MÁQUINAS DE TURING

Ayudantía 7

Importancia en computación

- Según la tesis de Church-Turing, todo algoritmo es equivalente a una máquina de Turing.

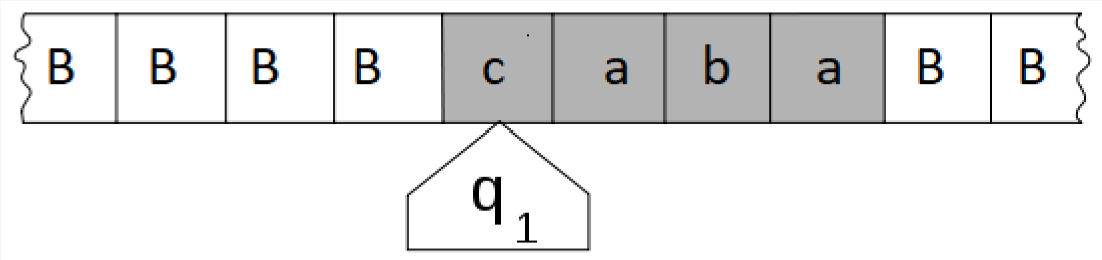
- Se usan para el desarrollo teórico en ciencias de computación. Al ser sencillas es fácil hacer un análisis matemático de ellas.

Importancia en computación

- Nos referimos a sistemas Turing-completos a aquellos que tienen el mismo poder computacional que la máquina de Turing.
- Nuestros computadores (el lenguaje de máquina y todos los lenguajes que se construyen sobre el lenguaje de máquina) son Turing-completos.
- Todo lo que se puede hacer en un computador se puede hacer en una máquina de Turing y viceversa.
- Si demostramos formalmente que algo no se puede hacer en una MT, entonces tampoco se puede hacer en un computador.

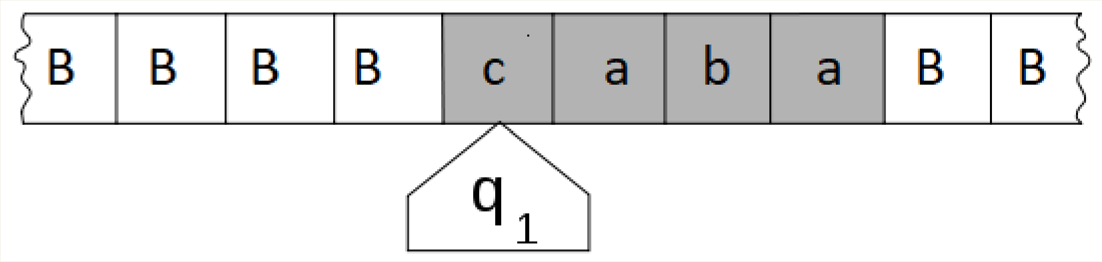
Definición informal

- Las máquinas de Turing tienen una cinta infinita de celdas y un cabezal que lee una de las celdas.
- La máquina puede leer el símbolo escrito en la celda, escribir otro símbolo y luego moverse a una celda contigua (o quedarse en la misma celda).



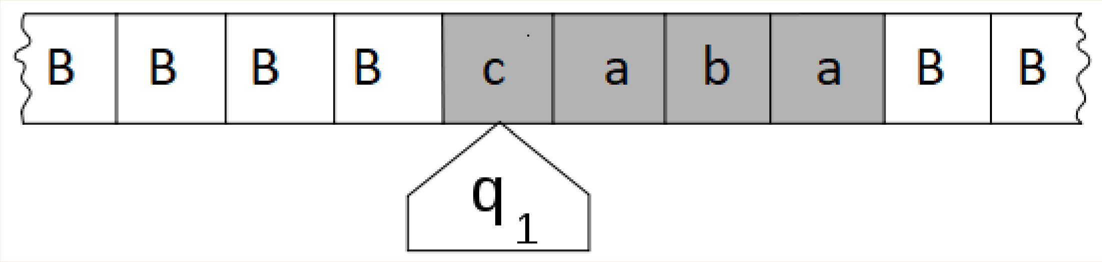
Definición informal

- Inicialmente la cinta se encuentra solo con símbolos blancos (que representamos con la letra B).
- La máquina recibe un input que se escribe en la cinta, y el lector se posiciona en el primer símbolo.
- La máquina guarda estados que definen cómo moverse.



Definición informal

- Cuando una máquina recibe un input, el cabezal lee la primera posición y la máquina parte en un estado inicial.
- La máquina se puede ir moviendo por la palabra e ir cambiando su estado. Si se detiene puede hacerlo en un estado final o en un estado no final. En el primer caso se dice que el input fue aceptado.



Las máquinas reciben un input y pueden aceptarlo o no aceptarlo.

Definición formal

Formalmente, esta máquina de Turing se define como la tupla

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, q_0, \delta, F)$$

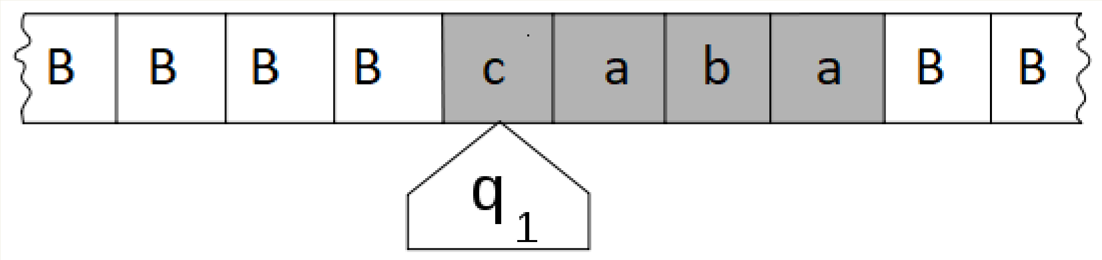
donde

Q	Conjunto de estados
Γ	Alfabeto de la máquina
$\Sigma \subsetneq \Gamma$	Alfabeto de entrada
$q_0 \in Q$	Estado inicial de la máquina
$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \to, -\}$	Función de transición
$F \subseteq Q$	Conjunto de estados de aceptación

Definición formal

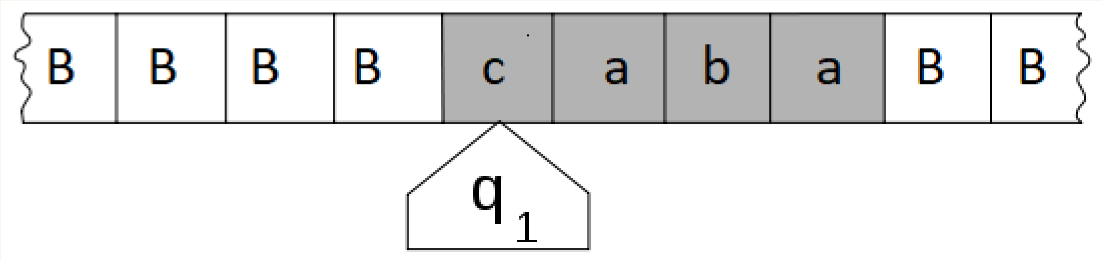
- Alfabeto de entrada (Σ): es el conjunto de símbolos que pueden estar presentes en el input de la máquina.
- Alfabeto de la máquina (Γ): es el conjunto de símbolos que la máquina puede “leer”.

El símbolo blanco (B) es un símbolo que la máquina puede leer pero sin embargo no está en el alfabeto de entrada.



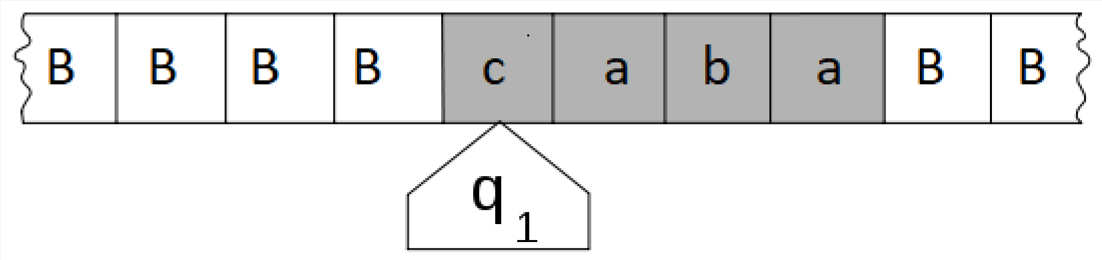
Definición formal

- La máquina siempre se encuentra en un estado. El estado actual y el símbolo que está leyendo determinan su comportamiento.
- Estados (Q): conjunto de estados por los que puede pasar la máquina.
- Estado inicial (q0): estado en el que comienza la máquina.
- Estados finales (F): conjunto de estados que se consideran de aceptación cuando la máquina se detiene.



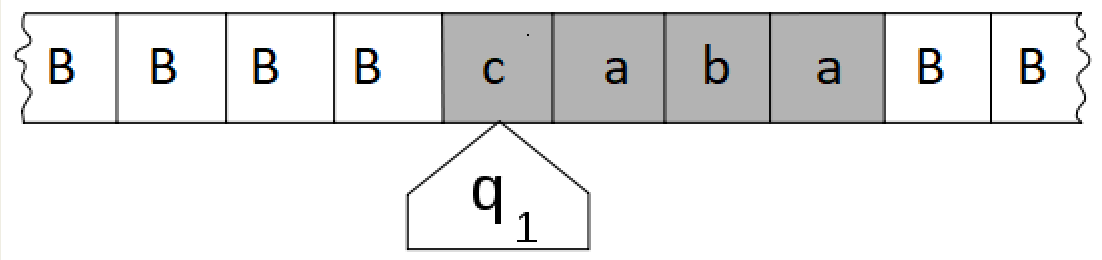
Definición formal

- Cada “paso” que da la máquina se conoce como transición.
- En toda transición la máquina lee el símbolo actual y según el estado en que se encuentre realiza tres acciones:
  - *Escribir algo en la celda que está mirando.*
  - *Cambiar de estado.*
  - *Moverse a la izquierda, moverse a la derecha o no moverse.*



Definición formal

- Las transiciones se pueden modelar como una función de transición (δ).
- La función recibe dos entradas: el símbolo que está leyendo y el estado actual en que se encuentra.
- La función retorna tres valores: el nuevo símbolo que se escribe en la celda, el estado al que cambia la máquina y el movimiento o no movimiento del cabezal.



(Paréntesis) Notación matemática

CONJUNTOS

- ¿Cómo definimos conjuntos?
  - *Usamos corchetes o letras caligráficas*
- ¿Qué conjuntos numéricos conocen?
  - *Conjunto de los naturales, conjunto de los pares, conjunto de los primos*
- ¿Qué otros conjuntos conocen?
  - *Conjunto de las palabras que se pueden formar con a y b*
- ¿Qué operaciones de conjuntos conocen?
  - *Unión, intersección, complemento, diferencia*

(Paréntesis) Notación matemática

FUNCIONES

- ¿Qué funciones matemáticas conocen?
  - *Raíz cuadrada, logaritmo, MCD*
- ¿Qué otras funciones conocen?
  - *Largo de una palabra, concatenación de palabras*
- ¿Qué son el dominio y recorrido de una función?
- Funciones deterministas v/s no deterministas

Definición formal

Formalmente, esta máquina de Turing se define como la tupla

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, q_0, \delta, F)$$

donde

Q	Conjunto de estados
Γ	Alfabeto de la máquina
$\Sigma \subsetneq \Gamma$	Alfabeto de entrada
$q_0 \in Q$	Estado inicial de la máquina
$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \to, -\}$	Función de transición
$F \subseteq Q$	Conjunto de estados de aceptación

Ejemplo

- Construyamos una máquina que solo acepte palabras que contienen letras “a”.
  - *Primero debemos definir el alfabeto de entrada.*
  - *Luego definimos sus estados y transiciones.*

Ejemplo

- Construyamos una máquina que solo acepte palabras que contienen letras “a”

La siguiente máquina acepta exclusivamente palabras que contengan solo letras a:

$$M = (\{q_0, q_f\}, \{a, b, B\}, \{a, b\}, q_0, \delta, \{q_f\})$$

donde $\delta(q_0, a) = (q_0, a, \rightarrow)$ y $\delta(q_0, B) = (q_f, B, -)$

Construyendo máquinas de Turing en la práctica

- Si bien la máquina de Turing es un modelo teórico, existen simuladores que nos ayudan a recrear la máquina.
- Podemos construir una máquina y probarla para distintas entradas.
- Usaremos https://turingmachinesimulator.com/

Construyendo máquinas de Turing en la práctica

DIFERENCIAS

- El simulador permite usar más de un cinta.
- En el simulador no es necesario definir el alfabeto de entrada ni el alfabeto de la máquina de manera explícita.
- En el simulador representamos el símbolo blanco por “_”.

Construyendo máquinas de Turing en la práctica

EJEMPLOS

- Palabras que tengan una cantidad par de letras “a”.
- Palabras que tengan una cantidad par de letras “a” y entregando como output la cantidad de pares de “a” (dos cintas).
- Palabras que tengan más letras “a” que letras “b”.

MÁQUINAS DE TURING

Ayudantía 7