

Filtro de Kalman

Rastreamento Balístico 2D de Projétil

Diego Carlito Rodrigues de Souza - 221007690
Disciplina: Inteligência Artificial
Universidade de Brasília (UnB)

Novembro de 2025

Resumo

Este relatório descreve a aplicação do Filtro de Kalman Linear para o problema de rastreamento de objetos em movimento balístico. O sistema estima a trajetória parabólica de um projétil (posição e velocidade em eixos ortogonais) a partir de observações ruidosas que simulam um radar de baixa precisão. O modelo incorpora as leis da física (movimento uniformemente variado sujeito à gravidade) através do vetor de controle do filtro, demonstrando a capacidade do algoritmo de fundir dados sensoriais incertos com um modelo dinâmico conhecido para reduzir o ruído e prever a trajetória real.

1 Introdução

O rastreamento de objetos em movimento é uma aplicação clássica de sistemas dinâmicos em engenharia e defesa. Sensores como radares e GPS frequentemente introduzem ruído gaussiano (branco) nas medidas, tornando os dados brutos inadequados para controle preciso.

O Filtro de Kalman é a solução ótima (no sentido de mínimos quadrados) para estimar o estado real de sistemas lineares sujeitos a esse tipo de ruído. Neste projeto, simulamos o lançamento de um projétil e aplicamos o filtro para reconstruir a trajetória suave a partir de medições dispersas, utilizando um modelo cinemático de velocidade constante ajustado por aceleração externa.

2 Modelagem Matemática

O sistema foi modelado no espaço de estados. O vetor de estado x contém as posições (p) e velocidades (v) nos eixos X e Y:

$$x_k = \begin{bmatrix} p_x & p_y & v_x & v_y \end{bmatrix}^T$$

2.1 Dinâmica do Sistema (Matriz F)

As equações de movimento discreto (com passo de tempo Δt) assumem que a nova posição é a posição anterior mais a velocidade vezes o tempo:

$$p_{k+1} = p_k + v_k \Delta t$$

$$v_{k+1} = v_k$$

Isso resulta na seguinte Matriz de Transição de Estado (F):

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Vetor de Controle (Gravidade)

Para modelar a trajetória parabólica corretamente sem usar um filtro não-linear (EKF), incorporamos a aceleração da gravidade ($g \approx 9.81m/s^2$) como uma força externa conhecida atuando no eixo Y. Isso é feito através do vetor de controle u :

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g\Delta t \end{bmatrix}$$

Essa abordagem permite que o filtro "saiba" que o objeto deve cair, melhorando a predição mesmo quando as medições são muito ruidosas.

3 Implementação e Simulação

O projeto foi implementado em Python utilizando a biblioteca NumPy para álgebra linear.

3.1 Simulação de Sensores (Matriz R)

Para testar a robustez do filtro, gerou-se uma "verdade terrestre" (trajetória real) e adicionou-se ruído gaussiano com desvio padrão $\sigma = 3.0m$. Isso simula um sensor de baixa qualidade. A matriz de covariância de ruído de medição R foi configurada para refletir essa incerteza:

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Isso instrui o filtro de Kalman a "desconfiar" das medições e dar mais peso ao modelo físico (Matriz Q com valores baixos).

4 Resultados e Análise

A simulação foi executada até o projétil atingir o solo. A Figura 1 apresenta os resultados visuais.

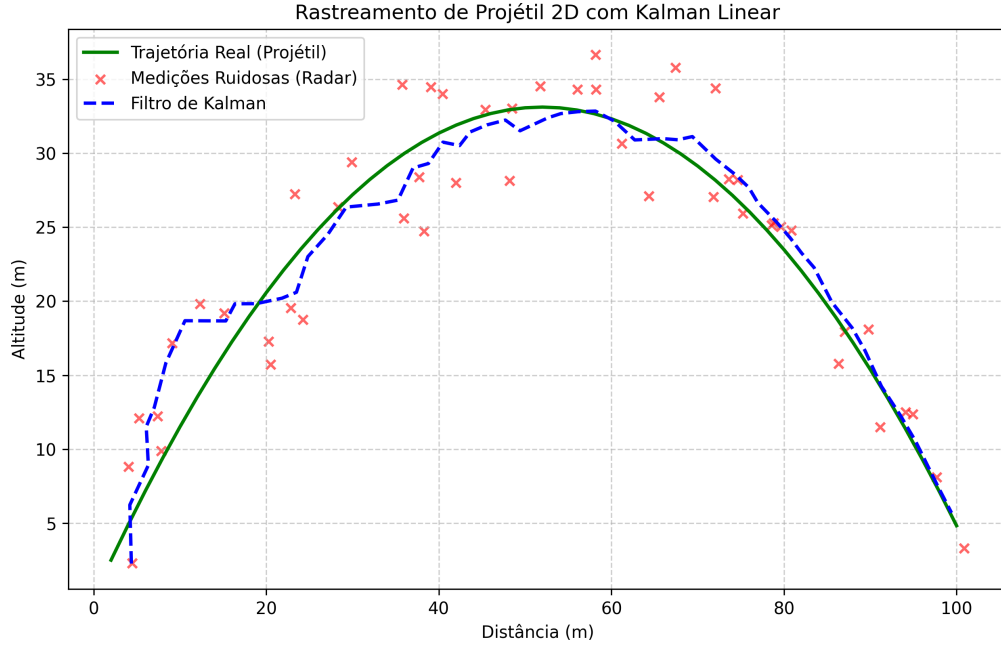


Figura 1: Trajetória estimada pelo Filtro de Kalman (Tracejado Azul) comparada às Medições Ruidosas (X Vermelho) e a Trajetória Real (Verde).

4.1 Análise do Desempenho

A análise do gráfico permite três conclusões principais:

1. **Filtragem de Ruído Eficiente:** As medições do radar (pontos vermelhos) apresentam alta dispersão, muitas vezes distando vários metros da posição real. A estimativa do Kalman (linha azul) ignora essas oscilações bruscas, mantendo uma curva suave.
2. **Convergência Rápida:** O filtro foi inicializado com estado zero ($x = 0, y = 0, v = 0$). Nota-se no início do gráfico (canto inferior esquerdo) que a linha azul começa fora da trajetória verde, mas converge para a verdade em menos de 5 iterações, ajustando rapidamente sua estimativa de velocidade inicial.
3. **Aderência ao Modelo Físico:** A linha azul segue quase perfeitamente a linha verde (Trajetória Real). Isso valida a inclusão do vetor de controle da gravidade; sem ele, o filtro linear tenderia a projetar uma linha reta tangente à curva, gerando um erro crescente ("lag") na descida.

5 Conclusão

Este projeto demonstrou a eficácia do Filtro de Kalman Linear na fusão de dados de sensores ruidosos com modelos físicos determinísticos. A aplicação em balística 2D ilustra como o conhecimento prévio do sistema (leis de Newton) pode ser codificado nas matrizes do filtro para corrigir dados de baixa qualidade, resultando em um rastreamento preciso e estável, essencial para aplicações em robótica e sistemas autônomos.