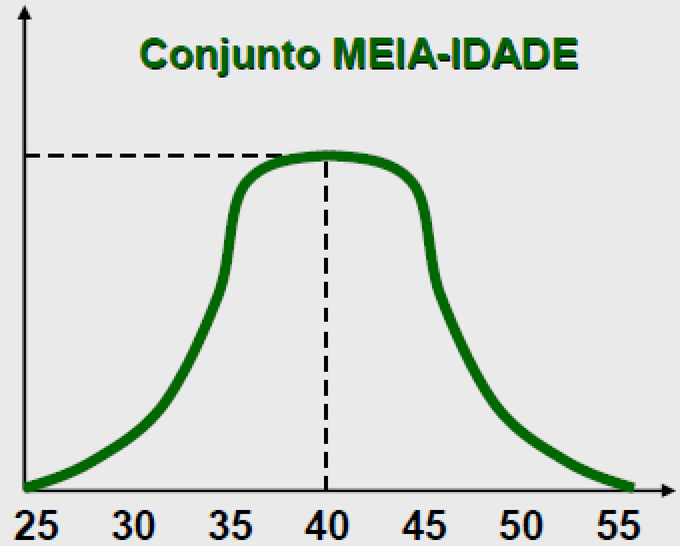
① *Caso Crisp:*



INTERSEÇÃO

① ***Caso Fuzzy:***





Lei da Não-Contradição

– Quais os membros que são de ***MEIA-IDADE*** e ***não-MEIA-IDADE*** ao mesmo tempo?

NOME	IDADE	$\mu_{M\text{-}I}$ (x)	$\mu_{\sim M\text{-}I}$ (y)	FUZZY
Abel	36	.92	.08	
José	58	0	1	
Carlos	64	0	1	
João	32	.47	53	
Pedro	40	1	0	
Tiago	22	0	1	
Felipe	47	.74	.26	
André	25	.10	.90	

Lei da Não-Contradição

– Quais os membros que são de ***MEIA-IDADE*** e ***não-MEIA-IDADE*** ao mesmo tempo?

NOME	IDADE	$\mu_{M\text{-}I}$ (x)	$\mu_{\sim M\text{-}I}$ (y)	FUZZY
Abel	36	.92	.08	.08
José	58	0	1	0
Carlos	64	0	1	0
João	32	.47	53	.47
Pedro	40	1	0	0
Tiago	22	0	1	0
Felipe	47	.74	.26	.26
André	25	.10	.90	.10

4 membros têm grau de pertinência diferente de zero para ambos os conjuntos Meia-Idade e não-Meia-Idade

Lei da Não-Contradição

– Quais os membros que são *ALTOS* e *não-ALTOS* ao mesmo tempo?

NOME	ALTURA	$\mu_{ALTO}(y)$	$\mu_{\sim ALTO}(y)$	FUZZY
Abel	1.70	.84	.16	
José	1.75	.92	.08	
Carlos	1.65	.68	.32	
João	1.78	.96	.04	
Pedro	1.77	.94	.06	
Tiago	1.60	.39	.61	
Felipe	1.73	.90	.10	
André	1.75	.92	.08	

Lei da Não-Contradição

– Quais os membros que são *ALTOS* e *não-ALTOS* ao mesmo tempo?

NOME	ALTURA	μ_{ALTO} (y)	$\mu_{\sim ALTO}$ (y)	FUZZY
Abel	1.70	.84	.16	.16
José	1.75	.92	.08	.08
Carlos	1.65	.68	.32	.32
João	1.78	.96	.04	.04
Pedro	1.77	.94	.06	.06
Tiago	1.60	.39	.61	.39
Felipe	1.73	.90	.10	.10
André	1.75	.92	.08	.08

TODOS os membros têm grau de pertinência diferente de zero para ambos os conjuntos ALTO e não-ALTO

Lei da Exclusão Mútua

– Quais os membros que são de ***MEIA-IDADE*** ou ***não-MEIA-IDADE*** ao mesmo tempo?

NOME	IDADE	$\mu_{M\text{-}I}$ (x)	$\mu_{\sim M\text{-}I}$ (y)	FUZZY
Abel	36	.92	.08	
José	58	0	1	
Carlos	64	0	1	
João	32	.47	53	
Pedro	40	1	0	
Tiago	22	0	1	
Felipe	47	.74	.26	
André	25	.10	.90	

Lei da Exclusão Mútua

– Quais os membros que são de ***MEIA-IDADE*** ou ***não-MEIA-IDADE*** ao mesmo tempo?

NOME	IDADE	μ_{M-I} (x)	$\mu_{\sim M-I}$ (y)	FUZZY
Abel	36	.92	.08	.92
José	58	0	1	1
Carlos	64	0	1	1
João	32	.47	53	.53
Pedro	40	1	0	1
Tiago	22	0	1	1
Felipe	47	.74	.26	.74
André	25	.10	.90	.90

Nem TODOS os membros têm grau de pertinência um para a união dos conjuntos Meia-Idade e não-Meia-Idade

Lei da Exclusão Mútua

– Quais os membros que são *ALTOS* ou *não-ALTOS* ao mesmo tempo?

NOME	ALTURA	μ_{ALTO} (y)	$\mu_{\sim ALTO}$ (y)	FUZZY
Abel	1.70	.84	.16	
José	1.75	.92	.08	
Carlos	1.65	.68	.32	
João	1.78	.96	.04	
Pedro	1.77	.94	.06	
Tiago	1.60	.39	.61	
Felipe	1.73	.90	.10	
André	1.75	.92	.08	

Lei da Exclusão Mútua

– Quais os membros que são ***ALTOS*** ou ***não-ALTOS*** ao mesmo tempo?

NOME	ALTURA	μ_{ALTO} (y)	$\mu_{\sim ALTO}$ (y)	FUZZY
Abel	1.70	.84	.16	.84
José	1.75	.92	.08	.92
Carlos	1.65	.68	.32	.68
João	1.78	.96	.04	.96
Pedro	1.77	.94	.06	.94
Tiago	1.60	.39	.61	.61
Felipe	1.73	.90	.10	.90
André	1.75	.92	.08	.92

NENHUM dos membros têm grau de pertinência igual a um para a união dos conjuntos ALTO e não-ALTO

Operadores Fuzzy

– operadores de Zadeh;

– operadores Compensatórios;

– Operadores T-norm e T-conorm.

Operadores Compensatórios

- Utilizam formas *alternativas* às de Zadeh para as operações com conjuntos;
- *Compensatórios* porque atuam de forma a compensar os *operadores rígidos* de $\underbrace{\underline{\textit{MÍN}}\ \text{e}\ \underline{\textit{MÁX}}}$ de Zadeh.

Desprezam as informações contidas na outra variável!

Operadores Compensatórios

Operadores Alternativos

Transformações Aritméticas Simples

- Produto
- Média
- Soma Limitada
- Diferença Limitada
- ...

Transformações Funcionais mais Complexas

- Yager

Transformações Aritméticas

- ***Interseção:***

Operador	*Interseção*
Zadeh	Mín $[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
Média	$[\mu_A(x) + \mu_B(x)] / 2$
Produto	$\mu_A(x) * \mu_B(x)$
Diferença Limitada (Lukasiewicz)	Máx $[0 , \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1]$

INTERSEÇÃO

- ***Exemplo:***

Operador Zadeh

MÍN

	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
0.00					
0.25		0.25	0.25	0.25	0.25
0.50		0.25	0.50	0.50	0.50
0.75		0.25	0.50	0.75	0.75
1.00		0.25	0.50	0.75	1.00

Diferença Limitada

Máx [0, $\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1$]

	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
0.00					
0.25					0.25
0.50				0.25	0.50
0.75			0.25	0.50	0.75
1.00		0.25	0.50	0.75	1.00

Transformações Aritméticas

- ***União:***

Operador	*União*
Zadeh	$\text{Máx}\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
Média	$\{2 * \text{mín}[\mu_A(x), \mu_B(x)] + 4 * \text{máx}[\mu_A(x), \mu_B(x)]\} / 6$
Soma Probabilística	$[\mu_A(x) + \mu_B(x)] - [\mu_A(x) * \mu_B(x)]$
Soma Limitada	$\text{Mín}\,[1, \mu_A(x) + \mu_B(x)]$

UNIÃO

- ***Exemplo:***

Operador Zadeh

MÁX

	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
0.00		0.25	0.50	0.75	1.00
0.25	0.25	0.25	0.50	0.75	1.00
0.50	0.50	0.50	0.50	0.75	1.00
0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Soma Limitada

Mín [1, $\mu_A(x) + \mu_B(x)$]

	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
0.00		0.25	0.50	0.75	1.00
0.25	0.25	0.50	0.75	1.00	1.00
0.50	0.50	0.75	1.00	1.00	1.00
0.75	0.75	1.00	1.00	1.00	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Transformações Funcionais

- ***Funções Yager:***
  - Os operadores compensatórios anteriores envolvem simples *manipulações algébricas*
  - Os ***operadores Yager*** envolvem uma *família parametrizada* de operadores

INTERSEÇÃO

$$T(x,y) = 1 - \text{MÍN}\ \{\ 1, [(1-x)^p + (1-y)^p]^{1/p}\ \}\ p > 0$$

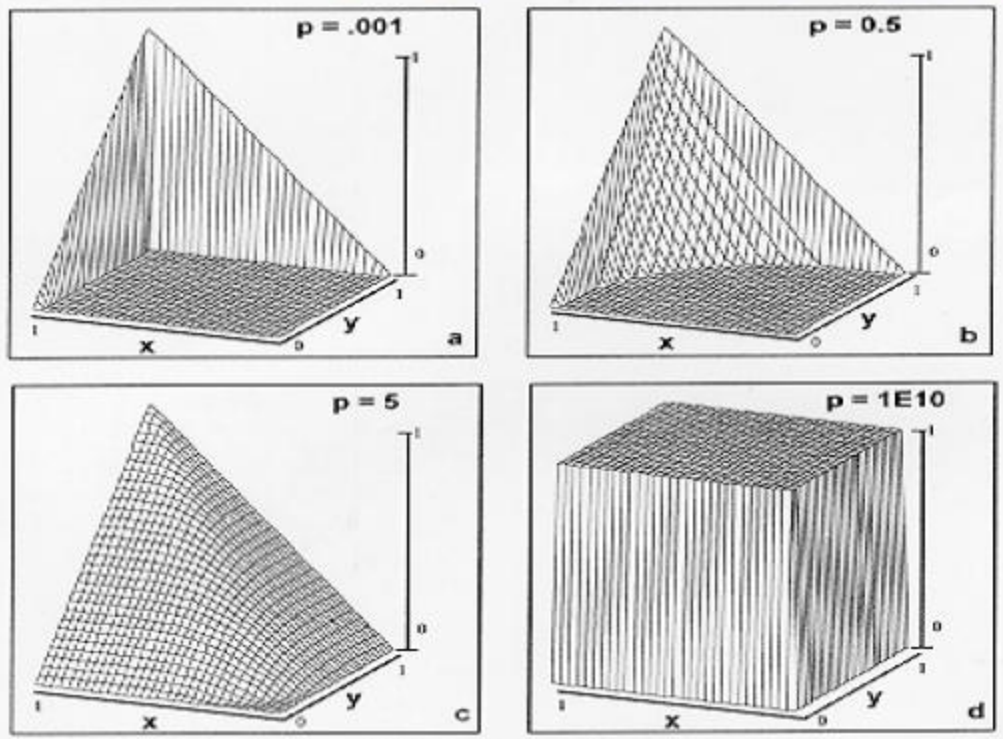


Figure 3.10: (a), (b), (c), and (d) show Yager intersection at various parameter values.

UNIÃO

$$C(x,y) = \text{MÍN}\,[1, (x^p + y^p)^{1/p}] \qquad p > 0$$

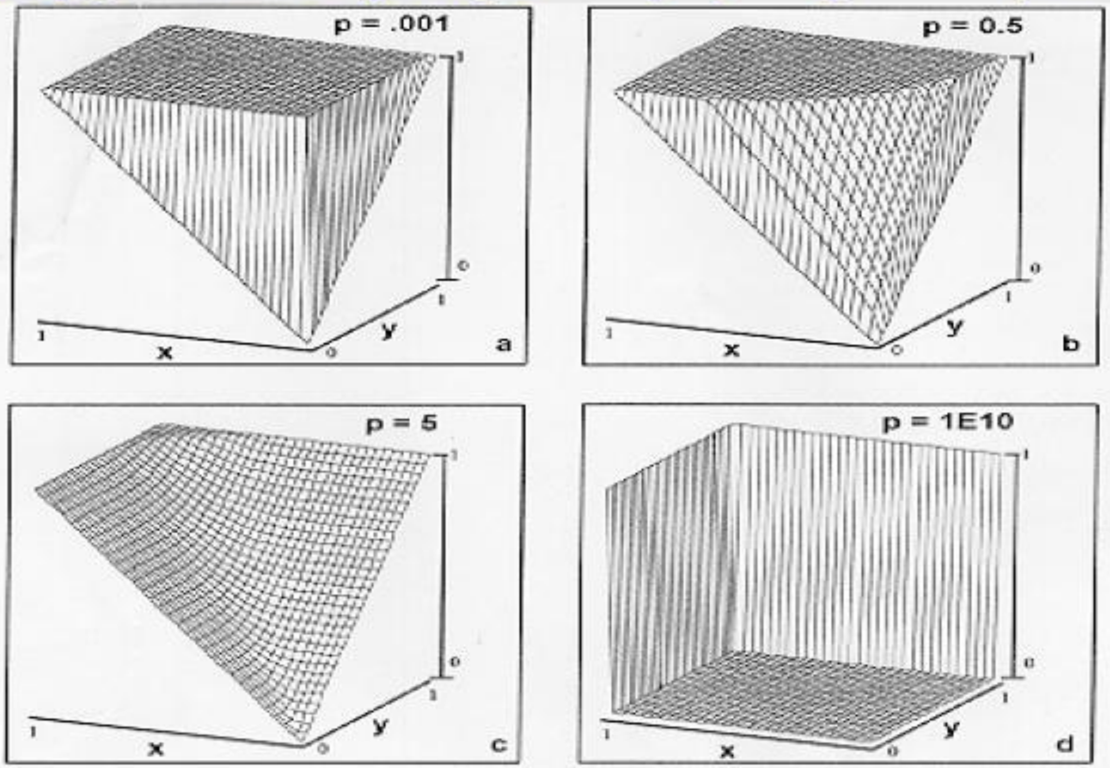


Figure 3.11: (a), (b), (c), and (d) show Yager union operator at various parameter values.

Operadores Fuzzy

- *Para esses dois contextos, tem-se os seguintes tipos de operadores*:

  - operadores de Zadeh;
  - operadores Compensatórios;
  - Operadores T-norm e T-conorm.

Operadores

- ***Generalização***

⇓

operadores ***norma-t*** e ***co-norma-t*** (***norma-s***)

  - **Operações binárias de [0,1] x [0,1] $\rightarrow$ [0,1], tal que, $\forall$*x, y, z, w* $\in$ [0,1], determinadas propriedades são satisfeitas.**

Operadores T-NORM

- ***Definição:***
  - Seja **T** uma função de duas variáveis **x** e **y** no intervalo [0,1]. Se, para qualquer **x**, **y**, e **z** em [0,1], as seguintes condições forem satisfeitas → **T** é dita uma operação **T-norm**

    ① $T(x,1) = x$

    ② $T(0,0) = 0$

    ③ Se $x \le x'$, então $T(x,y) \le T(x',y)$ **monotônica**

    ④ $T(x,y) = T(y,x)$ **comutativa**

    ⑤ $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$ **associativa**

Norma-t

As seguintes propriedades são satisfeitas:

$$x * y = y * x$$

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

$$\text{se } x \leq y,\ w \leq z, \text{ então } x * w \leq y * z$$

$$x * 0 = 0 \qquad \text{e} \qquad x * 1 = x$$

Operadores T-NORM

- **Exemplos:**

Mínimo $M(x,y) = \text{mín}(x,y)$

Produto $P(x,y) = x * y$

Lukasiewicz $W(x,y) = \text{máx}(0, x + y - 1)$

T-norm degenerada

$$Z(x,y) = \begin{cases} x, & \text{se } y = 1 \\ y, & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Operadores T-CONORM

- ***Definição:***
  - Seja **S** uma função de duas variáveis **x** e **y** no intervalo [0,1]. Se, para qualquer **x**, **y**, e **z** em [0,1], as seguintes condições forem satisfeitas ➔ **S** é dita uma operação **T-conorm**

① **S(x,0) = x**

② **S(1,1) = 1**

③ **Se x ≤ x', então S(x,y) ≤ S(x',y)** — **monotônica**

④ **S(x,y) = S(y,x)** — **comutativa**

⑤ **S(S(x,y),z) = S(x,S(y,z))** — **associativa**

Co-norma-t

As seguintes propriedades são satisfeitas:

$$x \oplus y = y \oplus x$$

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

$$\text{se } x \leq y,\ w \leq z, \text{ então } x \oplus w \leq y \oplus z$$

$$x \oplus 0 = x \qquad \text{e} \qquad x \oplus 1 = 1$$

Operadores T-CONORM

- ***Exemplos:***

Máximo $M(x,y) = \text{máx}(x,y)$

Soma Probabilística $P^*(x,y) = x + y - x * y$

Soma Limitada $W^*(x,y) = \text{mín}(1, x + y)$

T-conorm degenerada

$$Z^*(x,y) = \begin{cases} x, & \text{se } y = 0 \\ y, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

CONJUNTOS FUZZY

- Conjuntos Crisp x Fuzzy
- Definição
- Representação
- Propriedades
- Formatos
- Operações
- ***Hedges (modificadores)***

MODIFICADORES
- Operadores Semânticos -

- Atuam na modelagem de um sistema fuzzy da mesma forma que advérbios e adjetivos atuam em uma sentença:

    ↳ modificam a natureza de um conjunto fuzzy

MODIFICADORES
- Operadores Semânticos -

- ***Modificadores:***

➲ *operadores que atuam sobre a função de pertinência de um conjunto fuzzy com o objetivo de* ***modificá-la!***

MODIFICADORES
- Operadores Semânticos -

- Existem diversas classes de Hedges:

  - *intensificadores:* *muito, extremamente*
  - *diluidores:* *pouco*
  - *complemento:* *não*
  - *aproximadores:* *em torno, aproximadamente*
  - *....*

Aplicação de Modificadores

- Da mesma forma que com os advérbios e adjetivos, a *ordem* dos hedges *é importante*.

NÃO MUITO ALTO

≠

MUITO NÃO ALTO

Aplicação de Modificadores

- De forma análoga à construção de sentenças, ***múltiplos hedges*** podem ser aplicados a um **<u>único</u>** conjunto nebuloso
  - Positivamente não muito ALTO

Múltiplos modificadores

Conjunto fuzzy básico

Aplicação de Modificadores

- O processamento dos hedges é também feito de forma análoga à linguagem:
  - positivamente não muito ALTO

↓

(positivamente (não (muito ALTO)))

Aplicação de Modificadores

- Hedges podem ser usados tanto no ***antecedente*** (predicado) quanto no ***consequente*** (ação):
  - SE custo é muito ALTO
    ENTÃO a margem de lucro é BAIXA
  - SE inflação (t-1) é muito grande
    ENTÃO vendas são positivamente pequenas

TIPOS DE MODIFICADORES

- ***Intensificadores (Concentradores):***
  - *muito, extremamente*
- ***Diluidores:***
  - *um pouco, levemente, mais ou menos*
- ***Aproximadores:***
  - *em torno, aproximadamente, perto de*
- ***Restrição de uma região Fuzzy:***
  - *abaixo de, acima de*
- ***Contraste:***
  - *positivamente, de uma forma geral*

TIPOS DE MODIFICADORES

- ***Intensificadores (Concentradores):***
  - *muito, extremamente*
- ***Aproximadores:***
  - *em torno, aproximadamente, perto de*
- ***Restrição de uma região Fuzzy:***
  - *abaixo de, acima de*
- ***Diluidores:***
  - *um pouco, levemente, mais ou menos*
- ***Contraste:***
  - *positivamente, de uma forma geral*

INTENSIFICADORES

- ***Reduzem*** o grau de pertinência dos elementos que pertencem ao conjunto fuzzy

  ➯ **MUITO, EXTREMAMENTE**

↓

$$\boxed{\mu_A (x) \geq \mu_{\text{MUITO A}} (x)}$$

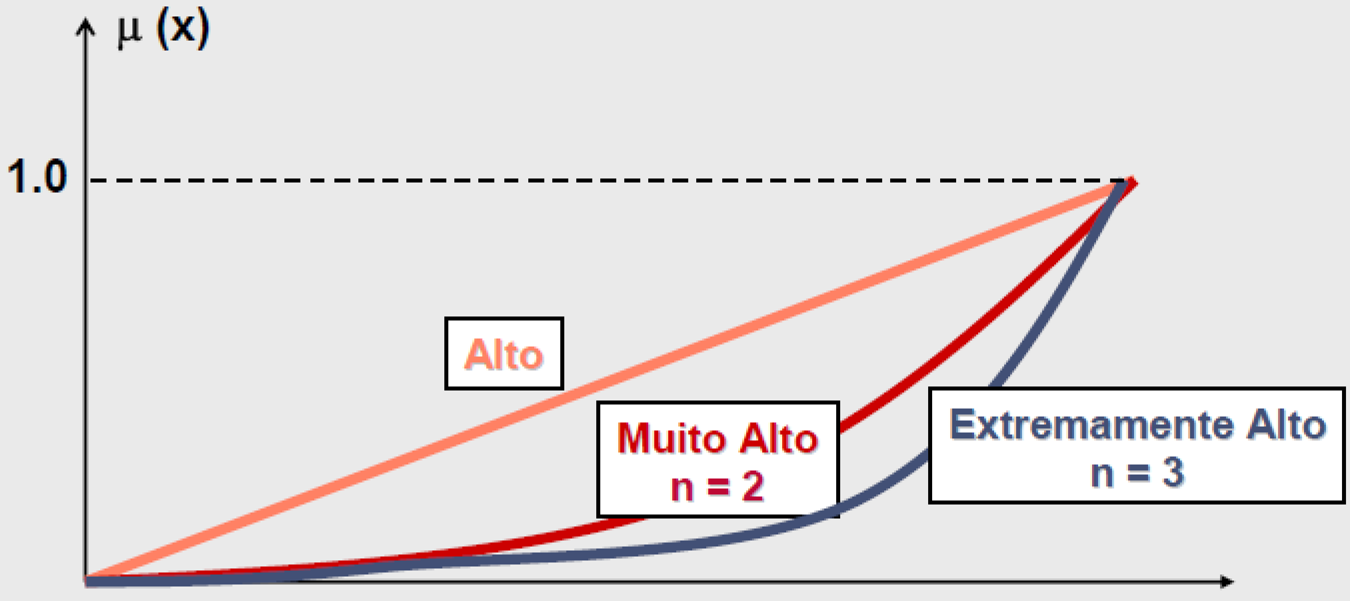
INTENSIFICADORES

- ***Concentradores de ZADEH:***

$$\mu_{MUITO\ A}(x) = [\mu_A(x)]^2$$
$$\mu_{CONC\ A}(x) = [\mu_A(x)]^n \quad n \in [1,4]$$

INTENSIFICADORES

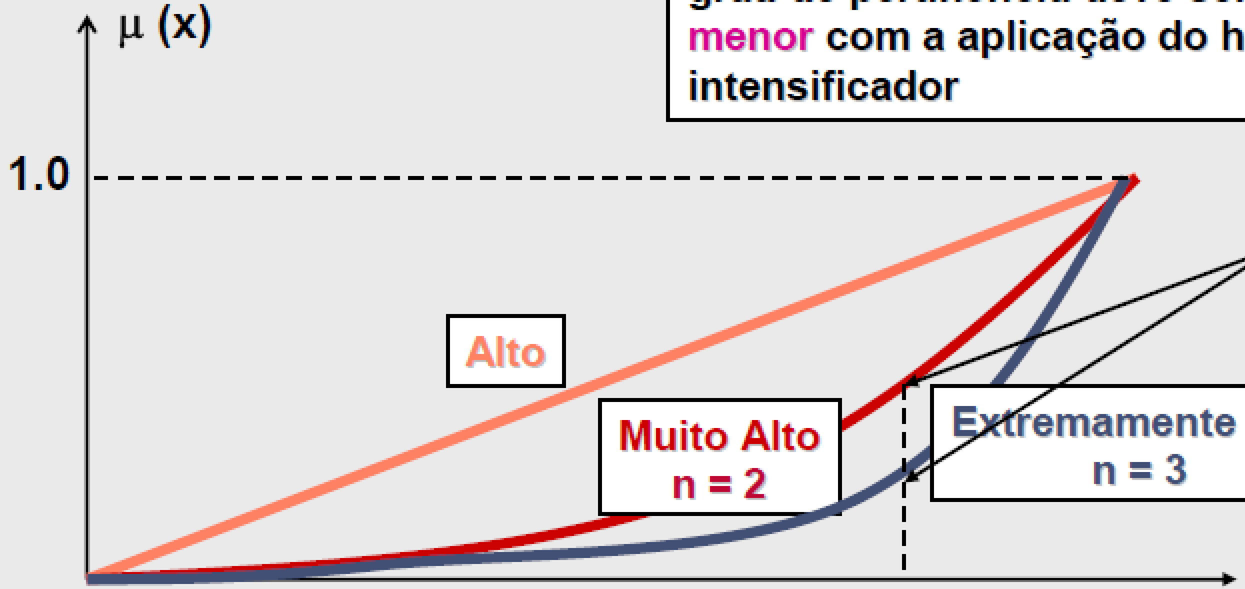
- ***Exemplo 1:***



INTENSIFICADORES

- ***Exemplo 1:***

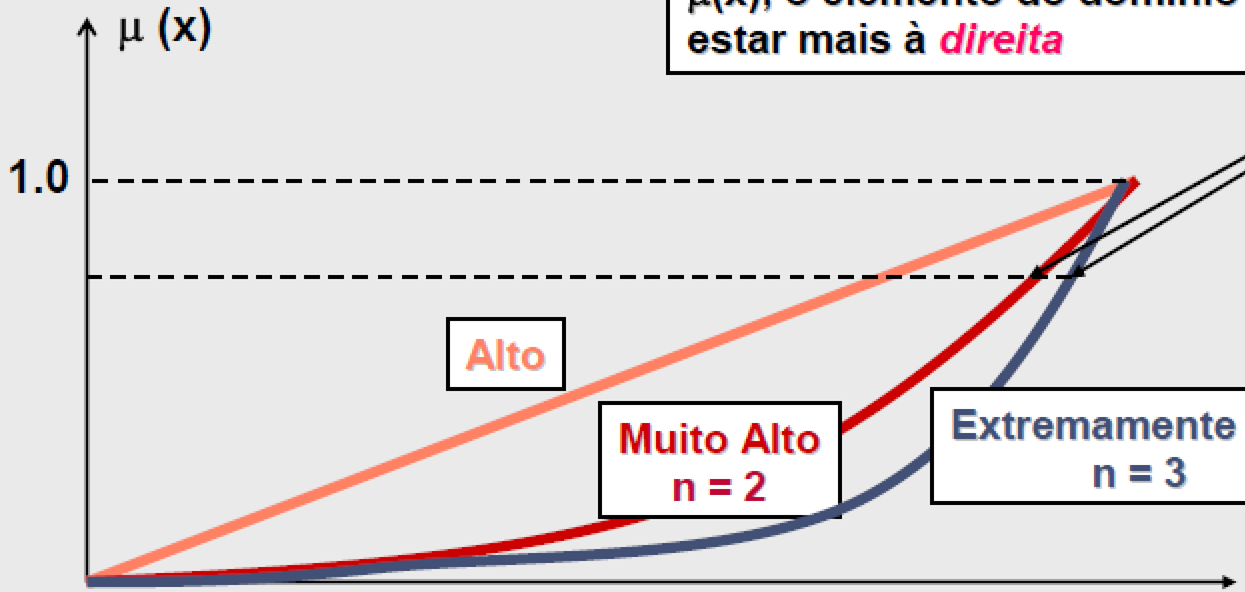
Para um mesmo valor de x, o grau de pertinência deve ser menor com a aplicação do hedge intensificador



INTENSIFICADORES

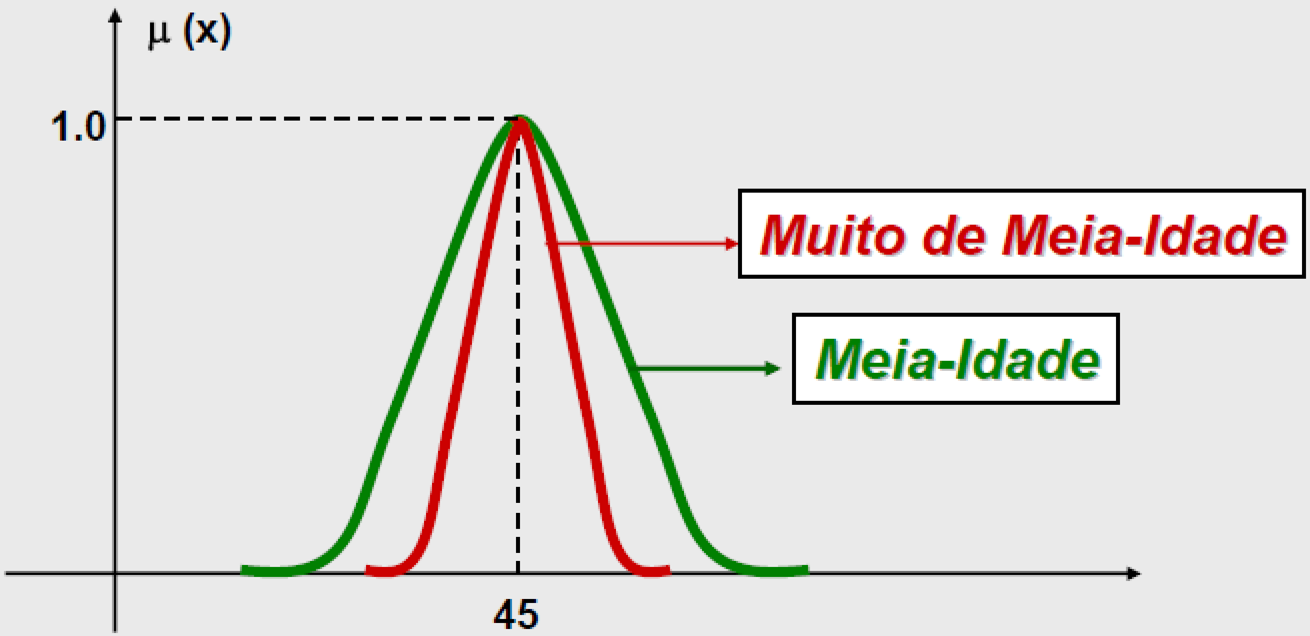
- ***Exemplo 1:***

Para se obter o mesmo valor de μ(x), o elemento do domínio deve estar mais à *direita*



INTENSIFICADORES

- ***Exemplo 2:***



TIPOS DE MODIFICADORES

- *Intensificadores (Concentradores):*
  - muito, extremamente
- *Diluidores:*
  - um pouco, levemente, mais ou menos
- *Aproximadores:*
  - em torno, aproximadamente, perto de
- *Restrição de uma região Fuzzy:*
  - abaixo de, acima de
- *Contraste:*
  - positivamente, de uma forma geral

DILUIDORES

- ***Diluem*** **a função de pertinência para uma certa região fuzzy**

  ➯ **UM POUCO, LEVEMENTE**

  ↓

  contrariamente aos intensificadores, esses hedges devem ter valor de pertinência **maior** que a função básica

$$\boxed{\mu_A(x) \leq \mu_{\text{UM POUCO A}}(x)}$$

DILUIDORES

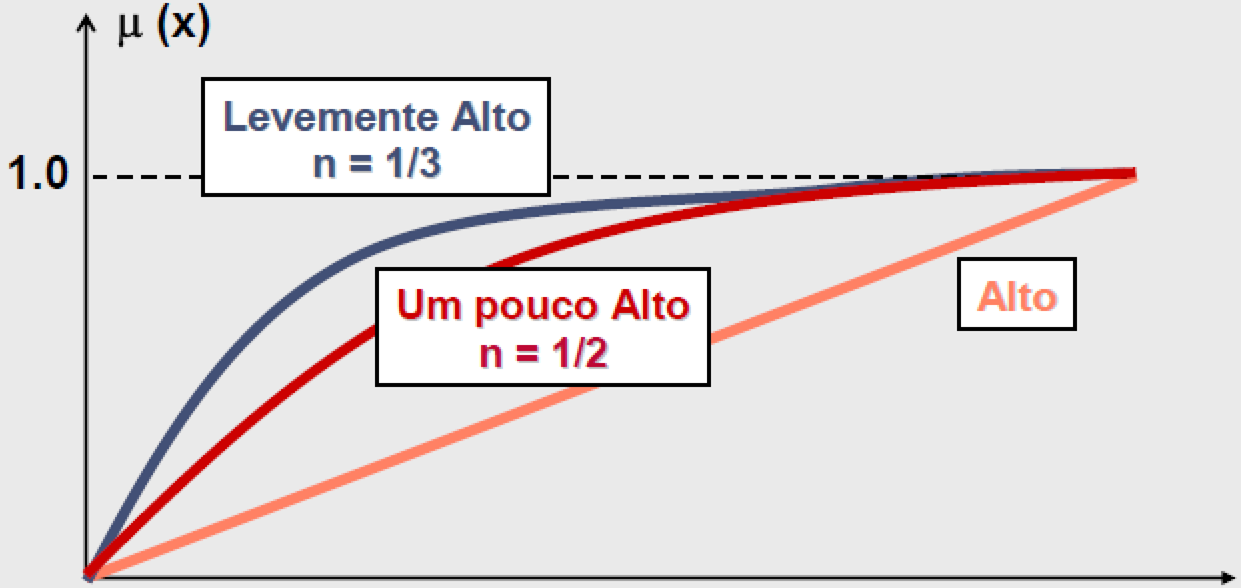
- ***Diluidores de ZADEH:***

$$\mu_{\text{UM POUCO A}}(x) = [\mu_A(x)]^{1/2}$$

$$\mu_{\text{DILUIDOR A}}(x) = [\mu_A(x)]^{1/n} \quad n \in [1,8]$$

DILUIDORES

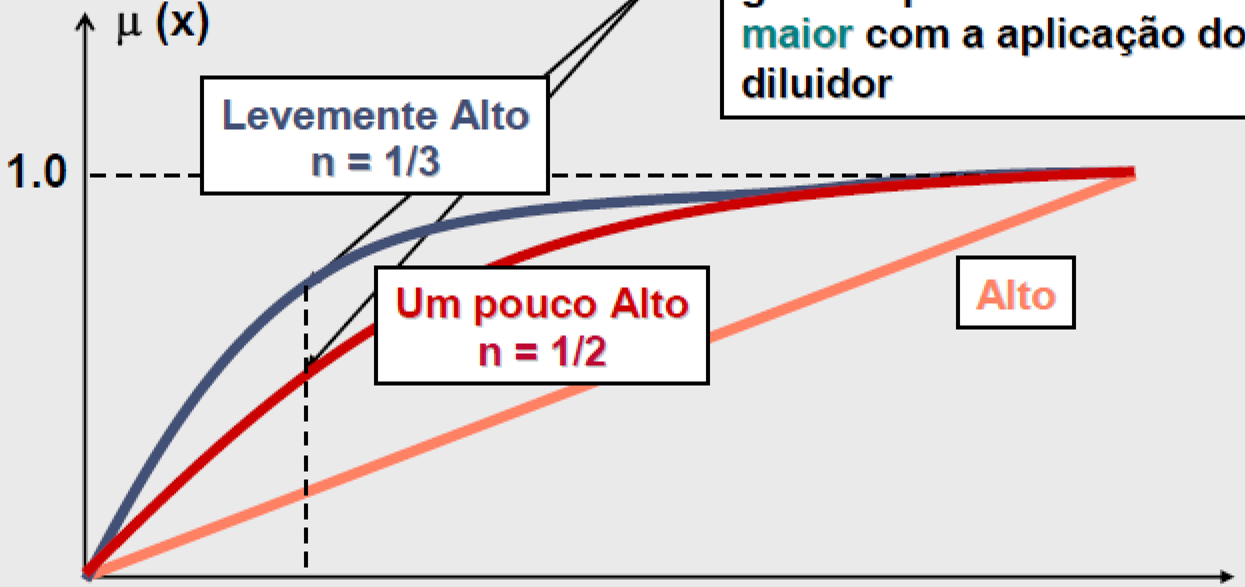
- ***Exemplo 1:***



DILUIDORES

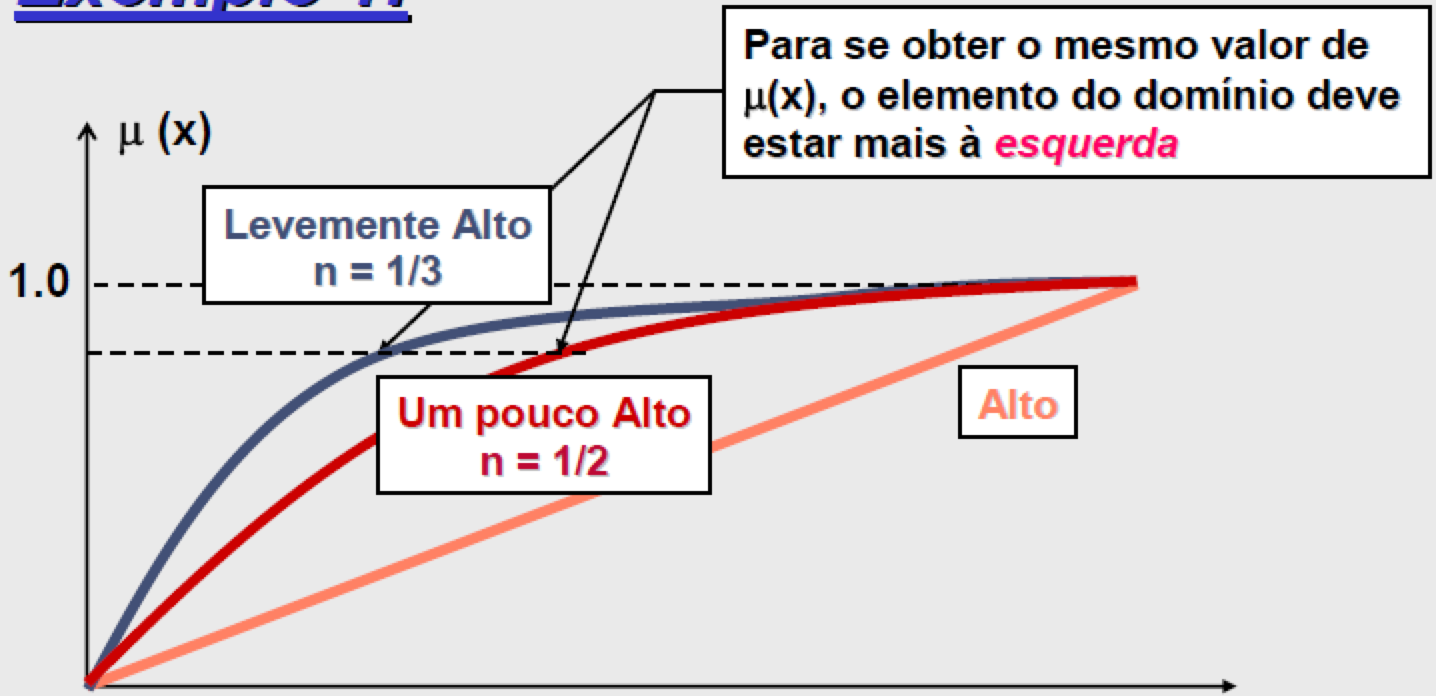
- ***Exemplo 1:***

Para um mesmo valor de x, o grau de pertinência deve ser maior com a aplicação do hedge diluidor



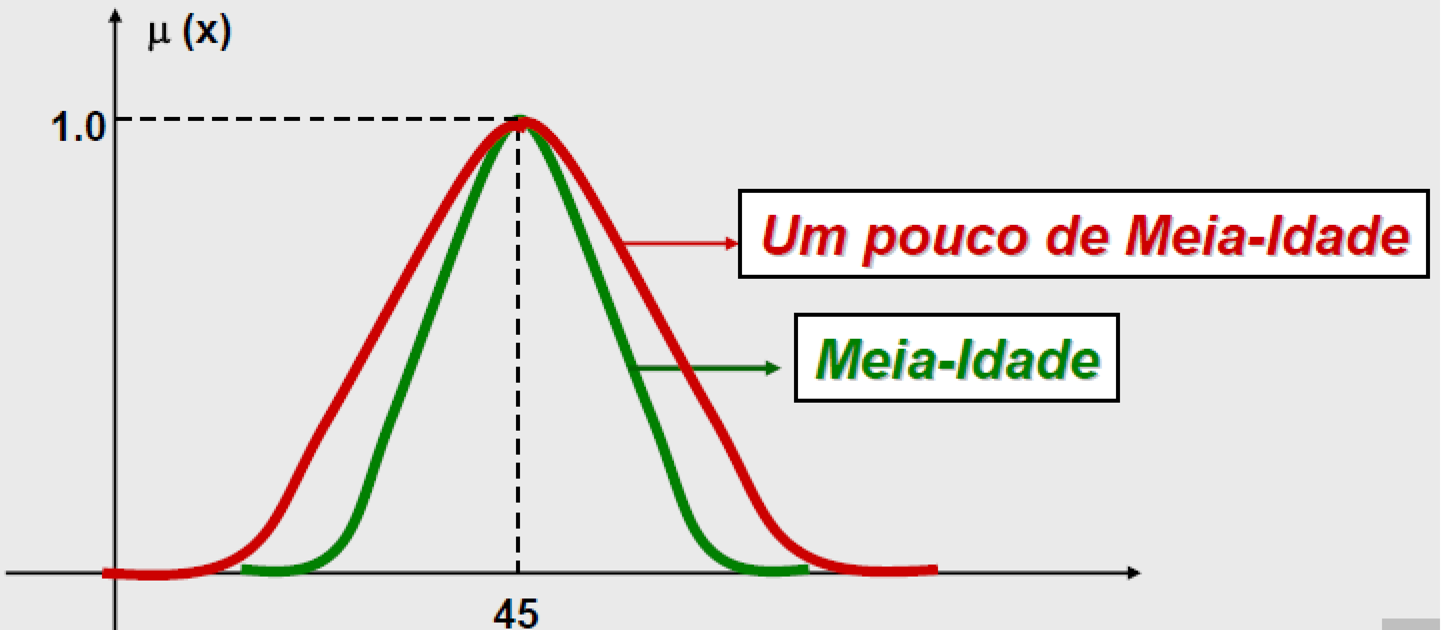
DILUIDORES

- ***Exemplo 1:***



DILUIDORES

- ***Exemplo 2:***



Intensificadores/Diluidores

- Possuem o mesmo *suporte* que o conjunto original;

- Mesmo valor no domínio para $\mu(x) = 0$ e $\mu(x) = 1$;

- ***MUITO*** e ***UM POUCO*** são os únicos *hedges comutativos*.

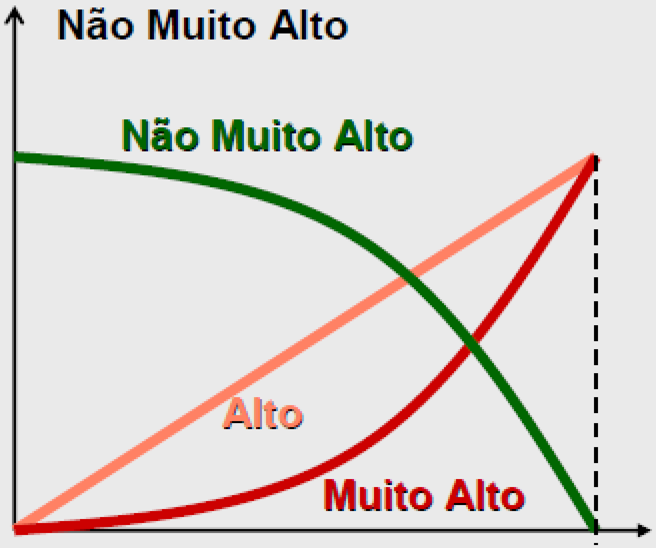
Aplicação dos Modificadores

- ***Exemplo:***

NÃO MUITO ALTO
≠
MUITO NÃO ALTO

Aplicação dos Modificadores

- ***Exemplo:***



TIPOS DE MODIFICADORES

- ***Intensificadores (Concentradores):***
  - – ***muito, extremamente***
- ***Diluidores:***
  - – ***um pouco, levemente, mais ou menos***
- ***Aproximadores:***
  - – ***em torno, aproximadamente, perto de***
- ***Restrição de uma região Fuzzy:***
  - – ***abaixo de, acima de***
- ***Contraste:***
  - – ***positivamente, de uma forma geral***

APROXIMADORES

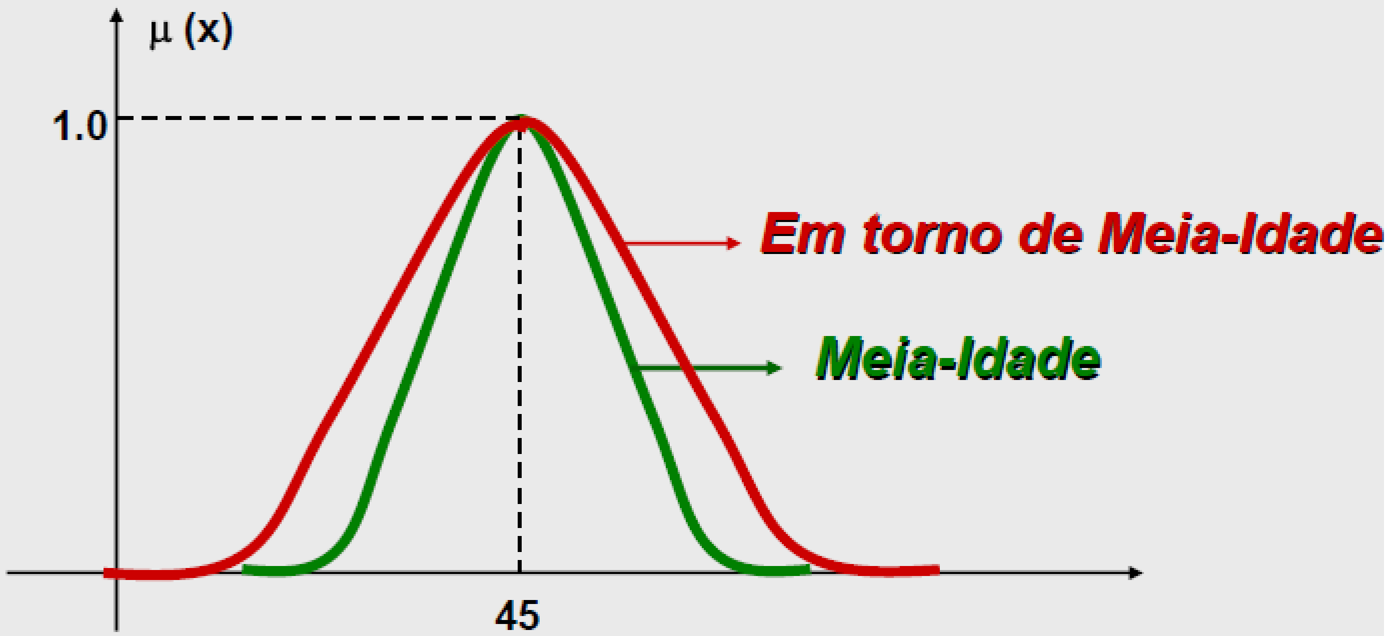
- ✓ **Alargam** ou **estreitam** uma região fuzzy (tipo "sino");

- ✓ Transformam valores escalares em regiões fuzzy ➔ ***Número Fuzzy***

- ✓ ***Ex:*** *aproximadamente, em torno, perto de*

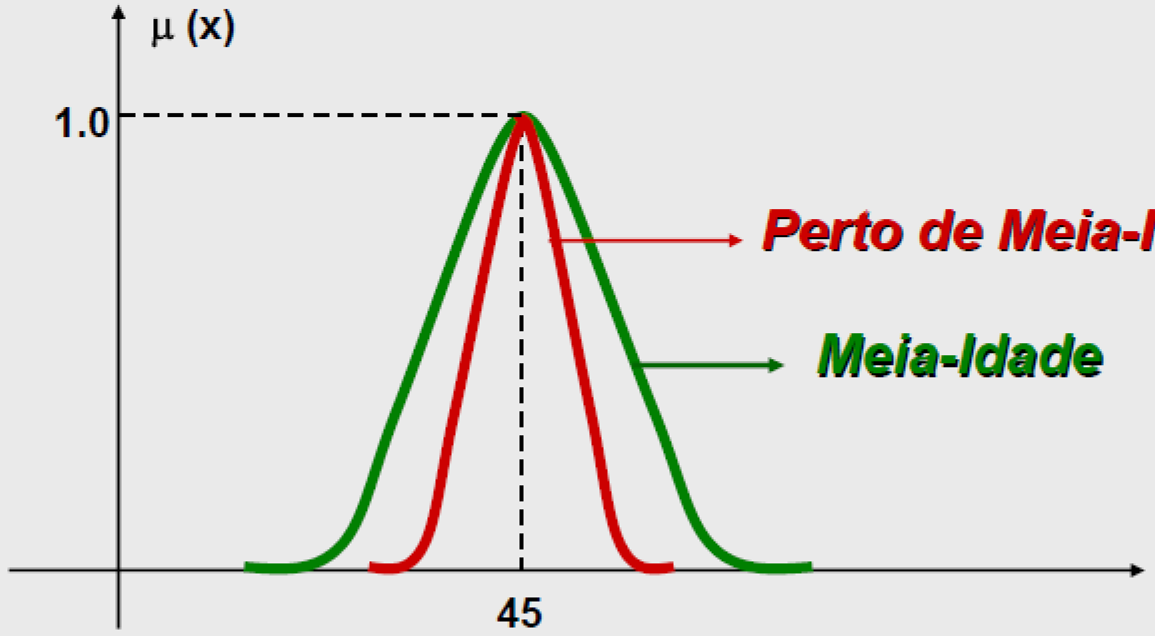
APROXIMADORES

- ***Alargando:***



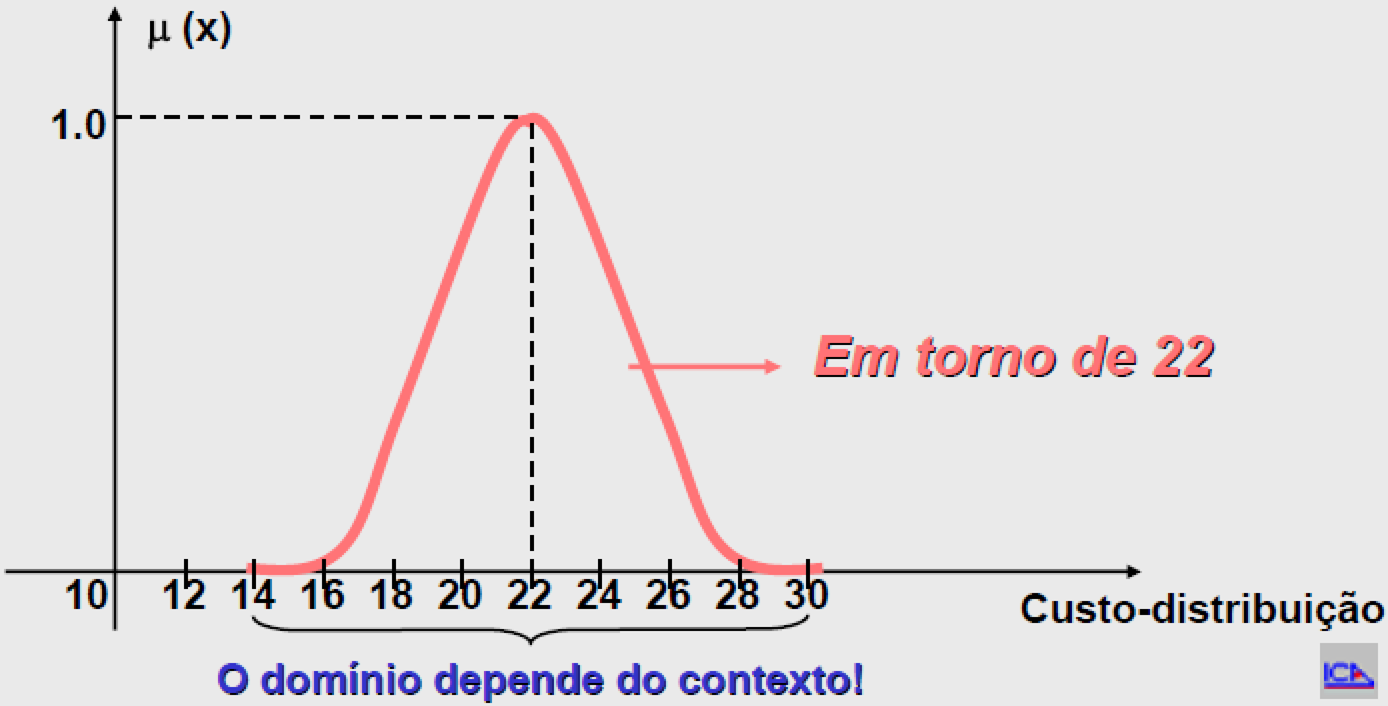
APROXIMADORES

- ***Estreitando:***



APROXIMADORES

- ***Transformando em Número Fuzzy:***



TIPOS DE MODIFICADORES

- ***Intensificadores (Concentradores):***
  - *muito, extremamente*
- ***Diluidores:***
  - *um pouco, levemente, mais ou menos*
- ***Aproximadores:***
  - *em torno, aproximadamente, perto de*
- ***Restrição de uma região Fuzzy:***
  - *acima de, abaixo de*
- ***Contraste:***
  - *positivamente, de uma forma geral*

Restrição de uma Região Fuzzy

- *ACIMA*
- *ABAIXO*

Restringem o escopo
da
função de pertinência

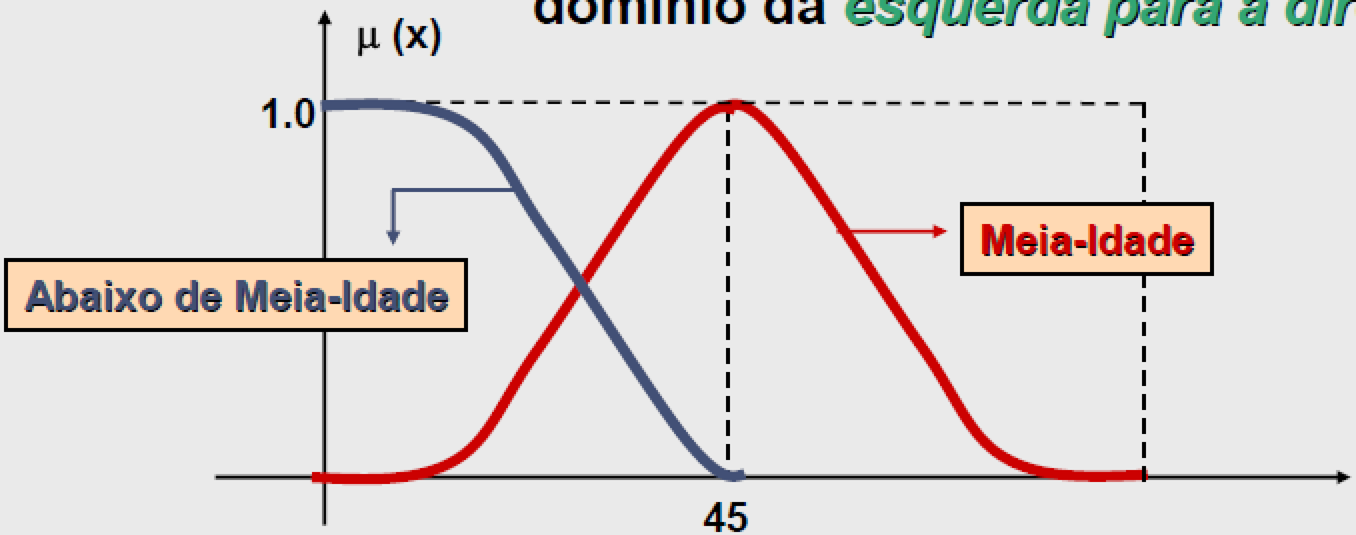
Restrição de uma Região Fuzzy

- ***ACIMA:*** Somente aplicável a funções que ***diminuam*** conforme se mova no domínio da ***esquerda para a direita***

Exemplo: SE Idade é acima de Meia-Idade ENTÃO risco-cardíaco é aumentado

Restrição de uma Região Fuzzy

- ***ABAIXO:*** Somente aplicável a funções que ***aumentem*** conforme se mova no domínio da ***esquerda para a direita***



Exemplo: SE Idade é abaixo de Meia-Idade
ENTÃO risco-cardíaco é reduzido

TIPOS DE MODIFICADORES

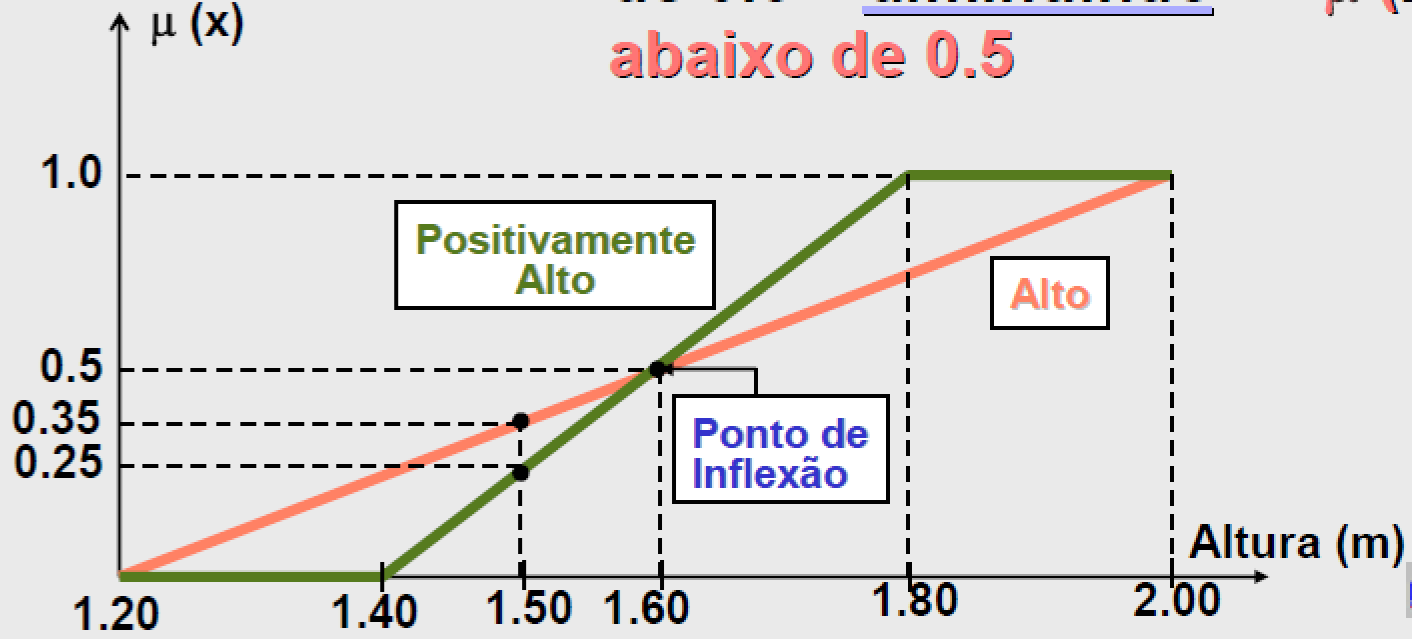
- ***Intensificadores (Concentradores):***
  - – ***muito, extremamente***
- ***Diluidores:***
  - – ***um pouco, levemente, mais ou menos***
- ***Aproximadores:***
  - – ***em torno, aproximadamente, perto de***
- ***Restrição de uma região Fuzzy:***
  - – ***abaixo de, acima de***
- ***Contraste:***
  - – ***positivamente, de uma forma geral***

CONTRASTE

- *Muda a natureza da região fuzzy*
  - *Intensificador* → torna o conjunto menos fuzzy
    - Positivamente, Definitivamente
  - *Difusor* → torna o conjunto mais fuzzy
    - De uma forma geral

CONTRASTE

- ***Intensificador:*** muda a função aumentando os μ (x) acima de 0.5 e diminuindo os μ (x) abaixo de 0.5



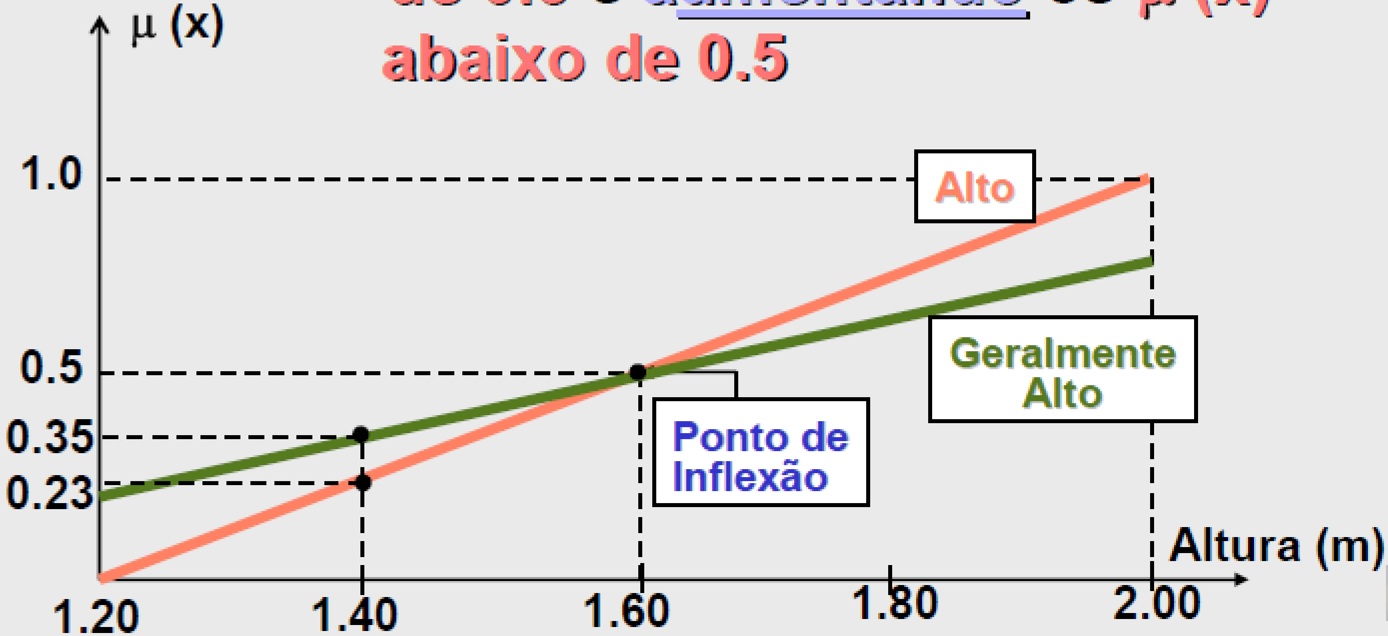
CONTRASTE

- ***Fórmula de Zadeh:***

$$\mu_{INT\,A}(x) = \begin{cases} 2\,[\mu_A(x)]^2 & \text{se } \mu_A(x) \geq 0.5 \\ 1 - 2\{1 - [\mu_A(x)]^2\} & \text{se } \mu_A(x) < 0.5 \end{cases}$$

CONTRASTE

- ***Difusor:*** muda a função reduzindo os μ (x) acima de 0.5 e aumentando os μ (x) abaixo de 0.5



CONTRASTE

- ***Fórmula de Zadeh:***

$$\mu_{INT\,A}(x) = \begin{cases} 0.5\,[\mu_A(x)]^{1/2} & \text{se } \mu_A(x) \geq 0.5 \\ 1 - 0.5\{1 - [\mu_A(x)]^{1/2}\} & \text{se } \mu_A(x) < 0.5 \end{cases}$$

Relações e Composições

Relações e Composições

- ***O que é inferência?***

Premissa 1: *Temperatura = 75°*

Premissa 2: SE Temperatura é ALTA
ENTÃO Vazão é grande

Conclusão: Vazão = ?

Relações e Composições

Temperatura = 75°

SE Temperatura é ALTA
ENTÃO Vazão é grande

⬇

Vazão = ?

R1 ⇨ Relação simples (um conjunto fuzzy)

R2 ⇨ Relação de Implicação
A → B

⬇

Composição das Relações
R1 o R2

Relações e Composições

- Relações Crisp
- Relações Fuzzy
- Composições de Relações Crisp
  Composições de Relações Fuzzy

Relações *Crisp*

- ***Relação Crisp:***
  - Representa a ***presença*** ou ***ausência*** de **associação**, **interação** ou **interconectividade** entre elementos de dois ou mais conjuntos.

↓

- ***Relações Binárias:***
  - aquelas que envolvem dois conjuntos **X** e **Y**
    - **R (X,Y)**

Relações *Crisp*

Dados os universos X e Y, a ***relação crisp*** R definida em $X \times Y$ é um subconjunto do produto cartesiano dos dois universos, tal que $R: X \times Y \rightarrow \{0,1\}$

função característica

$$f_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se e somente se } (x,y) \in R \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Relações *Crisp*

- ***OBSERVAÇÃO:***
  - Como **R (X,Y)** também é um **conjunto**, ***todas as operações de conjuntos crisp*** podem ser aplicadas sem modificação.

Relações *Crisp*

- ***Exemplo 1:***
  - Seja **X** = {-3, -2, -1,0, 1, 2, 3}
  - Seja **Y** = { 1, 2, 3, 4, 5}
  - Qual a Relação **R(X,Y) = {(x,y) / x ≥ y}**

⇩

- **R(U,V) = { (1,1); (2,1); (3,1); (2,2); (3,2); (3,3)}**

Relações *Crisp*

- ***Exemplo 2:***
  - Seja **X** o conjunto de todos os sistemas **contínuos, lineares, de segunda ordem**

Relações *Crisp*

- ***Exemplo 2:***
  - Seja **X** o conjunto de todos os sistemas **contínuos, lineares, de segunda ordem**

    $X = \{ x_1, x_2\} =$ {sistema variante no tempo, sistema invariante no tempo}

e

  - Seja **Y** o conjunto dos **pólos** de tais sistemas

    $Y = \{y_1, y_2\} =$ {pólos no lado esquerdo do s-plano, pólos no lado direito do s-plano}

Relações *Crisp*

- ***Exemplo 2:***
  - Relação de Estabilidade entre **X** e **Y**

↓

Sistemas Estáveis

Sistemas Invariante no Tempo

E

Pólos (no lado esquerdo do s-plano)

Relações *Crisp*

- ***Exemplo 2:***
  - Relação de Estabilidade entre X e Y

↓

R(U,V) = {sistema invariante no tempo, pólos no semi-plano esquerdo}

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

MATRIZ RELACIONAL

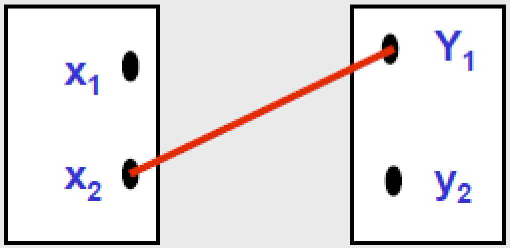


DIAGRAMA SAGITAL

Relações e Composições

- Relações Crisp
- **Relações Fuzzy**
- Composições de Relações Crisp
- Composições de Relações Fuzzy

Relações Fuzzy

- ***Relação Fuzzy:***
  - Representa **o grau de associação**, **interação** ou **interconectividade** entre elementos de dois ou mais conjuntos fuzzy.
  - ***Exemplos:*** x é **muito maior que** y
    y é **bem próximo de** x
    z é **muito mais alto que** y
    Se x é **grande** Então y é **pequeno**

Relações Fuzzy

A ***relação fuzzy*** $R\ (X,Y)$ é um **conjunto fuzzy** caracterizado pela função de pertinência

$$\mu_R(x,y) \qquad x \in X \text{ e } y \in Y$$

↓

$$R\ (X,Y) = \{\ [(x,y)\ ,\ \mu_R(x,y)]\ /\ (x,y) \in X \times Y\}$$

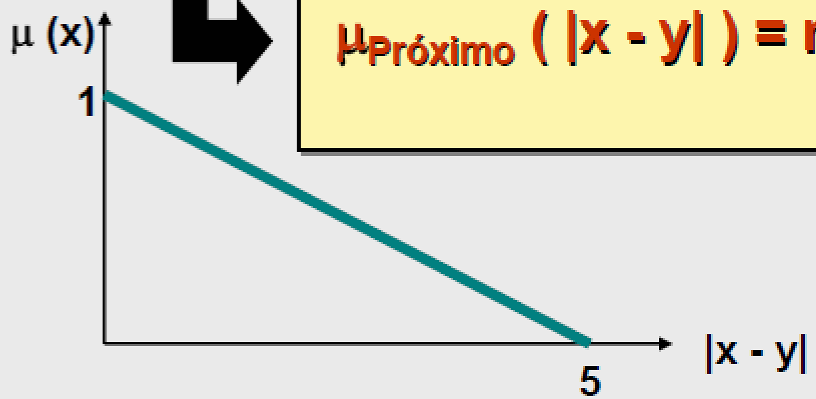
Relações Fuzzy

- ***OBSERVAÇÃO:***
  - Como **as relações fuzzy** são também **conjuntos fuzzy**, ***as operações com essas relações*** podem ser definidas utilizando os operadores de **UNIÃO, INTERSEÇÃO** e **COMPLEMENTO**.

Relações Fuzzy

- ***EXEMPLO 1:***
  - Seja **X** e **Y** conjuntos de números reais
  - R (X,Y) = o alvo **x** está ***próximo*** do alvo **y**

$$\mu_{Próximo}(|x - y|) = máx\left[\frac{5 - |x - y|}{5}, 0\right]$$



Relações Fuzzy

- *Exemplo 2:*

$X = \{x_1, x_2, x_3\} = \{8, 2, 10\}$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{2, 0, 4, 3\}$

$R(X,Y)$ = x é muito maior do que y

$$\mu_{mm}(x,y) = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.8 & 1 & 0.5 & 0.7 \\ x_2 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{array}$$

Relações Fuzzy

Exemplo 3:

$X = \{x_1, x_2\}$ = {Fortaleza, Florianópolis}

$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ = {Porto Alegre, Criciúma, Curitiba}

R: "muito próxima".

Relações Fuzzy

Matriz Relacional **para o caso *crisp***

		y_1	y_2	y_3
		Porto Alegre	Criciúma	Curitiba
x_1	Fortaleza	0	0	0
x_2	Florianópolis	1	1	1

Relações Fuzzy

Matriz Relacional **para o caso *fuzzy***

		y_1	y_2	y_3
		Porto Alegre	Criciúma	Curitiba
x_1	Fortaleza	0,1	0,2	0,3
x_2	Florianópolis	0,8	1	0,8

Relações e Composições

- Relações Crisp
- Relações Fuzzy
- **Composições de Relações Crisp**
- Composições de Relações Fuzzy

Composição de Relações

- Representa um papel muito importante em sistemas de inferência fuzzy

Composições Crisp

- Seja P (X,Y) e Q (Y, Z) duas relações crisp nos espaços X x Y e Y x Z, respectivamente.

- Composição R (X,Z) das relações crisp P e Q

$$\boxed{R(X,Z) = P(X,Y) \circ Q(Y,Z)}$$

Composições Crisp

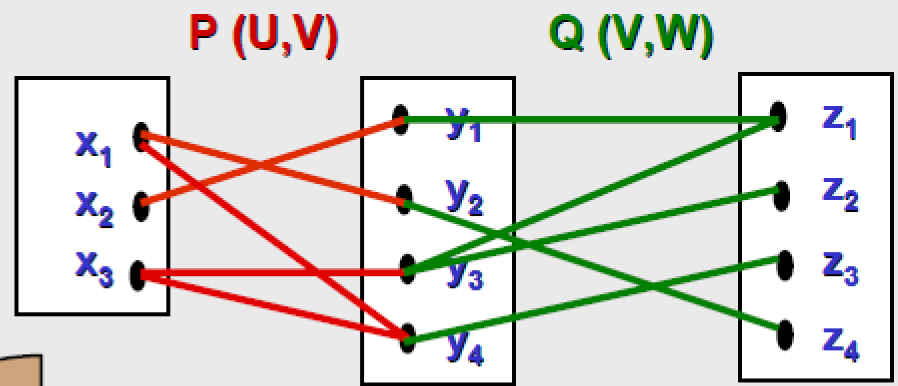
$$R(X, Z) = P(X,Y) \circ Q(Y, Z)$$

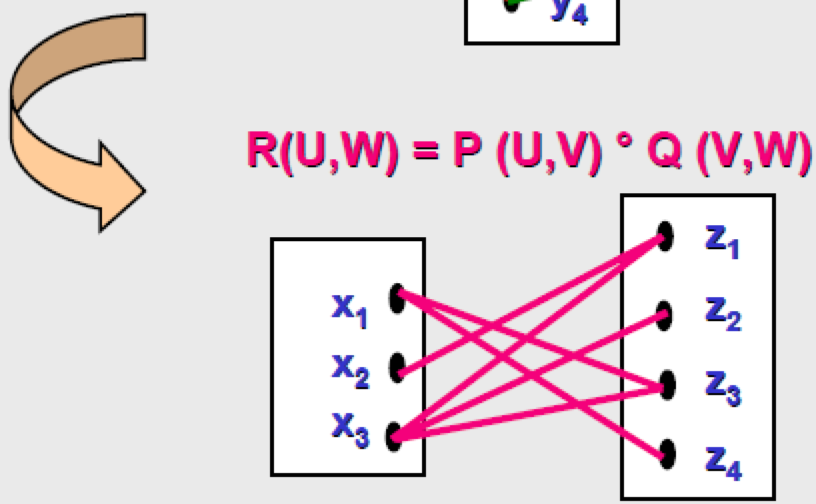
R (X, Z) é um subconjunto de X x Z tal que:

$(x,z) \in R(X, Z)$
se e somente se existir
pelo menos um $y \in Y$ tal que
$(x,y) \in P$ e $(y,z) \in Q$

Composições Crisp

- ***Exemplo:***





Composições Crisp

A operação realizada para se obter a *composição das relações pode ser* representada por:

- **Composição MÁX-MÍN:**

$$f_R(x,z) = f_{P \circ Q}(x,z) = \{(x,z), \max_y [\min(f_P(x,y), f_Q(y,z))]\}$$

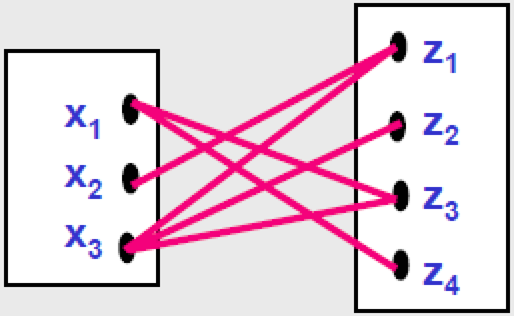
- **Composição MÁX-PRODUTO:**

$$f_R(x,z) = f_{P \circ Q}(x,z) = \{(x,z), \max_y [(f_P(x,y)\, f_Q(y,z))]\}$$

Composições Crisp

- *Exemplo (caso crisp):*

$R(X,Z) = P(X,Y) \circ Q(Y,Z)$



$$P(X,Y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q(Y,Z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$R(X,Z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Composições Crisp

Exemplificando para o cálculo do elemento (x_1,z_2) de R (no exemplo):

$$f_R(x_1,z_2) = f_{P\circ Q}(x,z) = \{(x_1,z_2), \max_y [min(f_P(x_1,y), f_Q(y,z_2))]\} =$$

$$\{(x_1,z_2), max\,[min(f_P(x_1,y_1), f_Q(y_1,z_2)), min(f_P(x_1,y_2), f_Q(y_2,z_2)),$$
$$min(f_P(x_1,y_3), f_Q(y_3,z_2)), min(f_P(x_1,y_4), f_Q(y_4,z_2))]\}$$

$$f_R(x_1,z_2) = \{(x_1,z_2), max\,[min(0,0), min(1,0), min(0,1), min(1,0)]\}$$

$$f_R(x_1,z_2) = \{(x_1,z_2), max\,[0,0,0,0]\} = 0$$

Composições Crisp

- *Em composições crisp se obtém o mesmo resultado para __MÁX-MÍN__ e __MÁX-Produto__*

- *Cada elemento de R(X,Y) pode ser obtido por meio da __multiplicação__ das matrizes __P(X,Y)__ e __Q(Y,Z)__ observando-se que:*
  - cada multiplicação deve ser efetuada com o operador adequado: **mínimo** ou **produto**
  - cada adição deve ser efetuada com o operador **máximo**

Relações e Composições

- Relações Crisp
- Relações Fuzzy
- Composições de Relações Crisp
- Composições de Relações Fuzzy

Composições Fuzzy

Composição *fuzzy* → faz-se uma generalização do caso não-fuzzy

↓

$$\mu_R(x,z) = \mu_{P \circ Q}(x,z) = \sup_y \left[\mu_P(x,y) * \mu_Q(y,z)\right]$$

- a norma-t é *usualmente* o *min* ou o *produto*
- para universos finitos, o *sup* é o *max*

Composição de Relações

- *Exemplo 1:*
  - **Estudantes:**

    X = {*Maria, João, Pedro*}

  - **Características de cursos**

    Y = {*teoria, aplicação, hardware, programação*}

  - **Cursos**

    Z = {*lógica fuzzy, controle fuzzy, redes neurais, sistemas especialistas*}

Composição de Relações

- *Exemplo 1 (continuação):*
  - Interesse dos estudantes, em termos das características dos cursos:

$$P(X,Y) = \begin{array}{r} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & a & h & p \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Composição de Relações

- *Exemplo 1 (continuação):*
  - Características dos cursos:

$$
Q(Y,Z) = \begin{array}{c} \\ t \\ a \\ h \\ p \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Composição de Relações

- *Exemplo 1 (continuação):*
  - A composição (*max-min*) pode servir de auxílio aos estudantes na escolha dos cursos:

$$
P \circ Q = \begin{array}{c} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Obs: *ao contrário deste exemplo*, a composição *max-produto* geralmente não produz o mesmo resultado!

Composição de Relações

- *Exemplo 2:*

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

$Z = \{z_1, z_2, z_3\}$

$\underbrace{x \text{ é muito maior do que } y}_{\mu_{mm}(x,y)}$ E $\underbrace{y \text{ é muito próximo de } z}_{\mu_{mp}(y,z)}$

$$\boxed{\mu_{mm \circ mp}(x,z) = ?}$$

Composição de Relações

- *Exemplo 2 (continuação):*

Relações dadas:

$$\mu_{mm}(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mu_{mp}(y,z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Composição *max-min*

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.7 & 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Composição *max-produto*

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.42 & 0.72 & 0.35 \\ 0 & 0.32 & 0 \\ 0.63 & 0.81 & 0.56 \end{pmatrix} \end{array}$$

Composição de Relações

Caso especial: P é *um conjunto fuzzy* apenas

em vez de $\mu_P(x,y)$ tem-se $\mu_P(x)$, o que é equivalente a se ter $X = Y$

$$\boxed{\mu_R(z) = \sup_x \left[\mu_P(x) * \mu_Q(x,z)\right]}$$

Obs.: resultado fundamental para sistemas de inferência fuzzy!

Composição de Relações

- *Exemplo:*

x é mediamente grande **E** *z* é muito menor do que *x*

$X = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

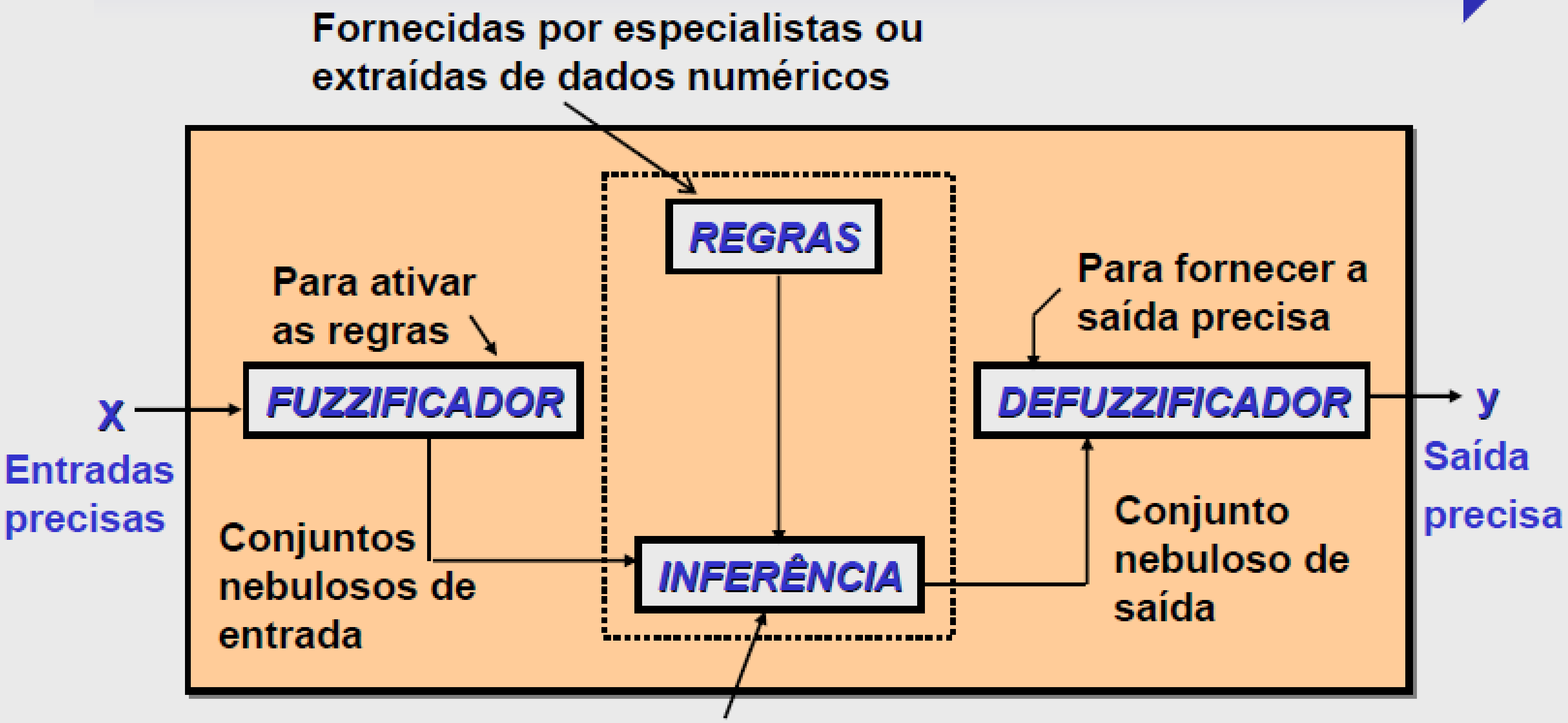
$\mu_{mg}(x) = \{0,3; 0,7; 1; 0,7; 0,3\}$

$$\mu_{mm}(x,z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Composição *max-min*

$\mu_R(z) = \{1/1; 0,8/2; 0,7/3; 0,6/4\}$

SISTEMA FUZZY



- Mapeia fuzzy sets em fuzzy sets
- Determina como as regras são ativadas e combinadas

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

- ***Fuzzificação***: ***mapeamento*** de dados precisos para os conjuntos fuzzy (de entrada)
- ***Defuzzificação***: ***interpretação*** do conjunto fuzzy de saída

↓

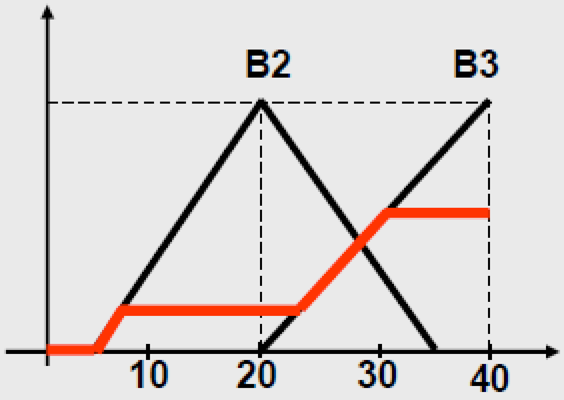
o processo de ***defuzzificação*** produz uma ***saída precisa***, a partir do conjunto fuzzy de saída obtido pelo sistema de inferência

DEFUZZIFICAÇÃO

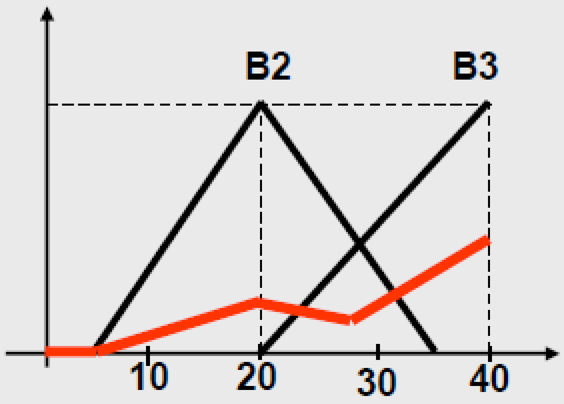
- Existem vários métodos diferentes
- Os mais utilizados são:
  - Máximo
  - Média dos Máximos
  - Centróide (ou Centro de Gravidade)
  - Altura
  - Altura Modificada

DEFUZIFICAÇÃO

- ***MÁXIMO:***
  - Examina-se o conjunto fuzzy de saída (***B***) e escolhe-se, como valor preciso, o valor no universo de discurso da variável de saída ***y*** para o qual o grau de pertinência ($\mu_B(y)$) é máximo.



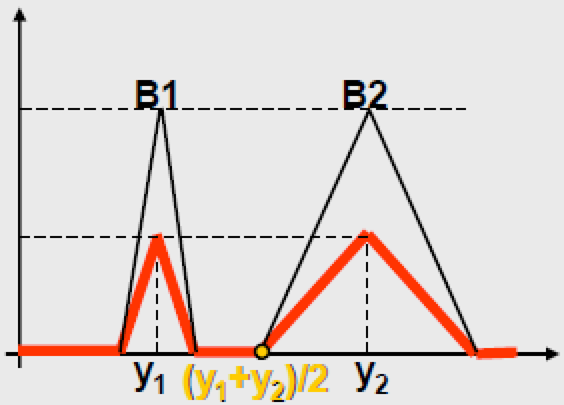
Qual valor escolher se o máximo for uma faixa?



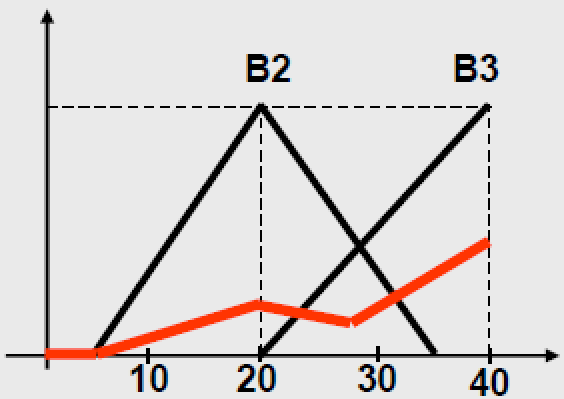
O valor máximo é o limite superior do Universo de Discurso!!

DEFUZIFICAÇÃO

- ***MÉDIA DOS MÁXIMOS:***
  - A saída precisa é obtida tomando-se a **média** entre os dois elementos extremos no universo de discurso que correspondem aos **maiores valores da função de pertinência do conjunto fuzzy de saída (*B*)** .



O valor preciso possui grau de pertinência igual a ZERO!!



O valor preciso é o limite superior do Universo de Discurso!!

DEFUZZIFICAÇÃO

- **Centróide**: a saída precisa (y_C) é o valor no universo que corresponde ao **centro de gravidade do conjunto fuzzy de saída (B)**

Contínuo

$$y_C = \frac{\int y\mu_B(y)dy}{\int \mu_B(y)dy}$$

Discreto

$$y_C = \frac{\sum y_i\mu_B(y_i)}{\sum \mu_B(y_i)}$$

Problema: dificuldade no cálculo!

DEFUZZIFICAÇÃO

- *Altura:* calcula-se

$$y_h = \frac{\sum_l y^l \mu_{B^l}(y^l)}{\sum_l \mu_{B^l}(y^l)}$$

y^l: valor no universo correspondente ao *centro de gravidade* do conjunto fuzzy B^l, associado ao grau de ativação da regra R^l

DEFUZIFICADOR

- ***ALTURA:***
  - Este método é simples porque o **Centro de Gravidade** das funções de pertinência mais comuns é **conhecido a priori**:
    - **Triangular** (simétrica) ⇒ **ápice do triângulo**
    - **Guassiana** ⇒ **valor central da função**
    - **Trapezoidal** (simétrica) ⇒ **ponto médio do suporte**

DEFUZIFICAÇÃO

- ***ALTURA:***
  - ***Problema:***

Só utiliza o centro do suporte $\bar{y}^l$ da função de pertinência do consequente

↓

Qualquer que seja *a largura da função* de pertinência, o método fornece *o mesmo resultado!*

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Altura modificada***: calcula-se

$$y_{mh} = \frac{\sum_l y^l \mu_{B^l}(y^l)/(\delta^l)^2}{\sum_l \mu_{B^l}(y^l)/(\delta^l)^2}$$

δ^l: medida da extensão do suporte do consequente da Regra R^l

DEFUZIFICAÇÃO

- ***ALTURA MODIFICADA:***

  – Para funções de pertinência triangulares e trapezoidais, δ^l é o ***suporte do conjunto***.

  – Para funções gaussianas, δ^l é o ***desvio padrão***.