# Álgebra Lineal

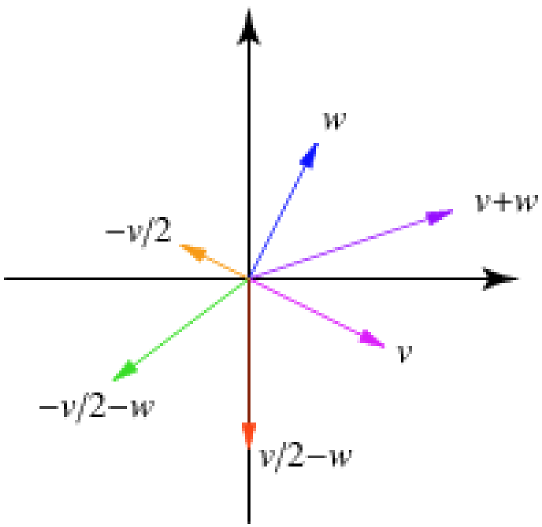
Clase 3 Curso Propedéutico

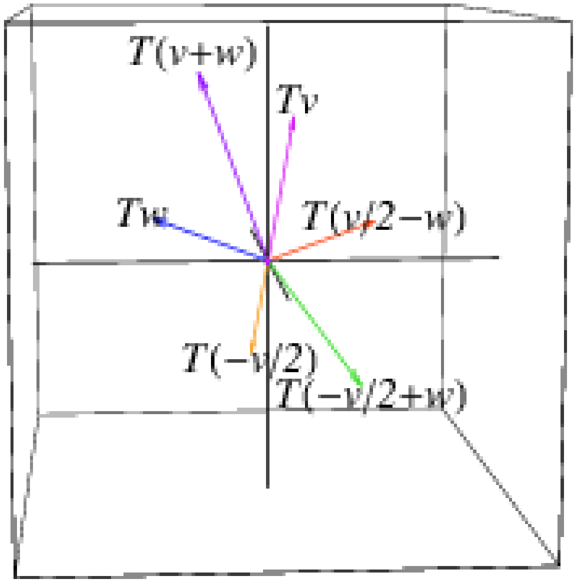
2017/07/07

# Transformaciones Lineales = Matrices

$T: R^m \rightarrow R^n$ es transformación lineal si:

1. $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$ para todos $\vec{x}, \vec{y} \in R^m$
2. $T(\alpha\vec{x}) = \alpha T(\vec{x})$ para toda $\alpha \in R$




Fuente: Wolfram Alpha

# ¿Cómo pasar de una transformación a una matriz y viceversa?

$$A e_j = \overset{A}{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}} \overset{e_j}{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = A^j$$

$T(e_j) = Ae_j = A^j$ para todo vector canónico.

$$Ax = A(x_1e_1 + \ ... + x_ne_n) = x_1A^1 + \cdots + x_nA^n$$

$$T(x) = T\left(\sum x_i e_i\right) \underset{\text{si } T \text{ lineal}}{=} x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n)$$

Si $A^j = T(e_j)$ entonces $Ax = T(x)$ ✓

Conclusión

La matriz $A$ que representa a la transformación $T$ tiene en cada columna a $T(e_j)$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

- Ejemplo: $T(x, y, z) = \left(x - \frac{y}{2}, y + z\right)$

$T(e_1) = T(1,0,0) = (1,0)$

$T(e_2) = T(0,1,0) = (-1/2, 1)$

$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,1)$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2}y \\ y + z \end{bmatrix}$

- Ejemplo 2:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + y \\ 6x \end{bmatrix}$

$T(x, y) = (3x + y, 6x)$

Otra forma de ver la multiplicación de matrices

Si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es representado por $B$ de $p \times n$

y $S: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ " " " $A$ de $m \times p$

entonces la transformación $S \circ T$ tiene rep. mat. $AB$

$$(S \circ T)(x) = S(T(x)) \qquad (AB)(x) = A(Bx)$$

Para que $S \circ T$ tenga sentido la dim. de salida de $T$ debe ser la misma que la entrada de $S$.

$$\left.\begin{array}{l} T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \\ S: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m \end{array}\right. \Rightarrow S \circ T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Buscamos la rep mat de $S \circ T$

rep $T$ $B \in \mathbb{R}_{p \times n}$
rep $S$ $A \in \mathbb{R}_{m \times p}$

$$(S \circ T)(e_j) = S(T(e_j))$$

$$= S(B^j)$$

$$= S\left(\sum_{k=1}^{p} b_{kj} e_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} b_{kj} S(e_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} b_{kj} \overbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} e_i\right)}^{A^k}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right) e_i = \begin{bmatrix} \sum_k a_{1k} b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_k a_{mk} b_{kj} \end{bmatrix}$$

j-ésima columna de $AB$

$\langle A_1, B^j \rangle$

$\langle A_m, B^j \rangle$

## Advertencia (por si no hemos insistido suficiente…)

- Todo vector en $R^n$ puede verse como una matriz de dimensiones $n$x$1$. Sin embargo, es más conveniente pensar las matrices como “transformaciones” que convierten vectores en vectores.

# La categoría de espacios vectoriales

Una categoría es una colección de objetos y "flechas" o relaciones entre ellos

categoría Vec tiene objetos espacios vectoriales

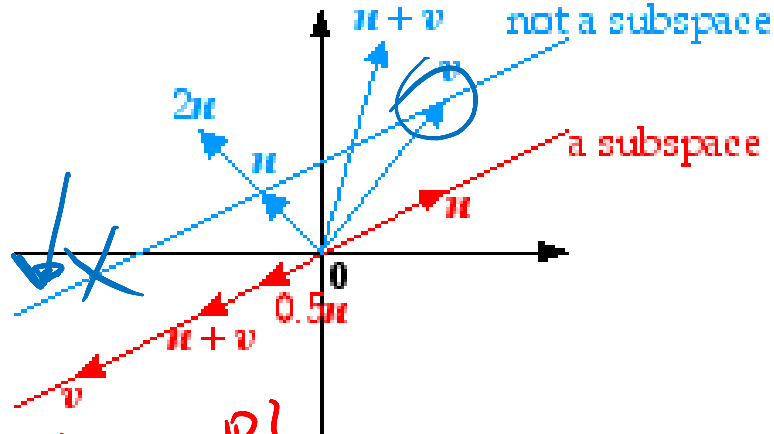
relaciones transf. lineales

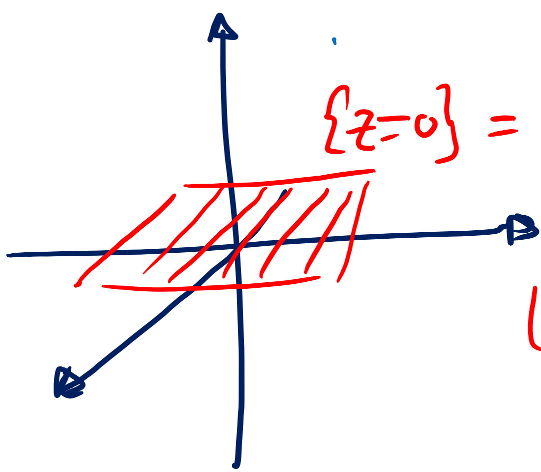
# Subespacios Vectoriales

- Un subconjunto $V \subset R^n$ es un subespacio vectorial si es cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalar.

Es decir:

cerrado
$$\begin{cases} v, w \in V \Rightarrow v + w \in V \\ \alpha \in \mathbb{R},\, v \in V \Rightarrow \alpha v \in V \end{cases}$$



$$\{z=0\} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(x_1, y_1, 0) + \alpha(x_2, y_2, 0) = (x_1 + \alpha x_2,\, y_1 + \alpha y_2,\, 0)$$

- Un subespacio vectorial $V$ es **generado** los vectores $x_1, \dots, x_k$ si para cualquier elemento $y \in V$

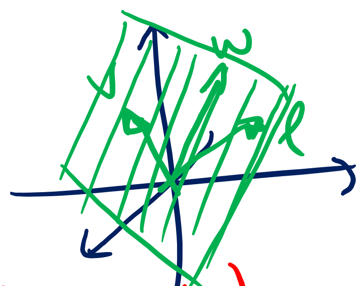
existen constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tal que

$$y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$$

$y$ es comb. lineal de $x_1, \dots, x_k$

ej los vect. canónicos $e_1, \dots, e_n$ generan $\mathbb{R}^n$

- Cualquier conjunto de vectores $x_1, \dots, x_k$ **genera** un espacio vectorial de combinaciones lineales denotado $\text{span}(x_1, \dots, x_k)$



$$\text{span}(x_1, \dots, x_k) = \left\{ v : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \ v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathrm{Span}\left(\{(1,0),(2,0),(-1,0)\}\right) = \mathrm{span}\left((1,0)\right)$

# Independencia Lineal

Dependencia lineal = redundancia

¿Cuántos elementos se necesitan para generar un espacio?.....

Necesitamos un definición nueva…

(versión formal) Un conjunto es linealmente independiente (l.i.) si:

<u>def</u> $\{x_1,\dots,x_k\}$ es l.i si $\sum \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$

(versión intuitiva) Observemos que si $y$ es generado por $x_1, \ldots, x_k$ entonces existen constants $\alpha_i$ **no todas cero** tales que

existen coefs $\{-1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ tales que

$$y - \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$$

$(-1)y + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = 0$

$\Rightarrow \{y, x_1, \ldots, x_k\}$ no es l.i

Por lo tanto, decimos que un conjunto de vectores es l.i si ningún vector es generado por otro.

en otras palabras si $\sum \alpha_i x_i = 0$ y $\exists j$ $\alpha_j \neq 0$

$$\Rightarrow \quad x_j = \sum_{i \neq j} \left( -\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \right) x_i$$

# Bases

$$\text{base} = \begin{cases} 1.\ \text{genera} \\ 2.\ \text{l.i.} \end{cases}$$

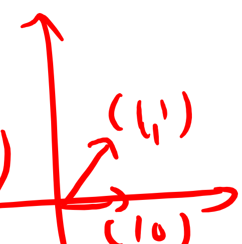
- $x_1, \ldots, x_k$ es una base de $V$ si los vectores $x_1, \ldots, x_k$ generan $V$ y si forman un conjunto l.i.
- Es fácil ver (ejercicio) que el tamaño de una base siempre es el mismo. La **dimensión** de $V$, denotado $\dim(V)$, es el tamaño es el temaño de una base de $V$

Ejemplo

1) $e_1, \ldots, e_n$ es base de $\mathbb{R}^n$

2) en $\mathbb{R}^3$, $e_1, e_2$ son base de $V = \{z = 0\}$

3) $(1,0)$ y $(1,1)$ es base de $\mathbb{R}^2$




Ejercicio: Encontrar $\alpha_1, \alpha_2$ tal que $(-2,3) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,1)$

# Kernel e Imagen de $A \in R_{m \times n}$

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$Ker(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$ $\quad Ker(A) \leq \mathbb{R}^n$

$Im(T) = \{y \in R^m | \exists x : \ Ax = y\}$ $\quad Im(A) \leq \mathbb{R}^m$

Son subespacios porque son cerrados bajo combinaciones lineales (demostrar) ← Demostrar tarea

- Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

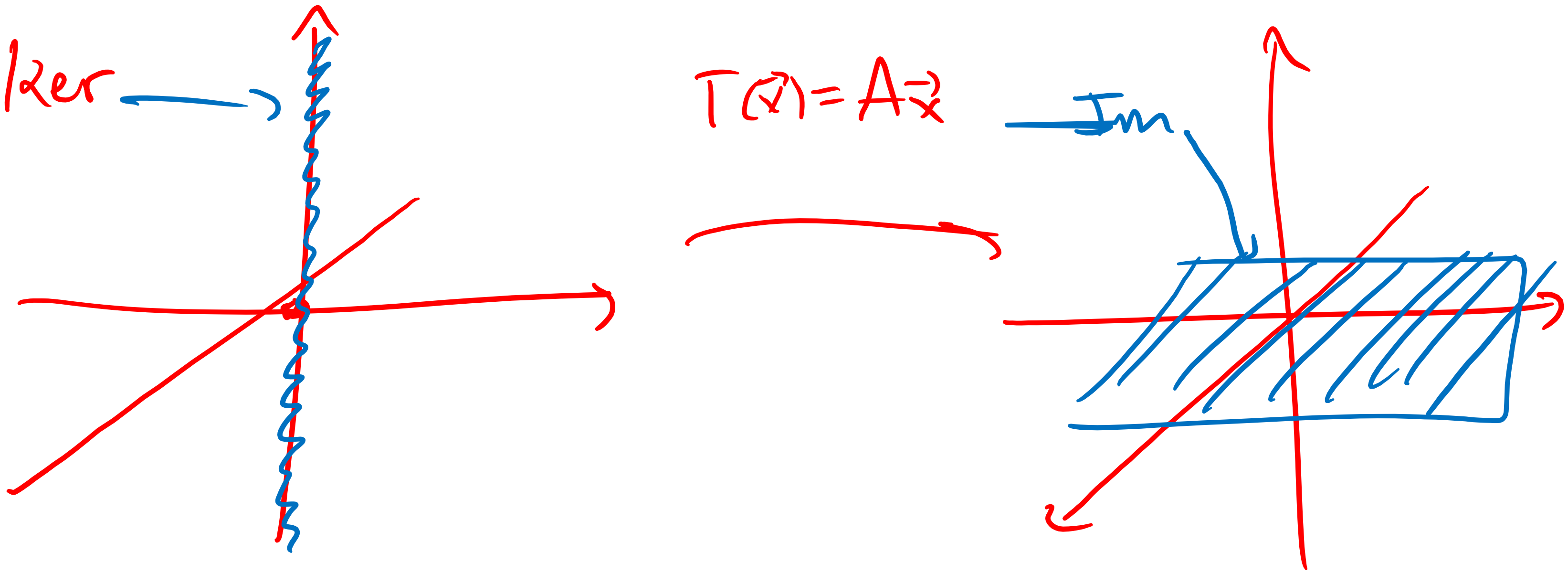
$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

- Si $\vec{x} = (x, y, z)$ y $A\vec{x} = (x + y, 2y, 0)$ $\cancel{= 0}$ ~~entonces~~:

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{aligned} x+y &= 0 \\ 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$

- $Ker(A) = \{(x, y, z) |\ x = 0, y = 0\}$
- $Im(A) = \{(x, y, z) | z = 0\}$ (piensen un poco como deducimos este punto)

- Gráficamente



# Conexión con sistemas de ecuaciones

$Ax = \boxed{x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = y}$

- $Ax = y$ es un sistema con $m$ ecuaciones y $n$ variables.

$$m \begin{cases} A_{11}x_1 + \dots + A_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + \dots + A_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

Una solución existe siempre y cuando $y \in Im(A)$!

y debe estar en el espacio columna

$Im(A) = span(A^1, \dots, A^n)$

- Supongan que $x_p$ resuelve $Ax_p = y$ y llamémosle **solución particular.**

elemento del $\ker(A)$

- El sistema $Ax = 0$ se llama **sistema homogéneo.**
- Si $x_h$ $\in \ker(A)$ es cualquier solución del sistema homogéneo entonces $\tilde{x} = x_p + x_h$ es solución del sistema original.

$$A\tilde{x} = A(x_p + x_h) = \underbrace{Ax_p}_{=y} + \cancel{Ax_h}^{0}$$

$$= y$$

- Si tenemos dos soluciones particulares entonces difieren entre ellas por una solución del sistema homogéneo:

$Ax_1 = y \quad Ax_2 = y$

$A(\underline{x_1 - x_2}) = y - y = 0 \quad \in Ker(A)$

$x_1 - x_2 \in Ker(A) \Rightarrow \quad x_1 = x_2 + (x_1 - x_2)$
$= x_2 + x_h$

- $Ker(A)$ nos dice **el tamaño** del espacio de soluciones!!!
- Encontrando UNA solución particular y resolviendo el sistema homogéneo encontramos TODAS las soluciones.
- ¿Cuándo hay solución única?

$Ker(A) = \{0\}$