Lista 2 de Exercícios - Otimização Inteira

Autor: Diego Ascânio Santos

Nas questões abaixo, quando não houver especificações, considere a seguinte estratégia

- Uso da relaxação linear para obteção do limitante dual.
- Seleção de variáveis para a ramificação: variável mais afastada de um inteiro.
- Estratégia de seleção: nó mais promissor (baseada no melhor limitante dual ou seja *best bound*).

Preâmbulo

In [3]:
```
%%capture
%load_ext autoreload
%autoreload 2
%pip install numpy
%pip install scipy
%pip install jupyter_anywidget_graphviz
%load_ext jupyter_anywidget_graphviz

from IPython.display import HTML, display, SVG, Markdown
from jupyter_anywidget_graphviz import graphviz_headless
from branch_and_bound import branch_and_bound, generate_dot
import numpy as np
```

In [4]:
```
g = graphviz_headless()
```

```
graphvizWidget(headless=True, response={'status': 'initialising'})
```

Exercício 1

Modelo

$$
\begin{aligned}
&z = \max\ 4M_1 + 3M_2 \\
&\text{subject to:} \\
&M_1 + 2M_2 \leq 1000 \\
&M_1 + M_2 \leq 800 \\
&M_1 \leq 400 \\
&M_2 \leq 700 \\
&M_1, M_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

In [5]:
```
%%capture
A = np.array([
    [1, 2],
    [1, 1],
    [1, 0],
```

```python
    [0, 1]
])
A = np.hstack((A, np.eye(4)))

b = np.array([
    1000,
    800,
    400,
    700
])
c = np.array([4, 3, 0, 0, 0, 0])
integrality = np.array([1, 1, 0, 0, 0, 0])  # x1 and x2 are integers

z_star, x_star, bnb_tree, active_problems, iters = branch_and_bound(c, A,
dot_code = generate_dot(bnb_tree)
g.render(dot_code);
```

In [6]:
```python
print('Iter,Active Problems')
for i in active_problems.keys():
    print(i, active_problems[i], sep=',')
```

```
Iter,Active Problems
0,[0]
Iter,Active Problems
0,[0]
```

Árvore B&B

In [7]:
```python
SVG(g.svg)
```

Out[7]:

N0
P: 0
z_sup: 2500.0
x: [400. 300.   0. 100.   0. 400.]

Interpretação

Já na primeira iteração do algoritmo branch and bound foram encontradas soluções inteiras obtidas imediatamente na relaxação linear. Portanto, nenhum branching ou bounding foi necessário aqui. O lucro máximo obtido pela fabricação de cintos é de 2500 pela fabricação de 400 cintos do tipo M_1 e 300 cintos do tipo M_2

Exercício 2

Um excursionista planeja fazer uma viagem acampando. Há 5 itens que ele deseja levar consigo, mas estes, juntos, excedem o limite de 7 quilos que ele supõe ser capaz de carregar. Para ajudar a si próprio no processo de seleção, ele atribui valores, considerando o grau de importância de cada um dos itens conforme a tabela a seguir:

Item	1	2	3	4	5
Peso(Kg)	5	2	3	2	2
Valor	10	6	7	2	1

Supondo a existência de uma unidade de cada item, faça um modelo de programação inteira que maximize o valor total sem exceder as restrições de peso. Aplique o algoritmo *branch-and-bound* para encontrar a solução ótima. Use o cálculo da razão mínina para determinar o limitante superior.

Modelo

$$z = \max\ 10x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 1x_5 \tag{1}$$
$$\text{subject to:} \tag{2}$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 7 \tag{3}$$
$$x_i \in \{0, 1\},\ \forall i \in \{1, \dots, 5\} \tag{4}$$

Como minha implementação do branch and bound usa solver de programação linear do HiGHS e ele espera problemas do tipo $z = \max c^T x | x : Ax = b$, vou adicionar restrições do tipo $x_i \leq 1$ para as 5 variáveis de decisão.

In [8]:
```
%%capture
c = np.array([10, 6, 7, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0])
integrality = np.array([1] * 5 + [0] * 6)

A = np.array([
    [5, 2, 3, 2, 2]
])
A = np.vstack((A, np.eye(5)))
A = np.hstack((A, np.eye(6)))

b = np.array([7] + [1] * 5)

z_star, x_star, bnb_tree, active_problems, iters = branch_and_bound(c, A,
dot_code = generate_dot(bnb_tree)
g.render(dot_code);
```

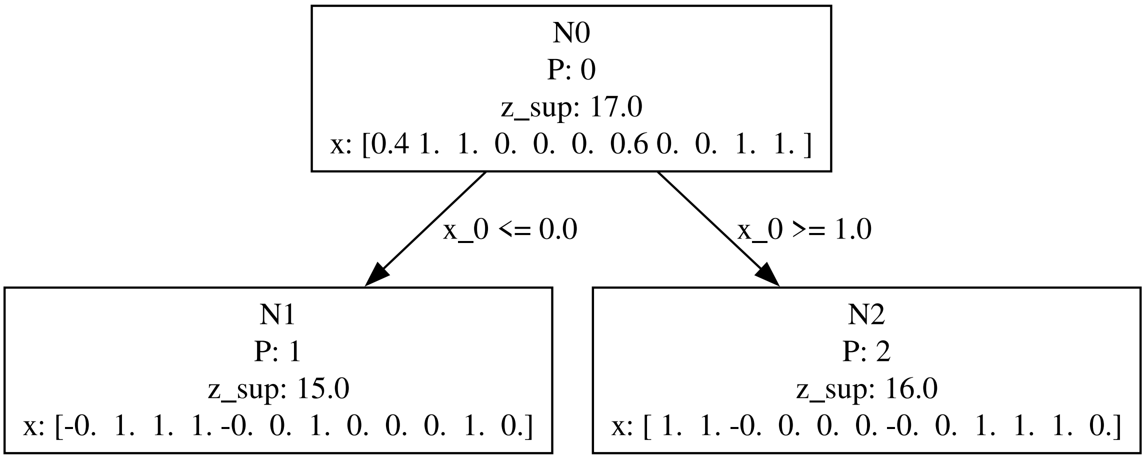
In [9]:
```
print('Iter,Active Problems')
for i in active_problems.keys():
    print(i, active_problems[i], sep=',')
```

```
Iter,Active Problems
0,[0]
1,[2]
Iter,Active Problems
0,[0]
1,[2]
```

Árvore B&B

In [10]:
```
SVG(g.svg)
```

Out[10]:



Interpretação

Existe no nó raiz a resolução deste problema da mochila linearmente relaxado onde ele recomenda o fracionamento do item 1 e a inserção dos itens 2 e 3. Ele faz o branching na única variável possível, na primeira e cria dois subproblemas, que herdam a título de referência, o limitante superior do problema raiz (a ser atualizado posteriormente).

Como visto na saída do algoritmo branch and bround, depois da resolução de P_0, estão ativos P_1 e P_2, ambos herdando o limitante superior de P_0, o que faz com que P_1 seja escolhido primeiro para resolução.

P_1 é escolhido e resolvido, é encontrada uma solução inteira factível --- levar os itens 2, 3 e 4 --- o valor de seu limitante superior é atualizado e uma poda por otimalidade é efetuada, já que uma solução inteira factível incumbente foi encontrada.

P_1 é removido da lista de ativos, por ter sido resolvido e logo na sequência o problema P_2 é resolvido, onde também é encontrada uma solução inteira factível e melhor do que a incumbente até o momento. Uma poda por otimalidade é realizada, esta é a solução ótima do problema e a execução do B&B se encerra.

In [11]:

```
resultado = f'''\\begin{{align}}
    x^{{*}} &= [{', '.join([f'{int(x):d}' for x in x_star])}] \\\\
    Z^{{*}} &= {z_star}
\\end{{align}}'''
Markdown(resultado)
```

Out[11]:

$$
\begin{align}
x^{*} &= [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0] \tag{5} \\
Z^{*} &= 16.0 \tag{6}
\end{align}
$$

Exercício 3

Resolva os problemas a seguir usando método *branch and bound*

a)

$$\max z = 5x_1 + 2x_2$$

$$
\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 2x_2 \\
S.a\ 3x_1 + x_2 &\leq 12 \\
x_1 + x_2 &\leq 5 \\
x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 3x_2 \\
S.a\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
x_1 + x_2 &\leq 6 \\
x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\
x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

letra a)

In [12]:
```
%%capture
c = np.array(
    [5, 2, 0, 0]
)
A = np.array([
    [3, 1, 1, 0],
    [1, 1, 0, 1]
])
b = np.array([
    12,
    5
])
integrality = np.array([1] * 2 + [0] * 2)
z_star, x_star, bnb_tree, active_problems, iters = branch_and_bound(c, A,
dot_code = generate_dot(bnb_tree)
g.render(dot_code);
```

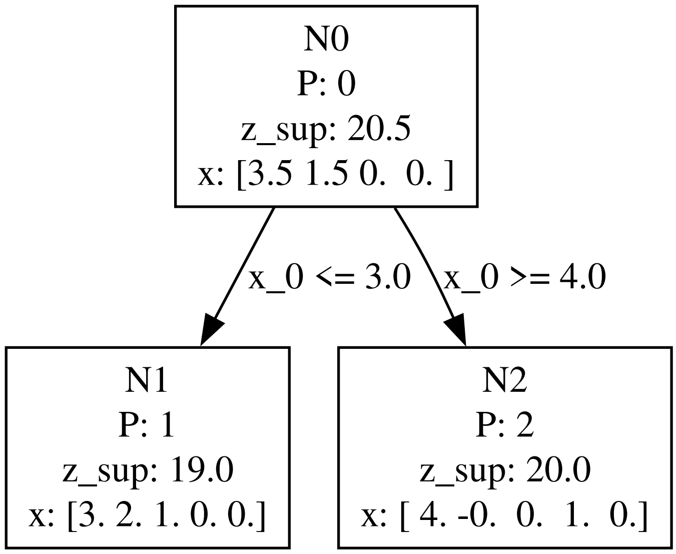
In [13]:
```
print('Iter,Active Problems')
for i in active_problems.keys():
    print(i, active_problems[i], sep=',')
```

```
Iter,Active Problems
0,[0]
1,[2]
Iter,Active Problems
0,[0]
1,[2]
```

Árvore B&B

In [14]:
```
SVG(g.svg)
```

Out[14]:



Interpretação

---

1. Nó raiz P_0 (N0)

dado	valor
solução LP	$x = (3.5, 1.5)$
limite superior z_{sup}	**20.5**
variável fracionária	x_1

O algoritmo ramifica em x_1 (única variável não inteira).

---

2. Ramificação

Sub-problema	Restrição extra	Situação inicial
P_1 (N1)	$x_1 \leq 3$	herda $z_{\text{sup}} = 20.5$
P_2 (N2)	$x_1 \geq 4$	herda $z_{\text{sup}} = 20.5$

---

3. Resolução de P_1 (N1)

resultado	valor
solução LP	$x = (3, 2)$

resultado	valor
	(inteira)
z_{sup}	**19**
z (incumbente)	**19**

Encontrou-se uma solução inteira factível; atualiza-se o incumbente para 19 e poda-se N1 por **otimalidade** ($z_{\text{sup}} = z$).

---

4. Resolução de P_2 (N2)

resultado	valor
solução LP	$x = (4, 0)$ (inteira)
z_{sup}	**20**
z (novo incumbente)	**20**

Melhora-se o incumbente para 20; como $z_{\text{sup}} = z$, poda-se N2 por **otimalidade**. Não restam nós ativos.

---

5. Encerramento

- **Solução ótima**: $x_1^* = 4,\ x_2^* = 0.$
- **Valor ótimo**: $z^* = 20.$
- Toda a árvore se encerra na profundidade 1, pois o primeiro *split* já gerou soluções inteiras em ambos os ramos.

a)

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 2x_2 \\ S.a\ 3x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ S.a\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

letra b)

In [15]:
```
%%capture
c = np.array(
    [2, 3, 0, 0, 0]
)
A = np.array([
    [-1, 2, 1, 0, 0],
    [ 1, 1, 0, 1, 0],
    [ 1, 3, 0, 0, 1]
])
b = np.array([
    4,
    6,
    9
])
integrality = np.array([1] * 2 + [0] * 3)
z_star, x_star, bnb_tree, active_problems, iters = branch_and_bound(c, A,
dot_code = generate_dot(bnb_tree)
g.render(dot_code);
```

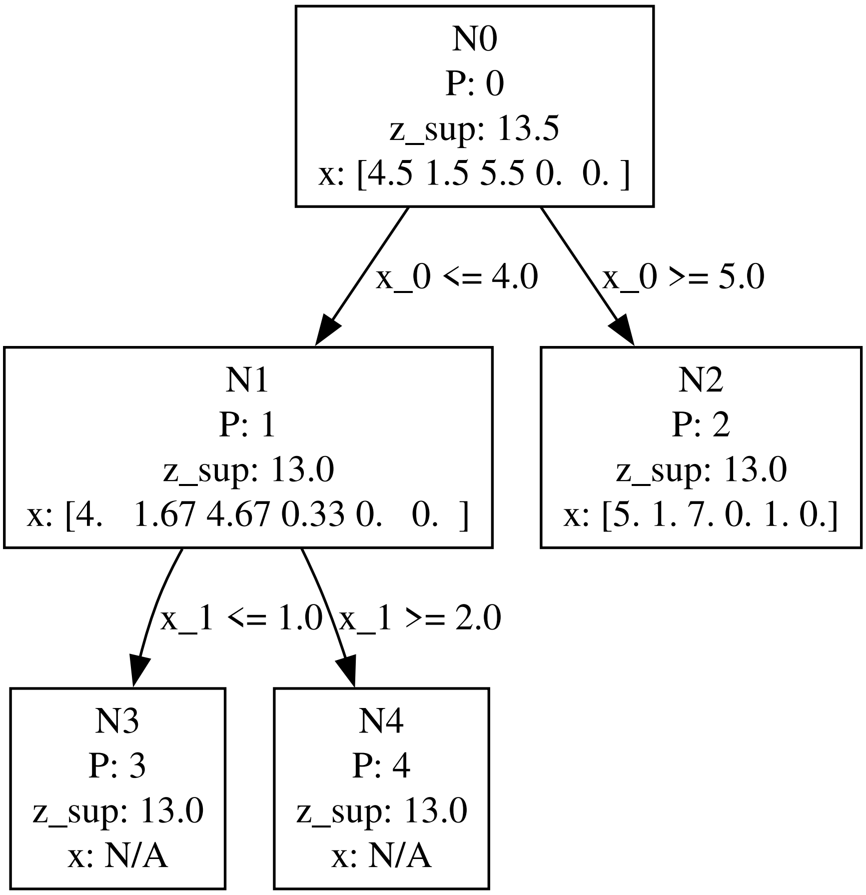
In [16]:
```
print('Iter,Active Problems')
for i in active_problems.keys():
    print(i, active_problems[i], sep=',')
```

```
Iter,Active Problems
0,[0]
1,[1, 2]
2,[2, 3, 4]
Iter,Active Problems
0,[0]
1,[1, 2]
2,[2, 3, 4]
```

Árvore B&B

In [17]:
```
SVG(g.svg)
```

Out[17]:



Interpretação

O problema raiz é resolvido, todas as partes fracionárias têm a mesma distância para serem inteiros, portanto, o algoritmo branch and bound seleciona a primeira variável para ramificar -- x_0.

O limite superior do probema P_0 é 13.5, ele é ramificado em P_1 e P_2 e estes o recebem como potencial limite superior, até 13.5.

O problema P_1 é resolvido e logo em sequência seu limite superior é atualizado. Mais dois problemas são criados, como é possível observar na saída do branch and bound, 3 e 4 e eles são enfileirados para resolução, herdando 13 de P_1 como limites superiores máximos.

Em sequência, pelo método da seleção do nó mais promissor, P_2 que ainda não foi resolvido, pode alcançar até 13.5, portanto ele é resolvido e obtém uma solução incumbente factível $x^* = [5, 1]$ que produz um $z^* = 13$.

Como os problemas restantes P_3, P_4 não podem ser melhores que a solução incumbente, logo eles são podados --- por poda de limitante --- da árvore de branch and bound e tendo sido encontrada a melhor solução incumbente factível para o problema e sendo P_2 também podado da árvore, por otimalidade, não existe mais nenhum subproblema a ser resolvido e uma solução inteira factível e ótima é encontrada!

In [18]:
```
resultado = f'''\\begin{{align}}
    x^{{*}} &= [{', '.join([f'{int(x):d}' for x in x_star])}] \\\\
```

```
    Z^{{*}} &= {z_star}
\\end{{align}}'''
Markdown(resultado)
```

Out[18]:

$$x^* = [5, 1, 7, 0, 1, 0] \tag{7}$$
$$Z^* = 13.0 \tag{8}$$

Exercício 4

4. Resolve o seguinte problema da mochila

$$\begin{aligned} \max z &= 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ S.a\ 5x_1 + 4x_2 &+ 7x_3 + 2x_4 \leq 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Usando as regras para cálculo de limitante inferior e superior baseadas na razão mínina, use o método *branch-and-bound* considerando as seguintes regras de seleção de nós.

a) Busca em profundidade (Explorar o nó no nível mais profundo da árvore. Em caso de empate, seleciona o nó mais promissor.)

b) Nó mais promissor

letra a)

Na minha implementação do branch and bound, na estratégia de busca em profundidade que eu implementei, é só eu resolver o último problema que foi inserido na árvore e nunca haverá empate, pois, ele, é garantidamente o que está no nível mais profundo no momento atual de resolução / construção da árvore branch and bround. E será possível observar uma tendência da árvore se aprofundar à direita, devido ao fato de que o problema à direita costuma ser o último a ser adicionado, mas, nessa estratégia de busca em profundidade, o primeiro a ser resolvido — LIFO (Pilha):

```
def select_current_problem(L, strategy = 'best'):
    """
    Select the current problem to solve based on the chosen
strategy.
    Arguments:
    L -- list of problems to solve
    strategy -- strategy for selecting the current problem
('dfs', 'bfs', 'best')
    Returns:
    The selected problem from the list L.
    """
    if strategy == 'dfs':
        return L.pop()
    elif strategy == 'bfs':
        return L.pop(0)
    elif strategy == 'best':
        # Select the problem with the best upper bound
        # for maximization problems as we're considering
```

```
            best_index = np.argmax([p['z_sup'] for p in L])
            return L.pop(best_index)
        else:
            raise ValueError("Unknown strategy: {}".format(strategy))
```

In [19]:
```
%%capture
c = np.array([6, 4, 5, 3, 0, 0, 0, 0, 0])
b = np.array([
    9,
    1,
    1,
    1,
    1
])
A = np.array([6, 4, 5, 3])
A = np.vstack((A, np.eye(4)))
A = np.hstack((A, np.eye(5)))
integrality = np.array([1] * 4 + [0] * 5)
z_star, x_star, bnb_tree, active_problems, iters = branch_and_bound(c, A,
dot_code = generate_dot(bnb_tree)
g.render(dot_code);
```

In [20]:
```
print('Iter,Active Problems')
for i in active_problems.keys():
    print(i, active_problems[i], sep=',')
```

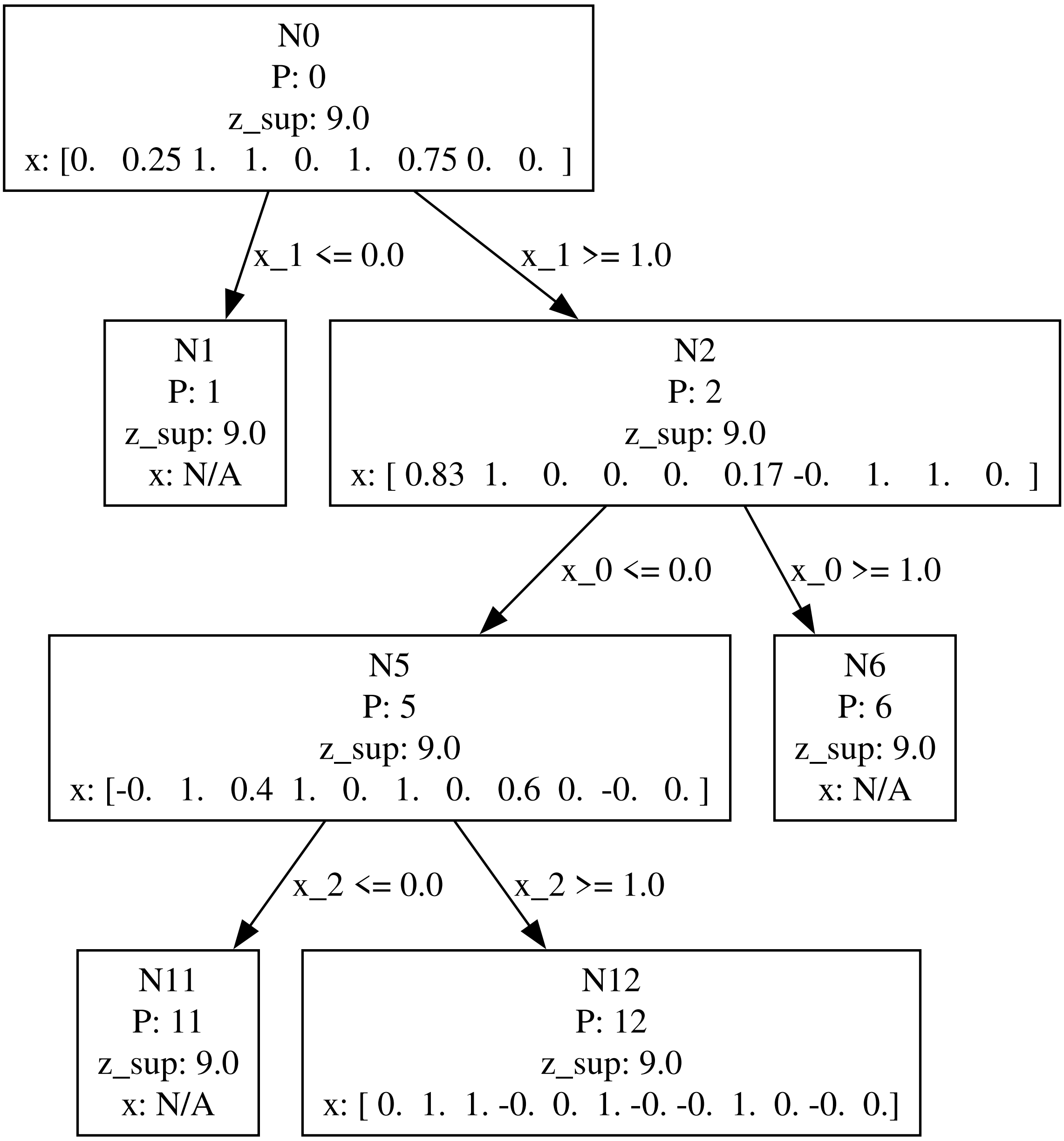
```
Iter,Active Problems
0,[0]
1,[1, 2]
2,[1, 5]
3,[1, 11, 12]
```

```
Iter,Active Problems
0,[0]
1,[1, 2]
2,[1, 5]
3,[1, 11, 12]
```


Árvore B&B

In [21]:
```
SVG(g.svg)
```

Out[21]:



letra b)

In [22]:
```
%%capture
z_star, x_star, bnb_tree, active_problems, iters = branch_and_bound(c, A,
dot_code = generate_dot(bnb_tree)
g.render(dot_code);
```

In [23]:
```
print('Iter,Active Problems')
for i in active_problems.keys():
    print(i, active_problems[i], sep=',')
```

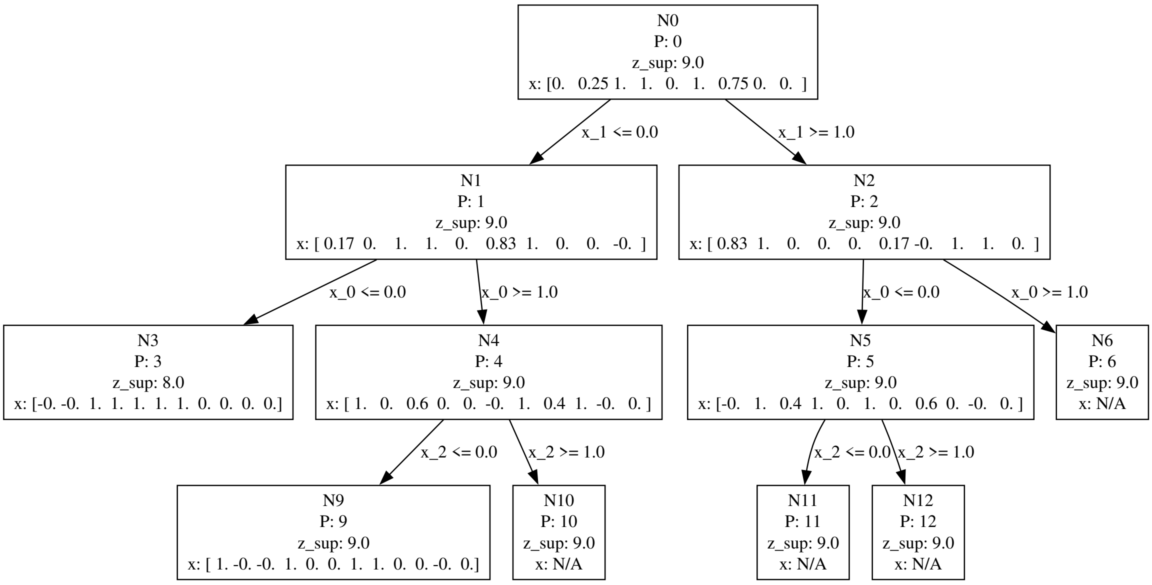
```
Iter,Active Problems
0,[0]
1,[1, 2]
2,[2, 3, 4]
3,[4, 5, 6]
4,[5, 6, 9, 10]
5,[9, 10, 11, 12]
```

```
Iter,Active Problems
0,[0]
1,[1, 2]
2,[2, 3, 4]
3,[4, 5, 6]
4,[5, 6, 9, 10]
5,[9, 10, 11, 12]
```

Árvore B&B

In [24]:
```
SVG(g.svg)
```

Out[24]:



Interpretação

Como esperado, de acordo com o que temos na literatura, soluções factíveis são mais prováveis de serem encontradas em níveis mais profundos em relação à raiz, como visto no nó 12 do branch and bound em busca profunda.

Isso fez com que o algoritmo convergisse mais rápido, em menos iterações. Mas, em regra, como dito no livro texto da disciplina, buscas profundas tendem a produzir mais nós, o que não ocorreu no problema específico.

De toda forma, ambas as formas de seleção de problemas produziram árvores B&B válidas e obtiveram a solução ótima inteira e factível para o problema da mochila em tela.