

UNIVERSITÉ DE NAMUR  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE ET DE MATHÉMATIQUE



**Analyse complexe (SMATB203)**  
**Travail de groupe**

## **Les séries de Fourier**

BORGNET Alexandre 20220649  
DE FAYS Florent 20221943  
LOUBRIS Loïc 20222559  
LABRUYERE Michel 20220053  
D'ADDAMIO Diego 20221950

PHYSIQUE  
BAC II

Année académique 2023-2024

# Table des matières

I. Abstract . . . . .	1
II. Compléments théoriques sur les séries de Fourier . . . . .	2
II.1. Produit scalaire complexe (Proposition 1) . . . . .	4
II.2. Base orthogonale et interprétation (Proposition 2) . . . . .	6
II.3. Coefficients de Fourier (Théorème 1) . . . . .	10
III. Application des séries de Fourier . . . . .	12
IV. Conclusion . . . . .	19
V. Références . . . . .	20

## I. Abstract

Les séries de Fourier sont des objets mathématiques, introduites par Joseph Fourier durant le début du XIXe siècle, leurs applications sont multiples. Pour n'en citer que quelques unes, les séries de Fourier sont d'une importance capitale dans l'analyse de signaux, en électricité, en informatique (compression de données),...

Toutefois, il existe d'autres applications aux séries de Fourier, dont l'intérêt pratique est certes limité, mais qui montrent la puissance de cet objet. C'est pour cela que nous étudierons par la suite "l'art par série de Fourier", où le but sera de dessiner une forme arbitraire dans le plan complexe.

De fait, une série de Fourier :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

N'est par essence, qu'une succession d'épicycles (cercle dont le centre décrit lui-même un cercle). Si on se limite alors à un nombre fini de termes dans la série, et que l'on trace la trajectoire d'un point sur le dernier cercle constituant l'épicycle, on obtient une figure connue sous le nom d'épicycloïde. Nous verrons alors que ces épicycloïdes peuvent prendre une multitude de formes différentes.

Dans ce travail, nous rappellerons certains résultats importants sur les séries de Fourier et nous étudierons aussi leurs implications algébriques, pour ensuite mettre en application ces résultats grâce à un programme MATLAB, qui permettra de calculer les différents coefficients de Fourier pour certaines épicycloïdes.

## II. Compléments théoriques sur les séries de Fourier

Avant tout, pour pouvoir appliquer et prouver les propriétés et théorèmes sur les séries de Fourier, nous avons besoin de les introduire.

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique telle que  $f : [-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{C}$

Alors, sa série de Fourier est définie comme ceci :

$$f(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} \quad (1)$$

Qui peut être réécrite en une somme de fonctions trigonométriques élémentaires :

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad (2)$$

Les coefficients  $c_k, a_k, b_k$  sont appelés les coefficients de Fourier. Les  $c_k$  présents en (1) sont un condensé possible des  $a_k$  et  $b_k$  qu'on peut retrouver dans (2) en utilisant la formule d'Euler i.e.  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ . Leurs définitions et propriétés seront énoncées plus tard dans ce document.

Remarquons que les relations (1) et (2) ne sont pas des égalités, mais bien des relations de similitude. Cette relation de similitude est assurée par le théorème de Lejeune-Dirichlet, qui permet de conclure que la série de Fourier d'une fonction  $2\pi$  périodique et régulière par morceaux<sup>1</sup> converge point par point vers le nombre  $\frac{f(a^+) + f(a^-)}{2}$ ,  $a \in \mathcal{D}_f$  où on a défini

$$f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

$$f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Remarquons alors que là où  $f$  est continue, la série converge vers la valeur exacte de la fonction en ce point puisque :  $f(a^+) = f(a^-)$ . Afin de pouvoir noter l'égalité entre  $f$  et sa série de Fourier, il est nécessaire de travailler sous l'hypothèse que cette dernière converge normalement vers  $f$ . Or, cette hypothèse n'est vérifiée que si  $f$  est  $2\pi$ -périodique, régulière par morceaux et continue sur tout son domaine.

---

1. Régulière par morceaux : fonction continue sauf en un nombre fini de points où elle ne l'est pas, et dérivable sauf en un autre nombre fini de points où les dérivées droite et gauche existent et sont bornées.

Nous retenons de ceci que pour pouvoir assurer la convergence de la série de Fourier, il faut prouver que les coefficients de Fourier convergent bien vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini, par critère de convergence d'une série. Ce qui nous amène à introduire 2 autres notions : l'ensemble des fonctions de carré sommable sur  $[0, 2\pi]$  (3) et l'inégalité de Bessel (4) :

L'inégalité des fonctions de carré sommable :

L'ensemble des fonctions  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  telles que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty \quad (3)$$

Cet ensemble muni des lois de composition usuelles constitue un espace vectoriel noté  $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ .

L'inégalité de Bessel :

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique et intégrable avec  $(a_k)_{k \geq 0}$  et  $(b_k)_{k \geq 1}$ , les coefficients de Fourier de la fonction  $f$ .

Alors :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \quad (4)$$

La conséquence de cette inégalité est qu'une fonction de carré sommable admet la convergence de sa série de Fourier associée car une fonction appartenant à un tel ensemble fixe une valeur de l'inégalité de Bessel. Celle-ci majore la série  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k^2 + b_k^2$ , qui est strictement croissante. Alors, par la condition nécessaire de convergence d'une série,  $a_k$  et  $b_k$  convergent vers 0.

## II.1 Proposition 1 : produit scalaire sur l'espace des fonctions de carré sommable

Nous savons que  $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$  est l'espace vectoriel des fonctions de carré sommable. Dès lors, une question que nous pouvons nous poser est l'existence et la définition d'un produit scalaire dans cet espace. Construisons le comme ceci :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{L}^2([0, 2\pi]) \times \mathbb{L}^2([0, 2\pi]) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

Montrons alors qu'il s'agit d'un produit scalaire complexe. Autrement dit, montrons que l'application définie ci-dessus  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est

1. Sesquilineaire :  $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$  et  $\langle f, \alpha g + \beta h \rangle = \overline{\alpha} \langle f, g \rangle + \overline{\beta} \langle f, h \rangle$  ;

*Démonstration.* Soient  $f, g, h : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \int_0^{2\pi} (\alpha f(x) + \beta g(x)) \overline{h(x)} dx = \int_0^{2\pi} \alpha f(x) \overline{h(x)} + \beta g(x) \overline{h(x)} dx$$

Par la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \alpha f(x) \overline{h(x)} + \beta g(x) \overline{h(x)} dx &= \alpha \int_0^{2\pi} f(x) \overline{h(x)} dx + \beta \int_0^{2\pi} g(x) \overline{h(x)} dx \\ \alpha \int_0^{2\pi} f(x) \overline{h(x)} dx + \beta \int_0^{2\pi} g(x) \overline{h(x)} dx &= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie de la sesquilinearité :

$$\langle f, \alpha g + \beta h \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) (\overline{\alpha g(x) + \beta h(x)}) dx = \int_0^{2\pi} \overline{\alpha} f(x) \overline{g(x)} + \overline{\beta} f(x) \overline{h(x)} dx$$

Par la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \overline{\alpha} f(x) \overline{g(x)} + \overline{\beta} f(x) \overline{h(x)} dx &= \overline{\alpha} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx + \overline{\beta} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{h(x)} dx \\ \overline{\alpha} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx + \overline{\beta} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{h(x)} dx &= \overline{\alpha} \langle f, g \rangle + \overline{\beta} \langle f, h \rangle \end{aligned}$$

Ce qui montre la sesquilinearité de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

□

2. À symétrie hermitienne :  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$  ;

Introduisons pour ceci la propriété suivante du complexe conjugué d'une intégrale :

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \int_a^b \overline{f(x)} dx$$

*Démonstration.* Soient  $a, b \in \mathcal{D}_f$  et  $f$  une fonction intégrable sur  $\mathcal{D}_f$  à une variable réelle telle que

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D}_f &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x) = f_1(x) + if_2(x) \end{aligned}$$

Où  $f_1(x)(= \Re f(x))$  et  $f_2(x)(= \Im f(x))$  sont des fonctions réelles.

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \overline{\int_a^b f_1(x) + i f_2(x) dx} = \overline{\int_a^b f_1(x) dx} + i \overline{\int_a^b f_2(x) dx}$$

Or, l'intégrale d'une fonction réelle est un scalaire réel qui possède donc une partie imaginaire nulle.

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b f_1(x) dx} + i \overline{\int_a^b f_2(x) dx} &= \int_a^b f_1(x) dx + i \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx - i \int_a^b f_2(x) dx \\ \int_a^b f_1(x) dx - i \int_a^b f_2(x) dx &= \int_a^b f_1(x) - i f_2(x) dx = \int_a^b \overline{f(x)} dx \end{aligned}$$

Ce qui prouve que le complexe conjugué d'une intégrale est l'intégrale du complexe conjugué.  $\square$

Montrons la symétrie hermitienne via la propriété ci-dessus :

*Démonstration.* Soient  $f$  et  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\overline{\langle f, g \rangle} = \overline{\int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx}$$

Or, par la démonstration ci-dessus, nous pouvons écrire que

$$\overline{\int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx} = \int_0^{2\pi} \overline{f(x) \overline{g(x)}} dx = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx = \int_0^{2\pi} g(x) \overline{f(x)} dx = \langle g, f \rangle$$

$\square$

3. Définie positive :  $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f \equiv 0$  et  $\langle f, f \rangle > 0$  pour  $f$  non identiquement nulle ;

*Démonstration.* Soit  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$

Supposons que

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} f(x) \overline{f(x)} dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 0 \quad (5)$$

Or, l'intégrale d'une fonction réelle positive ou nulle se doit respectivement d'être elle aussi positive ou nulle. Par ailleurs, le fait que l'intégrale soit égale à zéro implique que l'intégrande est nécessairement nul :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 0 \Leftrightarrow |f(x)|^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Si nous supposons que  $f$  est non identiquement nulle :

$$(1) \Rightarrow |f(x)|^2 > 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx > 0$$

$\square$

Ce qui prouve que

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{L}^2([0, 2\pi]) \times \mathbb{L}^2([0, 2\pi]) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

est un produit scalaire complexe dans  $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ .

**II.2 Proposition 2 : Base orthogonale et interprétation**

Nous venons de montrer, via la première proposition, que l'espace vectoriel  $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$  admet un produit scalaire complexe. Alors, quelles sont les conséquences et interprétations possibles ? Ce sera l'intérêt de cette section avec quelques fonctions élémentaires.

Montrons que  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{ikx} dx = 2\pi \delta_{mk}$  où  $m, k \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Soient  $m, k \in \mathbb{Z}$ ,

Supposons dans un premier temps que  $m \neq k$  :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} dx = \left[ \frac{e^{i(k-m)x}}{i(k-m)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{i(k-m)} (e^{i(k-m)\pi} - e^{-i(k-m)\pi})$$

Or, par l'identité d'Euler :  $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$\frac{1}{i(k-m)} (e^{i(k-m)\pi} - e^{-i(k-m)\pi}) = \frac{2 \sin[(k-m)\pi]}{k-m}$$

Par notre supposition initiale, nous avons que  $m - k \neq 0$  et que  $m - k \in \mathbb{Z}$ . Cependant, nous savons que  $\sin(n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$  de par sa périodicité.

$$\Rightarrow \frac{2 \sin[(k-m)\pi]}{k-m} = 0$$

Supposons maintenant que  $m = k$  :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = [x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

Nous retrouvons donc bien le delta de Kronecker ( $\delta_{mk}$ ) car

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{ikx} dx &= \begin{cases} 1 \text{ si } k = m, \\ 0 \text{ si } k \neq m; \end{cases} \\ \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{ikx} dx &= 2\pi \delta_{mk} \end{aligned}$$

□

Basons nous maintenant sur la proposition 1 et donnons une interprétation de l'égalité démontrée au point précédent ainsi que des trois égalités suivantes :

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq m, \\ \pi \text{ si } k = m \neq 0, \\ 2\pi \text{ si } k = m = 0; \end{cases}$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(mx) dx = 0 \quad \forall k, m \in \mathbb{Z};$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq m, \\ \pi \text{ si } k = m \neq 0, \\ 0 \text{ si } k = m = 0; \end{cases}$$

Commençons par montrer que les fonctions cosinus, sinus et exponentielle complexe sont bien des fonctions de carré sommable :



*Démonstration.* Pour qu'une fonction  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  soit dite de carré sommable, il est nécessaire qu'elle vérifie la relation suivante :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

Or ici, on a bien  $\cos(x) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $\sin(x) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  et  $e^{ix} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  tel que

$$\int_0^{2\pi} |\cos(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x) + 1}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2x) dx + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dx = \pi < +\infty$$

La dernière égalité s'explique du fait que :  $\int_0^{2\pi} \cos(2x) dx = [\sin(2x)/2]_0^{2\pi} = 0$ . On peut désormais vérifier :

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \pi < +\infty$$

La dernière égalité se justifie sur le même principe que ci-avant. Finalement, on vérifie :

$$\int_0^{2\pi} |e^{ix}|^2 dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi < +\infty$$

On a donc vérifié que  $\cos(x) \in \mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ ,  $\sin(x) \in \mathbb{L}^2([0, 2\pi])$  et  $e^{ix} \in \mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ . Ce qui termine la démonstration. □

Le fait que ces trois fonctions soient vues comme des éléments d'un espace fonctionnel permettra, par la suite, d'interpréter les relations précédentes (voir énoncé) via le produit scalaire défini sur l'ensemble des fonctions de carré sommable. Il est toutefois nécessaire, à ce stade, de se ramener à l'expression du produit scalaire donné ci-avant. Ceci fera l'objet de la démonstration suivante ;

*Démonstration.* On souhaite montrer que pour toutes fonctions  $f$  de période  $T$ , l'égalité suivante est vérifiée :

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

Avec  $a \in \mathbb{R}$ .

La première intégrale peut être scindée en trois parties :

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{T+a} f(x) dx$$

Considérons la dernière intégrale dans laquelle on pose  $x = s + T$ . On en tire que  $dx = ds$ , ce qui permet de réécrire l'égalité comme

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_0^a f(s + T) ds$$

Or, par hypothèse  $f(x + T) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{D}_f$ . De ce fait,

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx - \int_a^0 f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

Où on a remplacé  $s$  par  $x$  puisqu'il s'agit de variables muettes. □

Les preuves vues ci-dessus permettent alors de voir les relations de l'énoncé comme des produits scalaires définis sur l'ensemble des fonctions de carré sommable. En gardant à l'esprit que  $\overline{\cos(mx)} = \cos(mx)$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$  et  $\overline{\sin(mx)} = \sin(mx)$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ , vu que l'espace considéré reprend des fonctions à valeur dans  $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ .

On a donc par (1)

$$\langle \cos(kx), \cos(mx) \rangle = \pi \epsilon_{km}$$

Où on a définit

$$\epsilon_{km} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq m, \\ 2 & \text{si } k = m \neq 0, \\ 1 & \text{si } k = m = 0; \end{cases}$$

En outre, les fonctions de la forme  $\cos(mx)$  sont orthogonales entre elles. Ces fonctions sont donc linéairement indépendantes (dans l'espace des fonctions de carré sommable). Le sous-espace engendré par ces fonctions sera alors noté par  $\mathbb{A}$ .

Dans le cas où les fonctions de la forme  $\cos(mx)$  sont vues comme des vecteurs, on peut leur attribuer une norme :

$$|\cos(mx)| = \sqrt{\langle \cos(kx), \cos(kx) \rangle} = \sqrt{\pi \epsilon_{kk}}$$

L'égalité (3) s'interprète de la même manière à la seule différence près que l'on aura :

$$\langle \sin(kx), \sin(mx) \rangle = \pi \zeta_{km}$$

Où on a définit :

$$\zeta_{km} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq m, \\ 1 & \text{si } k = m \neq 0, \\ 0 & \text{si } k = m = 0; \end{cases}$$

On dénotera, par la suite, le sous-espace engendré par l'ensemble des fonctions de la forme  $\sin mx$  par  $\mathbb{B}$ .

On peut de cette manière dire que la norme des fonctions de la forme  $\sin mx$  sera donnée par :

$$|\sin(kx)| = \sqrt{\langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle} = \sqrt{\pi \zeta_{kk}}$$

Finalement, l'égalité (2) revient à dire que :

$$\langle \cos(kx), \sin(mx) \rangle = 0 \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}$$

En outre, les deux sous-espaces engendrés  $\mathbb{B}$  et  $\mathbb{A}$ , sont orthogonaux. Les fonctions  $\sin(mx)$  et  $\cos(mx)$  sont alors linéairement indépendantes, et on dénote par  $\mathbb{P}$  le sous espace engendré par ces fonctions. La décomposition en série de Fourier permettra de conclure que toute fonction continue et régulière par morceaux,  $f \in \mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ , peut alors s'exprimer de manière exacte comme une combinaison linéaire de fonctions cosinus et sinus. Cela implique alors que les fonctions  $\sin(mx)$  et  $\cos(mx)$  forment une base de l'ensemble des fonctions continues et régulières par morceaux de l'espace fonctionnel  $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ . Notons que l'on ne peut pas rigoureusement dire que  $\mathbb{P}$  inclut des fonctions discontinues sur  $[0, 2\pi]$  au vu de la remarque faites en introduction.

Il reste toutefois une égalité à interpréter. Celle-ci étant :

$$(4) : \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{ikx} dx = 2\pi \delta_{mk}$$

Remarquons dans un premier temps que :

$$\overline{e^{imx}} = \overline{\cos(mx) + i \sin(mx)} = \cos(mx) - i \sin(mx) = \cos(-mx) + i \sin(-mx) = e^{-imx}$$

Où on a simplement utilisé les propriétés de parité des fonctions sinus et cosinus, tout en gardant à l'esprit que ces fonctions sont à valeur dans les réels.

Les preuves vues ci-avant permettent alors de conclure que l'égalité (4) est équivalente à :

$$\langle e^{imx}, e^{ikx} \rangle = 2\pi \delta_{mk}$$

Où  $\delta_{mk}$  désigne le delta de Kronecker usuel.

On peut alors déduire de la dernière égalité que les fonctions de la forme  $e^{imx}$  sont orthogonales entre elles, et de ce fait, linéairement indépendantes. Encore une fois, la théorie sur les séries de Fourier permettra de montrer que le sous-espace engendré par ces fonctions, désormais noté  $\mathbb{M}$ , sera générateur de l'ensemble des fonctions continues et régulières par morceaux,  $f \in \mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ . L'ensemble des fonctions de la forme  $e^{imx}$  forment alors une base du sous-espace des fonctions continues et régulières par morceaux  $f \in \mathbb{L}^2([0, 2\pi])$ . Notez encore une fois que  $\mathbb{M}$  ne peut rigoureusement inclure des fonctions discontinues sur  $[0, 2\pi]$  pour les mêmes raisons que précédemment.

À ce stade, on serait tenté de dire que  $\mathbb{M} = \mathbb{P}$ , En effet :

$$\forall f \in \mathbb{M}, \exists c_k \in \mathbb{C} \text{ tq } f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

avec les  $c_k$  non tous nuls. En appliquant la formule d'Euler, on obtient :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)$$

Avec  $d_k = i c_k$ .

Cette dernière relation implique alors que  $f \in \mathbb{P}$ . Ainsi, on a bien décomposé  $f$  dans la base  $\mathbb{P}$  avec des  $d_k, c_k$  non tous nuls. On a donc démontré que  $\mathbb{P} \subset \mathbb{M}$

De même :

$$\forall f \in \mathbb{P}, \exists a_k, b_k \in \mathbb{C} \text{ tq } f = \sum_{k \geq 0} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

On montrera par la suite que :

$$\begin{cases} 2c_k = a_k - ib_k \\ 2c_k = a_k + b_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = ic_k + ic_{-k} \end{cases}$$

Où les  $a_k, b_k$  et  $c_k$  sont les coefficients de Fourier. On a alors :

$$f = \sum_{k \geq 0} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k \geq 0} c_k \cos(kx) + ic_k \sin(kx) + \sum_{k \geq 0} c_{-k} \cos(kx) - ic_{-k} \sin(kx)$$

En procédant alors au changement de variable  $l = -k$ , on montre que :

$$f = \sum_{k \geq 0} c_k \cos(kx) + ic_k \sin(kx) + \sum_{l \leq 0} c_l \cos(lx) + ic_l \sin(lx)$$

Où on a simplement utilisé la parité des fonctions sinus et cosinus. En exploitant le fait que  $l$  est une variable muette et en utilisant l'identité d'Euler, on peut finalement écrire que :

$$f = \sum_{k \geq 0} c_k \cos(kx) + ic_k \sin(kx) + \sum_{l \leq 0} c_l \cos(lx) + ic_l \sin(lx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

Ce qui prouve que  $f \in \mathbb{M}$ . On a donc bien  $\mathbb{M} \subset \mathbb{P}$  qui, combiné au précédent résultat, prouve que  $\mathbb{M} = \mathbb{P}$ .

### II.3 Proposition 3 : Coefficients de Fourier

Comme vu précédemment, on peut décomposer une fonction  $f \in \mathbb{P}$  sur la base des  $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Les différents coefficients ainsi obtenus sont appelés les coefficients de Fourier. Dans cette partie, nous allons étudier les propriétés des différents coefficients de Fourier pour une fonction arbitraire  $2\pi$ -périodique.

Pour commencer, montrons que  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ;

*Démonstration.* Afin de démontrer la première relation, il convient de développer l'intégrale suivante :

Soient  $m, k \in \mathbb{Z}$  et  $f$  une fonction de carré sommable :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \right) e^{-imx} dx$$

On a remplacé  $f$  par son développement en série de Fourier. Remarquez que l'intégrande est alors égal à  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ix(k-m)}$ . Si nous supposons que cette série de fonctions converge normalement, il sera possible de permuter la série et l'intégrale par la convergence uniforme impliquée. Supposons alors que la série converge bien normalement, on a alors :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \right) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{ikx} e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx$$

La proposition (2) permet alors de dire :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2\pi c_k \delta_{km} = c_m$$

□

Soyons toutefois critique quant à cette démonstration, nous avons ici supposé que la suite de fonction définie par

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} e^{-imx} \forall x \in [-\pi, \pi]$$

convergeait normalement (l'intervalle de définition ayant été choisi afin de concorder aux bornes d'intégrations). Notons que la convergence normale de cette suite est équivalente à la convergence normale de la suite ci-dessous :

$$\zeta_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \forall x \in [-\pi, \pi]$$

*Démonstration.* Supposons dans un premier temps que  $\zeta_n(x)$  converge normalement, alors, on a par définition que la suite :

$$\kappa_n = \sum_{k=-n}^n \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |c_k e^{ikx}| = \sum_{k=-n}^n |c_k|$$

Converge vers une valeur finie. De ce fait, on peut définir la suite suivante :

$$\chi_n = \sum_{k=-n}^n \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |c_k e^{ikx} e^{-imx}| = \sum_{k=-n}^n |c_k| = \kappa_n$$

$\chi_n$  est alors convergente, ce qui assure la convergence normale de  $s_n(x)$

De même, si on suppose que  $\zeta_n(x)$  ne converge pas normalement, on aura par définition que la suite  $\kappa_n$  diverge. Ainsi,  $\chi_n$  divergera aussi et donc  $s_n(x)$  ne convergera pas normalement.  $\square$

En finale, la permutation série intégrale faite ci-dessus n'est rigoureusement valable que si la fonction  $f$  est continue et régulière par morceaux (cf introduction). Or, il est tout à fait envisageable de construire des fonctions  $f$   $2\pi$ -périodiques discontinues. Ceci étant dit, cela rejoint ce qui a été dit plus tôt. Le développement en série de Fourier d'une fonction  $f$   $2\pi$ -périodique discontinue sera toujours valable en utilisant cette définition des  $c_k$ . Néanmoins, la fonction vers laquelle la série de Fourier convergera ne sera pas rigoureusement égale à la fonction de départ.

Montrons maintenant les différentes relations entre les coefficients de Fourier :  $a_k$ ,  $b_k$  et  $c_k$ .

Montrons que  $c_0 = \frac{a_0}{2}$

*Démonstration.* Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . En partant de la deuxième définition de la série de Fourier pour  $k = 0$ , nous avons :

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i0x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Utilisons alors la première définition de la série de Fourier :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{k \leq 1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) dx \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \leq 1} a_k \cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \leq 1} b_k \sin kx dx \right) \end{aligned}$$

En supposant qu'il soit possible de permuter la série avec l'intégrale,<sup>2</sup> par la convergence normale. Pour la suite, nous admettrons cette propriété. Nous avons donc :

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k \leq 1} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{k \leq 1} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{a_0}{2} 2\pi = \frac{a_0}{2}$$

$\square$

Montrons que  $\forall k \geq 1$  :

$$\begin{cases} (5) : 2c_k = a_k - ib_k, \\ (6) : 2c_{-k} = a_k + ib_k. \end{cases}$$

Commençons par montrer la relation (5) :

*Démonstration.* Par la définition des coefficients  $c_k$ , on a :

$$2c_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx - \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = a_k - ib_k$$

Où la deuxième égalité est obtenue en utilisant l'identité d'Euler.  $\square$

Démontrons maintenant la relation (6) :

*Démonstration.*

$$2c_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx + \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = a_k + ib_k$$

Où la deuxième égalité est déduite de l'identité d'Euler.  $\square$

2. Même remarque que pour la démonstration précédente, il faudrait s'assurer que l'intégrande converge bien normalement.

### III. Application des séries de Fourier :

Nous venons donc de voir qu'il était possible de décomposer une fonction périodique, par une série de Fourier, en une somme infinie de fonctions trigonométriques élémentaires ou d'exponentielles complexes avec leurs coefficients de Fourier respectifs.

Il est donc réalisable de créer un programme permettant d'approximer le contour d'une forme dans le plan complexe par une fonction à variable complexe. Les programmes et figures qui suivent sont faites à partir du langage de programmation MATLAB<sup>3</sup>. Remarquons que nous sommes contraints par une approximation numérique. En effet, la série de Fourier associée au programme demande de construire l'ensemble des coefficients de Fourier par un calcul intégral. Or, l'intégrale d'une fonction non symbolique n'est pas possible en programmation. C'est pourquoi nous allons devoir utiliser l'approximation trapézoïdale, qui elle est numérique. De plus, il ne sera pas possible d'avoir un résultat à cette série mais bien une approximation car celle-ci, par définition, doit sommer un nombre infini d'éléments. Ceci implique que l'ordinateur devrait faire une infinité d'itérations, ce qui n'est pas possible sur un temps fini. Les fonctions qui seront abordées seront construites via des segments et des arcs de cercle.

Par prévention, introduisons quelques définitions :

**Segment** : Soient  $z_0$  et  $z_1 \in \mathbb{C}$ , la courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \gamma(t) = (1 - t)z_0 + tz_1$  a pour image le segment de droite  $[z_0, z_1]$

**Arc de cercle** : Soient  $c \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}_0^+$ , la courbe  $\gamma : [\varphi_0, \varphi_1] \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \gamma(t) = c + re^{it}$  a pour image un arc de cercle de centre  $c$  et de rayon  $r$ .

Pour commencer, nous allons nous baser sur un programme fourni se trouvant en annexe. Celui-ci est dépendant de la fonction  $fCarre(t)$ , qui constitue le contour désiré, ici un carré fait de 4 segments de longueur unitaire. Le programme va échantillonner la fonction en plusieurs points dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  pour pouvoir y calculer les coefficients de Fourier par approximation.

En voici l'illustration pour différents épicycles :

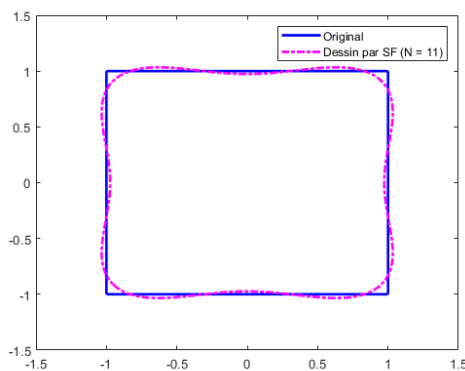


Figure 4.1 :  $fCarre(\tau)$  avec 11 épicycles

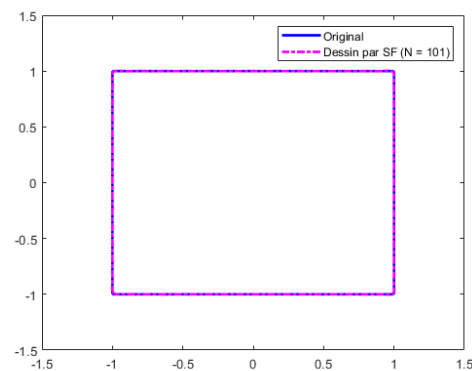


Figure 4.2 :  $fCarre(\tau)$  avec 101 épicycles

Nous pouvons constater que plus le nombre d'épicycles est grand, plus les deux formes se superposent. Ce qui est tout à fait normal et même attendu vu que le nombre d'épicycles doit être infini pour correspondre entièrement à la forme d'origine.

3. Les différents programmes et fonctions sont disponibles en annexe

Maintenant, basons nous sur ce programme pour dessiner dans le plan complexe le contour d'un triangle de sommets  $A = 3$ ,  $B = 4i$  et  $C = 0$ .

Tout d'abord, construisons théoriquement la fonction  $\gamma_T(\tau)$ , où  $\tau \in [0, 2\pi]$ , qui représente le contour de ce triangle (de sommets  $ABC$ ) dans le plan complexe. Un triangle étant composé de trois cotés, construisons  $\gamma_{AB}(t)$ ,  $\gamma_{BC}(t)$  et  $\gamma_{CA}(t)$ , des fonctions allant de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{C}$ , représentant respectivement les segments  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  et  $\overline{CA}$ .

Soient  $\gamma_{AB}(t)$ ,  $\gamma_{BC}(t)$  et  $\gamma_{CA}(t)$   $t \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  telles que :

$$\begin{aligned}\gamma_{AB}(t) &= (1-t)3 + 4it \\ \gamma_{BC}(t) &= (1-t)4i \\ \gamma_{CA}(t) &= 3t\end{aligned}$$

Construisons alors la fonction  $\gamma_T(\tau)$  comme suit :

$$\gamma_T(\tau) = \begin{cases} \gamma_{AB}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right) & \text{si } \tau \in [0, \frac{2\pi}{3}[ \\ \gamma_{BC}\left(\frac{\tau - \frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}}\right) & \text{si } \tau \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[ \\ \gamma_{CA}\left(\frac{\tau - \frac{4\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}}\right) & \text{si } \tau \in [\frac{4\pi}{3}, 2\pi] \end{cases}$$

Dans notre définition de  $\gamma_T$ , remarquons que nous avons réduit la variable  $\tau$  dans un intervalle  $[0, 1]$  par la soustraction de la borne inférieure associée et par la division de celle-ci par la segmentation de notre période  $2\pi$  en 3. Cela a été réalisé pour pouvoir utiliser les différents segments introduits précédemment. Nous pourrions aussi nous questionner vis à vis de la continuité de notre fonction construite par morceaux. En effet, si nous pouvons assurer la continuité dans l'image ouverte de nos différents segments, nous ne pouvons pas la vérifier aux points  $A, B, C$ . Vérifions donc ceux-ci :

Continuité en  $B$  :

$$\begin{aligned}\lim_{\tau^- \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \gamma_T(\tau) &= \lim_{t^- \rightarrow 1} \gamma_{AB}(t) \\ &= \lim_{t^- \rightarrow 1} (1-t)3 + 4it = 4i \\ \lim_{\tau^+ \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \gamma_T(\tau) &= \lim_{t^+ \rightarrow 0} \gamma_{BC}(t) \\ &= \lim_{t^+ \rightarrow 0} (1-t)4i = 4i\end{aligned}$$

Continuité en  $C$  :

$$\begin{aligned}\lim_{\tau^- \rightarrow \frac{4\pi}{3}} \gamma_T(\tau) &= \lim_{t^- \rightarrow 1} \gamma_{BC}(t) \\ &= \lim_{t^- \rightarrow 1} (1-t)4i = 0 \\ \lim_{\tau^+ \rightarrow \frac{4\pi}{3}} \gamma_T(\tau) &= \lim_{t^+ \rightarrow 0} \gamma_{CA}(t) \\ &= \lim_{t^+ \rightarrow 0} 3t = 0\end{aligned}$$

Continuité en  $A$  :

$$\begin{aligned}\lim_{\tau^- \rightarrow 2\pi} \gamma_T(\tau) &= \lim_{t^- \rightarrow 1} \gamma_{CA}(t) \\ &= \lim_{t^- \rightarrow 1} 3t = 3 \\ \lim_{\tau^+ \rightarrow 0} \gamma_T(\tau) &= \lim_{t^+ \rightarrow 0} \gamma_{AB}(t) \\ &= \lim_{t^+ \rightarrow 0} (1-t)3 + 4it = 3\end{aligned}$$

Ce qui montre la continuité de  $\gamma_T(\tau)$ , assurant donc l'égalité à une série de Fourier associée.

Nous pouvons donc créer une fonction matlab décrivant son contour par les segments  $\gamma_{AB}(t)$ ,  $\gamma_{BC}(t)$  et  $\gamma_{CA}(t)$ . Celle-ci est mise en annexe sous le nom *fTriangle.m*.

En voici l'illustration pour différents épicycles :

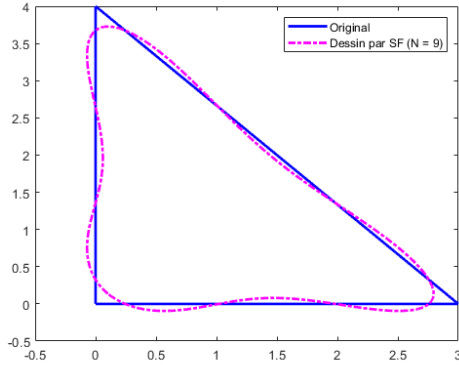


Figure 4.3 :  $fTriangle(\tau)$  avec 9 épicycles

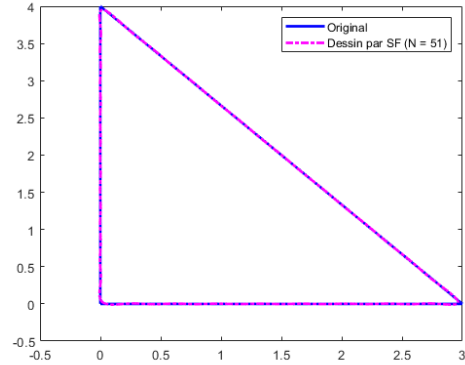


Figure 4.4 :  $fTriangle(\tau)$  avec 51 épicycles

Une fois ceci fait, essayons d'utiliser des arcs de cercle pour pouvoir dessiner dans le plan complexe un demi-cercle basé sur le segment reliant  $A = -1$  à  $B = 1$  et dont l'arc se situe au-dessus de l'axe des réels.

Comme pour le triangle, construisons d'abord  $\gamma_{Dc}(\tau)$  de manière théorique, où  $\tau \in [0, 2\pi]$ . Soient  $\gamma_{AB}(t)$  et  $\gamma_{BA}(\varphi)$   $t \in [0, 1]$  et  $\varphi \in [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  telles que :

$$\begin{aligned}\gamma_{AB}(t) &= (1-t)(-1) + t \\ \gamma_{BA}(\varphi) &= e^{i\varphi}\end{aligned}$$

Construisons alors la fonction  $\gamma_{Dc}(\tau)$  comme suit :

$$\gamma_{Dc}(\tau) = \begin{cases} \gamma_{BA}(\tau) & \text{si } \tau \in [0, \pi[ \\ \gamma_{AB}(\frac{\tau-\pi}{\pi}) & \text{si } \tau \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Montrons que  $\gamma_{Dc}(\tau)$  est bien continue pour tout  $\tau \in [0, 2\pi]$ . Nous savons déjà que les fonctions  $\gamma_{BA}$  et  $\gamma_{AB}$  sont continues dans leur intervalles ouverts respectifs. On a donc la continuité de  $\gamma_{Dc}$  sur  $[0, 2\pi] \setminus \{-1, 1\}$ . Montrons maintenant qu'elle est continue en A et B.

Continuité en A :

$$\begin{aligned}\lim_{\tau^- \rightarrow \pi} \gamma_{Dc}(\tau) &= \lim_{\tau^- \rightarrow \pi} \gamma_{BA}(\tau) \\ &= \lim_{\varphi^- \rightarrow \pi} e^{i\varphi} = -1 \\ \lim_{\tau^+ \rightarrow \pi} \gamma_{Dc}(\tau) &= \lim_{\tau^+ \rightarrow \pi} \gamma_{AB}(\tau) \\ &= \lim_{t^+ \rightarrow 0} (1-t)(-1) + t = -1\end{aligned}$$

Continuité en B :

$$\begin{aligned}\lim_{\tau^+ \rightarrow 0} \gamma_{Dc}(\tau) &= \lim_{\tau^+ \rightarrow 0} \gamma_{BA}(\tau) \\ &= \lim_{\varphi^+ \rightarrow 0} e^{i\varphi} = 1 \\ \lim_{\tau^- \rightarrow 2\pi} \gamma_{Dc}(\tau) &= \lim_{\tau^- \rightarrow 2\pi} \gamma_{AB}(\tau) \\ &= \lim_{t^- \rightarrow 1} (1-t)(-1) + t = 1\end{aligned}$$

Ce qui montre la continuité de  $\gamma_{Dc}(\tau)$  sur son intervalle de définition,  $[0, 2\pi]$ . Ce qui implique l'égalité à sa série de Fourier associée.



Puisque nous avons l'égalité, nous pouvons créer une fonction matlab décrivant  $\gamma_{Dc}(\tau)$  par l'arc de cercle  $\gamma_{BA}(\varphi)$  et le segment  $\gamma_{AB}(t)$ . Celle-ci est mise en annexe sous le nom *fDemicercle.m*.

En voici l'illustration pour différents épicycles :

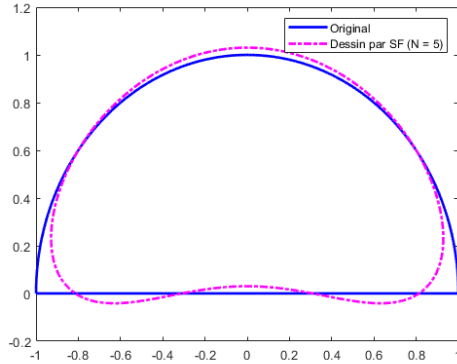


Figure 4.5 :  $fDemicercle(\tau)$  avec 5 épicycles

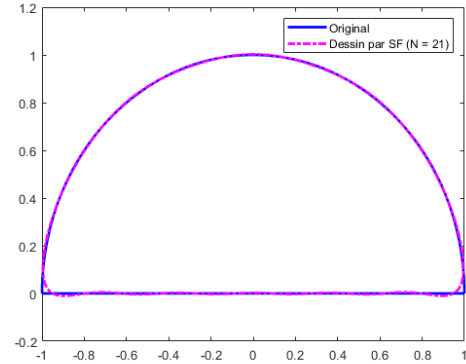


Figure 4.6 :  $fDemicercle(\tau)$  avec 21 épicycles

Proposons maintenant un dessin de notre choix, continu, constitué de segments et d'arcs de cercle pour différents nombres d'épicycles.

Choisissons le logo de pac-man, un icône de la pop culture. Et comme pour les contours précédents, construisons théoriquement son contour dans le plan complexe  $\gamma_P(\tau)$ , où  $\tau \in [0, 2\pi]$ , via un arc de cercle  $\gamma_{AB}(\varphi)$  et deux segments  $\gamma_{BC}(t)$  et  $\gamma_{CA}(t)$  où  $A = e^{i\frac{\pi}{12}}$ ,  $B = e^{i\frac{-\pi}{12}}$ ,  $C = 0$  et où  $t \in [0, 1]$  et  $\varphi \in [0, \frac{11\pi}{6}]$ .

Soient  $\gamma_{AB}(\varphi)$ ,  $\gamma_{BC}(t)$  et  $\gamma_{CA}(t)$  telles que :

$$\begin{aligned}\gamma_{AB}(\varphi) &= e^{i\varphi} e^{i\frac{\pi}{12}} \\ \gamma_{BC}(t) &= (1-t)e^{i\frac{-\pi}{12}} \\ \gamma_{CA}(t) &= te^{i\frac{\pi}{12}}\end{aligned}$$

Construisons alors la fonction  $\gamma_P(\tau)$ , où  $\tau \in [0, 2\pi]$ , comme suit :

$$\gamma_P(\tau) = \begin{cases} \gamma_{AB}\left(\frac{\tau - \frac{11\pi}{6}}{\frac{2\pi}{3}}\right) & \text{si } \tau \in [0, \frac{2\pi}{3}[ \\ \gamma_{BC}\left(\frac{\tau - \frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}}\right) & \text{si } \tau \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[ \\ \gamma_{CA}\left(\frac{\tau - \frac{4\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}}\right) & \text{si } \tau \in [\frac{4\pi}{3}, 2\pi] \end{cases}$$

Comme pour les cas précédents, la continuité est assurée sur les domaines ouverts de l'arc de cercle et des segments.  $\gamma_P(\tau)$  est donc continue pour  $\tau \in [0, 2\pi] \setminus \{e^{i\frac{-\pi}{12}}, 0, e^{i\frac{\pi}{12}}\}$ .

Montrons la continuité de  $\gamma_P(\tau)$  en  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

Continuité en  $B$  :

$$\begin{aligned}\lim_{\tau^- \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \gamma_T(\tau) &= \lim_{\varphi^- \rightarrow \frac{11\pi}{6}} \gamma_{AB}(\varphi) \\ &= \lim_{\varphi^- \rightarrow \frac{11\pi}{6}} e^{i\varphi} e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{23\pi}{12}} \\ \lim_{\tau^+ \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \gamma_T(\tau) &= \lim_{t^+ \rightarrow 0} \gamma_{BC}(t) \\ &= \lim_{t^+ \rightarrow 0} (1-t)e^{i\frac{-\pi}{12}} = e^{i\frac{-\pi}{12}} \\ &= e^{i\frac{-\pi}{12}} e^{i2\pi} = e^{i\frac{23\pi}{12}}\end{aligned}$$

Continuité en  $C$  :

$$\begin{aligned}\lim_{\tau^- \rightarrow \frac{4\pi}{3}} \gamma_T(\tau) &= \lim_{t^- \rightarrow 1} \gamma_{BC}(t) \\ &= \lim_{t^- \rightarrow 1} (1-t)e^{i\frac{-\pi}{12}} = 0 \\ \lim_{\tau^+ \rightarrow \frac{4\pi}{3}} \gamma_T(\tau) &= \lim_{t^+ \rightarrow 0} \gamma_{CA}(t) \\ &= \lim_{t^+ \rightarrow 0} te^{i\frac{\pi}{12}} = 0\end{aligned}$$

Continuité en  $A$  :

$$\begin{aligned}\lim_{\tau^- \rightarrow 2\pi} \gamma_T(\tau) &= \lim_{t^- \rightarrow 1} \gamma_{CA}(t) \\ &= \lim_{t^- \rightarrow 1} te^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{12}} \\ \lim_{\tau^+ \rightarrow 0} \gamma_T(\tau) &= \lim_{\varphi^+ \rightarrow 0} \gamma_{AB}(\varphi) \\ &= \lim_{\varphi^+ \rightarrow 0} e^{i\varphi} e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{12}}\end{aligned}$$

Cela montre la continuité de  $\gamma_P(\tau)$  sur son intervalle de définition  $[0, 2\pi]$ . Ce qui implique l'égalité à sa série de Fourier associée.

Puisque nous avons l'égalité, nous pouvons créer une fonction matlab décrivant  $\gamma_P(\tau)$  par l'arc de cercle  $\gamma_{BA}(\varphi)$  et les segment  $\gamma_{BA}(t)$  et  $\gamma_{CA}(t)$ . Celle-ci est mise en annexe sous le nom *fPacman.m*.

En voici l'illustration pour différents épicycles :

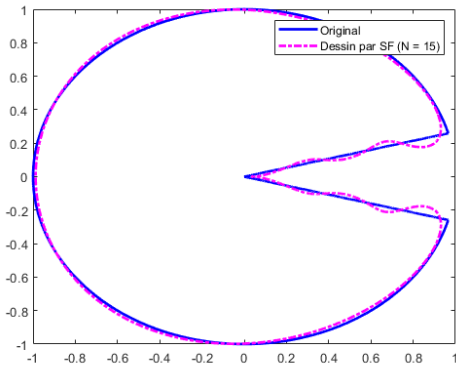


Figure 4.7 :  $fPacman(\tau)$  avec 15 épicycles

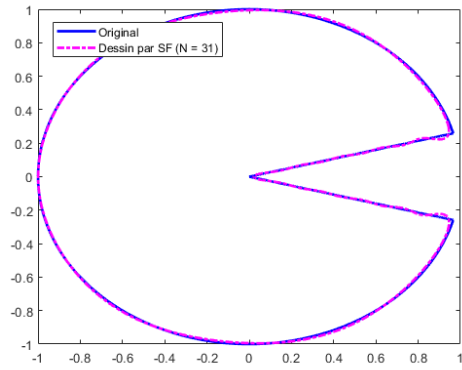


Figure 4.8 :  $fPacman(\tau)$  avec 31 épicycles

Après plusieurs dessins, nous pouvons constater qu'il est assez long de construire une fonction par morceaux définissant un contour continu arbitraire car pour définir notre fonction dans matlab, il nous faut autant de conditions que de courbes différentes dans le contour.

Par exemple, si nous voulions définir le contour d'un polygône régulier à  $n$  cotés, il nous faudrait  $n$  conditions sur notre variable  $\tau$  pour sa position dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . Alors, pouvons-nous généraliser ceci pour créer une série de Fourier associée au contour d'une forme quelconque grâce à matlab ?

La réponse est oui. Si nous ne passons plus par la construction d'une fonction décrivant un contour mais directement par un échantillonnage du contour d'une image, nous aurons l'image de notre pseudo-fonction. En utilisant la toolbox "Image Processing Toolbox", nous pouvons délimiter le contour d'une forme pour échantillonner les coordonnées du contour de celle-ci. Il suffit ensuite de les traduire dans le plan complexe et de les mettre en fonction d'une variable allant de 0 à  $2\pi$  de façon à ce que notre pseudo-fonction soit  $2\pi$ -périodique. Avec ceux-ci, nous pourrions calculer les coefficients de Fourier et ainsi construire la série de Fourier associée. Pour une question de simplicité, nous placerons l'isobarycentre<sup>4</sup> de notre contour en  $(0, 0)$ .

En voici l'illustration pour différents épicycles et pour différentes images<sup>5</sup> :

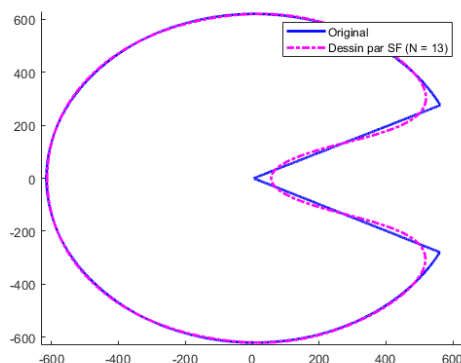


Figure 4.9 : Pacman.png avec 13 épicycles

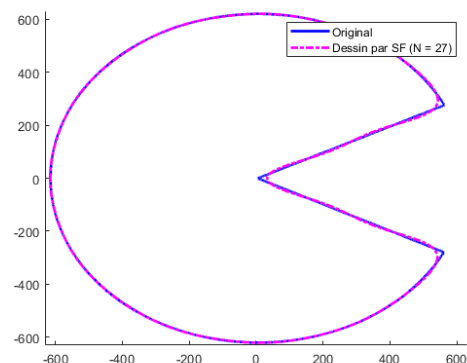


Figure 4.10 : Pacman.png avec 27 épicycles

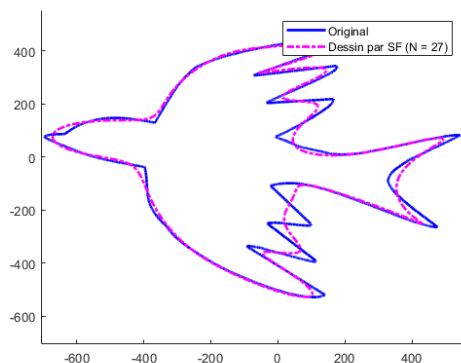


Figure 4.11 : bird.png avec 27 épicycles

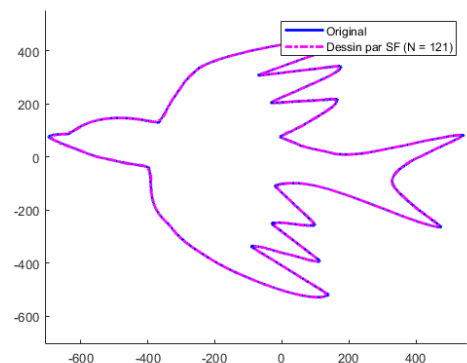


Figure 4.12 : bird.png avec 121 épicycles

4. Moyenne arithmétique de points où les coefficients de pondération sont égaux.

5. Ces images et d'autres sont disponibles en annexe à l'essai du lecteur

Nous avons donc réussi à développer une série de Fourier pour le contour d'une forme arbitraire, mais pouvons-nous aller plus loin avec la visualisation des épicycles ?

La réponse est encore oui. Il est possible de les visualiser sous forme de vecteurs tournants. Il suffit dans ce cas d'interpréter que les coefficients de Fourier (ici, les  $c_k$ ) sont la norme et la phase initiale des vecteurs tournants  $e^{ikt}$ . Ceux-ci tournent à une certaine vitesse et dans un certain sens selon le paramètre  $k \in \mathbb{Z}$ . Donc, si nous mettons bout à bout les différents vecteurs, nous nous retrouvons avec une chaîne de vecteurs tournants étant les épicycles de la série de Fourier associée.

En voici l'illustration pour 121 épicycles à l'image bird.png. Les figures qui suivent sont extraites d'un format gif, "bird.gif", qui est aussi disponible en annexe :

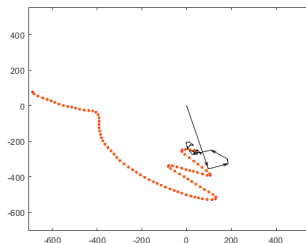


Figure 4.13 : bird.gif avec 121 épicycles

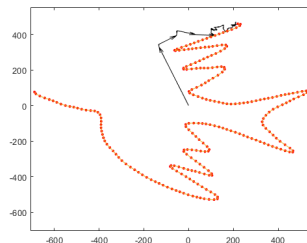


Figure 4.14 : bird.gif avec 121 épicycles

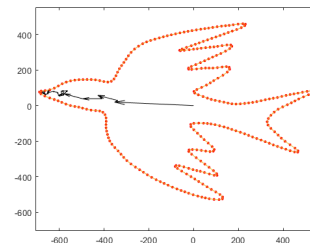


Figure 4.15 : bird.gif avec 121 épicycles

## IV. Conclusion

Lors de ce travail, nous avons donc eu l'occasion, dans un premier temps, de définir un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions de carré sommable. Celui-ci nous a permis de définir une notion d'orthogonalité entre certaines fonctions de cet espace et donc de définir deux bases de l'ensemble des fonctions continues et régulières par morceaux de  $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$  :  $\{(\cos kx)_{k \geq 0}, (\sin mx)_{m \geq 0}\}$  ainsi que  $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . On a pu voir de cette manière qu'une décomposition en série de Fourier n'est rien de plus que la décomposition d'une fonction sur une de ces deux bases. Les coefficients de Fourier étant alors les projections de la fonction  $f$  sur les différents axes de la base considérée.

Enfin, nous avons utilisé numériquement les séries de Fourier pour obtenir des approximations de courbes simples ou plus élaborées dans le plan complexe.

Comme cité en début de travail, les séries de Fourier ont beaucoup d'applications. Dans ce document, nous avons introduit ce que représente une série de Fourier de manière rigoureuse et l'avons utilisée pour reproduire des courbes artistiques. Néanmoins, les séries de Fourier sont aussi utilisées dans divers domaines, en physique notamment.

## V. Références

- [1] 3BLUE1BROWN. *But what is a fourier series? From heat flow to drawing with circles* | DE4. Juin 2019. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k>.
- [2] Timoteo CARLETTI. « Analyse complexe ». In : *Syllabus* (2022).
- [3] Eberhard FREITAG et Rolf BUSAM. *Complex analysis*. Springer Science et Business Media, avr. 2009.
- [4] *GiF*. Jan. 2021. URL : <https://nl.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/63239-gif>.
- [5] *Image Processing Toolbox Documentation - MathWorks Benelux*. URL : [https://nl.mathworks.com/help/images/index.html?s\\_tid=CRUX\\_lftnav](https://nl.mathworks.com/help/images/index.html?s_tid=CRUX_lftnav).
- [6] El JJ. *Deux (deux ?) minutes pour l'éléphant de Fermi and Neumann*. Avr. 2018. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=uazPP0ny3XQ>.
- [7] Contributeurs aux projets WIKIMEDIA. *Joseph Fourier*. Nov. 2023. URL : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph\\_Fourier](https://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier).