

Lanzamiento de Projectiles en dos dimensiones

Diego Bravo

Sistemas Computacionales
Universidad Católica de Cuenca
Cuenca, Ecuador

Email: diego.bravo.49@est.ucacue.edu.ec

Emilio Quinde

Sistemas Computacionales
Universidad Católica de Cuenca
Cuenca, Ecuador

Email: emilio.quinde@est.ucacue.edu.ec

José Cordero

Sistemas Computacionales
Universidad Católica de Cuenca
Cuenca, Ecuador

Email: jose.cordero@est.ucacue.edu.ec

Resumen—The launching of projectiles in two dimensions is a classical problem in mechanics that involves the study of the motion of an object that is launched with an initial velocity from a given height, under the exclusive influence of gravity. In this paper we explore projectile launching by taking into account the variation of both the launch angle and the initial velocity. Using the equations of motion in two dimensions and applying the basic principles of kinematics and dynamics, we investigate how these variables affect the trajectory of the projectile, its maximum range and its maximum height. In addition, we analyze how changes in angle and initial velocity affect the shape and symmetry of the projectile's parabolic trajectory.

Index Terms—kinematics and dynamics, projectile, parabolic.

I. INTRODUCCIÓN

El movimiento de un proyectil se puede describir utilizando los principios de la mecánica newtoniana. Es decir cuando un objeto es lanzado, su trayectoria depende de dos factores clave: el ángulo de lanzamiento y la velocidad inicial, estos factores determinan la trayectoria inicial del proyectil y, junto con la velocidad inicial, influye en la altura máxima alcanzada y el alcance horizontal del lanzamiento.

La velocidad inicial es la rapidez con la que el proyectil abandona el punto de lanzamiento. Una mayor velocidad inicial generalmente resulta en un mayor alcance y altura máxima, siempre que el ángulo de lanzamiento sea el adecuado. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la velocidad inicial también puede verse afectada por factores externos, como el viento o la fricción del aire.

Al analizar el movimiento de un proyectil, se deben considerar tanto las fuerzas que actúan sobre él, es decir la gravedad con un valor fijo de 9.81 m/s^2 como condición inicial de lanzamiento. Mediante el uso de las ecuaciones del movimiento y los principios de la cinemática y dinámica, es posible predecir la trayectoria del proyectil y calcular variables como el alcance máximo, la altura máxima y el tiempo de vuelo.

II. APLICACIÓN DE LAS LEYES DE NEWTON

II-A. Primera Ley de Newton

La primera ley de Newton, conocida también como ley de la inercia, se manifiesta en el lanzamiento de proyectiles en dos dimensiones, puesto que en ausencia de fuerzas externas, un objeto en movimiento conserva su velocidad y dirección constantes, tanto horizontal como verticalmente.

En la dirección horizontal, una vez que el proyectil es lanzado, no hay fuerzas horizontales que actúen sobre él (sin considerar resistencia del aire). Por lo tanto, según la primera ley de Newton, el proyectil mantiene su velocidad horizontal constante durante todo el vuelo, siendo esta velocidad igual a la componente horizontal de la velocidad inicial de lanzamiento.

En la dirección vertical, la única fuerza actuante es la gravedad. Antes del lanzamiento, el proyectil estaba en reposo verticalmente. Si no actuara ninguna fuerza, permanecería en reposo. Sin embargo, la gravedad provoca una aceleración constante hacia abajo, cambiando la velocidad vertical del proyectil a medida que asciende y desciende.

II-B. Segunda Ley de Newton

La segunda ley de Newton, que relaciona la fuerza neta aplicada sobre un objeto con su aceleración, se manifiesta en el lanzamiento de proyectiles en dos dimensiones de la siguiente manera: en la dirección horizontal, donde no hay fuerzas horizontales netas actuando sobre el proyectil durante su vuelo, según la segunda ley de Newton, $F = ma$, lo que explica por qué el proyectil mantiene una velocidad horizontal constante; mientras que en la dirección vertical, la única fuerza neta es la fuerza de gravedad, produciendo una aceleración constante hacia abajo (g), responsable del cambio en la velocidad vertical del proyectil a medida que asciende y desciende, donde la velocidad vertical inicial disminuye debido a la aceleración negativa de la gravedad, se vuelve cero en el punto más alto de la trayectoria, y luego aumenta en la dirección opuesta debido a la misma aceleración gravitacional, así, la segunda ley de Newton explica la aceleración constante del proyectil en la dirección vertical debido a la fuerza de gravedad, mientras que en la dirección horizontal no hay aceleración neta, resultando en una velocidad horizontal constante.

II-C. Tercera Ley de Newton

La tercera ley de Newton, también conocida como la ley de acción y reacción, se manifiesta en el lanzamiento de proyectiles en dos dimensiones de la siguiente manera: al ser lanzado un proyectil, ya sea por una persona o un dispositivo de lanzamiento, se aplica una fuerza sobre él para ponerlo en movimiento. Sin embargo, según la tercera ley de Newton, cada acción tiene una reacción opuesta e igual. Por lo tanto, cuando se empuja el proyectil, este ejerce una fuerza igual

y opuesta sobre la mano o el dispositivo de lanzamiento. Este principio se observa tanto en lanzamientos realizados por personas como en disparos de armas de fuego, donde el retroceso es el resultado de la fuerza de reacción del proyectil sobre el lanzador o el arma. Aunque la tercera ley de Newton no afecta directamente la trayectoria del proyectil una vez lanzado, es fundamental para comprender el proceso de lanzamiento y las fuerzas involucradas, ya que la fuerza de reacción inicial determina la velocidad y el ángulo de lanzamiento, factores cruciales en la trayectoria resultante.

III. DISEÑO DEL SIMULADOR

III-A. *Ángulo fijo y velocidad inicial variable*

El diseño empleado está codificado en Java, mediante una simulación de lanzamiento de proyectil en dos dimensiones. Para iniciar definimos variables como son: ángulo de lanzamiento, velocidad inicial, altura máxima (Y_{max}), alcance máximo (X_{max}) y tiempo de vuelo.

A continuación se realizan los ciclos de cálculo, que mediante el uso de bucles anidados iteramos sobre cada combinación de ángulos y velocidades iniciales; dichos resultados de cada iteración se almacenan en matrices bidimensionales para su posterior análisis.

La iteración se hará a los Ángulos y Velocidades Iniciales, de manera que, el bucle exterior itera sobre un rango de ángulos, mientras que el bucle interior itera sobre un rango de velocidades iniciales, siendo los rangos asignados en ángulo (0 a 89 grados) y velocidades iniciales (10 a 15 m/s).

Una vez realizados los cálculos respectivos se visualizan los resultados en la consola, mostrando los datos de alturas, alcances y tiempos para cada combinación de ángulo y velocidad inicial.

III-B. *Velocidad inicial fija y ángulo variable*

El diseño empleado está codificado en Java, mediante una simulación de lanzamiento de proyectil en dos dimensiones. Para iniciar definimos variables como son: ángulo de lanzamiento, velocidad inicial, altura máxima (Y_{max}), alcance máximo (X_{max}) y tiempo de vuelo.

A continuación se realizan los ciclos de cálculo, que mediante el uso de bucles anidados iteramos sobre cada combinación de ángulos y velocidades iniciales; dichos resultados de cada iteración se almacenan en matrices bidimensionales para su posterior análisis.

La iteración se hará a los Ángulos y Velocidades Iniciales, de manera que, el bucle exterior itera sobre un rango de velocidades iniciales, mientras que el bucle interior itera sobre un rango de ángulos, siendo los rangos asignados en ángulo (0 a 89 grados) y velocidades iniciales (10 a 15 m/s).

Una vez realizados los cálculos respectivos se visualizan los resultados en la consola, mostrando los datos de alturas, alcances y tiempos para cada combinación de ángulo y velocidad inicial.

IV. METODOLOGÍAS

Dado que el lanzamiento de proyectiles implica el uso de modelos matemáticos y herramientas computacionales para explorar y analizar sistemáticamente cómo el ángulo y la velocidad inicial de lanzamiento afectan el alcance, permitiendo una evaluación rigurosa y cuantitativa de su influencia, la metodología aplicada fue la cuantitativa. Y se procedió de esta manera:

- Definición de Parámetros Iniciales: Se establecen el rango de ángulos de lanzamiento y el rango de velocidades iniciales que se van a investigar.

- Formulación de Modelos Matemáticos: Se utilizan las ecuaciones del movimiento parabólico para modelar el lanzamiento del proyectil. Estas ecuaciones se derivan de principios físicos y describen la trayectoria del proyectil en función del ángulo de lanzamiento, la velocidad inicial, la gravedad y el tiempo.

- Implementación Computacional: Se desarrolla un programa computacional que calcule el alcance del proyectil para diferentes combinaciones de ángulos y velocidades iniciales. Este programa utiliza métodos numéricos para resolver las ecuaciones del movimiento y obtener los resultados.

- Iteración y Evaluación: Se ejecuta el programa para cada combinación de ángulos y velocidades iniciales dentro de los rangos definidos. Para cada combinación, se calcula el alcance del proyectil.

- Análisis de Resultados: Se analizan los resultados obtenidos para identificar patrones y tendencias. Se pueden utilizar herramientas estadísticas y gráficas para visualizar la relación entre el ángulo de lanzamiento, la velocidad inicial y el alcance del proyectil.

- Interpretación de Conclusiones: Basándose en los resultados, se interpretan las conclusiones sobre cómo el ángulo y la velocidad inicial de lanzamiento afectan el alcance del proyectil. Se pueden identificar combinaciones óptimas de ángulos y velocidades para maximizar el alcance.

- Validación y Verificación: Se verifica la validez de los resultados comparándolos con datos experimentales o con modelos teóricos conocidos. Se realizan ajustes en el modelo o en los parámetros de entrada según sea necesario.

V. ANÁLISIS REALIZADOS

V-A. *Diagrama de dispersión del alcance*

En el lanzamiento de proyectiles, un diagrama de dispersión sirve para representar la relación entre el ángulo de lanzamiento y la distancia recorrida por el proyectil, considerando diferentes velocidades iniciales. Cada punto en el diagrama corresponde a un par de valores: el ángulo y la distancia alcanzada. Al observar estos puntos en el gráfico, se puede detectar si existe alguna tendencia o patrón en los datos. Por ejemplo, se puede determinar si hay una correlación clara entre el ángulo de lanzamiento y la distancia alcanzada, y si esta relación es positiva, negativa o neutra. Este análisis cuantitativo ayuda a entender cómo el ángulo y la velocidad inicial influyen en el alcance del proyectil, permitiendo identificar las

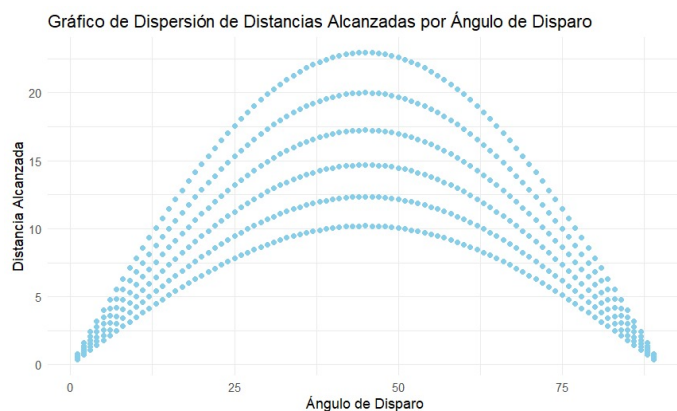


Figura 1. Diagrama de dispersión del alcance según el ángulo

combinaciones que producen el mayor alcance y cómo estas variables interactúan entre sí.

V-B. Histograma alcance en X

El histograma del alcance en el eje x muestra cómo se distribuyen las distancias alcanzadas por los proyectiles en función de sus alcances horizontales. Cada barra en el histograma representa un intervalo específico de alcance horizontal, y la altura de cada barra indica con qué frecuencia se observa ese intervalo de alcance en los datos. Este tipo de gráfico ofrece una visión general de cómo se dispersan los alcances horizontales y ayuda a identificar patrones como la concentración de valores en ciertos rangos, así como cualquier asimetría o sesgo en la distribución de los alcances.

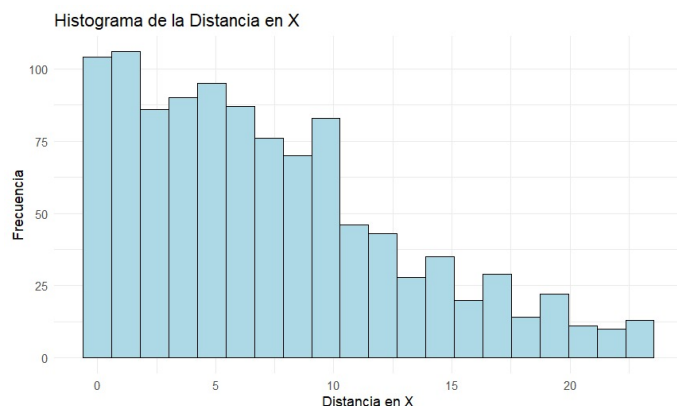


Figura 2. Histograma alcance en X

V-C. Histograma distancia en Y

El histograma de la distancia en el eje y muestra cómo se distribuyen las alturas alcanzadas por los proyectiles en función de sus alturas máximas. Cada barra en el histograma representa un intervalo específico de altura máxima, y la altura de cada barra indica con qué frecuencia se observa ese intervalo de altura en los datos. Este tipo de gráfico proporciona una visión general de cómo se dispersan las

alturas máximas alcanzadas y ayuda a identificar patrones como la concentración de valores en ciertos rangos, así como cualquier asimetría o sesgo en la distribución de las alturas máximas.

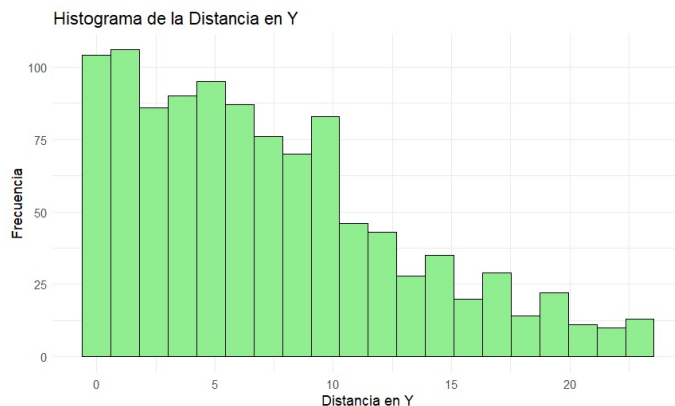


Figura 3. Histograma distancia en Y

V-D. Diagrama de cajas en X & Y por velocidad

El diagrama de cajas en el eje x muestra la distribución de los alcances horizontales de los proyectiles lanzados, mientras que en el eje y muestra la distribución de las alturas máximas alcanzadas por esos proyectiles. En el eje x, el diagrama de cajas proporciona información sobre la dispersión de los alcances horizontales, incluyendo la mediana, los cuartiles y los valores atípicos si los hubiera. En el eje y, el diagrama de cajas muestra la variabilidad de las alturas máximas, permitiendo identificar la mediana, los cuartiles y cualquier valor atípico en la distribución de las alturas. Esto proporciona una representación visual de la dispersión y la centralidad de los datos en ambos ejes, permitiendo comparar fácilmente las distribuciones de los alcances horizontales y las alturas máximas alcanzadas.

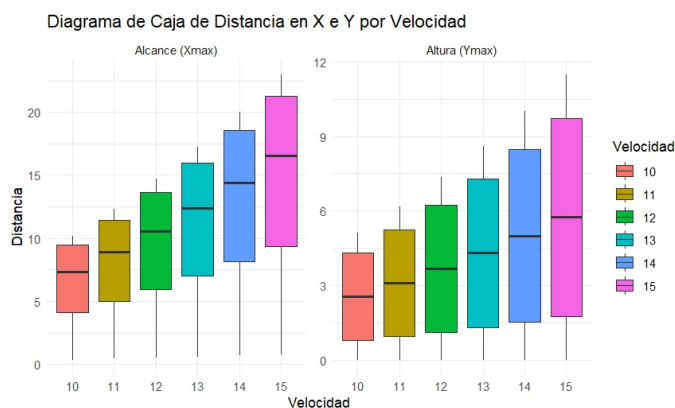


Figura 4. Diagrama de cajas en X & Y por velocidad

VI. RESULTADOS OBTENIDOS

Luego de el desarrollo del proyecto y obtenidos los resultados, se pudo ver cómo diferentes variables afectan su

alcance y altura máxima, Se puede observar cómo el ángulo de lanzamiento afecta tanto al alcance horizontal como a la altura máxima alcanzada. Por otra parte la velocidad inicial del proyectil también puede tener un impacto significativo en su rendimiento, a la vez es importante analizar cómo interactúan el ángulo de lanzamiento y la velocidad inicial para influir en el rendimiento general del proyectil. En resumen al observar los datos en conjunto, es posible identificar tendencias o patrones claros que indiquen cómo diferentes combinaciones de ángulos y velocidades iniciales afectan el rendimiento del proyectil.

VII. CONCLUSIONES

En conclusión tanto el ángulo de lanzamiento como la velocidad inicial tienen un impacto significativo en el rendimiento del lanzamiento de proyectiles. A través del análisis cuantitativo realizado, se observa que existe una relación compleja entre estas dos variables y el alcance horizontal, así como la altura máxima alcanzada por el proyectil.

REFERENCIAS

- [1] Efectividad de las actividades experimentales demostrativas como estrategia de enseñanza para la comprensión conceptual de la tercera ley de Newton en los estudiantes de fundamentos de Física del IPC. Revista de investigación, 35(73), 61-84. (2011).
- [2] Leyes de Newton. Vida Científica Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 4, Chaudhari M. Integrating Diverse Healthcare Data using MongoDB and Neo4j.Neo4j Blog, 2016.
- [3] Un experimento de lanzamiento de puntas cola de pescado. Mamül Mapu: pasado y presente desde la arqueología pampeana, 215-232. (2010).
- [4] Utilización de imágenes para la detección de concepciones alternativas: un estudio exploratorio con estudiantes universitarios. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 6(3), 691-713. (2007).