

ANÁLISIS DE DOS SISTEMAS DINÁMICOS

MODELACIÓN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y MECATRÓNICA
HUGO ANDRES DIAZ BERNAL
DIEGO RICARDO HUERTAS
19/04/2015

Abstract

En el presente documento se mostrará el análisis y la simulación de un actuador de micro-chorro el cual trabaja con un gas que se encuentra al interior de una recámara en donde hay una membrana que actúa como un pistón generando, de esta forma, cambios de estado en la masa del interior de la recámara que en el tiempo sigue patrones oscilatorios. Además de la anterior práctica, se analizará un sistema electro-mecánico que permite el accionamiento para el llenado de un tanque de agua por medio de un circuito RL y un servomecanismo que recibe una señal sensada del nivel del agua y convierte esta información en la apertura de una válvula a la entrada del tanque.

Index Terms

Micro-chorro, sistemas sensibles, electromecánica, actuador.

I. ACTUADOR DE MICRO CHORRO

Introducción

Un actuador de chorro genera una corriente de chorro sintético, caracterizado por una serie de vórtices sucesivos que pueden ser usados para arrastrar efectivamente el fluido adyacente.¹ Los flujos de chorro varían dependiendo de la velocidad, la densidad y la viscosidad del fluido (número de Reynolds y número de Mach), así como también del diámetro del orificio de salida. Los actuadores de chorro son estudiados en la actualidad para la industria de la aviación, para mejorar el arrastre, incrementar la maniobrabilidad, controlar la estela (stall) y reducir ruido.

A. Estado del arte

Existen varios trabajos e investigaciones acerca de los actuadores de chorro, como los que se muestran a continuación:

Design of Diaphragm Actuator Based on Ferromagnetic Shape Memory Alloy Composite: Este trabajo

investigativo, hecho por Yuanchang Liang, M. Zaya y Yasuo Kuga para la universidad de Washington, Seattle, busca diseñar un diafragma para un actuador basado en una aleación ferromagnética con memoria de forma, la cual está compuesta por un hierro dúctil ferromagnético y una aleación superelástica de NiTi, este actuador es un primer diseño que será usado posteriormente para tecnología de flujo activo en alas de aviones. [1]

An Experimental Study on Active Flow Control Using Synthetic Jet Actuators Over S908 Airfoil: Este estudio, creado por M Gul, O Uzol y S Akmandor del departamento de Ingeniería Aeroespacial de la Universidad de METU, en Ankara Turquía, investiga el efecto de la excitación periódica de un actuador de chorro controlado individualmente sobre la dinámica de flujo dentro de regiones separadas y fijadas de la capa límite sobre la superficie de un modelo del ala en 2D que tiene el perfil de un S908. Estos experimentos se llevaron a cabo en túnel de viento. [2]

Coupled fluid-Structural Characteristics of Actuators for Flow Control, por Ruben Rathnasingham y Kenneth

¹Texto tomado de "Synthetic jet actuator and applications thereof" disponible en: <http://www.google.com/patents/US5758823>

Breuer del MIT, 1997. En este artículo explican y analizan el modelado de un actuador de micro-chorro con una membrana rígida que oscila e su frecuencia de resonancia. Los autores modelan el fluido consierádolo un gas ideal, isotérmico y con fuerza ejercida sobre la membrana como $Gsen(\omega t)$ de donde, finalmente, resultan cinco ecuaciones diferenciales acopladas entre sí. Este modelo fue comparado con resultados experimentales y predijo satisfactoriamente las tendencias en el comportamiento de la membrana del actuador. [3]

B. Presentación del modelo

El modo de operación de tal dispositivo es bastante simple: Algún mecanismo de actuación vertical se conecta a un diafragma (o pared móvil) ubicado en la parte inferior de una cámara plenum. El diafragma se desplaza verticalmente, lo cuál genera cambios en el volumen de la cámara plenum (o simplemente plenum, cámara interna conteniendo el gas a inyectar o extraer). Cuando el diafragma se desplaza hacia arriba, el volumen de la cámara se reduce, elevando la presión p dentro de la cámara plenum, lo que a su vez produce un chorro que sale eyectado de la cámara hacia la atmósfera circundante a través de la ranura de salida (la apertura denominada micro slot en la Figura 1).

Si el mecanismo de actuación aplicado al sistema es oscilatorio, el diafragma oscilará verticalmente (como se indica en el esquema de la Figura 1a) produciendo un flujo alternante de entrada y salida. Este modo de operación se denomina actuador de chorro sintético. Otro tipo de actuación consiste en un movimiento unidireccional rápido del diafragma seguido de un retroceso lento del mismo. De esta forma el diafragma únicamente se deflecta hacia arriba para producir un incremento fuerte de la presión y así generar una especie de chorro pulsado. Este último modo de operación se suele denominar como actuación tipo 'salto de presión' (pressure-jump actuation).

En cualquiera de los modos de operación dos procesos diferentes están ocurriendo al interior de la cámara, y los cuales sin embargo están intrínsecamente acoplados. Por un lado, la rata de flujo másico a través de la ranura afecta la presión en la cámara, mientras que la presión al interior de la cámara afecta las ratas de flujo másico fluyendo a través de la ranura. Ambos procesos dependen mutuamente el uno del otro. Es importante considerar que las velocidades de flujo dentro de la cámara son lo suficientemente lentas como para ser ignoradas (comparadas con las ratas de flujo en la ranura).

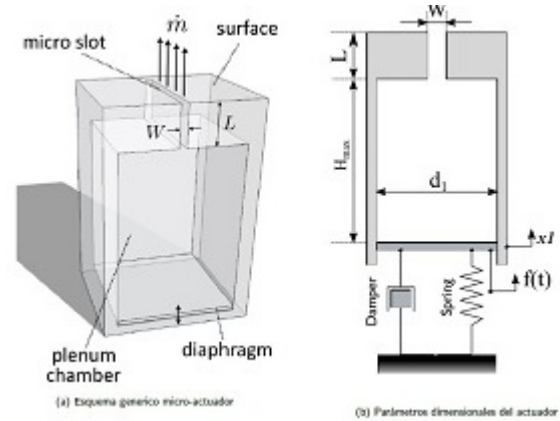


Figure 1. Parámetros Actuador de chorro

Condiciones generales del diseño

1. El gas almacenado se considera un gas ideal.
2. Todo el sistema es asumido isotérmico.
3. La presión externa es la presión atmosférica.

Parámetros y consideraciones

- El plenum es un cavidad de sección transversal cuadrada de lado d_1 , y con volumen máximo dado por $V = d_1^2 H_{max}$
- La ranura tiene un ancho W y una profundidad d_1 que abarca toda la cámara plenum.
- El sistema de actuación es efectuado mediante la fuerza $f(t)$, que acciona un sistema de amortiguador-resorte conectado a la membrana o diafragma.

Variables del modelo:

Variable independiente: Tiempo (t)

Variable dependiente: Posición de la membrana (x_1), velocidad de la membrana (x_2), presión interna (x_3), masa del gas en la cámara plenum (x_4)

Variables que no intervienen en el modelo:

Densidad del gas: No es una variable ni un parámetro pues ésta depende de otras variables como la masa (x_4) y la posición de la membrana (x_1)

Diferencia de Temperatura: para simplificar el modelo se tomará un sistema isotérmico. El gas dentro de la cámara no se calienta ni se enfría.

Fuerza de Fricción: En realidad existen dos fuerzas de fricción a los costados de la membrana, sin embargo no serán tenidas en cuenta ya que su magnitud es despreciable respecto a las demás fuerzas.

C. Análisis del problema

Para el actuador de chorro se analizan tres sistemas: El de la membrana, el gas y la ranura.

De ahora en adelante se usará la siguiente notación para las variables y parámetros del sistema:

x_1 = Posición

x_2 = Velocidad

x_3 = Presión interna

x_4 = Masa del gas

Haciendo diagrama de cuerpo libre para la membrana y utilizando las leyes de Newton, sumatoria de fuerzas en este caso, obtenemos la siguiente ecuación

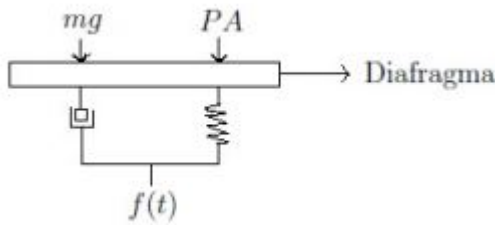


Figure 2. Diagrama de cuerpo libre de la membrana

$$\sum F_y = f(t) + W + F_a + F_r + A(P_{int} - P_{ext}) = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

donde,

$f(t)$: es la fuerza externa que es la que excita el resorte y el amortiguador

W : es el peso de la membrana

F_a : es la fuerza ejercida por el amortiguador

F_r : es la fuerza ejercida por el resorte

A : es el área de la membrana

P_{int} : es la presión que hay dentro de la cámara plenum debido al gas

P_{ext} : es la presión atmosférica

m : es la masa del gas

Para el planteamiento del modelo $f(t)$ se considera de dos tipos, oscilatoria y pulsante, en el análisis de dos casos diferentes, es decir:

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} F & \text{si } t = 2n \\ 0 & \text{si } t = 2n + 1 \end{cases}$$

Dividiendo toda la ecuación (1) entre la masa y reemplazando las constantes del resorte y del amortiguador k y c respectivamente, además de hacer util los cambios

de variables en la ecuación (1) y de hacer siguiente cambio de variable para reducir el orden de la ecuación, tenemos

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g + \frac{c}{m}x_2 + \frac{k}{m}x_1 + \frac{A}{m}(x_3 - P_{ext}) + \frac{f(t)}{m} \quad (3)$$

Con condiciones iniciales:

$$t = 0$$

$$f(t) = 0$$

$$\frac{dx_1}{dt} = 0$$

$$x_1 = 0$$

Utilizando la ecuación de los gases ideales en terminos de las variables ya definidas podemos decir que:

$$x_3 V = x_4 R T$$

Derivando a ambos lados de la ecuación,

$$V \frac{dx_3}{dt} + x_3 \frac{dV}{dt} = R T \frac{dx_4}{dt} \quad (4)$$

El volumen de la cámara está dado por los parametros del modelos como:

$$V = d_1(H_0 - x_1)$$

Derivando la expresión anterior

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(d_1^2 - H_0)}{dt} - d_1^2 \frac{dx_1}{dt} = -d_1^2 \frac{dx_1}{dt}$$

Reemplazando la ecuación anterior en la ecuación (4) y despejando el cambio de la presión en el tiempo tenemos:

$$d_1^2(H_0 - x_1) \frac{dx_3}{dt} - x_3 d_1^2 \frac{dx_1}{dt} = R T \frac{dx_4}{dt}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{R T \frac{dx_4}{dt} + x_3 x_2 d_1^2}{d_1^2(H_0 - x_1)} \quad (5)$$

Ahora, utilizando la ecuación de Hagen-Poiseuille,

$$\bar{V} = \frac{\Delta P D_H^2}{32 L \mu}$$

Y teniendo en cuenta la siguiente ecuación, podemos relacionar la ecuación de Hagen-Poiseuille para quitar el término de velocidad,

$$\dot{m}_{ranura} = \rho \bar{V} A = \rho \left(\frac{\Delta P D_H^2}{32 L \mu} \right) d_1 W$$

Como la diferencia de presiones es igual a la presión externa menos la presión interna, tenemos

$$\Delta P = P_{ext} - x_3$$

Expresando ρ como masa dividido volumen, se obtiene la siguiente ecuación para la masa,

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{x_4}{d_1^2(H_0 - x_1)} \left(\frac{(P_{ext} - x_3)D_H^2 d_1 W}{32L\mu} \right) \quad (6)$$

Con el anterior análisis matemático del modelo podemos resumir que nuestras ecuaciones fundamentales y condiciones iniciales que definen el sistema se encuentran consignadas en el siguiente cuadro:

Ecuaciones que definen el Modelos
$\frac{dx_1}{dt} = x_2$
$\frac{dx_2}{dt} = g + \frac{c}{m}x_2 + \frac{k}{m}x_1 + \frac{A}{m}(x_3 - P_{ext}) + \frac{f(t)}{m}$
$\frac{dx_3}{dt} = \frac{RT \frac{dx_4}{dt} + x_3 x_2 d_1^2}{d_1^2(H_0 - x_1)}$
$\frac{dx_4}{dt} = \frac{x_4}{d_1^2(H_0 - x_1)} \left(\frac{(P_{ext} - x_3)D_H^2 d_1 W}{32L\mu} \right)$

Variable	Condición inicial
t	0seg
x_1	0m
x_2	0m/s
x_3	101000Pa
x_4	0.009kg

D. Análisis y resultados de simulaciones

Teniendo en cuenta las cuatro ecuaciones diferenciales que se definieron anteriormente, las cuales rigen los cambios en el tiempo de la posición (x_1), velocidad (x_2), presión (x_3) y masa (x_4), se implementó un modelo matemático computacional, que está basado en el algoritmo de Runge Kutta de cuarto orden. Debido

a que éste representa bajo consumo computacional y es bastante preciso, además, las predicciones se aproximan al modelo real.

Método numérico Runge Kutta 4 orden: El método de Runge Kutta 4, conocido como RK4 usa un paso de tiempo en un intervalo establecido. Este método es razonable, simple y robusto y es un buen candidato para soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales cuando existe una rutina de paso de tamaño de adaptación inteligente.²

$$x_{n+1} = x_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

donde,

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + 0.5h, y_n + 0.5k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + 0.5h, y_n + 0.5k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

Para el modelo del actuador de micro-chorro se usa RK4 pero extrapolado para cuatro variables, debido a que nuestro modelo a pesar de las suposiciones, aún sigue considerando bastantes variables que lo hacen mas robusto.

Para este caso, se debe hacer un análisis de sensibilidad, con el objetivo de hallar los puntos de equilibrio en donde el sistema dinámico puede ser atraído o repulsado según sea el caso de las soluciones de tal sistema de ecuaciones. Debido a la complejidad de la implementación del Jacobiano, para este caso lo que se procede a desarrollar es un análisis de forma experimental para encontrar el punto de equilibrio.

A continuación se muestran las gráficas obtenidas por medio del software GNUPLOT.

Las graficas que presentadas nos muestran que el comportamiento de todas las variables implicadas en el estudio del modelo generan comportamientos oscilatorios, lo cual era una aseveración que teníamos como predicción, debido a que este dispositivo implica un movimiento oscilatorio y este resultado también genera que las variables que están relacionadas con el movimiento de la membrana también reaccionen de forma similar, para el caso en que tanto la fuerza de amortiguación y del resorte son de orden lineal.

Como se puede observar en la gráfica 3(a), la membrana sube cuando el gas es eyectado de la cámara plenum y vuelve a bajar succionando gas

²Texto tomado de "mathworld.wolfram.com/Runge-KuttaMethod.html"

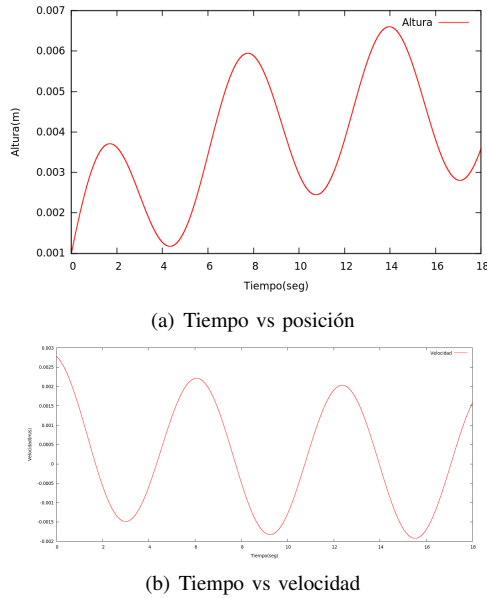


Figure 3. Gráficas de posición y velocidad de la membrana

nuevamente, ejerciendo fuerzas en el amortiguador y el resorte. Se ve claramente cómo su posición cambia a lo largo del tiempo siguiendo un patrón sinusoidal, como era de esperarse. Así mismo, la velocidad sigue una secuencia, en donde su velocidad es mínima cuando la membrana se encuentra ya sea en la parte más alta de la cámara o al inferior de la misma.

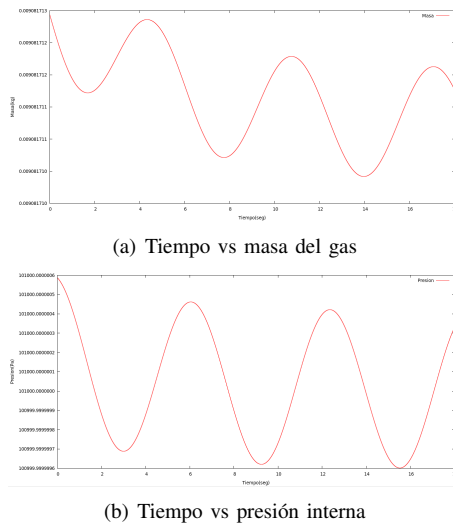


Figure 4. Gráficas de la masa y la presión del gas respecto al tiempo

En la Figura 4 se muestra el cambio de la masa del gas que se encuentra dentro de la cámara, se puede notar que se parte de una masa inicial e inmediatamente ésta empieza a disminuir, es decir, el diafragma se encontraba en la parte inferior de la cámara inicialmente y luego empezó a subir,

por esta razón comenzó un flujo másico en la ranura y una pérdida de masa dentro de la cavidad. Posteriormente, cuando la membrana llega a su altura máxima (cantidad mínima de masa en la cámara), empieza a devolverse y a succionar gas nuevamente, es por eso que la masa aumenta de nuevo. Por otro lado, en la gráfica 4(b) se puede observar que la presión, así como la velocidad, la posición y la masa, sigue una curva oscilatoria debido al continuo succionamiento-eyeción de gas dentro de la recámara.

Cuando cambiamos los valores de K_2 y C_2 , con el objetivo de que se tengan relaciones cuadráticas tanto en el resorte como en el amortiguador los resultados que tenemos en términos de variación no son muy significativos y se consignan en las siguientes graficas

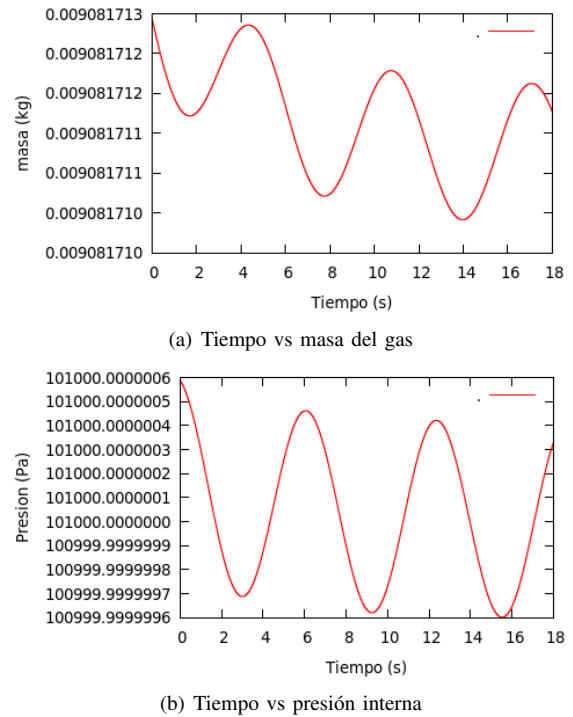


Figure 5. Gráficas de la masa y la presión del gas respecto al tiempo para Modelo cuadrático

Lo que podemos decir de las figuras 5 respecto de las 4 es que a pesar de la modificación que se realiza en cuanto a los factores cuadráticos los cuales son $K_2 = 1000$ y $C_2 = 2000$ las soluciones no varían.

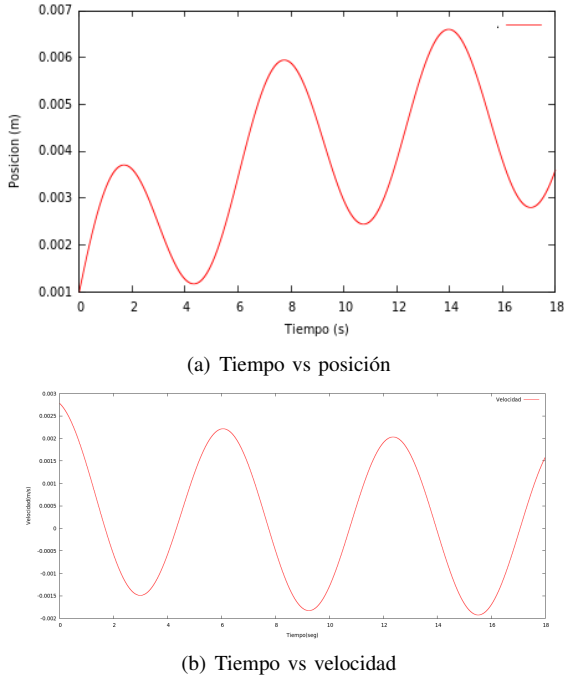


Figure 6. Gráficas de posición y velocidad de la membrana para Modelo cuadrático

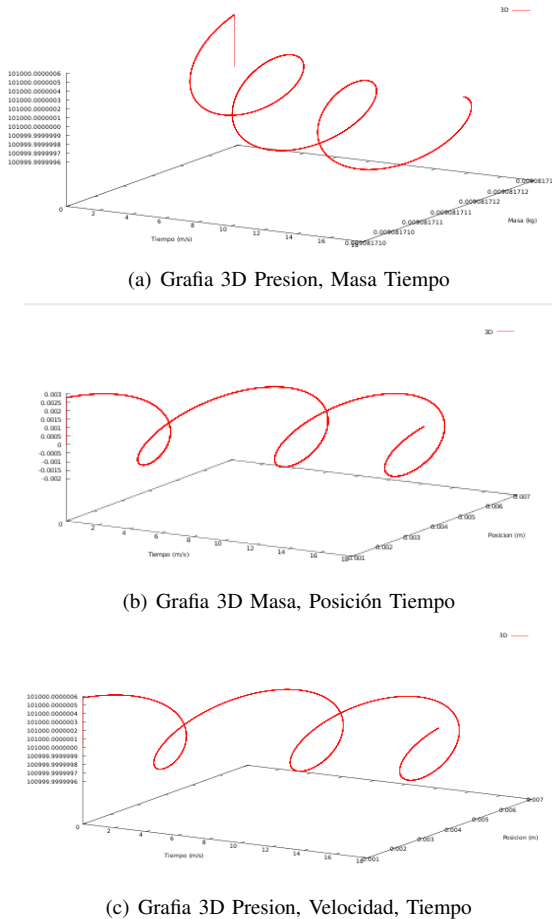


Figure 7. Graficas en 3D

E. Conclusiones

En este documento se estudió un actuador de micro chorro para un fluido considerado como un gas ideal. Se tomaron algunas consideraciones descritas anteriormente y se modeló usando Fortran 90. Como era de esperarse, para un sistema que oscila en el tiempo, sus representaciones gráficas son parecidas a una curva sinusoidal. El hecho de que exista esa inyección-eyeción de masa genera cambios en el tiempo de flujo másico, presión y velocidad.

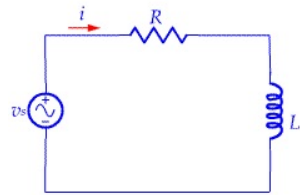
A continuación se consignan algunas regularidades que se notaron de los resultados:

- El comportamiento de las variables implicadas en este modelo sigue un comportamiento cuasi sinusoidal, eso se puede evidenciar en el comportamiento de los datos y las graficas.
- Inicialmente se pensaba que los cambios en las variables eran de un orden mayor al esperado, hecho por el cual se tuvo problemas con la programación del código, ya que los cambios ocurrían después de la decima cifra después de la coma en cada una de las variables.
- Después de la experimentación relacionada en cuanto a la variación de algunos parámetros de entrada podemos decir el sistema no es muy sensible, ya que las soluciones no cambian sustancialmente en cada uno de los casos.
- Los términos del sistema k_2 y c_2 correspondientes al resorte y amortiguador respectivamente, fueron variados según las recomendaciones dadas (un pequeño porcentaje de k_1 y c_1 , por ejemplo, 5 por ciento), así como con valores absurdos ($k_2 = 1000$ y $c_2 = 2000$), sin embargo, no se notó ningún cambio en los resultados ni en las gráficas. Por lo que se concluye que éstos términos son despreciables y no afectan al sistema en absoluto.

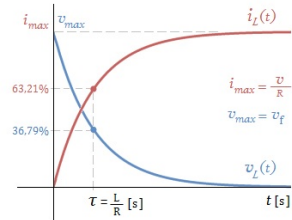
II. SISTEMA DE CONTROL DEL NIVEL DEL LLENADO DE UN TANQUE

Introducción

En el campo de la ingeniería es de vital importancia el control sistemas que manejan fluidos como material de trabajo, por tal motivo en la actualidad existen muchos sistemas electromecánicos que permiten desarrollar tareas de control simples como lo es el llenado de un tanque por medio de un circuito RL y un servo-motor. A continuación se muestran las curvas características de un circuito RL junto con su circuito equivalente. La línea azul representa la respuesta exponencial del circuito y la línea roja representa la corriente en el tiempo, donde después de 5τ se estabiliza.



(a) Circuito RL básico



(b) Curva característica circuito RL

Figure 8. Circuito RL y curva característica del mismo

A. Presentación del modelo

Se requiere diseñar un sistema que controle la altura de un fluido dentro de un tanque. El sistema hidráulico de llenado del tanque consiste en una entrada del líquido de operación regulada por una válvula conectada a un servo-motor controlada por un circuito eléctrico como se muestra en la figura.

En este modelo se asumirá una simplificación del sistema servomotor/válvula tal como se presenta a continuación.

- El circuito sólo acciona el giro del servomotor (y por lo tanto de la válvula) en una dirección, la de apertura de la válvula.

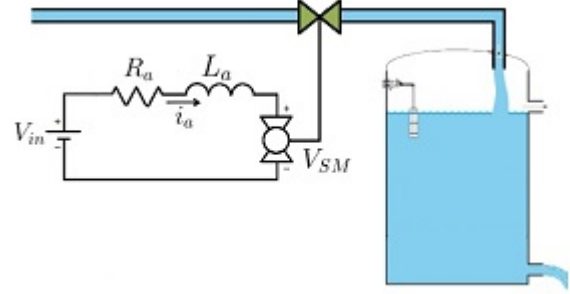


Figure 9. Esquema del sistema de control del nivel de llenado de un tanque

- La relación entre la caída de voltaje en el servomotor y la velocidad de giro de la válvula está dada por

$$V_{SM}(t) = K_{SM} \frac{d\theta}{dt} \quad (7)$$

- Primero consideraremos que el servomotor es un elemento puramente electro-resistivo con resistencia R_{SM}
- Cuando no existe paso de corriente por el servomotor, éste permite el retroceso de la válvula hacia su posición inicial.
- El retroceso de la válvula se realiza de manera mecánica, y a una velocidad angular negativa directamente proporcional al ángulo de giro.
- Se considerarán las siguientes relaciones como modelo inicial para la velocidad de giro de la válvula

$$\frac{d\theta}{dt}(t) = \frac{R_{SM}}{K_{SM}} i_a \left(1 - \frac{\theta}{2\pi} \right) \quad (8)$$

$$\frac{d\theta}{dt}(t) = \frac{R_{SM}}{K_{SM}} i_a \left(1 - \frac{\theta}{2\pi} \right) - k_{\theta} \theta \quad (9)$$

Donde la ecuación (8) es un modelo que considera la válvula sin retroceso mecánico, mientras que la (9) sí lo considera. Para este modelo matemático utilizaremos la ecuación (9)

- La relación entre el movimiento de la válvula y caudal de flujo pasando a través de la misma es de carácter lineal.

Condiciones generales del diseño del tanque:

1. El tanque almacena agua en condiciones estándar
2. El tanque es de sección transversal constante y circular
3. El nivel de llenado debe estar siempre entre unos valores mínimo (h_{min}) y máximo (h_{max})
4. Los detalles exactos del orificio de descarga se desconocen. Sin embargo, valores experimentales

han sido determinados para el caudal en función del nivel del líquido. Estos son presentados en la siguiente tabla

Altura (H), cm	Caudal (Q), l/min
0.12	0.4712
0.24	0.6896
0.36	0.8543
0.48	1.0125
0.60	1.1444
0.72	1.3402
0.84	1.4107
0.96	1.5381

Parámetros y consideraciones

Lo siguientes datos representan los argumentos a tener en cuenta en el desarrollo del modelo

- El voltaje DC es de 12 V
- La resistencia del circuito de control es de 10 Ω
- La inductancia del circuito es de 150 H
- Parámetros del servomotor: $R_{SM} = 0.0045\Omega$ y $K_{SM} = 0.9V \cdot srad^{-1}$
- Máximo caudal posible: 100 L/min
- Área trnasversal del tanque: 0.7 m^2
- Volumen total del tanque: 2 m^3

Variables del modelo:

Variable independiente: tiempo

Variable dependiente: nivel de altura del fluido dentro del tanque (H) y corriente en el circuito (i_a)

Variables que no dependen del modelo:

Temperatura: Los cambios de temperatura en el agua dentro del tanque son despreciables, por lo tanto se considerará siempre una tempratura constante, sin embargo, esta variable no es tenida en cuenta en ninguna de las ecuaciones que desarrollan el modelo matemático.

Presión: Se considera el tanque abierto a la atmósfera.

Viscosidad del fluido: es importante para determinar el régimen de flujo, pero en este caso no se tendrá en cuenta ya que las paredes de la tubería y el tanque se consideran lisas e ideales.

Tensión superficial: No es necesario en este modelo, pues no vamos a considerar factores energéticos que contribuyan a cambios en la superficie del líquido.

B. Análisis del problema

El modelo que vamos implementar se rige por la ecuación (9) para una válvula con retoceso mecánico. Supondremos que válvula funciona como un mecanismo de tornillo para lo cual el rango de apertura de la misma se encuentra entre $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Para entender el sistema debemos tener en cuenta los caudales de entrada y salida del tanque Q_{in} y Q_{out} respectivamente.

Vamos a considerar también una relación lineal entre el caudal y el ángulo de apertura de la válvula, así

$$Q_{in}(\theta) = C\theta$$

Donde la constante C la podemos obtener aplicando valores iniciales como $Q_{in}(0) = 0$ y $Q_{in}(2\pi) = Q_{max}$

$$Q_{in}(\theta) = \frac{Q_{max}}{2\pi}\theta \quad (10)$$

Para finalizar el análisis del sistema hidráulico, procedemos a usar los valores experimentales de la tabla 1. Con estos realizamos una regresión logarítmica la cual nos arroja una relación de la siguiente forma

$$Q_{out} = ah^b$$

Donde los valores son: $a = 3.6321 \times 10^{-4}$ y $b = 0.5722$,

$$Q_{out} = 3.6321 \times 10^{-4} h^{0.5172}$$

Análisis del volumen de control del tanque: Para desarrollar este análisis nos basaremos en la ley de continuidad, la cual dice

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \sum \dot{m}_{in} - \sum \dot{m}_{out} \\ &= \rho v_{in} A_{in} - \rho v_{out} A_{out} \end{aligned}$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho(Q_{in} - Q_{out}) \quad (11)$$

Por otro lado, se sabe que

$$\rho Ah = m$$

$$\rho A \frac{dh}{dt} = \frac{dm}{dt}$$

Reemplazando la ecuación anterior tenemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} \left(\frac{Q_{max}}{2\pi} \theta - ah^b \right) \quad (12)$$

Análisis del circuito: La ecuación diferencial que rige el circuito RL es la siguiente

$$V_{in} = i_a R_a + L \frac{di_a}{dt} + K_{SM} \frac{d\theta}{dt}$$

Luego,

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_{in}}{L} - \frac{i_a R_a}{L} - \frac{K_{SM} d\theta}{L dt}$$

Si la fuente de entrada es de la forma $V_{in}(t) = V_{in} \sin(\omega t) + V_{in}$

Con lo cual podemos decir que nuestra ecuación se convierte en en donde $V_{in}(t)$ ya esta definido

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_{in}(t)}{L} - \frac{i_a R_a}{L} - \frac{K_{SM} d\theta}{L dt} \quad (13)$$

Luego nuestro sistema de ecuaciones diferenciales (9), (13) y (12) esta dado por:

Ecuaciones que definen el Modelos	
$\frac{d\theta}{dt}(t) = \frac{R_{SM}}{K_{SM}} i_a \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) - k_{\theta} \theta$	
$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} \left(\frac{Q_{max}}{2\pi} \theta - ah^b \right)$	
$\frac{di}{dt} = \frac{V_{in}(t)}{L} - \frac{i_a R_a}{L} - \frac{K_{SM} d\theta}{L dt}$	

Variable	Condición inicial
t	0seg
h	0m
i	0A
θ	0rad

C. Análisis y resultados de simulaciones

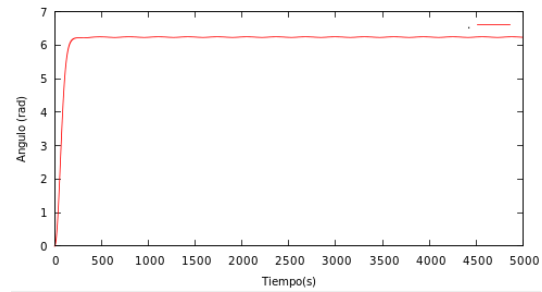
Cabe aclarar que para el desarrollo de este modelo se utilizo la misma herramienta que en el ejercicio de aplicación del problema del micro-choro la cual se refiere al método numérico de Runge Kutta de cuarto orden, este ha sido elegido por las mismas razones, menor gasto computacional y facilidad de programación.

Dentro de nuestras predicciones lo que esperamos para el modelo desarrollado es que en el instante inicial el tanque se va a empezar llenar, de forma tal

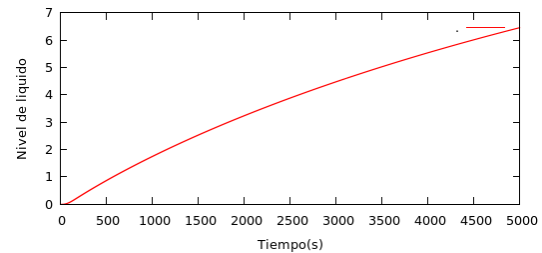
que la altura va aumentar, además tenemos pendiente que nuestra válvula de apertura iniciara cerrada y posterior a eso empezara abrir hasta su apertura máxima, posterior a eso lo que esperamos es que el sensor detecte el nivel del agua, luego envié una señal al servo para que se empieza cerrar la válvula y de esta forma empiece a bajar el nivel de la altura del agua en el tanque, para terminar en que el sistema se vuelva oscilatorio dependiendo del nivel de la altura de agua.

En el anexo B se muestra el código utilizado para resolver las tres ecuaciones diferenciales asociadas a este modelo, se usó el método de Runge Kutta de cuarto orden y se estimó la solución para 5000 segundos.

A continuación se muestran las gráficas obtenidas de la simulación



(a) Ángulo de apertura válvula vs Tiempo

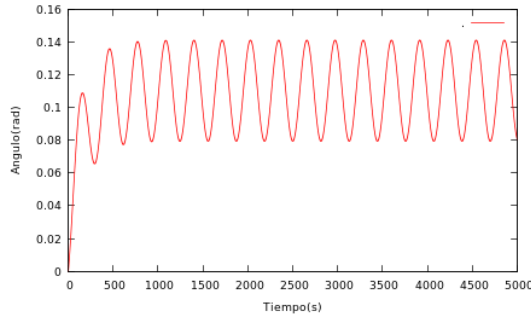


(b) Altura del agua vs Tiempo

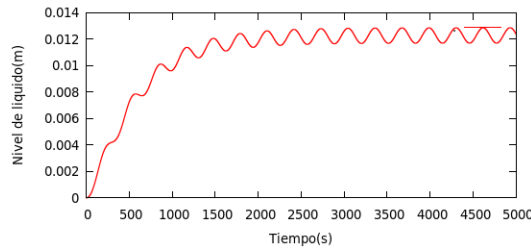
Figure 10. Gráficas para $k_{\theta} = 2 \cdot 10^{-4}$

Como se puede observar en la Figura 10 Cuando se abre la válvula totalmente hay paso de caudal máximo, cuando esto sucede, el nivel de agua dentro del tanque empieza a subir, hasta que llega a un sensor, este sensor detecta el agua y hace que la válvula se empiece a cerrar para disminuir el caudal, a medida que disminuye el caudal baja el nivel del agua y el sensor vuelve a detectar un nivel mínimo permitido de agua por lo que la válvula se abre totalmente de nuevo.

Es por este funcionamiento que la gráfica tiene un disparo hasta que alcanza la apertura máxima de la válvula luego, se mantiene constante indefinidamente dentro de los rangos de altura establecidos y limitados por los sensores. Esta estabilidad (ideal) se logra para un valor de $k_\theta = 2 \cdot 10^{-4}$, sin embargo se puede ver que para este mismo valor la altura del agua crece hasta "desbordar el tanque" lo que significa un problema, pues esta altura, al igual que la válvula, debe quedar después de un tiempo casi constante.



(a) Ángulo de apertura válvula vs Tiempo

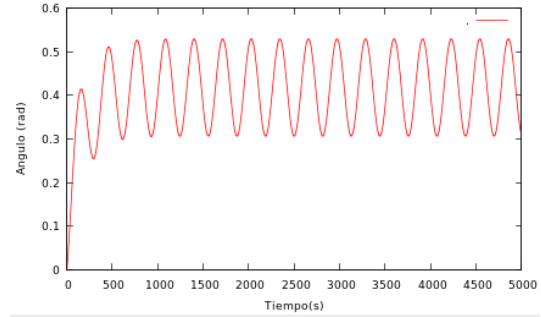


(b) Altura del agua vs Tiempo

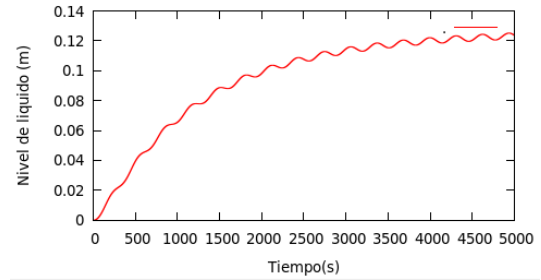
Figure 11. Gráficas para $k_\theta = 2.0$

Cuando el valor de k_θ se aumenta a 2.0 se puede evidenciar una estabilidad en la altura del tanque, es decir, un funcionamiento ideal, pero como se ve en la gráfica 11(a), los valores para el ángulo de apertura de la válvula se hacen extremadamente pequeños. La gráfica (b) de la figura 11 muestra que en un principio la válvula está cerrada y por lo tanto el nivel de agua dentro del tanque es cero, sin embargo, cuando la válvula se abre, el tanque se empieza a llenar hasta llegar a su punto máximo el cual es detectado por un sensor.

En este punto el sensor obliga a la válvula a cerrar, produciendo una disminución en el caudal de entrada y a su vez en el nivel del agua del tanque, un instante después, el agua ha disminuido y se encuentra en un punto mínimo, por lo que es detectado de nuevo por el sensor que hace que la válvula se abra de nuevo, este comportamiento se repite a lo largo del tiempo. Ahora, tomando un valor de k_θ intermedio, es decir



(a) Ángulo de apertura válvula vs Tiempo



(b) Altura del agua vs Tiempo

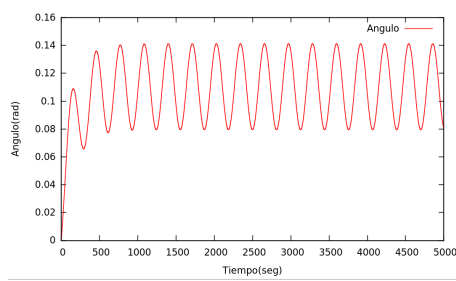
Figure 12. Gráficas para $k_\theta = 0.5$

0.5, la altura del agua en el tanque no están estables como en la figura anterior pero los valores del ángulo de apertura de la válvula son un poco más coherentes. Sin embargo podemos decir que para el caso en el $k_\theta = 0.5$ los resultados de la modelación son consecuentes con nuestras predicciones además de la coherencia de los conceptos del mismo problema, es decir esta solución se encuentra entre los rangos de las soluciones reales.

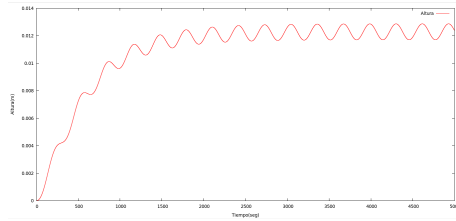
Lo que podemos seguir notando es una pequeña modificación del valor de $k_\theta = 0.2$ causa significativos cambios en los resultados de nuestro modelo, por tal motivo sin hacer análisis de sensibilidad podemos notar que nuestro modelo es sensible a la modificación de k_θ .

También podemos ver como es el comportamiento de las tres variables de forma simultánea en una gráfica que relaciona las tres variables como se muestra a continuación.

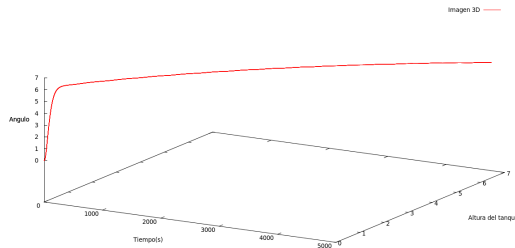
Respecto de las gráficas en 3D podemos decir que en el caso en el que el sistema está estable, se encuentra que los valores no oscilan o convergen hacia algún valor fijo, hecho que se puede notar en cierta forma con las gráficas que tienen valores diferentes de k_θ y se puede apreciar que pareciera que en el tiempo tendieran a converger alrededor de algún valor.



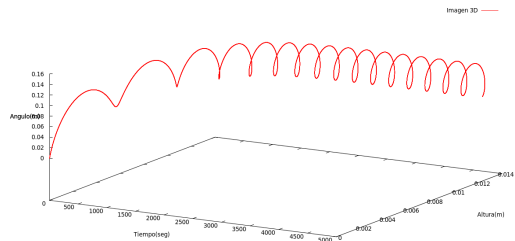
(a) Ángulo de apertura válvula vs Tiempo



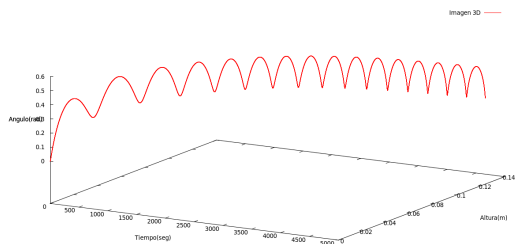
(b) Altura del agua vs Tiempo

Figure 13. Gráficas para $k_\theta = 0.2$ 

(a) Ángulo de apertura válvula, Tiempo, Altura



(b) Ángulo de apertura válvula, Tiempo, Altura



(c) Altura del agua vs Tiempo

Figure 14. Gráficas en 3D para diferentes de k_θ

D. Conclusiones

De acuerdo a las gráficas presentadas anteriormente se deduce que el parámetro k_θ es un factor que afecta gravemente las soluciones, puesto que cuando éste se cambia, genera valores de altura y ángulo bastante diferentes, por ejemplo, para el valor de $k_\theta = 2 \cdot 10^{-4}$ el modelo muestra un comportamiento ideal y práctico para la válvula, sin embargo, no sucede lo mismo para el nivel de altura del agua dentro del tanque, por otro lado, en el caso extremo, para un valor demasiado grande, es decir $k_\theta = 2$, los resultados muestran un comportamiento adecuado en el nivel de líquido pues se mantiene entre los límites máximo y mínimo establecidos, pero los cambios en el ángulo de la válvula son irrisorios.

El k_θ óptimo se halló cambiando éste valor repetidas veces hasta que se encontró un valor que estabilizara las soluciones. El modelado y sus gráficas se ajustan adecuadamente a la realidad, puesto que la aproximación sinusoidal en ambas gráficas es correcta.

- Se puede notar que el desarrollo de programación no fue el adecuado debido a que presenta falencias en cuanto a la coherencia de los resultados por tal motivo, no se puede enfatizar de forma contundente que el valor de k_θ es un factor de sensibilidad aunque así parezca desde la experimentación.
- Los valores son fácilmente alterables respecto del valor de k_θ , con esto no podemos concluir que el programa sea ineficiente, más bien está condicionado a los valores que pueda tomar k_θ y de esta forma dejarlo fijo para una posible aplicación.

REFERENCES

- [1] LIANG Y., ZAYA M., y KUGA T., *Design of Diaphragm Actuator based on Ferromagnetic Shape Memory Alloy Composite*, Universidad de Washington, Seattle, USA.
- [2] GUL M., UZOL O. y AKMANDOR S., *An Experimental Study on Active Flow Control using Synthetic Jet Actuator over S809 Airfoil*, METU University, Departamento de ingeniería Aeroespacial, Ankara, Turquía.
- [3] RATHNASINGHAM R. y BREUER K., *General Fluid-Structural Characteristics of Actuators for Flow Control*, Instituto de Tecnología de Massachussets, 1997, USA.
- [4] *Circuitos RI y RC*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Disponible en: <http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ingenieria/pdf/cap6.pdf>.

ANEXO A

Analisis del resorte en la posición de referencia.

Si el resorte está en equilibrio, quiere decir que:

$$f(t) = 0$$

$$v = 0$$

$$P_{ext} = x_3$$

Entonces,

$$k_1(x - x_{ref}) + k_2(x - x_{ref})^2 - mg - AP_{ext} = 0$$

$$k_1x - k_1x_{ref} + k_2x^2 - 2k_2xx_{ref} + x_{ref}^2k_2 - mg - AP_{ext} = 0$$

$$k_2x^2 + (k_1 - 2k_2x_{ref})x - k_1x_{ref} + x_{ref}^2k_2 - mg - AP_{ext} = 0$$

luego,

$$x_{equ} = \frac{1}{2k_2} \left(2k_2x_{ref} - k_1 \pm \sqrt{(k_1 - 2k_2x_{ref})^2 - 4k_2(-k_1x_{ref} + x_{ref}^2k_2 - mg - AP_{ext})} \right)$$

Programa en Fortran.90

```

program MicroChorro
implicit none

integer :: i, j, nT

real*8 :: dt=0.000010D0
real*8, dimension(16) :: coeffsRK4
real*8, parameter :: pi = 4.0D0*atan(1.0D0)
real*8 :: facRK4, totalT
real*8 :: Xref,g,d1,Hmax,L,W,Fo,Rg,Tg,Vcine,omega,c1,c2,k1,k2,Patm,m
real*8 :: X1,X2,X3,X4,t
character(len=12) :: filename

open(unit=35,file='Datos.txt',status='unknown',action='read')

! Inicializacion de variables
totalT = 18.0D0;
facRK4= 1.0D0/6.0D0;

! Condiciones Iniciales
coeffsRK4 = 0.0D0;
X1 = 0.0D0           ! Posicion
X2 = 0.0D0           ! Velocidad
X3 = 101000.0D0      ! Presion
X4 = 0.009080D0      ! Masa
t = 0.0D0            ! Tiempo
! Numero total de pasos de tiempo
nT = floor(totalT/dt);

read(35,*) Xref,g,d1,Hmax,L,W,Fo,Rg,Tg,Vcine,omega,c1,c2,k1,k2,Patm,m
!open(unit=99,file='DatosOut.dat',status='unknown')
!987 format(3F20.8)
open(unit=99,file='resultados.dat',status='unknown')
987 format(5(F18.8))
!print*, Xref,g,d1,Hmax,L,W,Fo,Rg,Tg,Vcine,omega,c1,c2,k1,k2,Patm,m

```

```

do j = 1, nT

    ! Reporte valores a la terminal
    write(99,987) t,X1,X2,X3,X4
    !,difAlt(Atanq,Qmax,theta, a0, b0, h, Ia, t)
    ! Calculo proximo valor de tiempo
    t = dble(j)*dt

    call calcCoeffs(Xref,g,d1,Hmax,L,W,Fo,Rg,Tg,Vcine,omega,c1,c2,k1,k2
    Patm,m,dt,X1,X2,X3,X4,t,coeffsRK4)
    ! Calculo coeficientes para Runge-Kutta4
    X1 = X1 + facRK4*(coeffsRK4(1)+2.0D0*(coeffsRK4(5)+coeffsRK4(9))+coeffsRK4(13))
    ! Prediccion de Posicion para proximo timeStep

    X2 = X2 + facRK4*(coeffsRK4(2)+2.0D0*(coeffsRK4(6)+coeffsRK4(10))+coeffsRK4(14))
    ! Prediccion de Velocidad para proximo timeStep

    X4 = X4 + facRK4*(coeffsRK4(3)+2.0D0*(coeffsRK4(7)+coeffsRK4(11))+coeffsRK4(15))
    ! Prediccion de Masa para proximo timeStep

    X3 = X3 + facRK4*(coeffsRK4(4)+2.0D0*(coeffsRK4(8)+coeffsRK4(12))+coeffsRK4(16))
    ! Prediccion de Presion para proximo timeStep

enddo

contains

real function Fuer(Fo,omega,t)
    implicit none
    real*8 :: Fo,omega,t
    intrinsic :: sin
    ! Executable statements
    Fuer = Fo*sin(omega*t)
end function Fuer

real function Dh(W,d1)
    implicit none
    real*8 :: W,d1
    intrinsic :: sin
    ! Executable statements
    Dh = (4*W*d1)/(2*W+2*d1)
end function Dh

real function difX1(X1,X2,X3,X4,t)
    implicit none
    real*8 :: X1,X2,X3,X4,t
    intrinsic :: sin
    ! Executable statements
    difX1 = X2
end function difX1

real function difX2(g,c1,m,k1,Xref,d1,Patm,X1,X2,X3,X4,t)
    implicit none
    real*8 :: g,c1,m,k1,Xref,d1,Patm,X1,X2,X3,X4,t
    intrinsic :: sin
    ! Executable statements
    difX2 = g-(c1/m)*X2+(k1/m)*(X1-Xref)+(d1**2/m)*(X3-Patm)-(Fuer(Fo,omega,t))/m
end function difX2

real function difX4(d1,Hmax,Patm,L,Vcine,X1,X2,X3,X4,t)
    implicit none
    real*8 :: d1,Hmax,Patm,L,Vcine,X1,X2,X3,X4,t
    intrinsic :: sin
    ! Executable statements
    difX4 = (X4/(d1**2*(Hmax-X1)*(32*L*Vcine)))*((Patm-X3)*d1*W*(Dh(W,d1))**2)

```

```

end function difX4

real function difX3(Rg,Tg,Hmax,d1,X1,X2,X3,X4,t)
  implicit none
  real*8 :: Rg,Tg,Hmax,d1,X1,X2,X3,X4,t
  intrinsic :: sin
  ! Executable statements
  difX3 = (Rg*Tg*difX4(d1,Hmax,Patm,L,Vcine,X1,X2,X3,X4,t)+(d1**2)*X2*X3)/((d1*2)*(Hmax-X1))
end function difX3

subroutine calcCoeffs(Xref,g,d1,Hmax,L,W,Fo,Rg,Tg,Vcine,omega,c1,c2,k1,k2,
Patm,m,dt,X1,X2,X3,X4,t,coeffs)
  implicit none
  integer :: i
  real*8, intent(in) :: Xref,g,d1,Hmax,L,W,Fo,Rg,Tg,Vcine,omega,c1,c2,k1,k2
  Patm,m,dt,X1,X2,X3,X4,t
  real*8, intent(inout), dimension(16) :: coeffs
  real*8 :: A1,A2,A3,A4
  ! Executable statements
  ! Reset coeffs
  coeffs = 0.0D0
  ! Begin calculation of coeffs
  coeffs(1) = dt*difX1(X1,X2,X3,X4,t)
  coeffs(2) = dt*difX2(g,c1,m,k1,Xref,d1,Patm,X1,X2,X3,X4,t)
  coeffs(3) = dt*difX4(d1,Hmax,Patm,L,Vcine,X1,X2,X3,X4,t)
  coeffs(4) = dt*difX3(Rg,Tg,Hmax,d1,X1,X2,X3,X4,t)
  A1 = coeffs(1)
  A2 = coeffs(2)
  A3 = coeffs(3)
  A4 = coeffs(4)
  coeffs(5) = dt*difX1(X1+0.5D0*A1,X2+0.5D0*A2,X3+0.5D0*A4,X4+0.5D0*A3
t+0.5D0*dt)
  coeffs(6) = dt*difX2(g,c1,m,k1,Xref,d1,Patm,X1+0.5D0*A1,X2+0.5D0*A2
,X3+0.5D0*A4,X4+0.5D0*A3,t+0.5D0*dt)
  coeffs(7) = dt*difX4(d1,Hmax,Patm,L,Vcine,X1+0.5D0*A1,X2+0.5D0*A2
X3+0.5D0*A4,X4+0.5D0*A3,t+0.5D0*dt)
  coeffs(8) = dt*difX3(Rg,Tg,Hmax,d1,X1+0.5D0*A1,X2+0.5D0*A2,X3+0.5D0*A4
X4+0.5D0*A3,t+0.5D0*dt)
  A1 = coeffs(5)
  A2 = coeffs(6)
  A3 = coeffs(7)
  A4 = coeffs(8)
  coeffs(9) = dt*difX1(X1+0.5D0*A1,X2+0.5D0*A2,X3+0.5D0*A4,X4+0.5D0*A3
t+0.5D0*dt)
  coeffs(10) = dt*difX2(g,c1,m,k1,Xref,d1,Patm,X1+0.5D0*A1,X2+0.5D0*A2
X3+0.5D0*A4,X4+0.5D0*A3,t+0.5D0*dt)
  coeffs(11) = dt*difX4(d1,Hmax,Patm,L,Vcine,X1+0.5D0*A1,X2+0.5D0*A2
X3+0.5D0*A4,X4+0.5D0*A3,t+0.5D0*dt)
  coeffs(12) = dt*difX3(Rg,Tg,Hmax,d1,X1+0.5D0*A1,X2+0.5D0*A2,X3+0.5D0*A4
X4+0.5D0*A3,t+0.5D0*dt)
  A1 = coeffs(9)
  A2 = coeffs(10)
  A3 = coeffs(11)
  A4 = coeffs(12)
  coeffs(13) = dt*difX1(X1+A1,X2+A2,X3+A4,X4+A3,t+dt)
  coeffs(14) = dt*difX2(g,c1,m,k1,Xref,d1,Patm,X1+A1,X2+A2,X3+A4,X4+A3,t+dt)
  coeffs(15) = dt*difX4(d1,Hmax,Patm,L,Vcine,X1+A1,X2+A2,X3+A4,X4+A3,t+dt)
  coeffs(16) = dt*difX3(Rg,Tg,Hmax,d1,X1+A1,X2+A2,X3+A4,X4+A3,t+dt)
  return
end subroutine calcCoeffs

end program MicroChorro

```

ANEXO B

Programa desarrollado en Fortran.90

```

program SEM
implicit none

integer :: i, j, nT, nConfs

real*8,dimension (8) :: al,Kaexp
real*8 :: a0 , b0 ,z1 ,z2 , z0 , C1, C2, C3, dt=0.010D0
real*8, dimension(12) :: coeffsRK4
real*8, parameter :: pi = 4.0D0*atan(1.0D0)
real*8 :: facRK4, totalT
real*8 :: Vin,omega,Rsm,Ksm,La,Ra,Ka,Atanq,Voltanq,Qmax,hmin,hmax
real*8 :: theta,Ia,h,t

character(len=12) :: filename

open(unit=35,file='Datos.txt',status='unknown',action='read')
read(35,*), nConfs

! Inicializacion de variables
totalT = 5000.0D0;
facRK4= 1.0D0/6.0D0;

read(35,*) Vin,Ra,La,Rsm,Ksm,Qmax,Atanq,Voltanq,omega,Ka,hmin,hmax
open(unit=99,file='resultados.dat',status='unknown')
987 format(4(F14.6))

coeffsRK4 = 0.0D0;
!Condiciones iniciales;
theta = 0.0D0;
Ia     = 0.0D0;
t      = 0.0D0;
h      = 0.0D0
! Numero total de pasos de tiempo
nT = floor(totalT/dt);

do j = 1, nT

write(99,987)t,10*theta,10*h
! Calculo proximo valor de tiempo
t = dble(j)*dt

call calcregre(a0,b0,z1,z2,z0,al,kaexp) !
Cuando se llama esta funcion se calcula la regresion potencial
! para los datos experimentales de la tabla del taller

call calcCoeffs(Rsm,Ksm,pi,La,Ra,theta,Ka,Atanq,Ia,h,t,dt,coeffsRK4)
! Calculo coeficientes para Runge-Kutta4
theta = theta + facRK4*(coeffsRK4(1)+2.0D0*(coeffsRK4(4)+coeffsRK4(7))+coeffsRK4(10));
! Prediccion de theta para proximo timeStep

Ia     = Ia     + facRK4*(coeffsRK4(2)+2.0D0*(coeffsRK4(5)+coeffsRK4(8))+coeffsRK4(11));
! Prediccion de Ia para proximo timeStep

h      = h      + facRK4*(coeffsRK4(3)+2.0D0*(coeffsRK4(6)+coeffsRK4(9))+coeffsRK4(12));
! Prediccion de h para proximo timeStep

enddo

contains

```

```

real function Volt(Vin,omega,t)
  implicit none
  real*8 :: Vin,omega,t
  intrinsic :: sin
  ! Executable statements
  Volt = Vin*sin(omega*t)+Vin
end function Volt

real function Qout(a0,b0,h)
!Funcion para Calculo de Caudal de salida experimental
implicit none
real*8 :: a0,b0,h
intrinsic :: sin
Qout=a0*h**b0
end function Qout

real function Qin(Qmax,theta,pi)
!Funcion para Calculo de Caudal de salida experimental
implicit none
real*8 :: Qmax,theta,pi
intrinsic :: sin
Qin=(Qmax/(2*pi))*theta
end function Qin

real function diftheta(Rsm,Ksm,theta,Ka,Ia,h,t)
  implicit none
  real*8 :: Rsm,Ksm,theta,Ka,Ia,h,t
  intrinsic :: sin
  ! Executable statements
  diftheta = (Rsm/Ksm)*Ia*(1-(theta/(2*pi)))-Ka*theta
end function diftheta

real function difIa(Vin,omega,Rsm,Ra,Ksm,Ka,La,theta,Ia,h,t)
  implicit none
  real*8 :: Vin,omega,Rsm,Ra,Ksm,Ka,La,theta,Ia,h,t
  intrinsic :: sin
  ! Executable statements
  difIa = (Volt(Vin,omega,t)/La)-(Ia*Ra)/(La)-(1/La)*
  (Ksm*diftheta(Rsm,Ksm,theta,Ka,Ia,h,t))
end function difIa

real function difAlt(Atanq,Qmax,theta, a0, b0, h, Ia, t)
  implicit none
  real*8 :: Atanq, Qmax, theta, a0, b0, h, Ia, t
  intrinsic :: sin
  ! Executable statements
  difAlt = (1/Atanq)*(Qin(Qmax,theta,pi)-Qout(a0,b0,h))
end function difAlt

subroutine calcCoeffs(Rsm,Ksm,pi,La,Ra,theta,Ka,Atanq,Ia,h,t,dt,coeffs)
  implicit none
  integer :: i
  real*8, intent(in) :: Rsm,Ksm,pi,La,Ra,theta,Ka,Atanq,Ia,h,t,dt
  real*8, intent(inout), dimension(12) :: coeffs
  real*8 :: C1, C2, C3
  ! Executable statements
  ! Reset coeffs
  coeffs = 0.0D0
  ! Begin calculation of coeffs
  coeffs(1) = dt*diftheta(Rsm,Ksm,theta,Ka,Ia,h,t)
  coeffs(2) = dt*difIa(Vin,omega,Rsm,Ra,Ksm,Ka,La,theta,Ia,h,t)
  coeffs(3) = dt*difAlt(Atanq,Qmax,theta, a0, b0, h, Ia, t)
  C1 = coeffs(1)
  C2 = coeffs(2)

```



```

C3 = coeffs(3)
coeffs(4) = dt*diftheta(Rsm,Ksm,theta+0.5D0*C1,Ka,
Ia+0.5D0*C2,h+0.5D0*C3,t+0.5D0*dt)
coeffs(5) = dt*difIa(Vin,omega,Rsm,Ra,Ksm,Ka,La,
theta+0.5D0*C1,Ia+0.5D0*C2,h+0.5D0*C3,t+0.5D0*dt)
coeffs(6) = dt*difAlt(Atanq,Qmax,theta+0.5D0*C1,
a0, b0, h+0.5D0*C3, Ia+0.5D0*C2, t+0.5D0*dt)
C1 = coeffs(4)
C2 = coeffs(5)
C3 = coeffs(6)
coeffs(7) = dt*diftheta(Rsm,Ksm,theta+0.5D0*C1,Ka,
Ia+0.5D0*C2,h+0.5D0*C3,t+0.5D0*dt)
coeffs(8) = dt*difIa(Vin,omega,Rsm,Ra,Ksm,Ka,La,
theta+0.5D0*C1,Ia+0.5D0*C2,h+0.5D0*C3,t+0.5D0*dt)
coeffs(9) = dt*difAlt(Atanq,Qmax,theta+0.5D0*C1,
a0, b0, h+0.5D0*C3, Ia+0.5D0*C2, t+0.5D0*dt)
C1 = coeffs(7)
C2 = coeffs(8)
C3 = coeffs(9)
coeffs(10) = dt*diftheta(Rsm,Ksm,theta+C1,Ka,Ia+C2,h+C3,t+dt)
coeffs(11) = dt*difIa(Vin,omega,Rsm,Ra,Ksm,Ka,La,theta+C1,Ia+C2,h+C3,t+dt)
coeffs(12) = dt*difAlt(Atanq,Qmax,theta+C1, a0, b0, h+C3, Ia+C2, t+dt)
return
end subroutine calcCoeffs

subroutine calcregre(a0,b0,z1,z2,z0,al,kaexp)
!Regresion Potencial
implicit none
integer :: i=1 , nreg = 8.0D0
real*8 :: a0 , b0 ,z1 ,z2 , z0
real*8, dimension (8) :: al , kaexp
real*8, parameter :: pi = 4.0D0*atan(1.0D0)
intrinsic :: sin

do i=1 , nreg
al(i)=i*.120D0/100 ! Altura en metros
enddo

! Definicion de valores experimentales de el caudal
kaexp(1)=0.47120D0/(1000*60)
kaexp(2)=0.68960D0/(1000*60)
kaexp(3)=0.85430D0/(1000*60)
kaexp(4)=1.01250D0/(1000*60)
kaexp(5)=1.14440D0/(1000*60)
kaexp(6)=1.34020D0/(1000*60)
kaexp(7)=1.41070D0/(1000*60)
kaexp(8)=1.53810D0/(1000*60)

! Regresion del ajuste potencial de Q = a0 * h**b0
! Solucion del sistema de ecuaciones usando la regla de cramer
z1 = sum(log(kaexp))*sum((log(al))**2) - sum(log(al))*sum(log(al)*log(kaexp))
z2 = dble(nreg)*sum(log(al)*log(kaexp)) - sum(log(al))*sum(log(kaexp))
z0 = dble(nreg)*sum((log(al))**2) - (sum(log(al))**2)

! determinacion de los coeficientes del ajuste
b0=z2/z0
a0=exp(z1/z0)
return

end subroutine calcregre

end program SEM

```