Centro Universitario de los Valles

# Club de ACM

## Tema: Teoría de grafos y árboles

# Concepto básico de un grafo

**Definición.** Un grafo (o grafo no dirigido) *G = (V, E)* consta de un conjunto *V* de ***vértices*** (o nodos) y un conjunto *E* de ***aristas*** (arcos) tales que cada arista *e* Є *E* queda asociada con un ***par no ordenado*** de vértices. Si existe una única arista *e* asociada con los vértices *v* y *w*, escribimos *e* = (*v,w*) o *e* = (*w,v*) En este contexto, (*v,w*) denota una arista entre v y w en un grafo no dirigido y no un par ordenado.

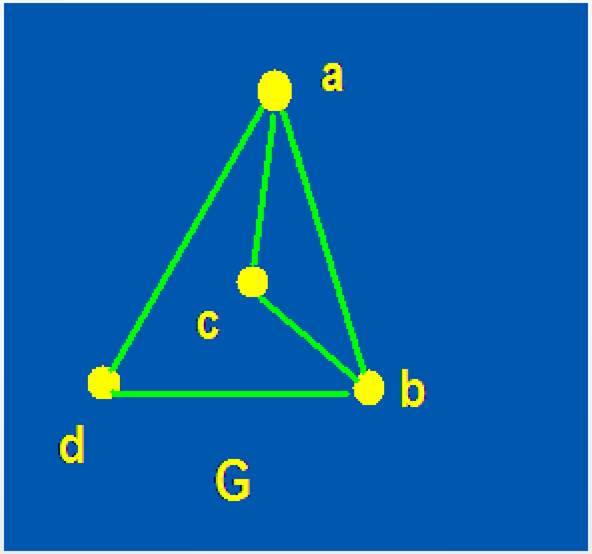
# Concepto básico de un grafo

**Ejemplo:**

**G = (V,E)**

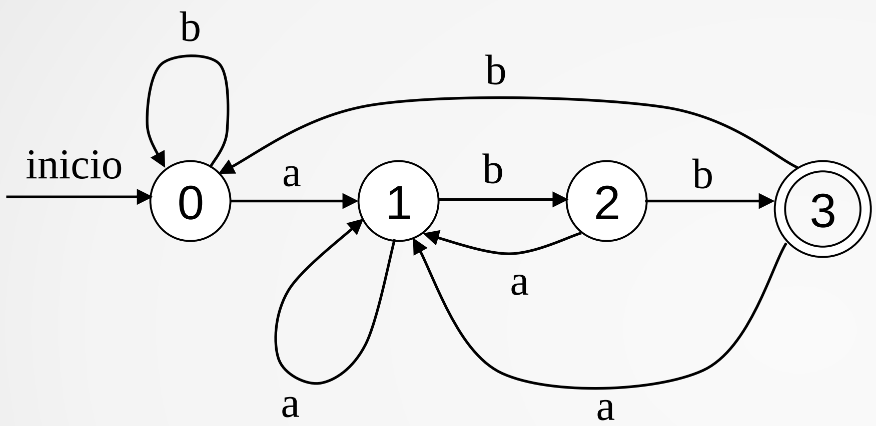
**V = {a,b,c,d }**

**E = {{a,b}, {b,c}, {a,c}, {a,d}, {d,b} }**

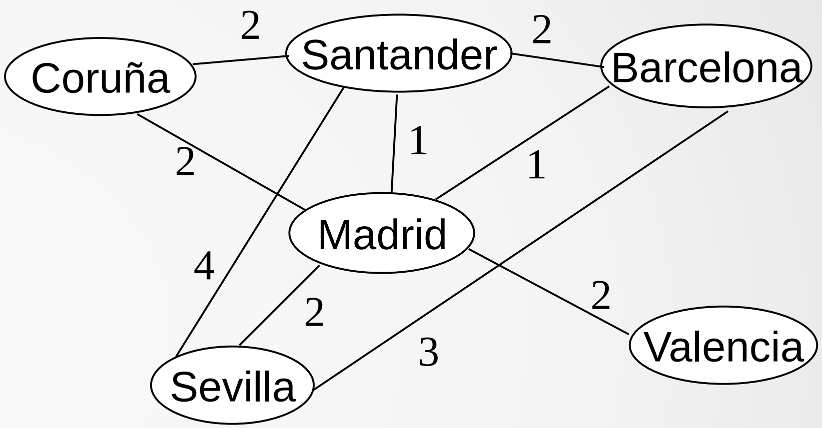


# Aplicaciones de grafos

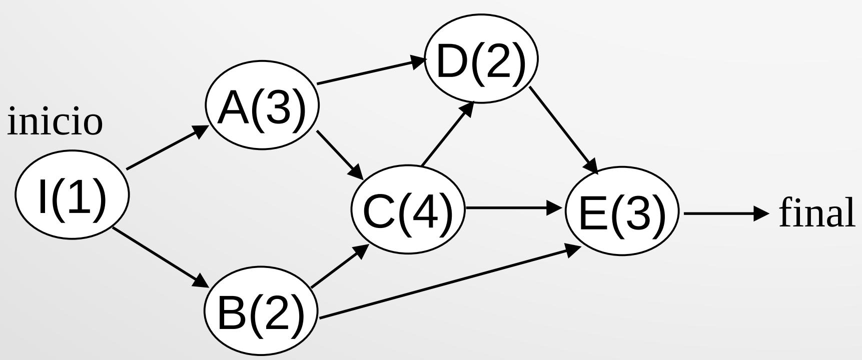
Grafo de transiciones (AFD)



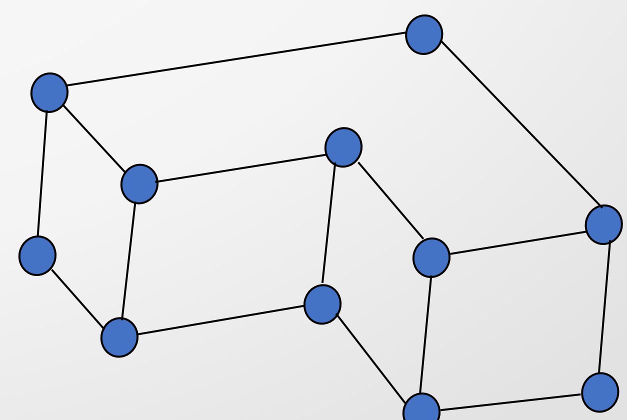

Tiempo de vuelos aéreos



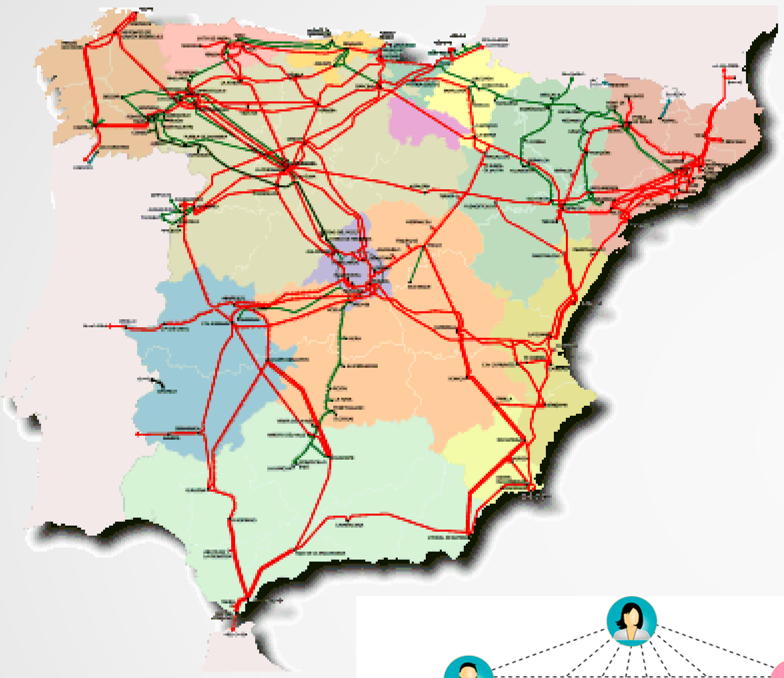

Planificación de tareas
(Pert/CPM)

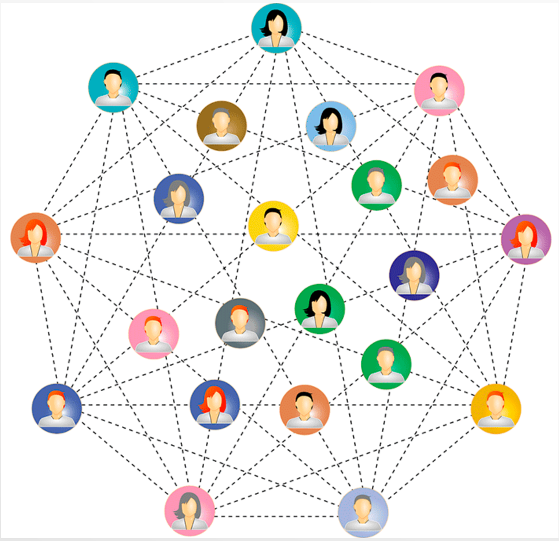



Grafo asociado a un dibujo de
líneas (visión artificial)



# Aplicaciones de grafos





¿Se pueden usar los grafos para modelar estos ejemplos?

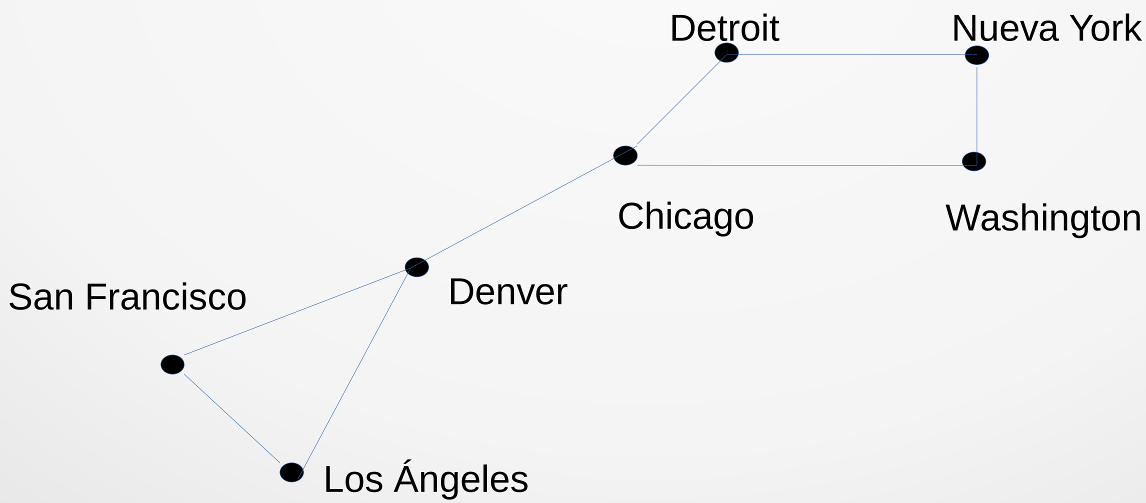
¿y de qué me sirve modelar con grafos?

# Concepto básico de un grafo

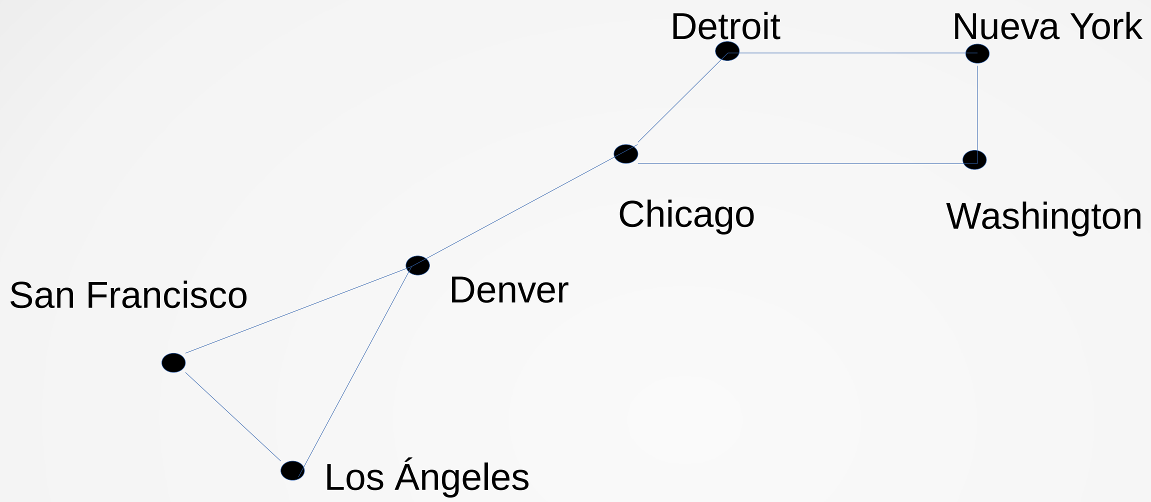
Podemos ver los diferentes tipos de grafos mostrando la forma en la que se pueden utilizar cada uno de ellos para modelar una red informática.

# Concepto básico de un grafo

**Ejemplo.** Supongamos que una red consta de computadoras y de líneas telefónicas que conectan las computadoras. Podemos representar cada computadora mediante un punto y cada línea telefónica mediante un segmento.



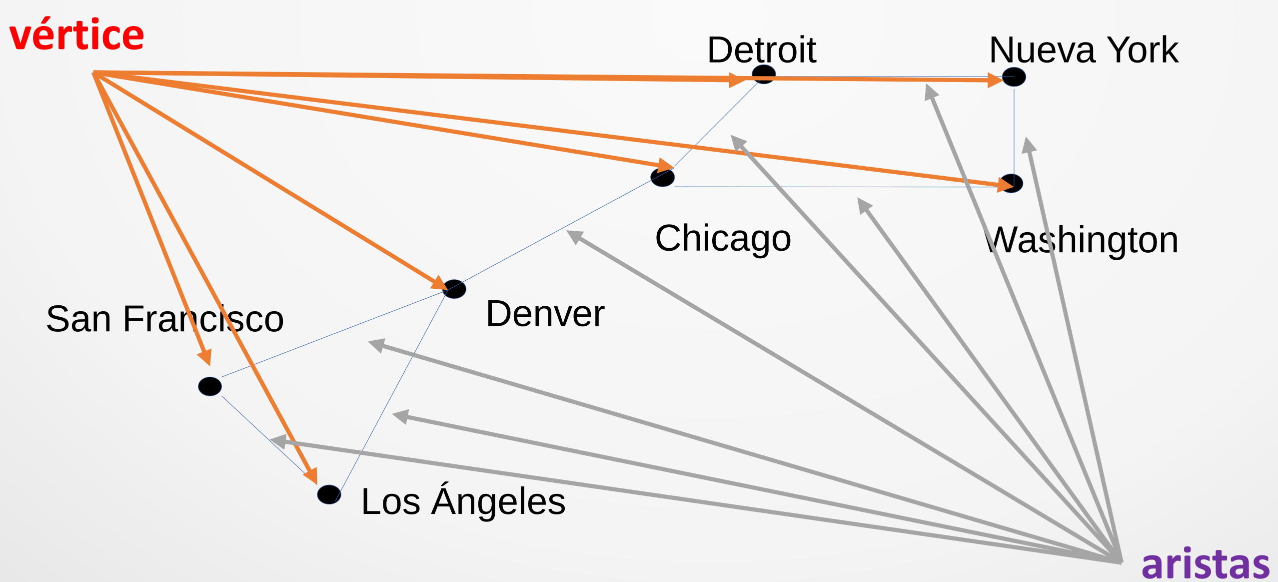
# Clasificación de grafos




En la red de la figura hay a lo sumo una línea telefónica entre cada par de computadoras, cada línea opera en ambas direcciones, y ninguna computadora tiene una línea telefónica que la conecte consigo mismo. Por tanto, **esta red se puede modelar usando un grafo simple.**

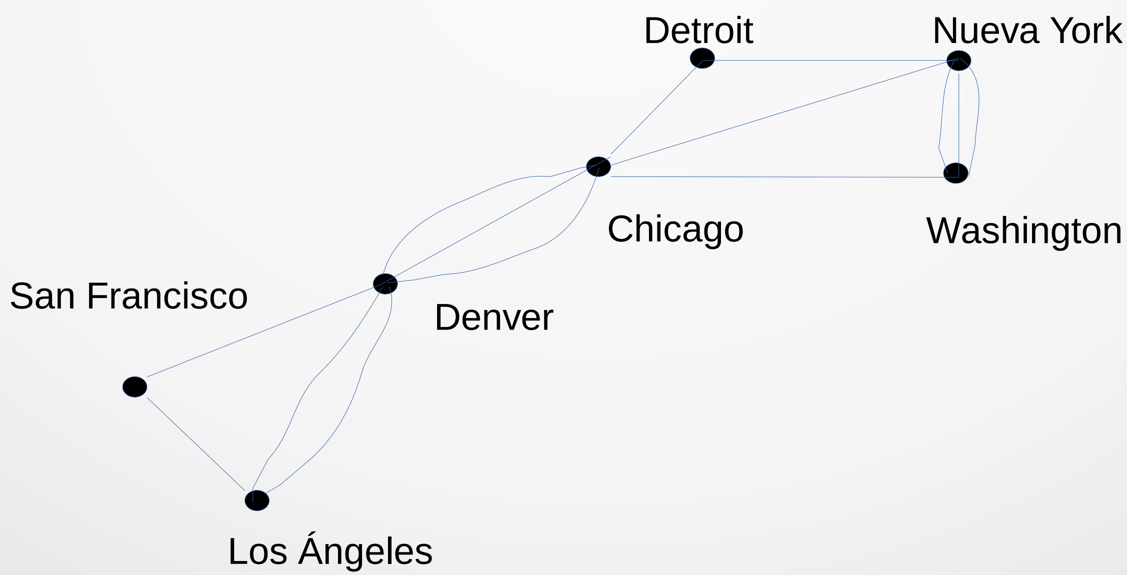
# Clasificación de grafos

**Definición.** Un ***grafo simple*** *G = (V, E)* consta de *V*, un conjunto no vacío de vértices, y de *E*, un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de *V*. A estos pares se les llama aristas.



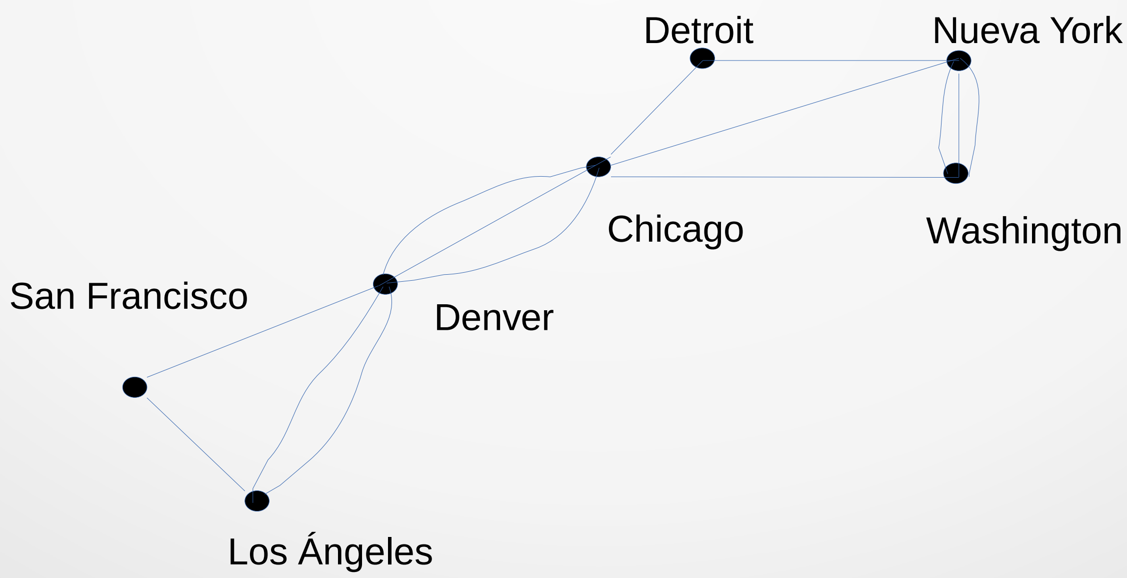
# Clasificación de grafos

**Ejemplo.** Cuando hay mucho trafico de información, puede haber líneas telefónicas múltiples entre las computadoras de la red. Los grafos simples no bastan para modelar esta situación. En lugar de grafos simples empleamos multigrafos.



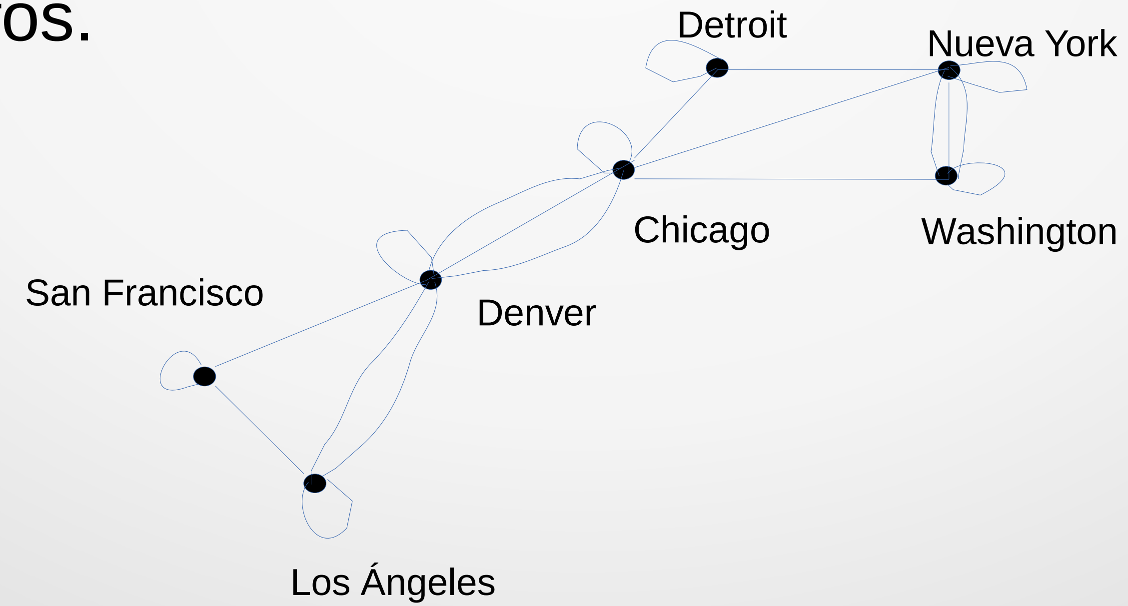
# Clasificación de grafos

**Definición.** Un ***multigrafo*** G = (V, E) consta de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas y una función *f* de E en {(u,v) | u, v Є V, u ≠ v}. Se dice que las aristas $e_1$ y $e_2$ son aristas múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$.



# Clasificación de grafos

**Ejemplo.** Una red informática puede contener una línea telefónica que conecte una computadora consigo mismo (quizá para efectos de pruebas y diagnósticos). No podemos usar multigrafos para representar estas redes, ya que no se admiten bucles en un multigrafo. Sin embargo, podemos utilizar pseudografos que son más generales que los multigrafos.

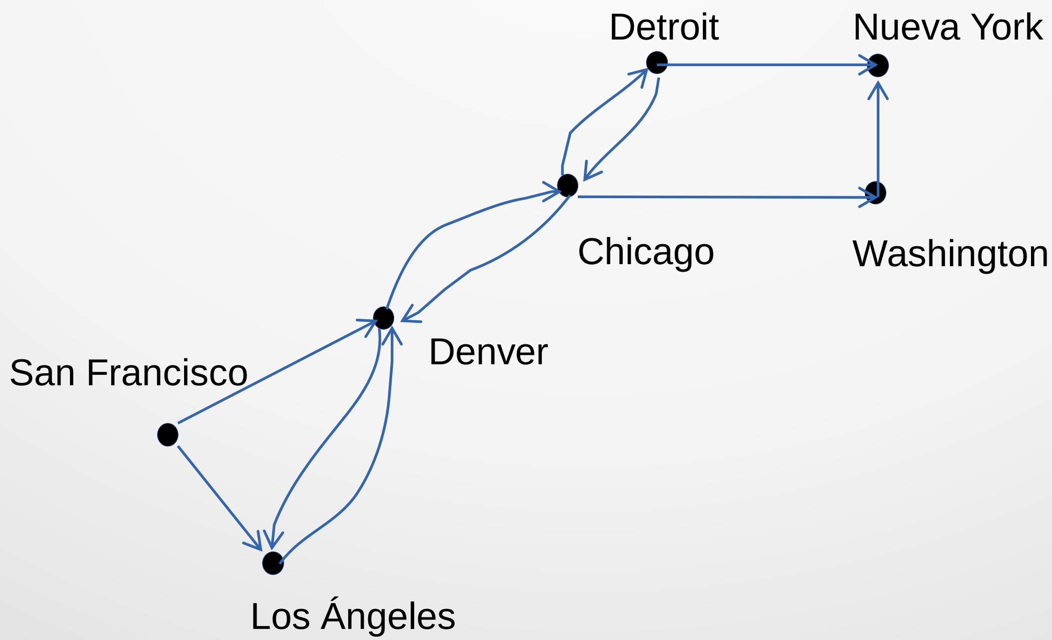


# Clasificación de grafos

**Definición.** Un ***pseudografo*** G = (V, E) consta de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas y una función *f* de E en {(u,v) | u, v Є V}. Una arista *e* es un bucle si *f*(*e*) = (u, u) para algún u Є V.

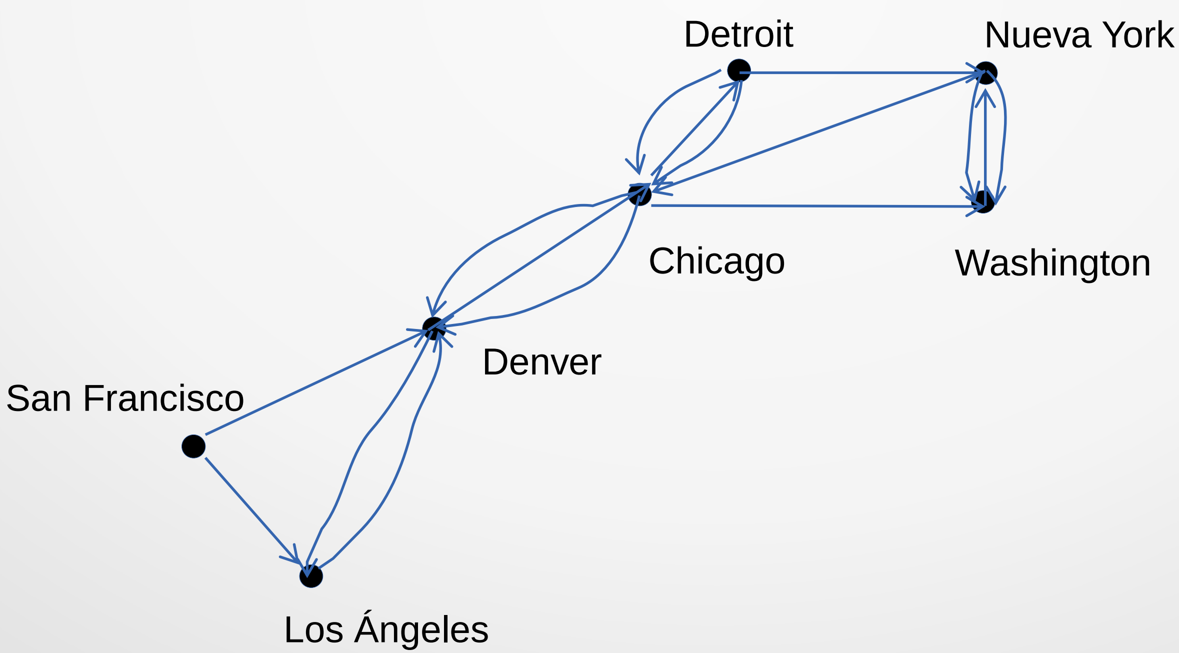
# Clasificación de grafos

**Definición.** Un **grafo dirigido** (o grafo) *G = (V, E)* consta de un conjunto *V* de ***vértices*** (o nodos) y un conjunto *E* de ***aristas*** (arcos) tales que cada arista *e* Є *E* se asocia con un **par ordenado** de vértices. Si existe una única arista *e* asociada con el par ordenado (v,w) de vértices, escribimos *e* = (*v,w*), lo cual denota una arista de *v* a *w*.



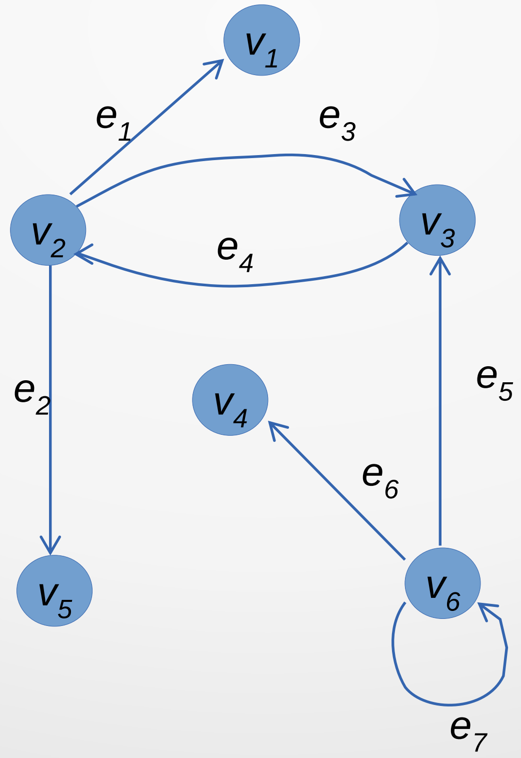
# Clasificación de grafos

**Definición.** Un **multigrafo dirigido** *G = (V, E)* consta de un conjunto *V* de vértices, un conjunto *E* de aristas y una función *f* de *E* en {(u, v) | u, v Є V}. Se dice que la arista $e_1$ y $e_2$ son aristas múltiples si $f(e_1) = f(e_2)$.



# Representación mediante grafos

**Ejemplo.** En la siguiente figura, se presenta un multigrafo dirigido (o simplemente un grafo dirigido). Las aristas dirigidas se indican mediante flechas. La arista $e_1$ se asocia con el par ordenado $(v_2, v_1)$ de vértices y la arista $e_7$ se asocia con el par ordenado $(v_6, v_6)$ de vértices.



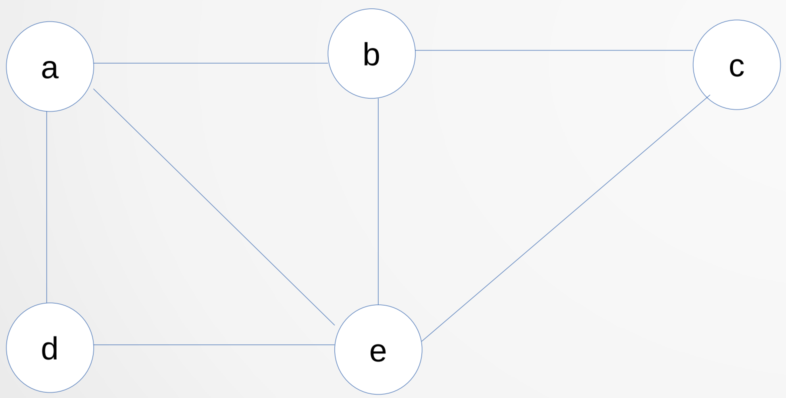
# Subgrafos, complementos e isomorfos

Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido o no, entonces $G_1 = (V_1, E_1)$ es un subgrafo de $G$ si $V_1$ es distinto del conjunto vacío y $E_1$ es subconjunto de $E$, donde cada arista de $E_1$ es incidente con los vértices de $V_1$.

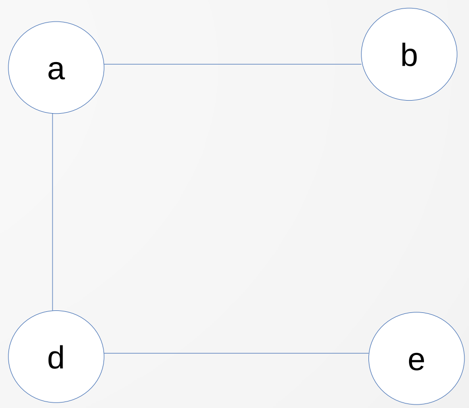
**Definición.** Un subgrafo de un grafo G = (V, E) es un grafo H = (W, F) donde $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$.

# Subgrafos, complementos e isomorfos

**Ejemplo.** El grafo $G_2$ que se muestra en la siguiente figura es un subgrafo de $G_1$.




Grafo original $G_1$



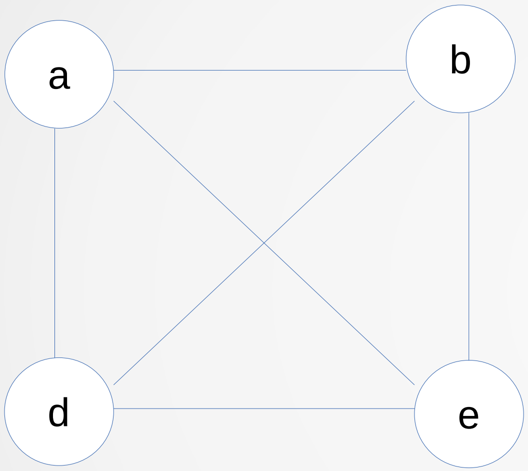

Subgrafo $G_2$

# Subgrafos, complementos e isomorfos

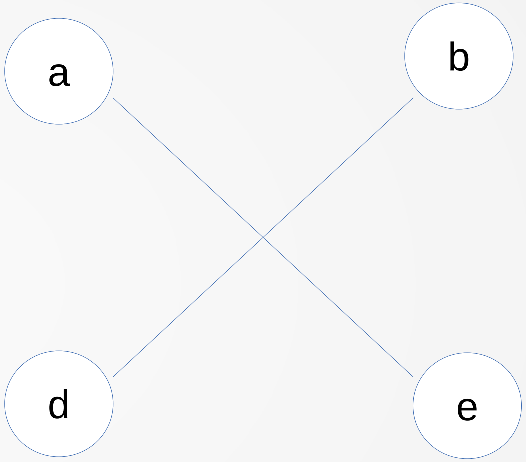
**Definición.** Dado $G = (V, E)$ es un grafo dirigido o no, sea $G_1 = (V_1, E_1)$ un subgrafo de $G$. Si $V_1 = V$, entonces $G_1$ es un ***subgrafo recubridor*** o ***grafo expandido*** de G.

**Ejemplo.** La siguiente figura permite observar dos grafos no dirigidos, $G$ es un grafo que posee 4 vértices y 6 arcos, en este caso es el grafo original; mientras $G'$ es el subgrafo de $G$, pero en este caso es un **subgrafo expandido**.

# Subgrafos, complementos e isomorfos




Grafo original G

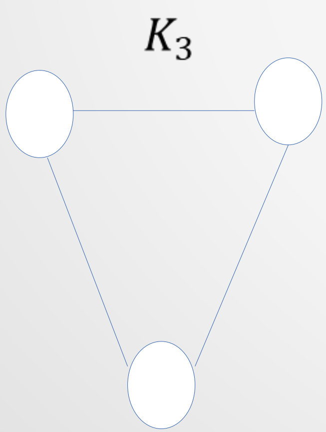



Subgrafo G'

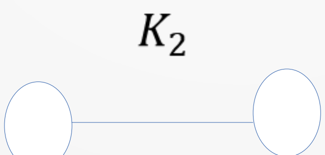
Como podemos observar $G'$ cumple todas las condiciones de subgrafo, es decir, $V'$ es subconjunto de $V$ con la particularidad de que $V'$ debe ser igual a $V$ y $E'$ es subconjunto de $E$.

# Subgrafos, complementos e isomorfos

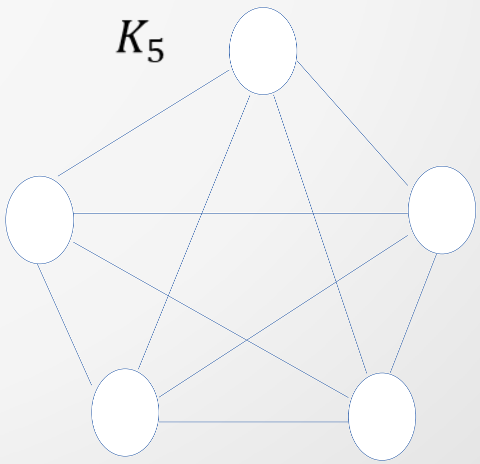
**Definición.** Sea *V* un conjunto de *n* vértices. El ***grafo completo*** sobre *V* es aquel grafo no dirigido sin lazos tal que para todos *u, v* pertenecientes a *V*, con *u* distinto de *v*, existe una arista (*u, v*). En otras palabras, un grafo *G* se dice completo si todos los vértices *u, v* pertenecientes a *V* se tiene que (*u, v*) pertenece a *E*. Ejemplo:




Grafo completo de tamaño 3




Grafo completo de tamaño 2




Grafo completo de tamaño 5

# Subgrafos, complementos e isomorfos

¿Cuántas aristas tiene un grafo completo $K_4$?

¿Cuántas aristas tiene un grafo completo $K_6$?

**A = (n*(n-1))/2**

¿Cuántas aristas tiene un grafo completo $K_7$?

¿Cuántas aristas tiene un grafo completo $K_n$?

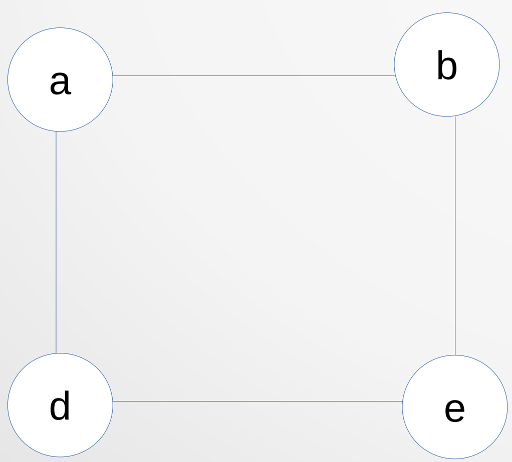
**Un grafo es completo si cada vértice tiene un grado igual a n-1, donde n es el número de vértices del grafo.**

# Subgrafos, complementos e isomorfos

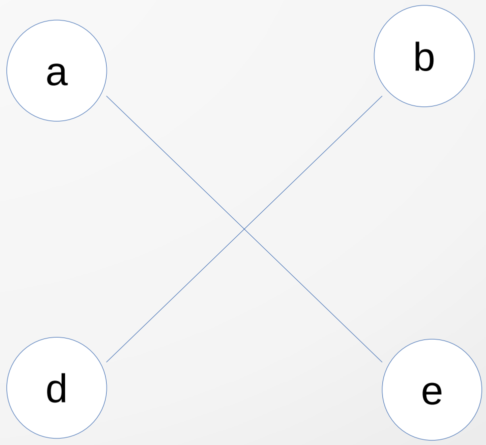
**Definición.** Sea $G$ un grafo no dirigido sin lazos con $n$ vértices. El ***grafo complementario*** de $G$, es el subgrafo formado por los $n$ vértices de $G$ y las aristas que no están en $G$. Si el grafo complementario tiene $n$ vértices y ninguna arista se le llama a este grafo: **grafo nulo**.

# Subgrafos, complementos e isomorfos

**Ejemplo.** La siguiente figura muestra el grafo complementario $G'$ del grafo original $G$, que está compuesto por todos los vértices de $G$ y las aristas que no están en $G$. De ahí el nombre de grafo complementario.




Grafo original G



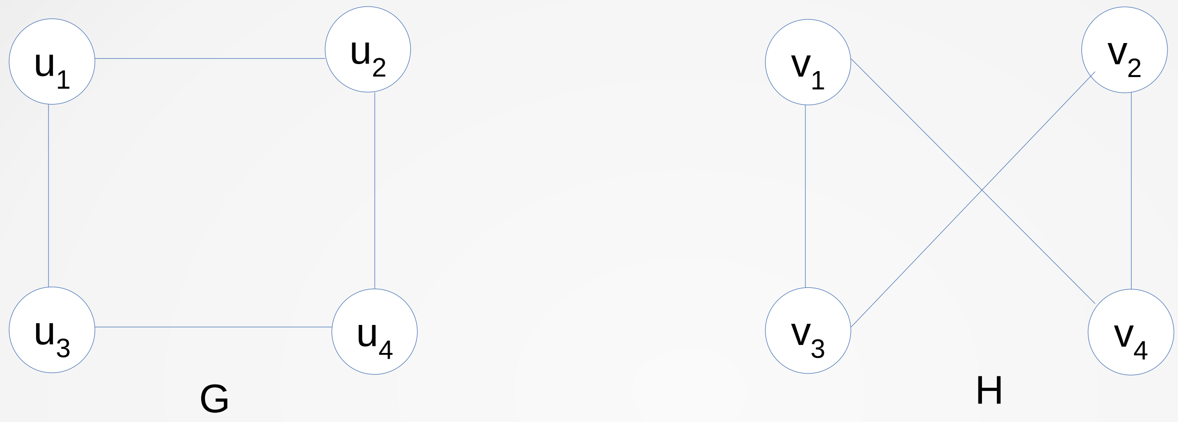

Grafo complementario G'

# Subgrafos, complementos e isomorfos

**Definición.** Los grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** si hay una función biyectiva *f* de $V_1$ en $V_2$ con la propiedad de que, para cada par de vértices *u, v* que perteneces a $V_1$, *u* y *v* son adyacentes en $G_1$ si, y sólo si, *f(u)* y *f(v)* son adyacentes en $G_2$.

**Ejemplo.** Demuestre que los dos grafos G = (V, E) y H = (W, F) que se muestran en la siguiente figura son isomorfos.

# Subgrafos, complementos e isomorfos




***Solución**:* La función *f* con $f(u_1)=v_1$, $f(u_2)=v_4$, $f(u_3)=v_3$ y $f(u_4)=v_2$ es una función biyectiva entre *V* y *W*. Para ver que esta función preserva la adyacencia, nótese que los pares adyacentes en *G* son $u_1$ y $u_2$, $u_1$ y $u_3$, $u_2$ y $u_4$, y $u_3$ y $u_4$, y cada uno de los pares $f(u_1) = v_1$ y $f(u_2) = v_4$, $f(u_1) = v_1$ y $f(u_3) = v_3$, $f(u_2) = v_4$ y $f(u_4) = v_2$, $f(u_3) = v_3$ y $f(u_4) = v_2$ son adyacentes en *H*.

# Recorridos en grafos

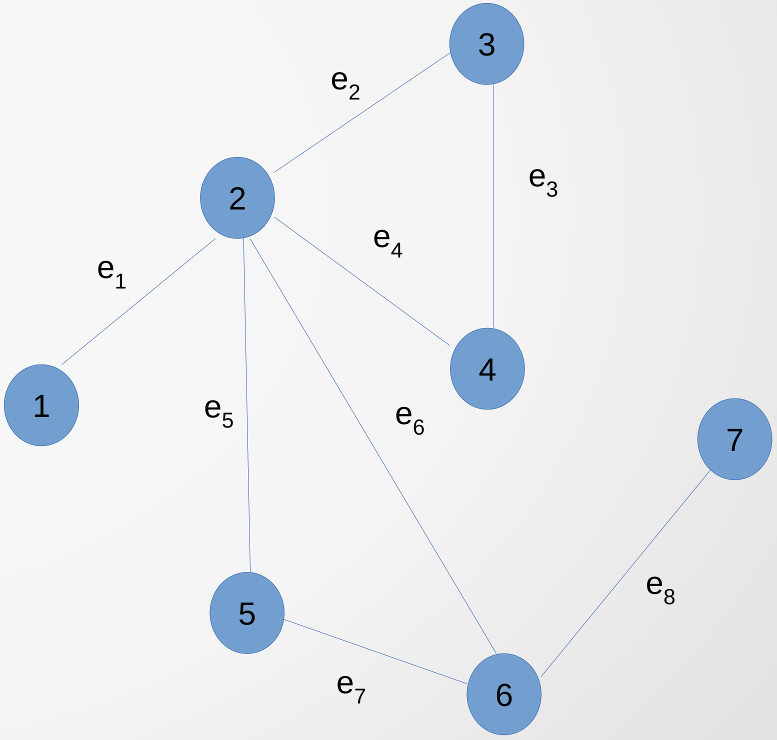
**Definición.** Sean v y w vértices en un grafo G.

- Un **camino simple** de v a w es un camino de v a w sin vértices repetidos.
- Un **ciclo o circuito** es un camino de longitud distinta de cero de v a v, sin aristas repetidas.
- Un **ciclo simple** es un ciclo de v a v en el cual no existen vértices repetidos, excepto por los vértices inicial y final, que son iguales a v.

# Recorridos en grafos

**Ejemplo.** Para el grafo que se muestra en la siguiente figura tenemos:

| Camino | ¿Es un camino simple? | ¿Es un ciclo? | ¿Es un ciclo simple? |
|---|---|---|---|
| (6, 5, 2, 4, 3, 2, 1) | ✗ | ✗ | ✗ |
| (6, 5, 2, 4) | ✓ | ✗ | ✗ |
| (2, 6, 5, 2, 4, 3, 2) | ✗ | ✓ | ✗ |
| (5, 6, 2, 5) | ✗ | ✓ | ✓ |



# Recorridos en grafos

**Definición.** Se dice que un grafo no dirigido es **conexo** si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo.

**Definición.** Se dice que un grafo dirigido es **fuertemente conexo** si hay un camino de *a* a *b* y un camino de *b* a *a* para cualquiera dos vértices *a* y *b* del grafo.

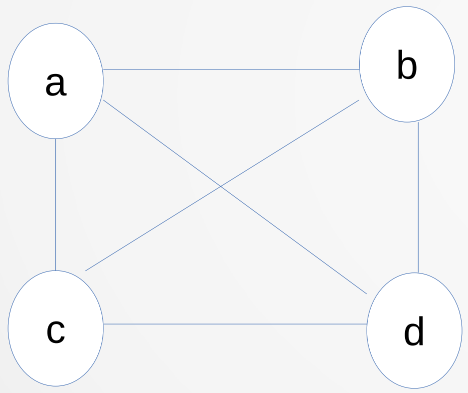
**Definición.** Se dice que un grafo dirigido es **débilmente conexo** si hay un camino entre cada dos vértices del grafo no dirigido subyacente.

# Planaridad

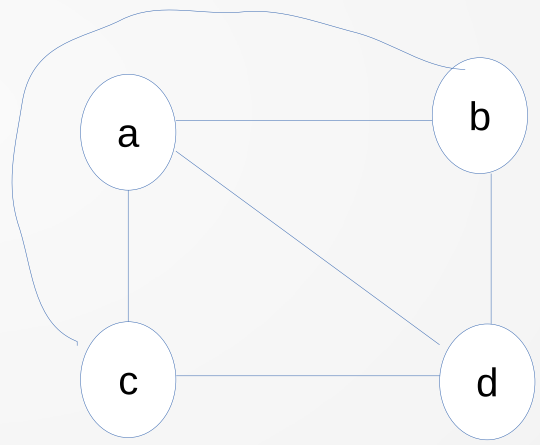
**Definición.** Se dice que que un grafo es **plano** si pude dibujarse en el plano de manera que ningún par de sus aristas se corte (por corte de aristas se entiende la intersección de las líneas que representan a las aristas en un punto distinto de sus extremos). A ese dibujo se le llama *representación plana del grafo*.

# Planaridad

**Ejemplo.** ¿El siguiente grafo G es plano?.



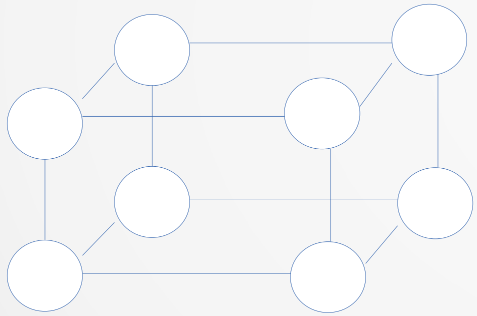

Grafo G



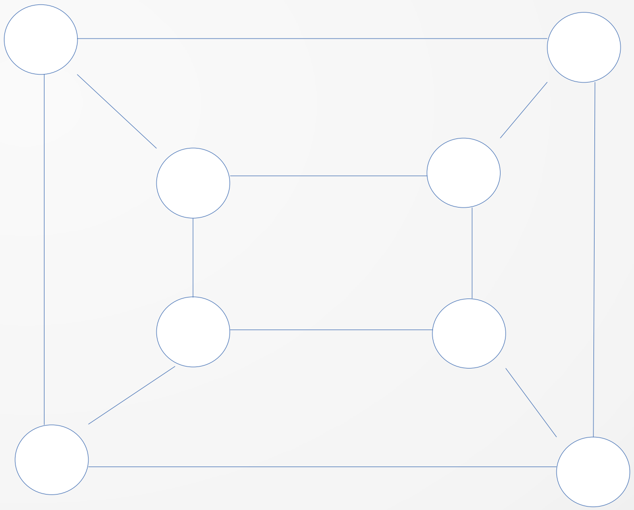

Grafo H plano

# Planaridad

**Ejemplo.** ¿El siguiente grafo G es plano?.



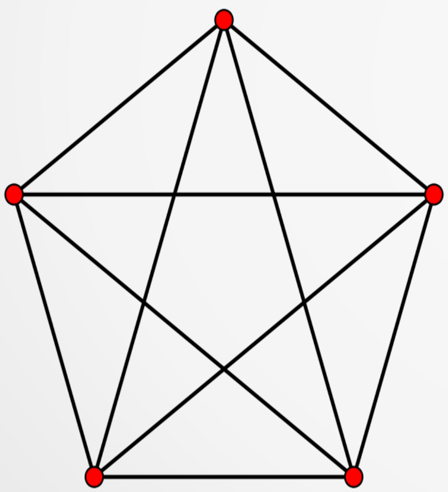
G

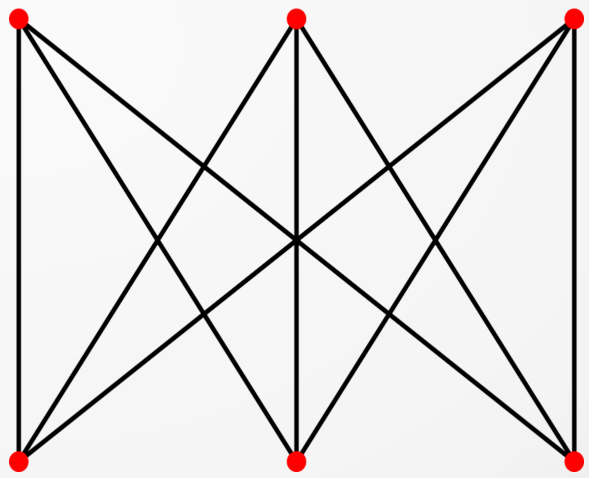


H

# Planaridad

**Ejercicios.** Determina si el grafo $K_5$ y $K_{3,3}$ son planos.





# Criterios para determinar si un grafo es plano.

Dado un grafo de $n$ vértices y $e$ el número de aristas, es posible determinar si el grafo es plano o no, utilizando los dos teoremas siguientes:

**Teorema 1.** Si $n \geq 3$ entonces $e \leq 3n - 6$

**Teorema 2.** Si $n > 3$ y no existen ciclos de longitud 3, entonces $e \leq 2n - 4$

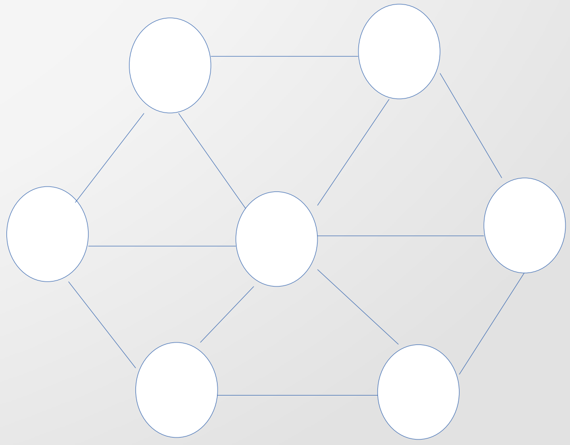
El grafo $K_{3,3}$, por ejemplo, tiene 6 vértices, 9 aristas y ningún ciclo de longitud 3. Por el teorema 2, no puede ser plano.

Estos teoremas solamente pueden ser usados para probar que el grafo no es plano, pero no que sea plano.

# Circuito de Euler y Hamilton

¿Podemos movernos por las aristas de un grafo comenzando en un vértice y volviendo a él después de haber pasado por cada arista del grafo exactamente una vez?

¿Podemos desplazarnos por las aristas de un grafo comenzando en un vértice y volviendo a él después de haber visitado cada vértice del grafo exactamente una vez?



# Circuito de Euler y Hamilton

Aunque estas preguntas parecen similares:

- La primera de ellas que pregunta si el grafo contiene lo que se llama un ***circuito euleriano,*** puede resolverse fácilmente para cualquier grafo.

- Mientras que la segunda cuestión, de si el grafo contiene o no lo que se llama un ***circuito hamiltoniano,*** es bastante difícil de resolver.

# Caminos y circuitos Eulerianos

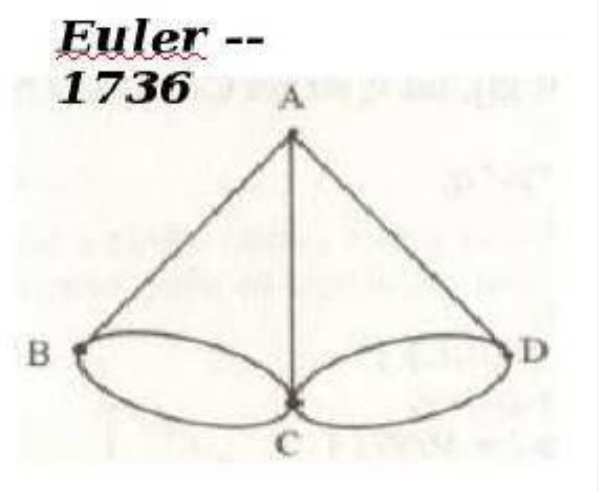
La ciudad de prusina de Konigsberg (que hoy día se llama kaliningrado y forma parte de Rusia) estaba dividida en cuatro partes por los dos brazos en los que se bifurca el río Pregel. Siete puentes conectaban entre sí estas regiones en el siglo XVIII. La siguiente figura ilustra las regiones y los puentes.

# Caminos y circuitos Eulerianos

Los habitantes de Konigsberg solían dar largos paseos por la ciudad los domingos. Hubo quien se preguntó si sería posible comenzar el paseo en algún sitio de la ciudad, atravesar todos los puentes sin cruzar ninguno dos veces y regresar al punto de partida.

# Caminos y circuitos Eulerianos

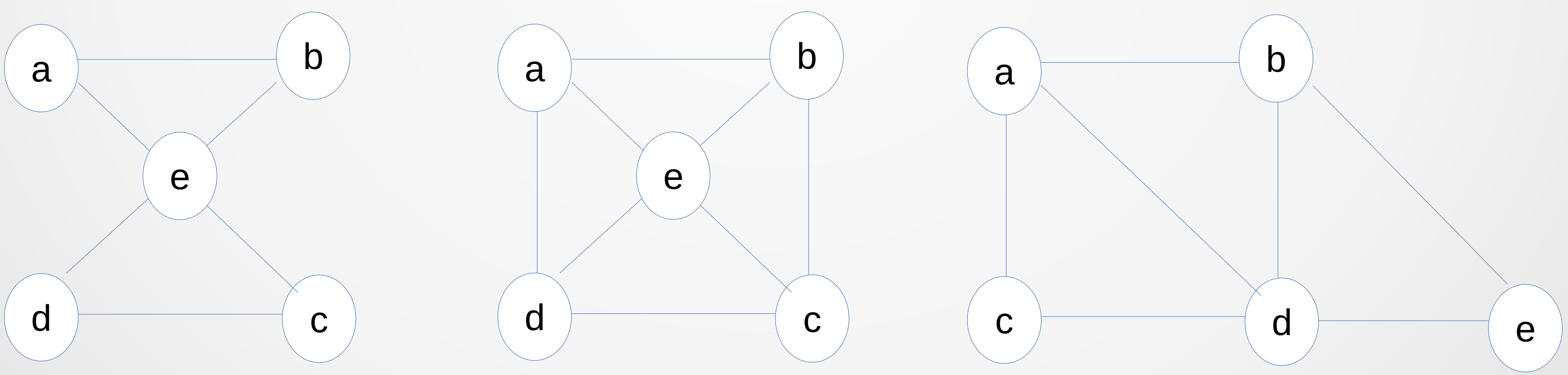
El matemático suizo Leonhard Euler resolvió este problema. Su solución publicada en 1736, es posiblemente la primera ocasión en que se utilizó la teoría de grafos.




**Definición.** Un ***circuito euleriano*** de un grafo *G* es un circuito que contiene a todas las aristas de *G*. Un ***camino euleriano*** es un camino que contiene a todas las aristas de *G*.

# Caminos y circuitos Eulerianos

¿Cuáles de los grafos no dirigidos de las siguientes figuras contienen un circuito euleriano? Entre aquellos que no lo contienen, ¿Cuáles contienen un camino euleriano?




$G_1$ $G_2$ $G_3$

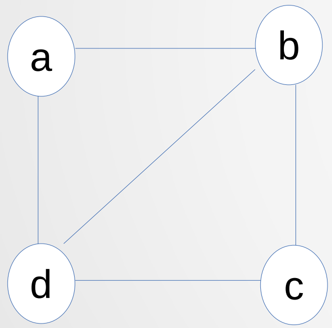
# Caminos y circuitos Eulerianos

- **Teorema.** Un multigrafo conexo contiene un circuito euleriano si, y sólo si cada uno de sus vértices tiene grado par.

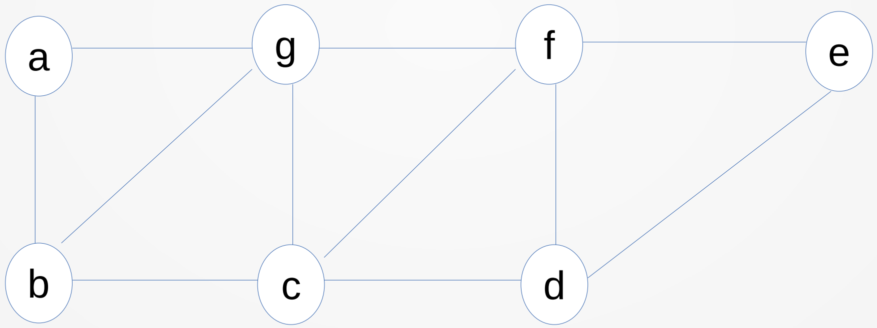
- **Teorema.** Un multigrafo conexo contiene un camino euleriano, pero no un circuito euleriano, si, y sólo si, tiene exactamente dos vértices de grado impar.

# Caminos y circuitos Eulerianos

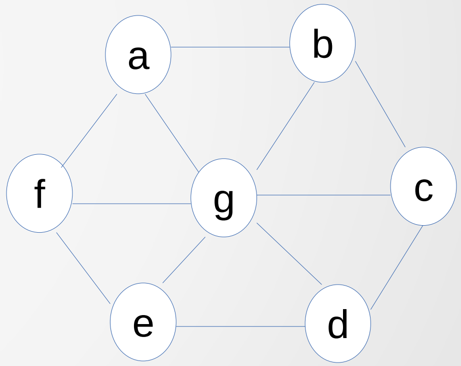
¿Cuáles de los grafos no dirigidos de las siguientes figuras contienen un camino euleriano?




$G_1$




$G_2$




$G_3$

Centro Universitario de los Valles

# Club de ACM

Tema: Teoría de grafos y árboles