Teorema

Si $\pi_1 \cdot l_1 \leq \pi_2 \cdot l_2 \leq ... \leq \pi_n \cdot l_n$ entonces la ordenación $i_j = j,\ 1 \leq j \leq n$ minimiza $\sum_{k=1}^{n} \pi_{i_k} \sum_{j=i}^{k} l_{i_j}$ sobre todas las posibles permutaciones de i_j.

Demostración

Sea I $= i_1, i_2, ..., i_n$ cualquier permutación del conjunto de índices $\{1, 2, ..., n\}$. Entonces:
$d(I) = \sum_{k=1}^{n} \pi_{i_k} \sum_{j=i}^{k} l_{i_j} = \sum_{k=1}^{n} \pi_{i_k} \cdot (n-k+1) \cdot l_{i_k}$
Si existiese a y b tal que a¡b y $l_{i_a} > l_{i_b}$ entonces el intercambio de i_a e i_b daría como resultado una permutación I' con:
$d(I') = [\sum_{k,\ k\neq a,\ k\neq b} \pi_{i_k} \cdot (n-k+1) \cdot l_{i_k}] + \pi_{i_b} \cdot (n-a+1) l_{i_b} + \pi_{i_a} (n-b+1) \cdot l_{i_a}$
Restando d(I) menos d(I') obtenemos:
$d(I) - d(I') = (n-a+1) \cdot (pi_{i_a} \cdot l_{i_a} - pi_{i_b} \cdot l_{i_b}) + (n-b+1) \cdot (pi_{i_b} \cdot l_{i_b} - pi_{i_a} \cdot l_{i_a}) =$
$= (b-a) \cdot (\pi_{i_a} \cdot l_{i_a} - \pi_{i_b} \cdot l_{i_b}) > 0$
Por lo tanto, ninguna permutación que no este en orden no decreciente de los $\pi_i \cdot l_i$ puede tener mínimo d. Es fácil ver que todas las permutaciones en orden no decreciente de los $\pi_i \cdot l_i$ tienen el mismo valor d. Por lo tanto el orden definido por $i_j = j,\ 1 \leq j \leq n$ minimiza el valor d.