Tarea 1 Optimización computacional

Diego Espinoza y Lukas Pinto

Universidad de Valparaiso, Ingenieria Civil Informatica

1 Resumen

Una fábrica se dedica a la fabricación de helados (H1, H2, H3), esta tiene 3 máquinas encargadas de su fabricacion, cada una con una capacidad semanal de produccion restringida. El objetivo de esta empresa es maximizar la venta de sus helados. Estos requieren cierto proceso de preparacion donde ciertas operaciones para crear un tipo de helado dependen de otras operaciones anteriores, operaciones las cuales cuestan un determinado tiempo en realizarse. Para resolver este problema, primeramente se modeló como un problema de programacion lineal, luego se hicieron uso de metodos de algoritmos de optimizacion. La solución óptima obtenida al aplicar estos algoritmos es: Generar 171 helados h1, 0 helados h2, 344 helados h3 con Z = 172348

2 Introducción

La fábrica de halados iYORK posee 3 máquinas que le permiten producir 3 variedades de helados, H1, H2 Y H3. Las máquinas realizan operaciones internas que apoyan la fabricación de los helados. Las máquinas 1 y 3 poseen 3 operaciones y la máquina 2, posee 2 operaciones. En total, las máquinas realizan 8 operaciones para producir los 3 helados. Para la operacion 1 se requiere una unidad de materia prima C, para la operacion 2 una unidad de materia prima L y V para la operacion 3. Además existe disponibilidad limitada para el uso de las máquinas. Cada máquina tiene una capacidad semanal de 2400 minutos y las operaciones requieren cierto tiempo para completar sus tareas. Los tiempos requeridos por operaciones y sus transiciones se muestran en la siguiente figura:

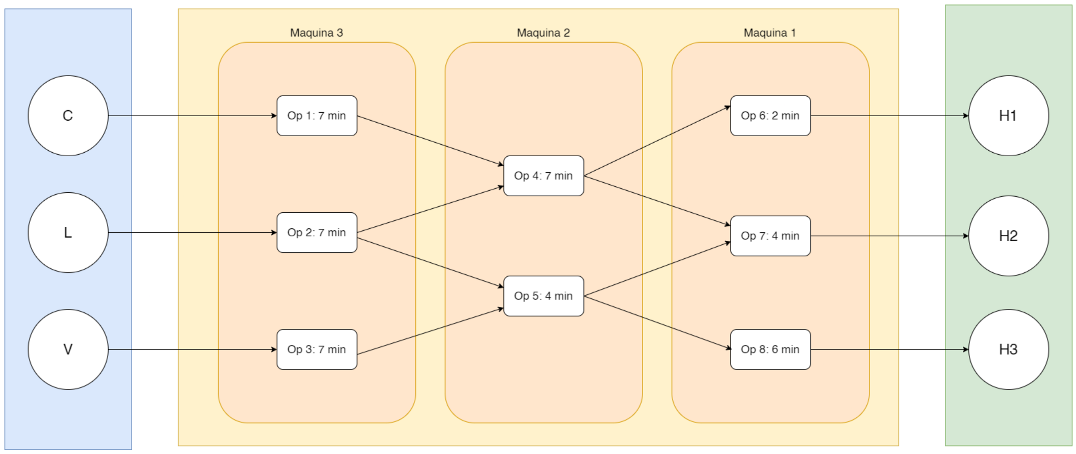

Figura 1: Proceso de fabricación de helado

Se busca maximizar la cantidad de helados a producir de la empresa sin que excedan la restricción de tiempo semanal para las máquinas, en este caso muy particular ignorando los costos por materia prima y fabricación, costos que en un ejercicio de este tipo pueden llegar a afectar mucho a la ganancia. Para esto es necesario modelar el funcionamiento de la fábrica como un problema de programación lineal, identificando la función a maximizar y sus restricciones. Para llegar a una solución óptima es necesario utilizar 2 algoritmos de optimización, Simplex y Branch and Bound, en este caso Branch and Bound será un complemento una vez terminado Simplex, la principal contribución para este ejercicio.

3 Objetivos

Qué: Maximizar la cantidad de helados producidos por la fábrica de helados iYORK.

Cómo: Modelando el funcionamiento de la fábrica como un problema de programación lineal y utilizando los algoritmos de optimización Simplex y Branch and Bound.

Para qué: Lograr una solución óptima que permita maximizar la producción de helados sin exceder la restricción de tiempo semanal para las máquinas de la fábrica.

4 Desarrollo

4.1 Estrategía de análisis

Identificar los objetivos y restricciones del problema: Se debe comprender claramente el objetivo del problema, que en este caso es maximizar la cantidad de helados producidos sin exceder la restricción de tiempo semanal de las máquinas. También es importante identificar las restricciones, como la disponibilidad limitada de las máquinas y los tiempos requeridos por las operaciones.

Definir las variables de decisión: Las variables de decisión en este problema serían la cantidad de helados de cada tipo a producir. Se deben identificar estas variables y establecer los límites superiores e inferiores para ellas.

Construir el modelo matemático: Se debe construir un modelo matemático que exprese la relación entre las variables de decisión y los objetivos y restricciones del problema. En este caso, se puede utilizar la programación lineal para modelar el problema, estableciendo la función objetivo y las restricciones lineales.

Resolver el modelo: Se pueden utilizar métodos de optimización como Simplex y Branch and Bound para resolver el modelo matemático y obtener la solución óptima.

Analizar los resultados: Una vez que se haya obtenido la solución óptima, se debe analizar críticamente los resultados para verificar si son coherentes con la función objetivo y restricciones del problema..

4.2 Estrategía de solucion

Se debe de modelar el funcionamiento de la fábrica de helados iYORK como un problema de programación lineal, identificando la función objetivo y las restricciones. Para ello, se debe establecer un sistema de ecuaciones que describa la producción de las tres variedades de helados (H1, H2, H3) a partir de las operaciones realizadas por las tres máquinas y la disponibilidad limitada de tiempo para el uso de las máquinas. Es muy importante tener en cuenta que, en este caso particular, se está buscando maximizar la cantidad de helados producidos por la empresa sin exceder la restricción de tiempo semanal para las máquinas, las variables de dinero están completamente fuera del ejercicio en sí (como restricciones), por lo que se deben incluir las restricciones correspondientes en el modelo de programación lineal. Una vez establecido el sistema de ecuaciones, se debe aplicar el método Simplex para obtener una solución óptima en términos fraccionarios. Posteriormente, se puede aplicar el método Branch and Bound para obtener la solución óptima en términos enteros.

4.3 Descripción del modelo

$\alpha = 362$, $\beta = 442$, $\gamma = 322$, $\lambda = 23$, $\epsilon = 37$, $\omega = 28$, $\mu = 9$, $\tau = 12$ y $\rho = 6$

Los valores de costos asociados a la producción C, V y L se deben descontar del valor final de cada uno de los helados, como en este ejercicio hay operaciones dependientes de una o más operaciones anteriores y las operaciones iniciales dependen de materia prima, los costos que se deben descontar deben ir en base a que materias primas y operaciones necesita dicho helado para ser creado.

$$\text{Max } Z = (362-9-12-23)H1+(442-9-12*2-6-37)H2+(322-6-12-28)H3 \tag{1}$$

Sujeto a:

$$2H1 + 4H2 + 6H3 <= 2400 \tag{2}$$

$$6H1 + 10H2 + 4H3 <= 2400 \tag{3}$$

$$8H1 + 11H2 + 3H3 <= 2400 \tag{4}$$

Estandarización del modelo

$$Z - 318H1 - 366H2 - 276H3 - 0S1 - 0S2 - 0S3 = 0 \tag{5}$$

$$2H1 + 4H2 + 6H3 + S1 = 2400 \tag{6}$$

$$6H1 + 10H2 + 4H3 + S2 = 2400 \tag{7}$$

$$8H1 + 11H2 + 3H3 + S3 = 2400 \tag{8}$$

4.4 Resolución por Simplex

		z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_0	z	1	-318	-366	-276	0	0	0	0
f_1	s_1	0	2	4	6	1	0	0	2400
f_2	s_2	0	6	10	4	0	1	0	2400
f_3	s_3	0	8	11	3	0	0	1	2400

(TABLEAU 1)

h2 posee el valor para z más negativo, calculando la fila más restrictiva de h2 se tiene:

$$\frac{2400}{4} = 600 \tag{9}$$

$$\frac{2400}{10} = 240 \tag{10}$$

$$\frac{2400}{11} = 218,18\ldots \tag{11}$$

f3 Es la fila más restrictiva, por lo cual es el pivote:

$$f_3/ = 11 \tag{12}$$

		z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_0	z	1	-318	-366	-276	0	0	0	0
f_1	s_1	0	2	4	6	1	0	0	2400
f_2	s_2	0	6	10	4	0	1	0	2400
f_3	s_3	0	8/11	1	3/11	0	0	1/11	2400/11

(13)

Haciendo las operaciones elementales para transformar la columna a canónica.

$$f_0 + = f_3 * 366 \tag{14}$$

	z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_0	1	-318	-366	-276	0	0	0	0
$f_3 * 366$	0	2928/11	366	1098/11	0	0	366/11	878400/11
	1	$-570/11$	0	$-1938/11$	0	0	366/11	878400/11

(15)

$$f_1 + = f_3 * -4 \tag{16}$$

	z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_1	0	2	4	6	1	0	0	2400
$f_3 * -4$	0	32/11	-4	$-12/11$	0	0	$-4/11$	$-4/11$
	0	$-10/11$	0	54/11	1	0	$-4/11$	16800/11

(17)

$$f_2 + = f_3 * -10 \tag{18}$$

	z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_2	0	6	10	4	0	1	0	2400
$f_3 * -10$	0	$-80/11$	-10	$-30/11$	0	0	$-10/11$	$-10/11$
	0	$-14/11$	0	14/11	0	1	$-10/11$	2400/11

(19)

		z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_0	z	1	$-570/11$	0	$-1938/11$	0	0	366/11	878400/11
f_1	s_1	0	$-10/11$	0	54/11	1	0	$-4/11$	16800/11
f_2	s_2	0	$-14/11$	0	14/11	0	1	$-10/11$	2400/11
f_3	h_2	0	8/11	1	3/11	0	0	1/11	2400/11

(TABLEAU 2)

Sigue habiendo valores negativos para las variables basales, por lo que hay que continuar

h3 posee el valor para z más negativo, calculando la columna más restrictiva de H3 se tiene:

$$\frac{16800}{11} * \frac{11}{54} = 311.11\ldots \tag{20}$$

$$\frac{2400}{11} * \frac{11}{14} = 171.42\ldots \tag{21}$$

$$\frac{2400}{11} * \frac{11}{3} = 800 \tag{22}$$

f2 es la fila más restrictiva. Por lo cual es el pivote:

$$f_2 * = \frac{11}{14} \tag{23}$$

		z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_0	z	1	$-570/11$	0	$-1938/11$	0	0	$366/11$	$878400/11$
f_1	s_1	0	$-10/11$	0	$54/11$	1	0	$-4/11$	$16800/11$
f_2	s_2	0	-1	0	1	0	1	$-5/7$	$1200/7$
f_3	h_2	0	$8/11$	1	$3/11$	0	0	$1/11$	$2400/11$

(24)

Haciendo las operaciones elementales para transformar la columna a canónica.

$$f_0 + = f_2 * 1938/11 \tag{25}$$

	z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_0	1	$-570/11$	0	$-1938/11$	0	0	$366/11$	$878400/11$
$f_2 * 1938/11$	0	$-1938/11$	0	$\frac{1938}{11}$	0	$\frac{1938}{11}$	$-\frac{9690}{77}$	$\frac{2325600}{77}$
	1	-228	0	0	0	$969/7$	$-648/7$	$770400/7$

(26)

$$f_1 + = f_2 * -54/11 \tag{27}$$

	z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_1	0	$-10/11$	0	$54/11$	1	0	$-4/11$	$16800/11$
$f_2 * -54/11$	0	$\frac{54}{11}$	0	$-\frac{54}{11}$	0	$\frac{54}{11}$	$\frac{270}{77}$	$-\frac{64800}{77}$
	0	4	0	0	1	$-27/7$	$22/7$	$4800/7$

(28)

$$f_3 + = f_2 * -3/11 \tag{29}$$

	z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_3	0	$8/11$	1	$3/11$	0	0	$1/11$	$2400/11$
$f_2 * -3/11$	0	$\frac{3}{11}$	0	$-\frac{3}{11}$	0	$-3/11$	$\frac{15}{77}$	$-\frac{3600}{77}$
	0	1	1	0	0	$-3/14$	$2/7$	$1200/7$

(30)

		z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_0	z	1	-228	0	0	0	$969/7$	$-648/7$	$770400/7$
f_1	s_1	0	4	0	0	1	$-27/7$	$22/7$	$4800/7$
f_2	h_3	0	-1	0	1	0	$11/14$	$-5/7$	$1200/7$
f_3	h_2	0	1	1	0	0	$-3/14$	$2/7$	$1200/7$

(TABLEAU 3)

Sigue habiendo valores negativos para las variables basales, por lo que hay que continuar

s3 posee el valor para z mas negativo, calculando la fila mas restrictiva de S3 se tiene:

$$\frac{1200}{7} * 1 = \frac{4800}{7} * \frac{1}{4} = 171.42 \tag{31}$$

Se puede escoger cualquiera de las 2 como pivote, en este caso se escoge s1:

$$s_1 / = 4 \tag{32}$$

		z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_0	z	1	-228	0	0	0	$969/7$	$-648/7$	$770400/7$
f_1	s_1	0	1	0	0	$1/4$	$-27/28$	$11/14$	$1200/7$
f_2	h_3	0	-1	0	1	0	$11/14$	$-5/7$	$1200/7$
f_3	s_2	0	1	1	0	0	$-3/14$	$2/7$	$1200/7$

(33)

Haciendo las operaciones elementales para transformar la columna a canónica.

$$f_0+ = f_1 * 228 \tag{34}$$

	z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_0	1	-228	0	0	0	$969/7$	$-648/7$	$770400/7$
$f_1 * 228$	0	228	0	0	57	$-\frac{1539}{7}$	$\frac{1254}{7}$	$\frac{273600}{7}$
	1	0	0	0	57	$-570/7$	$606/7$	$1044000/7$

(35)

$$f_2+ = f_1 * 1 \tag{36}$$

	z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_2	0	-1	0	1	0	$11/14$	$-5/7$	$1200/7$
$f_1 * 1$	0	1	0	0	$1/4$	$-27/28$	$11/14$	$1200/7$
	0	0	0	1	$1/4$	$-5/28$	$1/14$	$2400/7$

(37)

$$f_3+ = f_1 * -1 \tag{38}$$

	z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_3	0	0	1	0	$-1/4$	$-3/14$	$-1/2$	0
$f_1 * -1$	0	-1	0	0	$-1/4$	$27/28$	$-11/14$	$-1200/7$
	0	0	0	1	$1/4$	$-5/28$	$1/14$	$2400/7$

(39)

Con estas se obtiene el Tableau final, no hay más V.B que sean negativas.

		z	$h1$	$h2$	$h3$	$s1$	$s2$	$s3$	R
f_0	z	1	0	0	0	57	$-570/7$	$606/7$	$1044000/7$
f_1	h_1	0	1	0	0	$1/4$	$-27/28$	$11/14$	$1200/7$
f_2	h_3	0	0	0	1	$1/4$	$-5/28$	$1/14$	$2400/7$
f_3	h_2	0	0	1	0	$-1/4$	$-3/14$	$-1/2$	0

(TABLEAU FINAL)

$$h_1 = 1200/7, h_3 = 2400/7, h_2 = 0, Z = 1044000/7 \tag{40}$$

4.5 Branch And Bound

Como los valores obtenidos por el metodo Simplex son fraccionarios, se debe utilizar el algoritmo Branch Bound para llegar a soluciones óptimas enteras:

$$Max = 318h_1 + 366h_2 + 276h_3 \tag{41}$$

Sujeto a:

$$2h_1 + 4h_2 + 6h_3 <= 2400$$
$$6h_1 + 10h_2 + 4h_3 <= 2400$$
$$8h_1 + 11h_2 + 3h_3 <= 2400$$

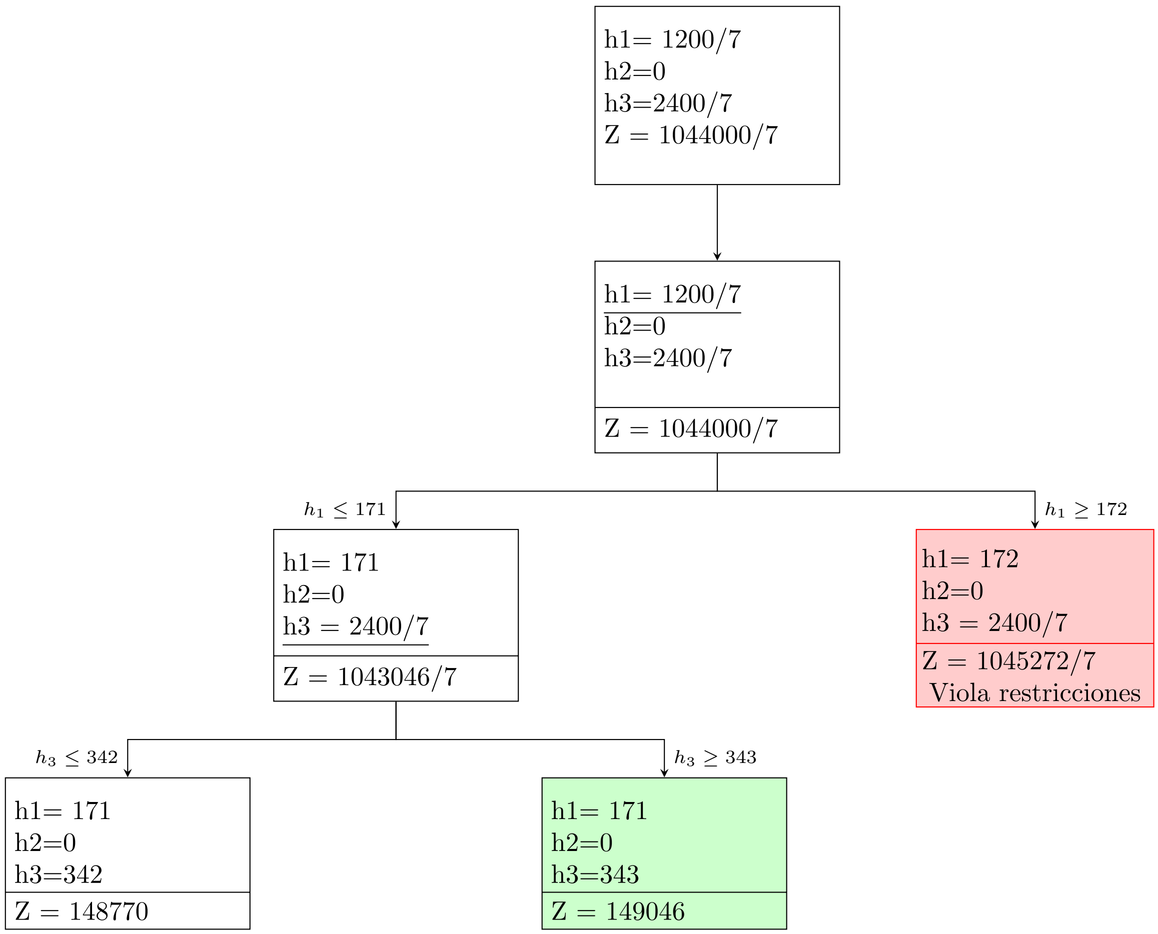

Figura 2: Branch and Bound

5 Resultados

El método Simplex encontró una solución factible fraccionaria (h1, h2, h3) = (1200/7, 0, 2400/7). Luego al utilizar Branch and Bound. El proceso de ramificación llevó a la identificación de 1 nodo factible, el cual indica la solución final entera (h1, h2, h3) = (171, 0, 343), con un valor de Z = 149046.

6 Conclusión

Se logró modelar y resolver el problema de maximización utilizando el método Simplex y el algoritmo Branch and Bound, con el fin de encontrar la solución óptima para el problema planteado. La colaboración entre las 2 técnicas es muy interesante de desarrollar y analizar, ayuda aun más a la comprensión de las 2 por separado. Añadiendo una breve conclusión grupal, este ejercicio permitió reforzar conocimientos en la aplicación de estos algoritmos, interpretaciones y formulación de modelos matemáticos para la resolución de problemas reales.

References

1. Algoritmo Simplex, https://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo$_simplex$.
Método Simplex, https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/metodo-simplex/.
Branch and bound, https://en.wikipedia.org/wiki/Branch$_and_bound$.