Castro Rodríguez, Diego.

→ Exercicios Tema 2:

1. En primeira aproximación, podemos entender o deuterón como un sistema formado por un protón e un neutrón interaccionando dentro dun pozo de potencial de anchura $b = 1.7 \cdot 10^{-15}$ m e unha profundidade de $V_0 = 40$ MeV nun estado con $l = 0$:

a) Calcule a probabilidade de que o protón se mova dentro do alcance do neutrón. Utiliza para elo que $m_p = m_n = m$; $kb = \pi/2$ con $k = \sqrt{\frac{M(V_0 - E)}{\hbar^2}}$ sendo E a enerxía de alcance do deuterón en dito estado.

A probabilidade que nos piden será simplemente a probabilidade de que se atope dentro do pozo de potencial. Polo tanto temos que $\underline{\underline{P = \int_0^b \psi(r)\psi^*(r)\, r^2 dr}}$ polo que necesitamos coñecer a función de onda do noso sistema.

Se buscamos información en algún libro que trate este problema, o do estado fundamental do deuterón en caso de forzas centrais (no meu caso "lectures on the theory of the nucleus by A. G. Sitenko and V. K. Tartakovskii") atopamos que:

$$\psi(r) = \begin{cases} \dfrac{A \sin(k_1 r)}{r} \; ; & r < b \quad \text{con } k_1 = \sqrt{\dfrac{m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \\[2ex] \dfrac{B e^{-k_2 r}}{r} \; ; & r > b \quad \text{con } k_2 = \sqrt{\dfrac{mE}{\hbar^2}} \end{cases}$$

; polo que temos os datos que precisamos para calcular a probabilidade salvo as ctes. que calcularemos utilizando a condición de normalización da función de ondas:

$$1 = A^2 \int_0^b \sin^2(k_1 r)\, dr + B^2 \int_b^\infty e^{-2k_2 r}\, dr \rightarrow$$

$$\rightarrow A^2 \left[\frac{r}{2} - \frac{\sin(k_1 r)\cos(k_1 r)}{2k_1} \right]_0^b + B^2 \left. \frac{e^{-2k_2 r}}{-2k_2} \right|_b^\infty \xrightarrow{k_1 b = \pi/2} \underline{A^2 \frac{b}{2} + B^2 \frac{e^{-2k_2 b}}{-2k_2} = 1} \quad (2)$$

e aplicando a continuidade da función de ondas en $r = b$ temos que:

$$\frac{A \sin(k_1 r)}{\cancel{b}} = B e^{-k_2 r} \frac{1}{\cancel{b}} \rightarrow \underline{B = A e^{k_2 b} \sin(k_1 b)} \xrightarrow{(2)} \underline{\underline{A = \sqrt{\frac{2k_2}{bk_2 + 1}}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow P = A^2 \int_0^b \sin^2(k_1 r)\, dr = A^2 \frac{b}{2} = \frac{bk_2}{bk_2 + 1} = \boxed{0{,}496 = P}$$

o dato real son 2,23 MeV

→ onde para facer este cálculo: $\frac{\pi}{2} = b\sqrt{\frac{M(V_0-E)}{\hbar^2}} \rightarrow \boxed{E_0 = 11,8 \text{ MeV}}$

$$k_2 = \sqrt{\frac{ME}{\hbar^2}} \rightarrow \underline{k_2 b = 1,21}$$

b) Calcule o radio cuadrático medio do deuterón.

O radio cuadrático medio ven dado simplemente por: $\langle r^2\rangle = \int_0^\infty \varphi^2(r)\, r^2 dr\, r^2 =$

$$= A^2\int_0^b \frac{\sin^2(k_1 r)}{r^2} r^4 dr + B^2\int_b^\infty \frac{e^{-k_2 r}}{r^2} r^4 dr =$$

$$= A^2\left[\frac{4(k_1r)^3+(3-6(k_1r)^2)\sin(2k_1r)-6k_1r\cos(2k_1r)}{24k_1^3}\right]_0^b + B^2\left[-\frac{e^{-2k_2r}(2k_2^2r^2+2k_2r+1)}{4k_2^3}\right]_b^\infty =$$

$$= \frac{2k_2}{bk_2+1}\,\frac{2(\pi/2)^3+\frac{3}{2}\pi}{12k_1^3} + \frac{2k_2}{bk_2+1}\cancel{e^{2k_2b}}\sin^2(k_1b) =$$

$$= \frac{b^2\, 2k_2 b}{bk_2+1}\left(\frac{\pi^3/4+3/2\,\pi}{12(k_1b)^3} + \frac{2(k_2b)^2+2k_2b+1}{4k_2^3}\right) \Rightarrow \langle r^2\rangle = 1,502b^2 = 5,422\cdot10^{-30} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\sqrt{\langle r^2\rangle} = 2,32\cdot10^{-15}\text{ m}}$$

c) Analiza canto tería que variar a profundidade do pozo para que o 1º estado excitado estivese ligado.

Como di o enunciado, facendo máis profundo o pozo de potencial poderiamos facer que o primeiro estado excitado estivese ligado; de feito que, apoiándonos nas diapositivas de clase, se collemos que para o primeiro excitado $k_1 b = \frac{3\pi}{2}$, e facendo que a enerxía mínima para estar ligado é cero, temos que:

$$k_1 b = \sqrt{\frac{Mb^2(V_0-\cancel{E})}{\hbar^2}} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{9\pi^2}{4} = \frac{Mb^2V_0}{\hbar^2} \rightarrow \boxed{V_0 \geq \frac{9\pi^2\hbar^2}{4\cdot Mb^2} \geq 255,294 \text{ MeV}}$$

Facendo unha mínima busca en internet atopamos que o estado excitado do deuterio ten unha enerxía de $E = +77$ keV (non ligado) polo que fixemos ben en aproximar $\underline{E \approx 0 \text{ MeV}}$

d) Investigue o efecto de incluír no potencial unha zona repulsiva de curto alcance.

Se introducimos enriba do pozo un core repulsivo, dende o meu punto de vista van pasar dúas cousas: a nova función de ondas vai se desprazar a cara á dereita (a = anchura do core repulsivo). e dependendo de a e da altura do core, pode que o novo estado fundamental deixe de estar ligado, polo que teremos que incrementar a profundidade de V_0 ou aumentar b.

2. a) Caracteriza a multipolaridade da reacción.

O spin do neutrón e protón é $\frac{1}{2}^+$; de xeito que se os acoplamos poden ser 0^+ ou 1^+; logo, o deuterón ten 1^+, e o fotón 0^+; polo que ⇒
$l=0$

⇒ $\vec{I_i} = 0,1$; $I_f = 1^+$ → $|I_i - I_f| \le L \le I_i + I_f$

se $I_i = 0$ → $L = 1$ ⇒ $\boxed{M1}$

se $I_i = 1$ → $L = \cancel{0},1,2$ ⇒ $\boxed{M1, E2}$ } porque $\Delta\pi = 0$

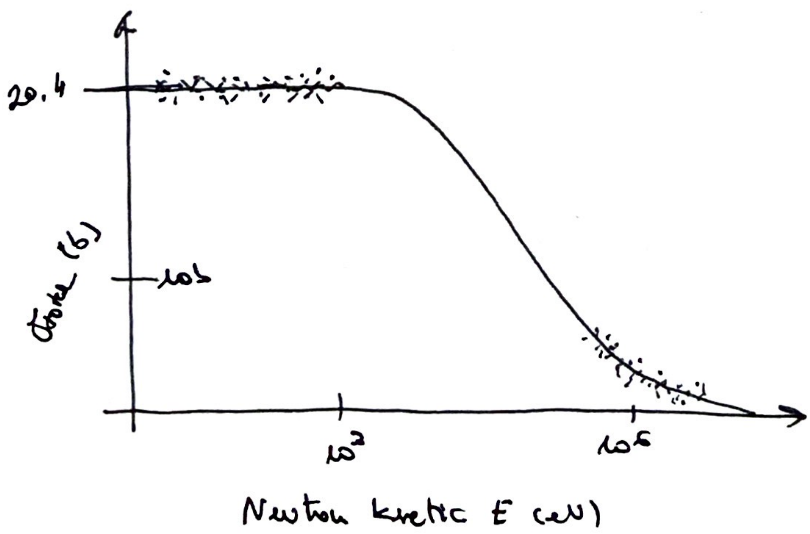
b) Demostra que a baixas enerxías a reacción ocorre para un estado inicial singlete maioritariamente.

Cando tratamos o problema a baixa enerxía temos que:

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k_2^2+\alpha^2}\left[\cos(k_2 R) + \frac{\alpha}{k_2}\sin(k_2 R)\right] \xrightarrow{k\to 0} \boxed{\sigma_{el} \simeq \frac{4\pi}{\alpha^2}(1+\alpha R)^2}$$

sección eficaz que se pode calcular pois temos todos estos datos do problema anterior, de xeito que queda que $\boxed{\sigma = 4{,}6\,b}$. O problema comeza cando vemos que experimentalmente o dato é $\sigma = 20{,}4\,b$. A que se debe esta discrepancia? ao ter collido os datos do problema anterior, stamos collendo os datos para $l=0$, un darnos de conta de que tamén pode ocorrer que $l=2$ polo que temos un estado triplete (equiprobable) e un estado singlete; de xeito que $\sigma_{total} = \frac{3}{4}\sigma_t + \frac{1}{4}\sigma_s = 20{,}4$ →

→ $\boxed{\sigma_s = 67{,}8\,b} > \sigma_t = 4{,}6\,b$ } o estado singlete é máis probable a baixas enerxía.



e) Estuda a dependencia da función de onda espacial do deuterio coa distancia radial r para r>>b.

Cando r>>b, cando ōs dispositivos:

$\boxed{u_2(r)} = C\cos\delta \sin(k_2 r) + C\sin\delta \cos(k_2 r) = \boxed{C\sin(k_2 r + \delta)}$; onde δ é o cambio de fase ou desfase inducido polo potencial difusor na función de onda, que será positivo se o potencial é atractivo. É dicir, para r>>b a f.d.o desfásase unha cantidade δ (inducida polo potencial) que non se desfasaría de non haber pote atractivo.