



Informe Curva de Rotación

Tarea 2

Integrantes: Diego Espinoza
Profesor: Leonardo Bronfman A.
Auxiliar: Boris Cuevas

Fecha de realización: 29 de abril de 2024
Fecha de entrega: 29 de abril de 2024
Santiago de Chile

Índice de Contenidos

1. Introducción	1
2. Curva de Rotación	2
2.1. Marco Teórico	2
2.2. Detalle del algoritmo	4
2.3. Curva de Rotación: V_{rot} vs R y $\omega(R)$ vs R	5
3. Corrugación del plano	6
3.1. Marco Teórico	6
3.2. Detalle del algoritmo	6
3.3. Corrugación del plano: $Z(R)$ vs R	6
4. Ajuste de modelo de masa	7
4.1. Marco Teórico	7
4.2. Detalle del algoritmo	7
4.3. Ajuste de los modelos a la curva de rotación (datos ajuste + gráfico)	8
5. Análisis y Conclusiones	9

Índice de Figuras

1. Espectro de velocidades para un par de coordenadas latitud $b = 0$ y longitud $l = 310$. .	2
2. Gráfico del espectro de velocidades para dos pares diferentes de coordenadas galácticas. A la izquierda se presenta el caso de casi puro ruido, en cambio, a la derecha se muestra el caso de algunas mediciones encima de 5 veces la desviación estándar.	3
3. Función de Distribución de Probabilidad que muestra que es útil considerar un criterio para la temperatura en relación a la desviación estándar.	3
4. Gráfico de la curva de rotación y de la velocidad angular para el interior del círculo solar de la vía Láctea. El Radio se muestra en Kiloparsecs, la velocidad de rotación en kilómteros por segundo y la velocidad angular en Hertz.	5
5. Gráfico que muestra la corrugación del plano de la vía Láctea interior, tanto Z como R están en Kiloparsecs.	7
6. Aquí se muestra tanto los ajustes para la curva de rotación de la vía Lactea para los cinco modelos, como la masa en función del radio de tales modelos.	8

Índice de Tablas

1.	8
------------	---

1. Introducción

En esta ocasión, se busca conocer ciertas funciones de la Vía Láctea (interna) en función del Radio, que son: la velocidad o curva de rotación, la velocidad angular de rotación de la misma y la corrugación del plano galáctico. Además, se proponen modelos aproximados para la curva de rotación, para diferentes tipos de objetos con diferentes masas (masa puntual, disco junto con masa puntual, etc) para ver cual es el mejor ajuste para la estructura de la galaxia.

La dirección de nuestra línea de visión en el plano galáctico viene dada por las coordenadas galácticas, que son las coordenadas latitud l y longitud b , i.e. hacia donde miramos, como si la tierra estuviese situada exactamente en el mismo lugar que el sol (en relación a las distancias de parsecs de la galaxia en sí).

Además, tales coordenadas se encuentran en el plano galáctico, definido por el plano que contiene una órbita aproximada del sistema solar alrededor del centro galáctico, a la que llamaremos el círculo solar. El ángulo longitud barre el área del círculo solar, mientras que la coordenada latitud barre verticalmente, por decirlo desde un punto de vista, el plano galáctico. También, el centro galáctico es un punto en el espacio, que se halla a una declinación de -33° .

Por otro lado, el Estándar de Reposo Local es la velocidad de una partícula que se mueve alrededor del plano de la vía Láctea en órbitas circulares cerradas (evidentemente, todos sus puntos están a la misma distancia del centro galáctico), que pasan por la ubicación actual del sol. En otras palabras, es la velocidad del sistema de referencia local ubicado en el sol (que para el caso del sol es $V_0 = 220 km/s$ en magnitud).

Lo que es útil a la hora de calcular la curva de rotación es lo que se conoce como la velocidad terminal. La velocidad terminal es la máxima velocidad medible en la línea de visión y es numérica e idénticamente igual a la velocidad tangencial, pues en la velocidad tangencial no existe componente perpendicular a la línea de visión, que es lo que se desea a la hora de describir la cinemática de un objeto cualquiera (i.e. conocer completamente el vector de velocidad en magnitud y dirección).

2. Curva de Rotación

Primero que todo extraemos de un cubo de datos la información pertinente. El cubo contiene en sí tres ejes, en uno la velocidad y en los otros dos las dos coordenadas galácticas. Por tanto, se debe buscar tanto una forma de encontrar las mediciones por separado del ruido como un método que integre tal criterio.

2.1. Marco Teórico

El espectro de velocidades para un par de coordenadas latitud y longitud fijos, es:

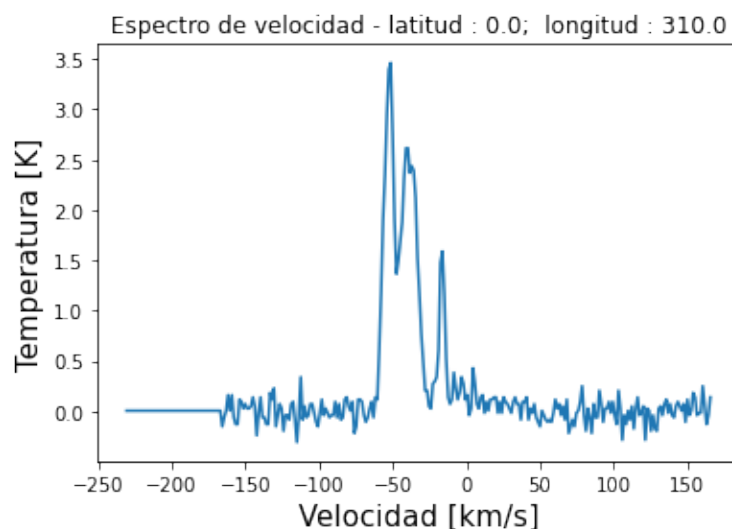


Figura 1: Espectro de velocidades para un par de coordenadas latitud $b = 0$ y longitud $l = 310$.

Antes de hablar acerca de la Curva de Rotación en sí, hablaremos de un necesario filtrado de datos. Este es necesario pues por debajo de cierto valor para la temperatura en los espectros de velocidades, solo hay ruido y no hay verdaderas mediciones, como se puede ver a continuación:

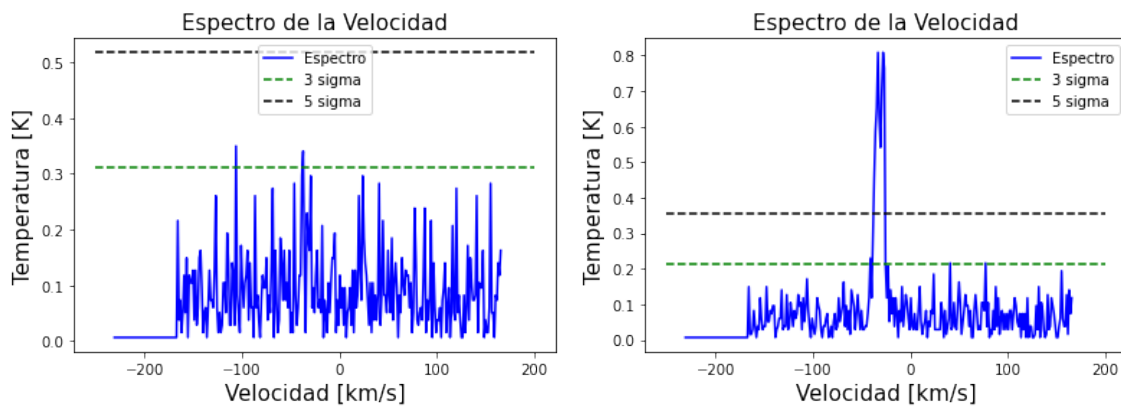


Figura 2: Gráfico del espectro de velocidades para dos pares diferentes de coordenadas galácticas. A la izquierda se presenta el caso de casi puro ruido, en cambio, a la derecha se muestra el caso de algunas mediciones encima de 5 veces la desviación estándar.

Es por esta razón que se busca hallar un método que elimine las temperaturas que oscilan en torno a 0 (que son la mayoría) y se fije solo en las altas. Para ello el criterio establecido será que se separen las altas de las bajas temperaturas por medio del valor de la desviación estándar, pues si se diseña un gráfico de distribución de frecuencias para la temperatura (para coordenadas galácticas fijas), se llega a algo semejante a una función Gaussiana:

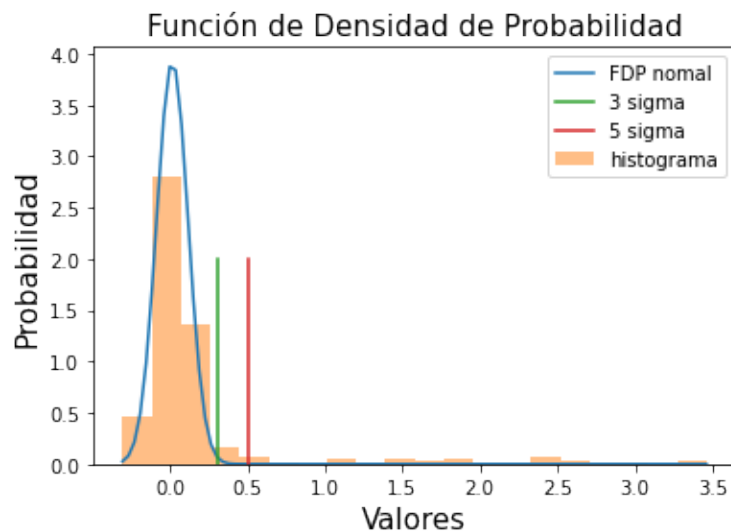


Figura 3: Función de Distribución de Probabilidad que muestra que es útil considerar un criterio para la temperatura en relación a la desviación estándar.

Y dado que esta gráfica es semejante a la gaussiana, se puede buscar la desviación estándar para la concentración de los datos:

$$\sigma(T) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(T_i - \bar{T})^2}{N}}$$

Entonces, se define el criterio para considerar un conjunto de datos como mediciones y no ruido, como que la temperatura sea 5 veces la desviación estandar, pues ahí se encuentran reunidos el 96 por ciento de los datos (a diferencia de tres sigma, en donde se encuentran concentrados el 89 por ciento):

$$T \geq 5\sigma_T$$

Y es precisamente para las velocidades correspondientes a estas temperaturas a las que llamaremos mediciones, y la velocidad terminal será aquella que para una determinada longitud tenga el mayor valor absoluto.

Ahora, en cuanto a la curva de rotación en sí, cuando apuntamos con un telescopio en la dirección (l, b) y medimos un espectro de velocidades (en donde se encuentra la temperatura), estamos en realidad midiendo objetos que se encuentran en la línea de visión. La velocidad que se capta, como ya se dijo, es la proyección paralela a la línea de visión para cierta órbita aproximadamente circular, que por lo tanto no representa su verdadera velocidad de rotación. Entonces, solamente cuando un objeto viaja paralelamente a nuestra línea de visión es aquel que es de interés para la curva de rotación, pues nos da información sustancial acerca de cómo se mueven los puntos de la galaxia interna.

Ahora bien, para un determinado par de latitud y longitud fijos, podemos notar que siempre se encontrarán tres círculos concéntricos, uno de los cuales intersecta tan solo en un punto a la recta de la línea de visión, y es el que nos interesa. Por ello, los otros dos los despreciamos o los ignoramos (sabiendo además que podrían traer problemas adicionales como la doble ambigüedad en distancias). Así, cuando vemos el espectro de velocidad, lo que nos interesa es obtener, para una medición, la velocidad de mayor valor absoluto, pues se supone que aquel es el que se corresponde con la velocidad tangencial del círculo u órbita de interés.

Además, como ya se dijo, se debe tener en cuenta el movimiento propio del sol en el universo, lo que afecta a nuestra medición de velocidades. Por tanto, la velocidad medida será la velocidad proyectada en la línea de visión sumada al movimiento propio del sol.

2.2. Detalle del algoritmo

Ahora, el algoritmo para calcular la velocidad terminal o tangencial $V_{tan}(R)$ asociadas a una trayectoria circular de radio R , es un método que consiste esencialmente de cuatro etapas:

En primer lugar, seleccionamos del cubo de datos una longitud l y recorremos cada latitud b correspondiente a la primera. Luego, para cada par latitud-longitud extraemos el espectro de velocidades, lo filtramos según el criterio $T \geq 5\sigma$ y luego se almacena la velocidad de mayor magnitud ($|V|$). En tercer lugar, del paso segundo se obtienen pares (b, V_{max}) asociados a la longitud fija. Así guardamos el par (b, V_{max}) que posea la velocidad de mayor valor absoluto, y los designamos como (b_{max}, V_{max}) . En cuarto y último lugar, se hacen los 3 pasos anteriores pero para cada longitud diferente. Luego, podemos obtener el Radio (por trigonometría) como:

$$R = R_{\odot} \sin(l)$$

Además, como se notó antes, la velocidad tangencial es igual a la suma de la velocidad máxima medible en la línea de visión con la componente de la velocidad del movimiento propio del sol $V_0 \sin(l)$, o mejor dicho:

$$V_{max} = V_{tan}(R) - V_0 \sin(l) \Rightarrow V_{tan} = V_{max} + V_0 \sin(l)$$

Ahora sí se tienen los pares R , V_{tan} , de los cuales se puede obtener la curva de rotación (pasando ángulos a radianes) haciendo una corrección a la fórmula anterior:

$$V_{tan} = V_{max} \frac{\sin(l)}{|\sin(l)|} + V_0 \sin(l)$$

Además, se puede obtener la curva de la velocidad angular de rotación, por medio de la fórmula:

$$\omega(R) = \frac{v_{tan}}{R}$$

Podemos sin embargo, llegar a este mismo resultado derivando la ecuación maestra de la dinámica galáctica, que viene dada por:

$$V_{tan} = (w(R) - w(R_\odot)) \cdot R_\odot \sin(l)$$

de donde se conoce rápidamente la velocidad angular.

2.3. Curva de Rotación: V_{rot} vs R y $\omega(R)$ vs R

Ahora, con el algoritmo descrito anteriormente, se obtiene la siguiente curva de rotación junto con la velocidad angular de rotación:

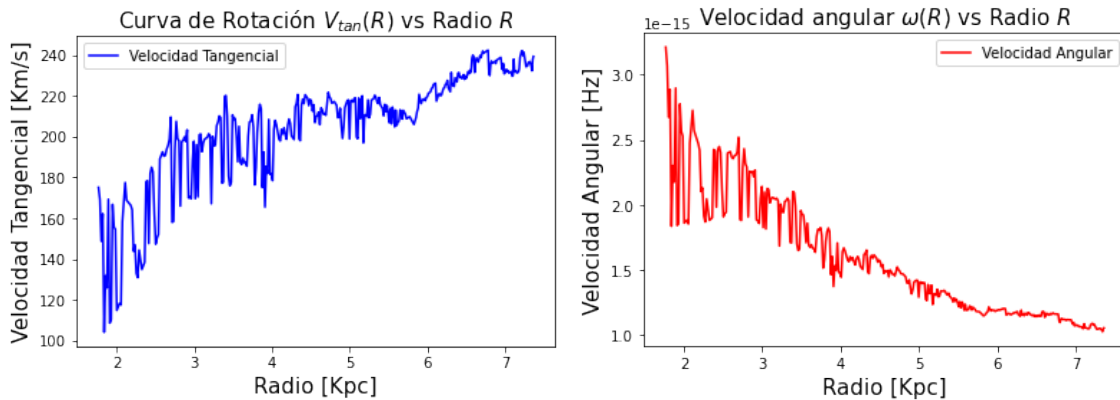


Figura 4: Gráfico de la curva de rotación y de la velocidad angular para el interior del círculo solar de la vía Láctea. El Radio se muestra en Kiloparsecs, la velocidad de rotación en kilómetros por segundo y la velocidad angular en Hertz.

Como se puede observar del segundo gráfico, la velocidad angular dice que existe rotación diferencial, es decir, no solamente la velocidad angular es decreciente monotónicamente sino que además

no sigue la galaxia la dinámica de un cuerpo sólido rígido.

3. Corrugación del plano

3.1. Marco Teórico

Ahora la corrugación del plano Z , es decir, la suerte de pliegues en la superficie de la galaxia, desde el punto de vista del borde, sirve como un criterio para determinar si es consistente el modelo de masas (que corresponde a la siguiente sección) con la estructura de la galaxia. Ésta se calcula mediante la relación trigonométrica siguiente para el ángulo latitud máxima obtenido en la parte anterior:

$$\tan(b_{max}) = \frac{Z}{D}$$

donde D es la distancia entre el punto proyectado del par de coordenadas sobre el disco galáctico, y b es la latitud máxima para cada longitud. Haciendo una aproximación para pequeños ángulos en la tangente, y despejando Z :

$$Z = D \cdot \tan(b_{max}) \approx D \cdot b_{max}$$

Esta última aproximación es válida pues los ángulos b son tan pequeños (entre -2 y 2, pero no en radianes), que la tangente puede ser aproximada como el mismo ángulo b , es decir, la distancia entre el sistema solar y el punto de interés de la galaxia es mucho mayor que la distancia denominada Corrugación, o Z .

3.2. Detalle del algoritmo

Ahora bien, se sabe que la función D , geoméricamente viene dada por la fórmula $D = R_{\odot} \cos(l)$, por tanto:

$$Z \approx R_{\odot} \cos(l) \cdot b_{max}$$

es lo que graficamos en función del radio $R = R_{\odot} \sin(l)$. Evidentemente, se usan los mismos valores para el radio que en la sección anterior de la curva de rotación (con los valores originales de la longitud), solo que b en este caso son las latitudes máximas obtenidas del algoritmo anterior, es decir, en el cual se iban guardando las velocidades máximas en magnitud y las latitudes asociadas a tales velocidades del espectro.

3.3. Corrugación del plano: $Z(R)$ vs R

A continuación se muestra la corrugación del plano de la Vía Láctea:

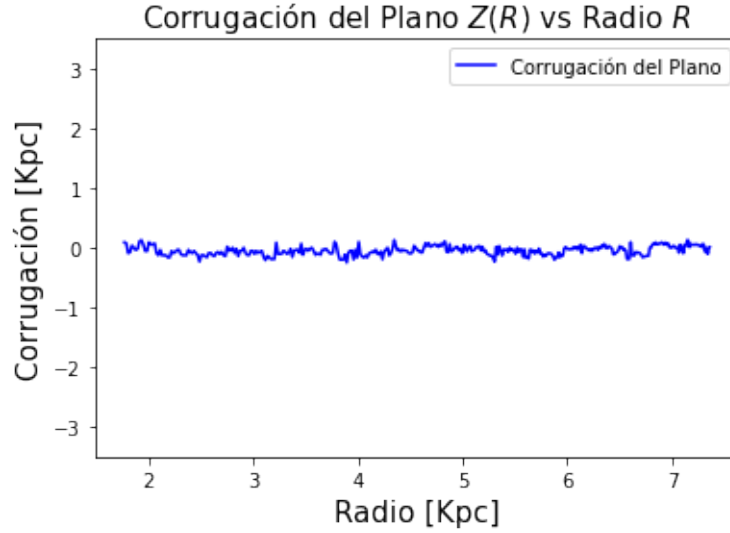


Figura 5: Gráfico que muestra la corrugación del plano de la vía Láctea interior, tanto Z como R están en Kiloparsecs.

4. Ajuste de modelo de masa

4.1. Marco Teórico

Ahora se detallarán cinco modelos de masas simples y compuestas para poder describir la estructura de la vía Láctea, por medio a un análisis de la forma de la curva de rotación. Ellos son, en orden, la masa puntual, la masa de un disco, la masa de una esfera uniforme, la masa puntual con una esfera uniforme y la masa puntual con un disco uniforme.

4.2. Detalle del algoritmo

La masa puntual es $M = M_0$, la masa del disco uniforme $M = \pi r^2 S$ con S una densidad superficial de masa en $\frac{M_\odot}{kpc^2}$, la masa de la esfera uniforme $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ con ρ la densidad volumétrica de masa en $\frac{M_\odot}{kpc^3}$, la masa puntual con una esfera uniforme $M = M_0 + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ y la masa de un disco uniforme con una masa puntual $M = M_0 + \pi r^2 S$.

La idea es buscar una función como curvefit para lograr un ajuste a la curva de rotación, es decir, se busca minimizar la función siguiente:

$$f = V_{tan} - \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

donde V_{tan} es la velocidad tangencial calculada que da como resultado la curva de rotación de la parte anterior, G es la constante de gravitación universal igual a $4.3 \cdot 10^{-6} Kpc M_\odot^{-1} (km/s)^2$, M es la masa de cada uno de los modelos y R es el radio igual a $R_\odot \sin(l)$, con l las longitudes y R_\odot es la distancia del centro de la Vía Láctea al sol, y es igual a 8.5 Kpc (así mismo, M_\odot es una masa solar). Además, para cada uno de los cinco modelos se busca minimizar esta función f, pero se hace buscando los parámetros óptimos, es decir, los que minimizan esta diferencia, y son respectivamente:

M_0 , S , ρ , M_0 con ρ y M_0 con S .

Por otro lado, se presentarán los parámetros óptimos obtenidos para cada modelo, así como la masa total de la galaxia en cada uno de ellos, haciendo uso de integrales definidas tales como:

$$M_{TOT} = \int_{R_{min}}^{R_{max}} M(R) dR$$

donde R_{min} y R_{max} son los límites de integración: el Radio mínimo y el Radio máximo igual a R_0 , mientras que R es el radio que va variando. Así también, se hará un cálculo de las desviaciones estándar de la función f , tal que sea mínima, y el valor mínimo dirá qué modelo es el más correcto.

4.3. Ajuste de los modelos a la curva de rotación (datos ajuste + gráfico)

A continuación se muestran los resultados de aplicar el algoritmo recién descrito:

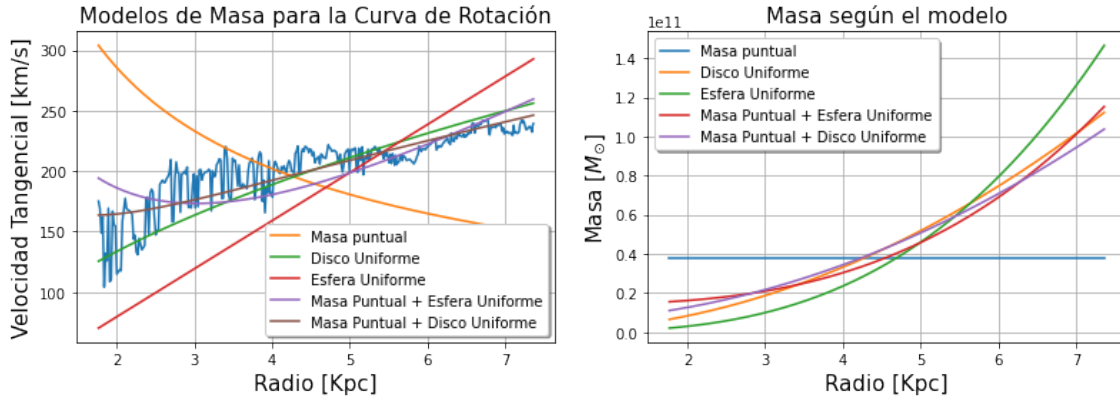


Figura 6: Aquí se muestra tanto los ajustes para la curva de rotación de la vía Láctea para los cinco modelos, como la masa en función del radio de tales modelos.

Como se puede ver del gráfico de la izquierda, el ajuste que se aproxima con menor error a la curva de rotación es la curva de la masa puntual mas el disco uniforme. Ahora se muestra la tabla con algunos valores interesantes acerca de los 5 modelos:

Tabla 1: .

Modelo de Masa	M_0 [$10^7 M_\odot$]	ρ [$10^7 \frac{M_\odot}{kpc^3}$]	S [$10^7 \frac{M_\odot}{kpc^2}$]	Masa [$10^{11} M_\odot$]	σ_f
Masa Puntual	3794.49			2.12	65.76
Masa de un Disco			65.98	2.72	18.58
Masa de una Esfera		8.77		2.69	43.98
Masa Puntual y una Esfera	1409.04	6.06		2.64	21.22
Masa Puntual y un Disco	532.3		57.82	2.68	14.64

Cualquiera que se fije, se percatará de que el modelo que tiene menor error es el que tiene menor desviación estándar en cuanto a la función f definida anteriormente, es decir, la masa puntual con el

disco, lo que confirma lo que anteriormente se supuso. Además, no podríamos distinguir con mucha claridad cuál modelo es mejor en cuanto a la masa total que predicen para la galaxia interna, pues todas están en el rango entre 2.12 y 2.72 en cientos de miles de millones de masas solares, lo que hace ver que en realidad era necesario buscar un método diferente para distinguirlas claramente, como lo fue el mejor ajuste para la curva de rotación.

5. Análisis y Conclusiones

Entonces, visto y dicho todo lo anterior, se puede no menos concluir que razonar, que al menos para el interior de la vía láctea, su estructura es semejante a una masa puntual con un disco (con la masa puntual representando al núcleo de la galaxia y el disco el lugar donde están la mayoría de las estrellas como el sol), su cinemática es diferente a la de un cuerpo sólido rígido pues posee rotación diferencial (como en el movimiento del líquido que gira en un recipiente, la velocidad angular no es igual en todos los puntos) y que no siempre es la masa total un criterio suficiente para poder descartar modelos para los interiores de las galaxias (pues, como ya se dijo, la masa de cada uno de los cinco modelos no varía mucho).

Ahora bien, si se inquiere en un modelo de mayor precisión, entonces se llegará a la conclusión de que una masa puntual con un disco extendido uniforme no es suficiente para describir a la Vía Láctea, pues como es bien sabido es una galaxia espiral que posee brazos y que por tanto la densidad de estrellas o masa no es uniforme en todos los puntos. Otra cosa que queda muy dudosa es el hecho de que la masa aumente y no parezca cambiar su curvatura, pues no existen galaxias que tengan una extensión infinita, y por lo tanto es de esperar que en algún momento la masa de la galaxia (en función del radio) decaiga hacia sus bordes.

Algo que es de interés puede ser una estimación de la cantidad de estrellas que posee el interior de la vía Láctea, simplemente diciendo que todas las estrellas son con una masa igual a una masa solar, y por lo tanto de la tabla se concluye que existen más de cien mil millones de estrellas solo en nuestro vecindario galáctico.

Además, el hecho de que la corrugación del plano sea muy pequeña en comparación con el radio de la galaxia sugiere que la estructura a gran escala es plana, idea que es corroborada por el hecho de que el mejor modelo para la curva de rotación es un disco con una masa puntual, siendo el disco evidentemente plano. E incluso si todas las estrellas no tuvieran por coordenada latitud $b=0$ (por ejemplo que la mitad de ellas estuvieran en el nivel máximo de corrugación y la otra en el mínimo), la estructura seguiría siendo aproximadamente de disco, así como su curva de rotación seguiría siendo descrita por un sistema de una masa puntual con un disco.

Por último, se puede decir que en cuanto al filtrado de datos, estadísticamente fue muy fácil distinguir entre una observación y el mero ruido que se encontraba en los espectros de velocidades para coordenadas galácticas fijas.