



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Diseño y Análisis de Algoritmos - IIC2283
Tarea 1
Entrega: 27 de septiembre (hasta las 11:59pm)

La solución de cada problema debe ser un programa en Python 3. Estos programas deben ser subidos a su repositorio de git creado para este propósito (se les avisará de esto prontamente). Sus archivos deben llamarse `p1.py` y `p2.py` para las preguntas 1 y 2 respectivamente, y estar en la carpeta T1 de su repositorio. Cualquier pregunta de la tarea hágala en el foro del curso (<https://github.com/marceloarenassaavedra/IIC2283-2-21/issues>). Si quiere usar alguna librería en sus soluciones debe preguntar en el foro si esta librería está permitida. El foro es el canal de comunicación oficial para todas las tareas.

Problema 1

Königsberg¹ era una ciudad en Prusia, hogar de múltiples matemáticos famosos, y hogar del problema de los puentes de Königsberg,² un problema clásico de teoría de grafos el cual consiste en encontrar un camino en Königsberg que pase por cada uno de sus siete puentes exactamente una vez. Euler, en 1736, dio la solución a este problema de forma negativa, no existe algún camino que cumpla esas condiciones. Hay más preguntas que se pueden hacer sobre el multigrafo con el cual se abstrae el problema, el cual es mostrado en la Figura 2. Una de ellas es contar la cantidad de caminos que pasan por N aristas con la posibilidad de repetir aristas. Este último es el problema que tienen que solucionar, específicamente sobre el multigrafo de la Figura 2.

Como este último número puede ser muy grande se pide la respuesta modulo $10^9 + 7$.

Formato

El input consiste de una línea, la cual contiene N , la cantidad de aristas por la que pasan los caminos.

Su output debe ser una sola línea con un número, la cantidad de caminos que pasan por N aristas modulo $10^9 + 7$.

¹Ahora Kalingrado, Rusia.

²https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg

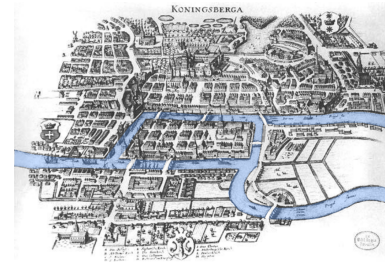


Figura 1: Königsberg y sus siete puentes.

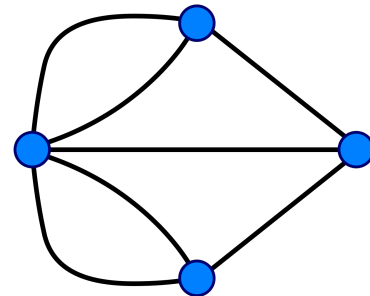


Figura 2: Multigrafo que representa al problema de los siete puentes de Königsberg.

Límites

$$0 \leq N \leq 10^{18}$$

Tiempo de ejecución

1 segundo

Complejidad esperada

$$O(\log(N))$$

Ejemplos

Input 1

1

Output 1

14

Input 2

2

Output 2

52

Input 3

1000

Output 3

619149134

Hint

Piense en una solución usando programación dinámica con complejidad $O(N)$ con una tabla de $O(N)$ elementos. Luego piense en como optimizarla para que la tabla sea de $O(1)$ elementos, para después reformular la recurrencia de la solución con una matriz.

Problema 2

Usted trabaja como intermediario en el mercado de compraventa de juguetes. Su labor es comprar juguetes a empresas productoras para luego venderlos a empresas consumidoras. Cada empresa productora vende un juguete por día, y cada empresa consumidora compra un juguete por día. La empresa productora i -ésima vende sus juguetes a p_i pesos por unidad, y comienza sus operaciones de venta en el día s_i (es decir, antes del día s_i la empresa productora i -ésima no está operativa en el mercado). Similarmente, la empresa consumidora j -ésima está dispuesta a pagar como máximo q_j pesos por juguete, y su demanda de juguetes finaliza en el día e_j (es decir, después del día e_j la empresa consumidora j -ésima ya no está disponible en el mercado).

Debido a regulaciones que fomentan la sana competencia, a usted, como intermediario, sólo le está permitido intermediar entre una empresa productora y una empresa consumidora. Usted comprará juguetes

de la empresa productora, uno por día, comenzando en el día que dicha empresa comienza a operar, y los venderá a la empresa consumidora, uno por día, terminando en el día en que la empresa consumidora deja de operar. En cada uno de estos días, su ganancia será la diferencia entre el precio al que usted decida vender una unidad de juguete a la empresa consumidora y el precio de venta por unidad de juguete de la empresa productora.

Por supuesto, su objetivo es escoger la mejor combinación de empresa productora y empresa consumidora para maximizar sus ganancias como intermediario.

Formato

La primera línea de la entrada consiste en dos enteros m y n , indicando el número de empresas productoras y consumidoras de juguetes, respectivamente. Luego siguen m líneas, donde la i -ésima línea contiene dos enteros p_i y s_i , indicando respectivamente el precio unitario de venta y el día en que comienza a operar la empresa productora i -ésima. Luego siguen n líneas, donde la j -ésima línea contiene dos enteros q_j y e_j , indicando respectivamente lo máximo por unidad que está dispuesta a pagar y el último día de operación de la empresa consumidora j -ésima (la empresa deja de operar al día siguiente).

Su output debe ser una sola línea con un entero correspondiente a la máxima ganancia que usted puede obtener, si efectúa su negocio de intermediación de manera óptima.

Límites

$$1 \leq m, n \leq 5 \times 10^5$$

$$1 \leq p_i, s_i \leq 10^9 \text{ para todo } i \in [1, m]$$

$$1 \leq q_j, e_j \leq 10^9 \text{ para todo } j \in [1, n]$$

Tiempo de ejecución

5 segundos

Complejidad esperada

$$O(\max\{n \log(m), m \log(n)\})$$

Ejemplos

Input 1

```
2 2
1 3
2 1
3 4
7 1
```

Output 1

```
5
```

Input 2

```
1 2
10 10
```

9 10

11 8

Output 2

0

Hint

Piense el problema geoméricamente. Y por supuesto, divida para conquistar 😊