Álgebra Lineal

Clase 2 Curso Propedéutico
2016/06/06

Vectores

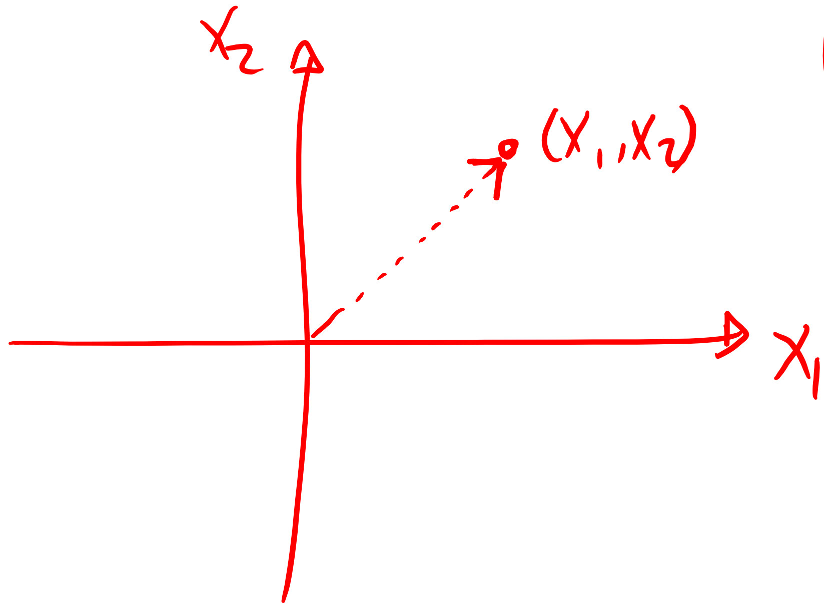
Los vectores son los elementos de los espacios vectoriales…..

Supongamos que primero fue el huevo…

- Un vector $\vec{x}$ de tamaño n es una lista ordenada de n puntos $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.
- Son flechas:

$\boxed{n=2}$

$\vec{x} = (x_1, x_2)$

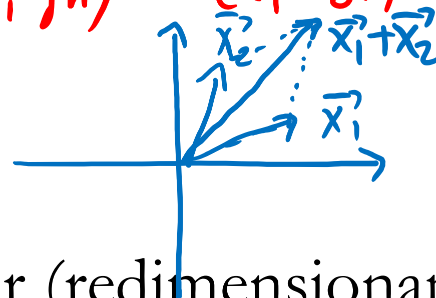


Operaciones básicas con vectores

- Suma

$+ : (\text{Vector}, \text{Vector}) \to \text{Vector}$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

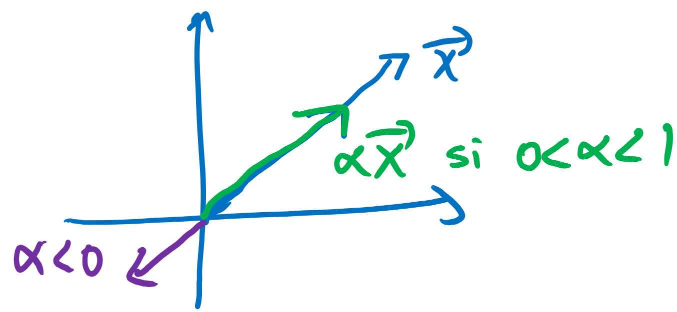


- Multiplicación por escalar (redimensionamiento)

$\alpha \in \mathbb{R}$ ← constantes se llaman escalares

$$\alpha \vec{x} = \alpha (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

$(\text{const}, \text{Vect}) \to \text{Vect}$



Si la gallina fue primero....
Espacios Vectoriales

Son conjuntos donde hay una definición de

1) suma
2) multiplicación escalar

.... una suma es una operación conmutativa, asociativa entre objetos del espacio

.... una multiplicación por escalar es una operación entre un objeto del espacio y una constante que tiene propiedades razonables.

up-to-you: Investigar los requisitos abstractos formales de una "suma" y una multiplicación escalar….

Hay otros tipos de vectores…?

- listas infinitas $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots)$
- funciones f y g funciones $f+g$ se define con la regla

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Pero por el momento veamos solo el caso de las "flechas"….

Regresando a las flechas...

Más operaciones con vectores:

Transponer

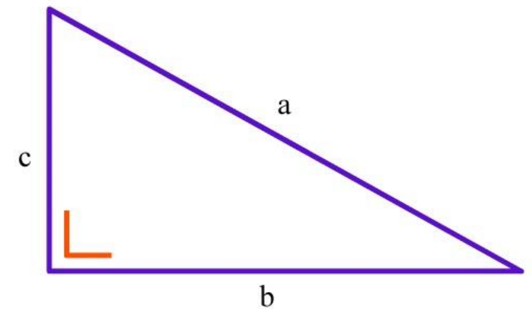
- Norma de un vector $\|x\|$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$

$\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$

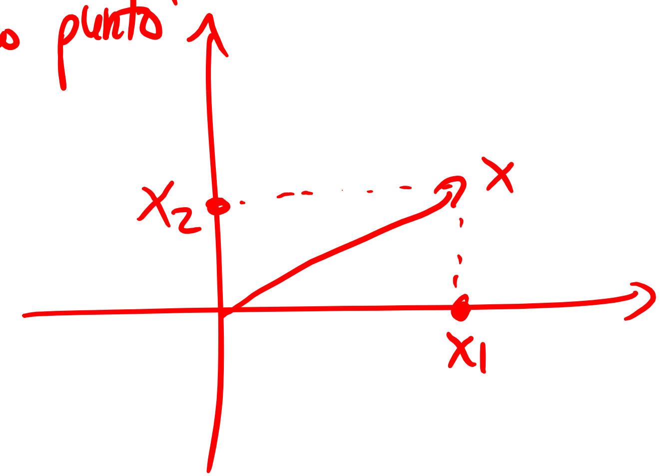
"Tamaño de X como flecha"

"Distancia del centro a X como punto"



Pythagorean Theroem

$a^2 = b^2 + c^2$



(vector, vector) $\to$ escalar

Notaciones

- Producto punto $< x, y >$ def

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = x^T y$$

$$\langle x, y \rangle = \boxed{x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i} = \sum_i y_i x_i = y \cdot x = \langle y, x \rangle$$

Observación:

¿ Relación entre norma y producto punto ?

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

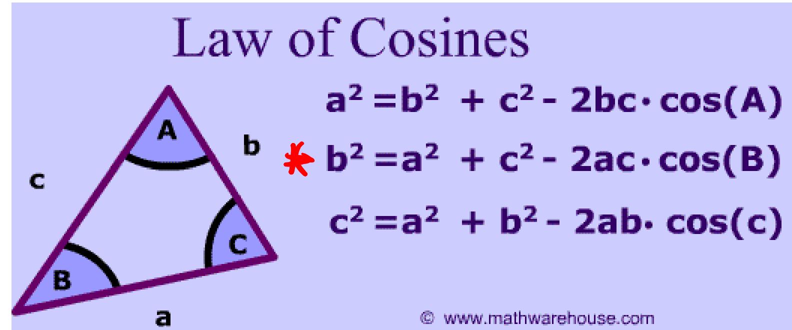
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

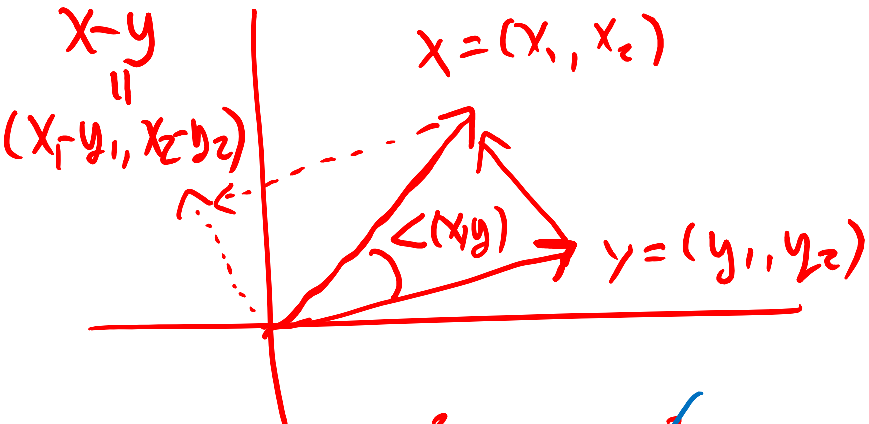
$$\langle x+z, y \rangle = (x+z) \cdot y = \sum_i (x_i + z_i) y_i$$

$$= \sum_i x_i y_i + \sum z_i y_i$$

$$= \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$$

¿Cómo interpretar el producto punto?





$$\|x-y\|^2 = \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} - \cancel{2}\,\|x\|\,\|y\|\cos(\angle(x,y))$$

$$\langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

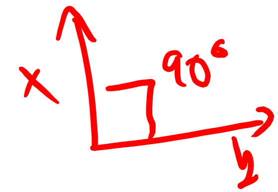
$$= \cancel{\|x\|^2} - \cancel{2}\langle x,y\rangle + \cancel{\|y\|^2}$$

$$\Rightarrow \quad \langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\|\cos(\angle(x,y))$$

Con el producto punto se define la ortogonalidad

perpendicular

- x es ort~~h~~ogonal a y si $< x, y > = 0$.



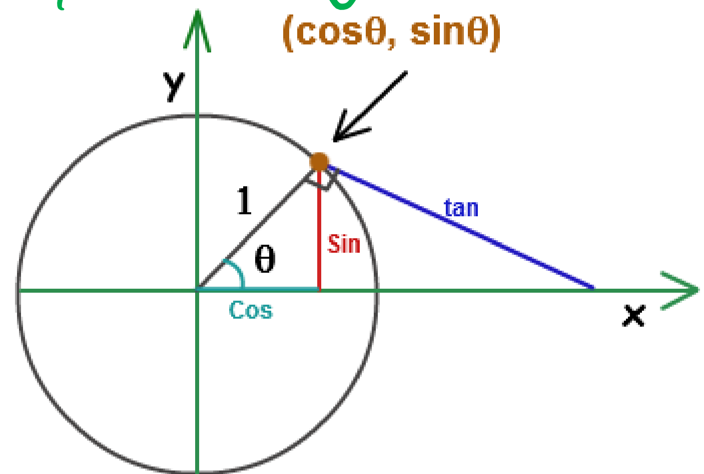
$\cos(90°) = 0$

x es perpendicular a y $\iff$ $\langle x, y \rangle = 0$

Un vector está hecho de una dirección y una magnitud

Proyección en un vector

- $proy_x(y) = \frac{<x,y>}{\|x\|^2} x$

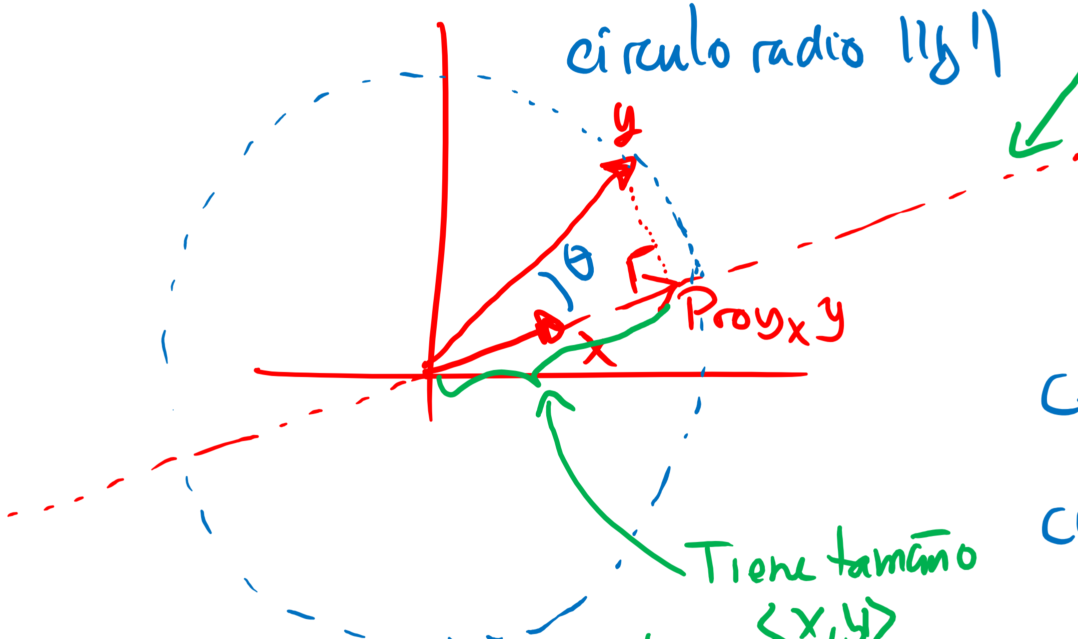


$$= \underbrace{\left(\frac{<x,y>}{\|x\|}\right)}_{\text{magnitud}} \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\text{dirección}}$$

Vamos a proyectar y en x

Dirección $\frac{x}{\|x\|}$

círculo radio $\|y\|$



$\cos = \frac{c.a}{h}$ desconocida

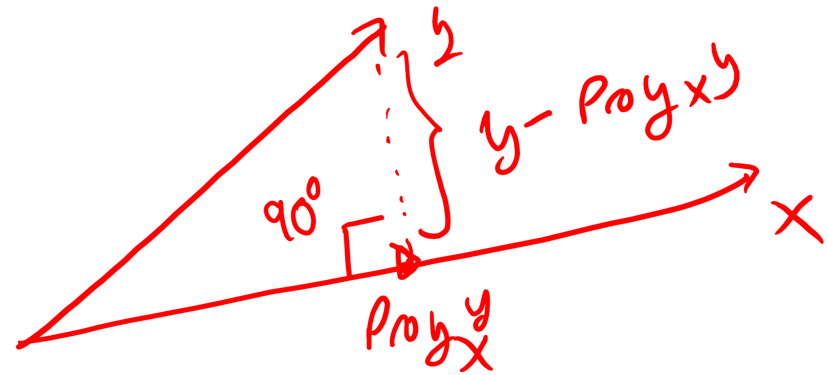
$c.a. = h \cos$

$\cos(\theta) = \frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|}$ $h = \|y\|$

Tiene tamaño $\frac{<x,y>}{\|x\|}$

Magnitud $\frac{<x,y>}{\|x\|}$

- El error de proyección es ortogonal a la proyección!!! (regresaremos a esto cuando comencemos a hablar de estadística)



$$y = Proy + (y - Proy) \qquad Proy = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} x$$

$$\langle Proy, y - Proy\rangle = \langle Proy, y\rangle - \langle Proy, Proy\rangle$$

$$= \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^4}\overset{\|x\|^2}{\cancel{\langle x, x\rangle}}$$

$$= 0$$

Combinación lineales y Vectores canónicos

- Combinación Lineal

def y es combinación lineal de $x_1, \dots, x_k$

si $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$

- Vectores Canónicos

El i-ésimo vector canónico e_i es $e_i = (\underbrace{0, \dots,}_{\text{i-ésima posición}} 1, \dots 0)$

Observación: todo vector es combinación lineal de los vectores canónicos

$y = (y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots 0) + (0, y_2, \dots 0) + \dots + (0, \dots, y_n)$

$= y_1(1, \dots, 0) + y_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + y_n(0, \dots 1)$

$= \sum_i y_i e_i$

Matrices

- Son “arreglos” rectangulares.

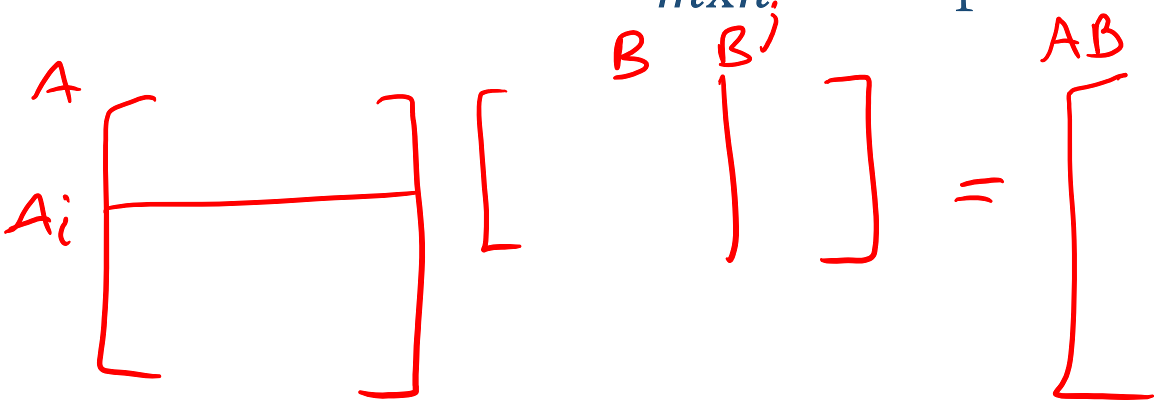
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz de dimensiones $m \times n$

- El espacio de matrices de n columnas y m filas se suele denotar R_{mxn}.

Operaciones con matrices

- Se **suman entrada por entrada** y se **multiplican por un escalar** de la misma forma que los vectores.
- Nuevo: **multiplicación matricial**
  Si $A \in R_{mxp}$ y $B \in R_{pxn}$ entonces la multiplicación AB es el elemento de R_{mxn} dado por la regla:



$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \langle A_i, B^j \rangle$$

Notaciones usuales operando con matrices

- Transpuesta

A de $m \times n$

A^T es de $n \times m$

$(A^T)_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Filas y columnas

A^j índice arriba es columna $A^j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$

A_i " abajo es fila $A_i = (\underline{a_{i1}}, \ldots, a_{in})$

Advertencia

- Todo vector en R^n puede verse como una matriz de dimensiones nx1. Sin embargo, es más conveniente pensar las matrices como "transformaciones" que convierten vectores en vectores.

Las matrices transforman vectores en vectores....

Si prenso un vector y como una matriz de $n \times 1$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Matrices transforman vectores en vectores

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad Ay = \begin{bmatrix} 2+0+0 \\ 1+0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2×3 $\quad$ 3×1 $\quad$ 2×1