Problemas
Problemas planteados en el seminario

SEMINARIOS DGIIM
Universidad de Granada
30 de octubre de 2014

Resumen

Se recopilan en este archivo los enunciados y soluciones de problemas propuestos para los seminarios del doble grado.

Índice

1. Sesión de problemas 1

Problema 1.
Este problema es de prueba. El resto de problemas deberán seguir este formato.

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

Propuesto por: Nombre1, Nombre2
Temas: Análisis

SOLUCIÓN 1:
Autores: Nombre2

Esta es una solución de prueba.

$\square$

SOLUCIÓN 2:
Autores: Nombre3

Esta es otra solución de prueba al mismo problema.

$\square$

Problema 2.
Una función real f se llama *muy convexa* si cumple:

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|$$

Demuestra que no existen funciones *muy convexas*.
(Enunciado de José Luis Díaz-Barrero (UPC))

Propuesto por: Mario Román
Temas: Desigualdades

SOLUCIÓN 1:
Autores: Andrés Herrera Poyatos

La demostración se realizará por reducción al absurdo, suponemos que existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muy convexa y obtenemos una propiedad de la misma que contradice su existencia:

Teorema 1. *Sea $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. La función f verifica:*

$$\frac{f(x+\lambda)+f(x-\lambda)}{2} \geq f(x)+2n\lambda \ \ \forall\lambda > 0$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. La demostración se realizará por inducción sobre n. Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$ debemos probar el enunciado para cualquier valor de λ.

• Para $n = 1$, sea $\lambda > 0$, utilizamos la definición de función muy convexa obteniendo el resultado pretendido:

$$\frac{f(x+\lambda)+f(x-\lambda)}{2} \geq f(x)+2\lambda$$

• Supongamos cierto el resultado para un $n \in \mathbb{N}$ y veamos que se verifica para *n+1*. Sea $\lambda > 0$, utilizamos la definición de función muy convexa para obtener las dos siguientes desigualdades:

$$\frac{f(x+\lambda)+f(x)}{2} \geq f\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)+\lambda, \quad \frac{f(x)+f(x-\lambda)}{2} \geq f\left(x-\frac{\lambda}{2}\right)+\lambda$$

Sumando ambas desigualdades:

$$f(x)+\frac{f(x+\lambda)+f(x-\lambda)}{2} \geq f\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)+f\left(x-\frac{\lambda}{2}\right)+2\lambda$$

Aplicamos en el segundo miembro la hipótesis de inducción para $\dfrac{\lambda}{2}$:

$$f\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)+f\left(x-\frac{\lambda}{2}\right)+2\lambda \geq 2\left(f(x)+2n\frac{\lambda}{2}\right)+2\lambda = 2f(x)+2(n+1)\lambda$$

Uniendo ambas desigualdades:

$$f(x)+\frac{f(x+\lambda)+f(x-\lambda)}{2} \geq 2f(x)+2(n+1)\lambda$$

Basta pasar $f(x)$ al otro miembro para obtener la igualdad deseada. □

Del teorema anterior se deduce rápidamente la no existencia de *f*. Basta ver que, dados $x \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$, el teorema implica que el conjunto $C = \{f(x)+2n\lambda : n \in \mathbb{N}\}$ está mayorado por $\dfrac{f(x+\lambda)+f(x-\lambda)}{2}$, contradicción, pues es claro que C no está mayorado.

□

Problema 3.
Sean a, b, c números positivos reales tales que $abc = 1$. Demuestra que:

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^4}{a+b} + \frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^4}{b+c} + \frac{\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)^4}{c+a} \geq 24$$

(Enunciado de José Luis Díaz-Barrero (UPC))

Propuesto por: Mario Román
Temas: Desigualdades

Problema 4.
Problema en Hackerrank: `https://www.hackerrank.com/contests/infinitum-aug14/challenges/emma-and-sum-of-products`

Propuesto por: Andrés Herrera
Temas: Programación

Problema 5.
Problema en Hackerrank: `https://www.hackerrank.com/challenges/insertion-sort`

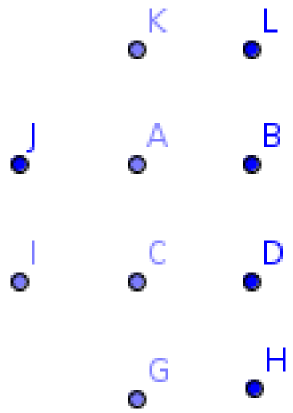
Propuesto por: Andrés Herrera
Temas: Programación

Problema 6.
Halla todas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cumpliendo que si $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ forman un cuadrado,

$$f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$$

Propuesto por: Mario Román
Temas: Álgebra

SOLUCIÓN 1:
Autores: José Carlos Entrena



□

Problema 7.
Problema escrito en Math.StackExchange: `http://math.stackexchange.com/questions/633985/is-fn-sum-k-0n-ak-bijective-in-mathbbz-m`

Propuesto por: Mario Román
Temas: Álgebra

Problema 8.
Implementar el algoritmo KNN para clasificación multiclase.

Propuesto por: Mario Román
Temas: Programación

Problema 9.
En cada una de las casillas de una cuadrícula 3×7 se coloca una ficha azul o una ficha roja. Demostrar que siempre podemos encontrar un rectángulo cuyos vértices son cuatro fichas del mismo color.

Enunciado de José Miguel Manzano.

Propuesto por: Mario Román
Temas: Coloraciones

Problema 10.
Enunciado en ProjectEuler: `https://projecteuler.net/problem=18`
Enunciado de su generalización en ProjectEuler: `https://projecteuler.net/problem=67`

Propuesto por: Marta Andrés
Temas: Programación, Álgebra

Problema 11.
Enunciado en HackerRank: `https://www.hackerrank.com/contests/w8/challenges/gneck`

Propuesto por: Andrés Herrera
Temas: Programación