

Introducción a la Combinatoria

Dr. Himer Avila George

Departamento de Ciencias Computacionales e Ingenierías

CENTRO UNIVERSITARIO DE LOS VALLES

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Email: `himer.avila@academicos.udg.mx`

Table of contents

1. Introducción
2. Número factorial
3. Variaciones
4. Permutaciones
5. Combinaciones

Introducción

Definición de Combinatoria

Es la rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de las formas de contar.

- Variaciones
- Permutaciones
- Combinaciones

Número factorial

Factorial

Se define como factorial de un número natural n al producto de n por todos los números que le preceden.

- Se le denota como $n!$
- $n! = \prod_{k=1}^n k$

Por definición:

- $0! = 1$
- $n! = n \times (n - 1)!$

Ejemplos:

- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
- $5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

Ejercicio de programación 1:

Programar una función para calcular el factorial de un número¹, usa tu lenguaje de programación favorito y que sea permitido en los concursos del ACM.

(tiempo 10 min)

¹ ¡El factorial de un número crece de forma muy considerable!

Variaciones

Variaciones (V_m^n)

Sea un conjunto de m elementos distintos. Si de ellos se toman grupos ordenados de elementos diferentes, a cada una de estas disposiciones se les llama variaciones de m elementos tomados de n en n . Esto significa que son las distintas agrupaciones que se pueden formar de manera que dos diferentes agrupaciones difieran de un elemento o en su orden.

Donde:

$$m \geq n$$

Fórmula

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Variaciones (V_m^n)

Preguntas para identificar si el problema es una **Variación**.

- ¿Entran todos los elementos?
- ¿Importa el orden?
- ¿Se pueden repetir los elementos?

NOTA: En las variaciones NO entran todos los elementos, SI importa el orden, NO se pueden repetir los elementos.

Ejemplo:

En una liga de fútbol (ej. Liga Santander) existen 20 equipos, el torneo de liga implica que cada equipo debe enfrentarse contra los otros 19 equipos (tanto de local como de visitante), ¿cuantos partidos son necesarios para determinar al campeón de la Liga Santander?

$$m = 20$$

$$n = 2$$

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{18!} = 380$$

Ejercicio de variaciones:

¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, vicepresidente y tesorero de un club de fútbol sabiendo que hay 5 posibles candidatos?

Ejercicio de variaciones:

¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, vicepresidente y tesorero de un club de fútbol sabiendo que hay 5 posibles candidatos?

$$m = 5$$

$$n = 3$$

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$$

Ejercicio de programación 2:

Programar una función para calcular **variaciones**; usa tu lenguaje de programación favorito y que sea permitido en los concursos del ACM.

(tiempo 10 min)

Variaciones con repetición (VR_m^n)

Preguntas para identificar si el problema es una **Variación**.

- ¿Entran todos los elementos? SI, si $m \leq n$; NO, si $m > n$
- ¿Importa el orden? SI
- ¿Se pueden repetir los elementos? SI

Fórmula

$$VR_m^n = m^n$$

Variaciones con repetición (VR_m^n)

Ejemplo:

¿Con las letras A, B y C cuántas cadenas de 2 elementos se pueden formar?

$$m = 3$$

$$n = 2$$

$$VR_3^2 = 3^2 = 9$$

{AA},{AB},{AC},{BA},{BB},{BC},{CA},{CB},{CC}

Ejercicio:

¿Con las cifras 1, y 2 cuantos números de 3 dígitos se pueden formar?

Ejercicio:

¿Con las cifras 1 y 2 cuantos números de 3 dígitos se pueden formar?

$$m = 2$$

$$n = 3$$

$$VR_2^3 = 2^3 = 8$$

$$\{111\}, \{112\}, \{121\}, \{122\}, \{211\}, \{212\}, \{221\}, \{222\}$$

Ejercicio de programación 3:

Programar una función para calcular **variaciones con repetición**; usa tu lenguaje de programación favorito y que sea permitido en los concursos del ACM.

(tiempo 10 min)

Permutaciones

Permutaciones (P_n)

Las agrupaciones de n elementos tomados de n en n son llamados permutaciones de los n elementos.

- ¿Entran todos los elementos? SI
- ¿Importa el orden? SI
- ¿Se pueden repetir los elementos? NO

Fórmula

$$P_n = n!$$

Ejercicio:

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 5 personas diferentes en una fila de 5 sillas?

Ejercicio:

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 5 personas diferentes en una fila de 5 sillas?

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Ejercicio: ¿De cuántas formas pueden colocarse los 11 jugadores de un equipo de fútbol teniendo en cuenta que el portero no puede ocupar otra posición distinta que la portería?

Ejercicio: ¿De cuántas formas pueden colocarse los 11 jugadores de un equipo de fútbol teniendo en cuenta que el portero no puede ocupar otra posición distinta que la portería?

$$n = 11 \text{ jugadores} - 1 \text{ portero} = 10$$

$$P_{10} = 10! = 3,628,800$$

Ejercicio de programación 4:

Programar una función para calcular **permutaciones**; usa tu lenguaje de programación favorito y que sea permitido en los concursos del ACM.

(tiempo 10 min)

Permutaciones circulares(PC_n)

En este tipo de agrupaciones no hay primero ni último.

- ¿Entran todos los elementos? SI
- ¿Importa el orden? SI
- ¿Se pueden repetir los elementos? NO

Fórmula

$$PC_n = (n - 1)!$$

Ejercicio:

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 5 personas diferentes en una mesa redonda?

Ejercicio:

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 5 personas diferentes en una mesa redonda?

$$n = 5$$

$$PC_5 = (5 - 1)! = 24$$

Ejercicio de programación 5:

Programar una función para calcular **permutaciones circulares**; usa tu lenguaje de programación favorito y que sea permitido en los concursos del ACM.

(tiempo 10 min)

Permutaciones con repetición ($PR_n^{a,b,\dots}$)

Son agrupaciones con todos los elementos, donde el primer elemento se repite a veces, el segundo elemento se repite b veces y así sucesivamente.

- ¿Entran todos los elementos? SI
- ¿Importa el orden? SI
- ¿Se pueden repetir los elementos? SI

Fórmula

$$PR_n^{a,b,\dots} = \frac{P_n}{a! \times b! \times \dots}$$

Ejercicio:

¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 2 pañuelos azules, 3 verdes y 4 rosas en un escaparate?

Permutaciones con repetición ($PR_n^{a,b,\dots}$)

Ejercicio:

¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 2 pañuelos azules, 3 verdes y 4 rosas en un escaparate?

$a = 2$ pañuelos azules

$b = 3$ pañuelos verdes

$c = 4$ pañuelos rosas

$$n = 2 + 3 + 4 = 9$$

$$PR_9^{2,3,4} = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{2! \times 3! \times 4!} = \frac{15120}{12} = 1260$$

Ejercicio de programación 6:

Programar una función para calcular **permutaciones con repetición**; usa tu lenguaje de programación favorito y que sea permitido en los concursos del ACM.

(tiempo 10 min)

Combinaciones

Combinaciones ($C_{m,n}$)

Son agrupaciones de m elementos tomados de n en n .

- ¿Entran todos los elementos? NO
- ¿Importa el orden? NO
- ¿Se pueden repetir los elementos? NO

Fórmula

$$C_{m,n} = C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \times (m-n)!}$$

Ejercicio:

En una clase de 10 alumnos, se quiere formar un comité de 3 alumnos. ¿Cuántos comités diferentes pueden haber?

Ejercicio:

En una clase de 10 alumnos, se quiere formar un comité de 3 alumnos. ¿Cuántos comités diferentes pueden haber?

$$m = 10$$

$$n = 3$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times (10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{6 \times 7!} = \frac{720}{6} = 120$$

Ejercicio de programación 7:

Programar una función para calcular **combinaciones**; usa tu lenguaje de programación favorito y que sea permitido en los concursos del ACM.

(tiempo 10 min)

Combinaciones con repetición (CR_m^n)

Son agrupaciones de m elementos tomados de n en n donde se aceptan elementos repetidos.

- ¿Entran todos los elementos? NO
- ¿Importa el orden? NO
- ¿Se pueden repetir los elementos? SI

Fórmula

$$CR_m^n = \binom{(m+n-1)!}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n! \times (m-1)!}$$

Ejercicio:

En una bodega hay 5 tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 botellas?

Ejercicio:

En una bodega hay 5 tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 botellas?

$$m = 5$$

$$n = 5$$

$$CR_5^4 = \binom{(5+4-1)!}{4} = \frac{(5+4-1)!}{4! \times (5-1)!} = \frac{8!}{4! \times 4!} = 70$$

Ejercicio de programación 8:

Programar una función para calcular **combinaciones con repetición**; usa tu lenguaje de programación favorito y que sea permitido en los concursos del ACM.

(tiempo 10 min)

	V	VR	P	PC	PR	C	CR
¿Entran todos los elementos?	NO	NO si $m > n$ SI, si $m \leq n$	SI	SI	SI	NO	NO
¿Importa el orden?	SI	SI	SI	SI	SI	NO	NO
¿Se pueden repetir los elementos?	NO	SI	NO	NO	SI	NO	SI