Costas Rodríguez, Diego. 1

→ Ejercicios Tema 4:

1. Na táboa adxunta preséntase a distribución angular dos ^{16}O medida tras ser difundido elásticamente sobre ^{12}C a 168 MeV. Demostrar que dita distribución pode reproducirse utilizando un modelo de difracción de Fraunhöfer.

Tomar o factor r_0 da parametrización do radio nuclear como $r_0 = 1.44$ fm.

Seguindo a teoría dos apuntamentos podemos ver que no caso da difracción Fraunhöfer, podemos obter a amplitude de difusión ~~~~ en función dos polinomios de Legendre, os cales podemos poñer ~~~~ en función de funcións de Bessel, de xeito que pasamos de: $f(\theta) = \sum_{\ell} (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta)$ a $f(\theta) = i k R^2 \left[\frac{J_1(kR\theta)}{kR\theta}\right]$;

e tendo en conta que $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = k^2 R^4 \left[\frac{J_1(kR\theta)}{kR\theta}\right]^2}$.

Os datos que nos proporcionan son os da sección eficaz diferencial, porque onde pon σ na táboa, vemos que as unidades son mbarn/sr. Faremos, polo tanto, en python, unha gráfica destes datos, e logo unha da sección eficaz diferencial no caso teórico da difracción de Fraunhöfer, a ver se se parecen.

Para isto, necesitamos algúns datos así como R e k, ademais de que se dan a T do ^{16}O no sistema LAB e temos que analizar os nosos datos no sistema CM; polo tanto: $\boxed{T' = \frac{m_A}{m_a + m_A} T = 72{,}013 \text{ MeV}}$

$$k = \sqrt{\frac{2\mu T'}{\hbar^2}} \text{ ; onde } \mu = \frac{m_A \cdot m_a}{m_A + m_a} = 6{,}387 \cdot 10^3 \text{ MeV}/c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{2 \cdot 6387 \text{ MeV} \cdot 72{,}013 \text{ MeV}}{(\hbar \cdot c)^2 \, (\text{MeV fm})^2}} \Rightarrow \boxed{k = 4{,}857 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-1}}$$

$$\boxed{R = 1{,}44 \cdot (16^{1/3} + 12^{1/3}) = 6{,}928 \cdot 10^{-15} \text{ m}}$$

$$\boxed{kR = 33{,}635} \qquad \boxed{k^2R^4 = 542600 \text{ mbarn}}$$

Con estes datos xa podemos representar os nosos gráficos, os cales aparecerán ao final do documento ou subidos xunto co PDF do boletín ao campus virtual.

2. Consideramos que temos un sistema de nucleóns baixo o efecto dun potencial ~~bidimensional~~ tridimensional de tipo pozo cadrado.

$V(r) = V_0, \quad r < R$
$V(r) = 0, \quad r > R$

Utilizando a aproximación de Born avalía:

a) A amplitude de difusión.

A aproximación de Born permite tratar a onda difundida (ao igual que a incidente) como unha onda plana, de xeito que temos:

$$\boxed{f_{BA}(\theta,\phi) = -\frac{1}{4\pi}\int \exp\{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'\}\,U(r')\exp\{i\vec{k}\vec{r}'\}\,d^3\vec{r}}$$

; e reorganizando a ~~expresión~~ integral, podemos ver que a amplitude de dispersión é a transformada de Fourier do potencial de interacción:

$$\boxed{f_{BA}(\theta,\phi) = -\frac{1}{4\pi}\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'}\,V(r')\,d^3\vec{r}}$$

Como vemos no enunciado, ao ser $V(r) = 0$ para $r > R$, a amplitude de dispersión será nula; temos entón que integrar entre 0 e R con $V(r) = V_0$:

$$f_{BA} = -\frac{V_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} e^{-iqr\cos\theta}\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = -\frac{V_0}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{R} e^{-iqr\cos\theta}\, r^2\sin\theta\, d\theta\, dr \rightarrow$$

$$\rightarrow \int e^{-iqr\cos\theta}\sin\theta\, d\theta \overset{u=\cos\theta}{=} -\int e^{-iqru}\,du = \frac{e^{-iqru}}{iqr}\Bigg| = \frac{e^{-iqr\cos\theta}}{iqr}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} =$$

$$= \frac{1}{qri}\left(2i\sin(qr)\right)$$

$$\rightarrow \int_0^R \frac{2\cancel{i}\sin qr}{\cancel{i}q\cancel{r}}\, r^{\cancel{2}}\, dr \longrightarrow = \frac{2}{q^2}\left(\frac{\sin(qR)}{q} - R\cos(qR)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{BA}(\theta,\phi) = -\frac{V_0}{q^3}\left[\sin(qR) - qR\cos(qR)\right]}$$

Amplitude de difusión

$\longrightarrow$

b) A secção eficaz diferencial, distinguindo o caso de baixa energia ($qR<1$) e o de alta energia ($qR>1$).

A secção eficaz diferencial aparecerá directamente como: $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\phi)|^2}$ →

→ $$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V_0^2}{q^6}\left[\sin(qR) - qR\cos(qR)\right]^2}$$

- $qR<1$: Como $\theta<1$ $\begin{cases} \sin\theta \sim \theta \\ \cos\theta \sim 1 \end{cases}$ $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V_0^2}{q^6}(qR-qR)^2 = 0}$

- $qR>1$: Distinguimos dois casos
  - $qR \simeq \pi, 2\pi, \ldots$ domina o coseno: $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V_0^2}{q^4}R^2}$
  - $qR \simeq \pi/2, 3\pi/2 \ldots$ domina o seno: $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V_0^2}{q^6}}$

Castro Rodríguez, Diego.

3. A distribución angular correspondente a momento angular transferido $l=2$ para a reacción $^{20}Ne(d,n)^{21}Na$ poboando o estado $J^\pi = 5/2^+$ a 2.14 MeV no ^{21}Na presenta un pico a 36° para unha enerxía do deuterón incidente no CM de 6 MeV. Utilizando a aproximación de Born de ondas planas, determinar o valor do radio do ^{21}Na e comparalo co valor obtido a partir da parametrización $R = 1.2A^{1/3}$ fm.

Temos neste caso unha reacción de transferencia, que debe poder describirse con ondas planas (aprox. Born) para poder ter que:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \sin^2\left(qR - \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \; ; \; \boxed{q^2 = k_i^2 + k_f^2 - 2k_ik_f\cos\theta}$$

onde podemos saber do enunciado que $\underline{\theta = 36^\circ}$. Para calcular os momentos inicial e final, temos que coñecer as enerxías cinéticas do centro de masas de cada 'lado' da reacción.

$$Q = T'_B + T'_b - T'_A - T'_a \rightarrow \boxed{Q + T'_i = T'_f} \qquad T'_i = 6 \text{ MeV}$$

$$Q = \Big[M(^2_1H) + M(^{20}Ne) - M(^{21}\overset{*}{Na})_{(-2.14)} - m_n + 2m_e\Big] = -1{,}9265 \text{ MeV}$$

$$T'_f = 4{,}073 \text{ MeV}$$

$$\boxed{k_i} = \sqrt{2 \cdot \frac{20 \cdot 2}{22} \cdot 931{,}49432 \cdot 6} \cdot \frac{1}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} 142{,}561 \frac{\text{MeV}}{c} \rightarrow \boxed{0{,}724 \text{ fm}^{-1}}$$

$$\hbar c = 197 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$$

$$\boxed{k_f} = \text{análogamente} = \boxed{0{,}597 \text{ fm}^{-1}}$$

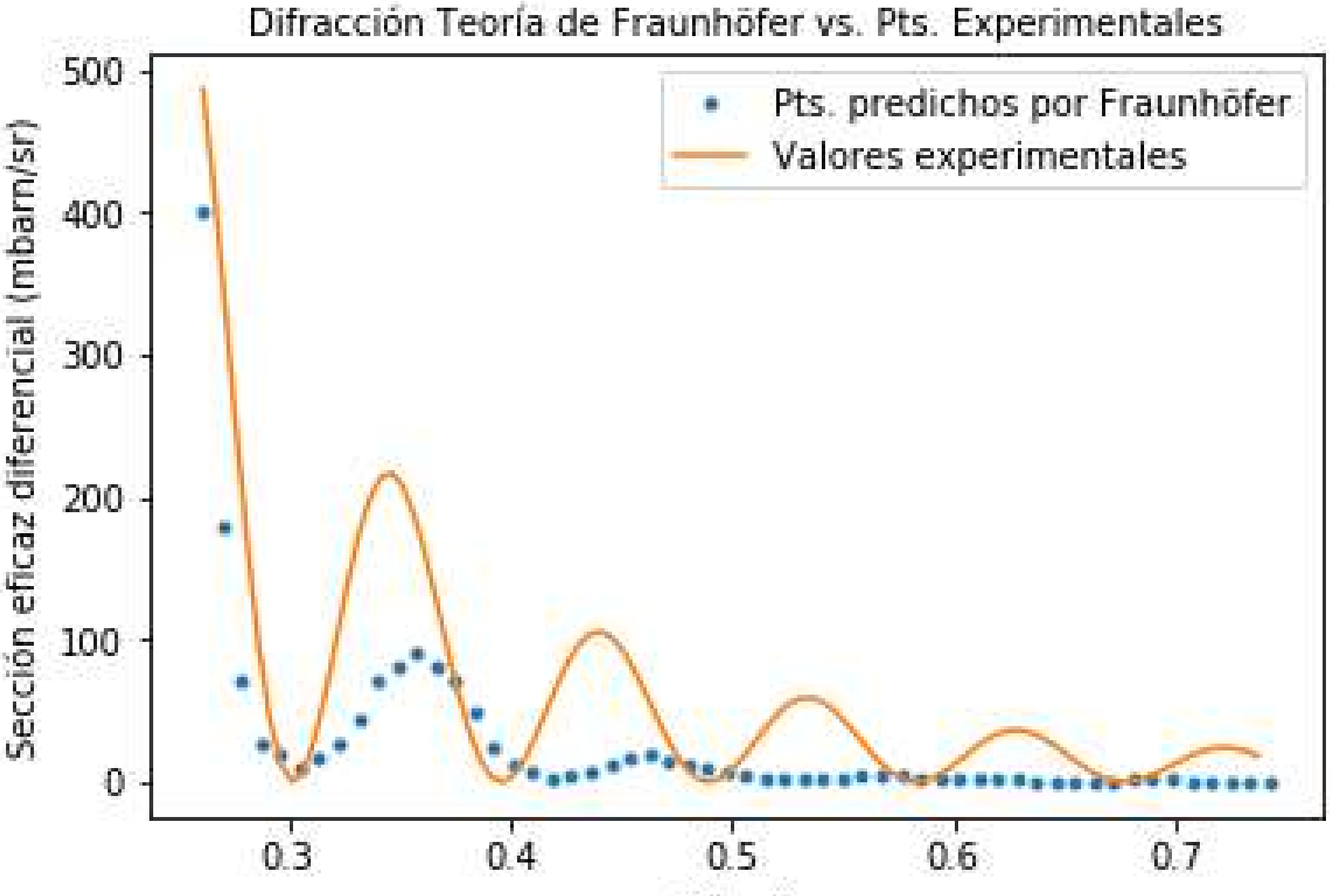
$$\rightarrow q^2 = 0{,}181 \text{ fm}^{-2} \rightarrow \boxed{q = 0{,}426 \text{ fm}^{-1}}$$

Podemos xa "calcular" a sección eficaz diferencial e o radio. Temos que $l=2$, e como sabemos que a función que describe a sec. ef. dif. está nun pico (máximo) temos:

$$\sin^2\left(qR - \frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow qR = \frac{5\pi}{4} \rightarrow \boxed{R = 9.218 \text{ fm}}$$

$$R = r_0 \cdot (21^{1/3}) = \boxed{3{,}311 \text{ fm} = R}$$

Enorme diferencia. A aproximación non é nada boa.


Difracción Teoría de Fraunhöfer vs. Pts. Experimentales
Pts. predichos por Fraunhöfer
Valores experimentales
Sección eficaz diferencial (mbarn/sr)
500
400
300
200
100
0
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
θ (rad)