Terceira Lista de Exercícios de Otimização Inteira

Autor: Diego Ascânio Santos

Suporte de cálculos e resoluções disponível em: https://ascanio.dev/jupyter-otimizacao-inteira/lab/index.html?path=lista-3-otimizacao-inteira.ipynb

---

1. Considere o seguinte problema inteiro

$$\begin{aligned} \max z &= 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 \\ S.a\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\leq 14 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

a) Encontre a solução ótima para o problema relaxado. Dica: a relaxação linear do problema inicial segue uma abordagem semelhante a do problema da mochila binário.

b) Gere uma desigualdade básica baseada em cortes de Gomory que elimine a solução do problema relaxado.

1. a)

Solução ótima para o problema relaxado:

$$\begin{aligned} z^* &= 28.00 \\ x^* &= [4.67,\ 0.00,\ 0.00,\ 0.00,\ 14331.33] \\ I^* &= [0,\ 4] \end{aligned}$$

A variável $x_4 = 14331.33$ é obtida pela adição de um corte big M no método dual simplex para transformar a base inicial como dual factível.

No caso, a solução ótima do problema é dada apenas por $x^* = [4.67,\ 0.00,\ 0.00]$, com $z^* = 28.00$

1. b)

Seguindo o procedimento de cortes de chavatal gommory como ensinado no livro do bazaraa, montei um algoritmo de *cutting planes* e pedindo para o método resolver, foram aplicados dois cortes que removeram soluções fracionárias não factíveis do problema inteiro abordado:

$$0.33x_1 + 0.67x_2 + 0.67x_3 \geq 0.33$$
$$0.50x_1 + x_3 + 0.50x_5 \geq 0.50$$

Após a adição destes cortes uma solução ótima inteira foi encontrada:

$$z^* = 27.00$$
$$x^* = [3,\ 1,\ 0]$$

---

2. Considere o seguinte problema da mochila

$$\max z = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4$$
$$S.a\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 \leq 9$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}.$$

a) Identifique todas coberturas mínimas relacionadas a retrição. Para cada cobertura mínima identifique os cortes de cobertura que podem ser gerados a partir da cobertura extendida.

b) Encontra a solução ótima para o problema relaxado.

c) Identifique cortes de cobertura que elimine este solução do problema relaxado.

2. a)

Desigualdade válida: Corte de cobertura (cover cut)

Cobertura

Seja $X = \{x \in B^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b\}$, um conjunto $C \subseteq N$ é uma cobertura se

$$\sum_{j \in C} a_j > b.$$

C é uma cobertura mínima se $C \setminus \{j\}$ não for uma cobertura para todo $j \in C$.

Coberturas mínimas:

$$5x_1 + 7x_3 > 9$$
$$4x_2 + 7x_3 > 9$$
$$5x_1 + 4x_2 + 2x_4 > 9$$

Cortes de cobertura mínimos:

$$x_1 + x_3 \leq 1$$
$$x_2 + x_3 \leq 1$$
$$x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$$

Fazendo o lifting dos cortes propostos:

$$x_1 + x_3 \leq 1.00$$
$$x_2 + x_3 \leq 1.00$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2.00$$

É possível observar que ao menos o último corte pôde ser extendido e fortalecido pela adição da variável x_3.

2. b)

Solução ótima para o problema relaxado:

$$z^* = 11.00$$
$$x^* = [1.00,\ 0.50,\ 0.00,\ 1.00,\ 0.00,\ 0.00,\ 0.50,\ 1.00,\ 0.00,\ 9213.50]$$
$$I^* = [3,\ 1,\ 6,\ 7,\ 9,\ 0]$$

A variável $x_9 = 9213.50$ é obtida pela adição de um corte big M no método dual simplex para transformar a base inicial como dual factível. No caso, a solução ótima do problema é dada apenas por $x^* = [1.00,\ 0.50,\ 0.00,\ 1.00]$, com $z^* = 11.00$.

2. c)

Os cortes de cobertura que eliminam a solução fracional do problema relaxado são:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2.00$$

Adicionando estes cortes e resolvendo o problema, temos por solução:

$$z^* = 10.00$$
$$x^* = [1.00,\ 1.00,\ 0.00,\ 0.00,\ 0.00,\ 0.00,\ 0.00,\ 1.00,\ 1.00,\ 0.00,\ 9214.00]$$
$$I^* = [3,\ 1,\ 6,\ 7,\ 10,\ 8,\ 0]$$

A variável $x_{10} = 9214.00$ é obtida pela adição de um corte big M no método dual simplex para transformar a base inicial como dual factível. No caso, a solução ótima do problema é dada apenas por $x^* = [1.00,\ 1.00,\ 0.00,\ 0.00]$, com $z^* = 10.00$.

Exercício 3

3. Em cada exemplo abaixo o conjunto X e um ponto x são dados. Encontre uma desigualdade válida baseada em cortes de cobertura para X que elimine x

   (a)
$$X = \{x \in B^5 : 9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 5x_5 \leq 14\}$$

e $x = (1, \frac{5}{8}, 0, 0, 0)$

(b)

$$X = \{x \in B^5 : 9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 5x_5 \leq 14\}$$

e $x = (0, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 0)$

(c)

$$X = \{x \in B^5 : 7x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 3x_5 \leq 14\}$$

e $x = (\frac{1}{7}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1)$

a. $x_1 + x_2 \leq 1$

b. $x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$

c. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$

O corte mínimo da letra c é $x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$, entretanto, pelos valores fracionais do vetor x, $x_1 + x_3 + x_4 \simeq 0.89$, o que implica que o corte mínimo não elimina a solução fracional do problema relaxado. Aí, fiz o lifting desse corte como ensinado no livro do Wolsey que me deu um corte forte e válido de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$ para o problema inteiro. Como $x_2 = x_5 = 1$, logo, os outros valores fracionários é que tendem a ser eliminados pelo corte.

Exercício 4

4. Considere o seguinte problema inteiro

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ S.a \; -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

A solução ótima do problema linear fornece o seguinte:

$$\begin{array}{lccccccc} z = \max 13.5 & & & & -1.5x_4 & -2.5x_5 & & \\ & x_1 & & & +1.5x_4 & -0.5x_5 & = & 4.5 \\ & & x_2 & & -0.5x_4 & +0.5x_5 & = & 1.5 \\ & & & +x_3 & +2.5x_4 & -1.5x_5 & = & 5.5 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in z_+ & & & & & \end{array}$$

Gere diferentes cortes de Gomory e os represente graficamente no espaço de solução.

Resolvendo pelo método dos planos cortantes com cortes de gommory, apenas a aplicação do corte $x_4 + x_5 \geq 1$ foi suficiente para eliminar a solução fracional do problema relaxado, resultando na solução ótima inteira $X^* = [5,\ 1,\ 7,\ 0,\ 1]$ com valor ótimo $Z^* = 13$

Como $x_4 = 6 - x_1 - x_2$ e $x_5 = 9 - x_1 - 3x_2$, substituindo estes valores na restrição do corte, temos que:

$$-2x_1 - 4x_2 + 15 \geq 1 \therefore$$
$$-2x_1 - 4x_2 \geq -14 \therefore$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 14 \therefore$$
$$\frac{x_1}{2} + x_2 \leq \frac{7}{2}$$

Para construir o politopo temos as retas de suas fronteiras:

1. $y = \frac{x}{2} + 2$
2. $y = -x + 6$
3. $y = -\frac{x}{3} + 3$
4. $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$

A área factível, sombreada em azul no gráfico abaixo, é a região delimitada pelas interseções das retas acima: