Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
Computación: Ciencia y Tecnología del Mundo Digital

Tarea Chica 3: Máquinas de Turing

Profesor Denis Parra
16 de mayo de 2019

Indicaciones

- Fecha de Entrega: Domingo 26 de mayo a las 23:59.
- Se debe entregar la tarea en el repositorio asignado a cada uno por Github Classroom.
- Cada hora de atraso descuenta 5 décimas de la nota que obtengas.
- La tarea es *individual*. La copia será sancionada con una nota 1.1 en la tarea, además de las sanciones disciplinarias correspondientes.

Objetivo

Los objetivos de esta tarea son los siguientes:

- Entender el concepto de máquina de Turing.
- Entender la definición matemática formal de una máquina de Turing.
- Entender cómo se construye una máquina de Turing.
- Familiarizarse con el lenguaje LaTeX.

Introducción

La máquina de Turing es uno de los conceptos más importantes de la teoría de computación ya que consigue formalizar de una forma simple el concepto de computabilidad, o qué cosas son o no computables. La conjetura de Church-Turing postula que para todo proceso computable existe una máquina de Turing que es capaz de realizar el mismo proceso.

Consideramos una máquina de Turing como una cinta infinita de celdas y un cabezal con el que puede leer o escribir la celda en la posición actual. En la configuración inicial, la cinta contiene una palabra (con elementos de un alfabeto de entrada determinado) y el cabezal se encuentra leyendo la primera posición de esta palabra. Las celdas que están antes y después de la palabra contienen un elemento en blanco que representamos como B.

La máquina siempre se encuentra en algún estado $q \in Q$ el que junto con el elemento que está leyendo el cabezal en ese instante va a determinar la acción que realiza la máquina. Estas acciones se determinan con una función de transición propia de la máquina que toma el elemento en la cinta y el estado, y determina el nuevo estado q' al que va a pasar la máquina, el elemento que se va a escribir en la cinta y el movimiento del cabezal (que puede ser izquierda, derecha o no moverse).

Formalmente, esta máquina de Turing se define como la tupla

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, q_0, \delta, F)$$

donde

Q	Conjunto de estados
Γ	Alfabeto de la máquina
$\Sigma \subsetneq \Gamma$	Alfabeto de entrada
$q_0 \in Q$	Estado inicial de la máquina
$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \to, -\}$	Función de transición
$F \subseteq Q$	Conjunto de estados de aceptación

Cuando una máquina M se encuentra en un estado q y un símbolo a, y no existe una transición $\delta(q, a)$ decimos que la máquina se detiene. Además, decimos que una palabra w es aceptada por la máquina M si la máquina se detiene y además el estado q en que queda detenida es un estado final ($q \in F$). El conjunto de todas las palabras aceptadas por M se conoce como el lenguaje definido por M.

Ejemplo

La siguiente máquina acepta exclusivamente palabras que contengan solo letras a:

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, q_0, \delta, F)$$

donde $Q = \{q_0, q_f\}$, $\Gamma = \{a, b, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_f\}$ y la función δ define dos transiciones: $\delta(q_0, a) = (q_0, a, \rightarrow)$ y $\delta(q_0, B) = (q_f, B, -)$

Notar que B representa la celda vacía y es un símbolo reservado que puede leer la máquina pero no puede ser usado en el alfabeto de entrada. Esta máquina tampoco altera el contenido de la palabra, porque cada vez que ve una a escribe esa misma letra, y lo mismo cuando ve un espacio en blanco.

En el alfabeto de entrada solo se permiten los símbolos a y b de modo que palabras como $aaab$, aba, b, aaa o $baba$ podrían ser entregadas a la máquina. Sin embargo ninguna de las transiciones define un comportamiento para cuando el cabezal lee una letra b, por lo que si aparece una b la máquina se detendrá en un estado no final y por lo tanto la palabra será rechazada. Otra opción es que el cabezal vaya avanzando por la palabra leyendo solo letras a y cuando llegue al final de la palabra y se encuentre con el símbolo B cambiaría su estado a q_f que tampoco tiene transiciones válidas por lo que se detendría. En este último caso la palabra sería aceptada porque q_f es estado final.

Actividades

En esta tarea construirás una Máquina de Turing M que acepte todas las palabras que representan una secuencia ascendente de números binarios concatenados por un punto. Es decir, que acepte el siguiente lenguaje:

$$L = \{n_1.n_2.n_3.....n_N \mid n_i < n_{i+1} \text{ para } 1 \leq \text{i} \leq \text{N-1}\}$$

Y tenga como alfabeto de entrada:

$$\Sigma = \{0, 1, .\}$$

Para facilitar la construcción de la máquina, puedes usar los siguientes supuestos:

- $n_i \in \{0, 1\}^k$, donde k es una constante que depende de la palabra. Es decir, los n_i que componen una palabra corresponderán a números binarios con una longitud fija k.
- La máquina M puede tener más de una cinta.

Algunos ejemplos de entradas:

$$\begin{aligned} 1001 &\rightarrow \text{ acepta} \\ 0.1 &\rightarrow \text{ acepta porque 0 < 1} \\ 0010.1000.0001 &\rightarrow \text{ rechaza porque } 1000 \nless 0001 \\ 0100.1010.1010.1000 &\rightarrow \text{ rechaza porque} 1010 \nless 1010 \end{aligned}$$

Implementación (3 puntos)

Primero, debes escribir el código de la máquina M con el formato del simulador online `https://turingmachinesimulator.com/`.
El simulador establece en sus términos y condiciones que ejecuta un *script* para minar criptomonedas. Esto significa que mientras lo estés usando podría aumentar el uso de CPU en tu computador y consumir más rápidamente la batería. Si no estás de acuerdo puedes descargar una extensión en tu navegador para bloquear automáticamente ese tipo de *scripts*. En Google Chrome puedes descargar la extensión que se llama AdGuard.
Se espera que escribas el código de la máquina en el simulador y pruebes varios ejemplos para corroborar que funciona bien.

Informe (3 puntos)

Utilizando la plantilla .tex que se encuentra en tu repositorio debes escribir un informe en LaTeX que contenga:

1. (1.5 puntos) Una explicación concisa y completa del funcionamiento de la máquina. Debes explicar los pasos del algoritmo desde que recibe el input hasta que se detiene, incluyendo las decisiones que se toman ante ciertos casos.
   La idea de esta parte es que se pueda entender el funcionamiento de la máquina sin necesidad de leer el código. Se recomienda usar diagramas que complementen la explicación.

2. (0.5 puntos) Una definición formal para Q, q_0, Γ, F.

3. (1 punto) Una explicación detallada de los estados que componen Q. Para cada estado se debe incluir:

   - Bajo que condiciones la máquina pasa a este estado.
   - A que estados puede pasar la máquina.
   - Que acciones realiza la máquina mientras se encuentra en este estado.

   En caso de varios estados tengan funcionamientos similares, basta con definirlos una vez, pero se debe indicar que estados abarca esta definición.

Bonus (1 punto)

En esta tarea se puede optar a dos bonus, independientes entre si:

- (0.3 puntos) Si la máquina acepta palabras con números binarios de distinto largo. Es decir, eliminando el primer supuesto.

- (0.7 puntos) Si la máquina funciona en una sola cinta. Es decir, eliminando el segundo supuesto. Los bonus serán otorgados automáticamente durante la corrección.

Entrega

En resumen, debes entregar en tu repositorio:

- Un archivo de texto simple (.txt) con el código de la máquina. El nombre del archivo debe corresponder a tu número de alumno.

- Un informe en formato PDF con el nombre `informe.pdf`, además del archivo .tex que lo compila con el nombre `informe.tex`. Se recomienda utilizar el editor de LaTeX online `https://es.overleaf.com/`.

Descuentos

Se aplicarán los siguientes descuentos:

- Hasta 0.5 puntos por informes desordenados o mal escritos.
- 1 punto por no incluir el archivo .tex