Álgebra Lineal

Clase 4 Curso Propedéutico
2016/06/12

Teorema de Rango-Nulidad

El rango es $ran(A) \coloneqq \dim(Im(A))$

La nulidad es $nul(A) \coloneqq \dim(Ker(A))$

Teorema: $Si\ A \in R_{m \times n}$ entonces

$$n = ran + nul$$

Recordar el ejemplo gráfico con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$………

Teorema: *Si* $A \in R_{m\times n}$ entonces

$$n = ran + nul$$

Idea de la prueba:

- $x_1, \dots, x_{nul}$ una base de $Ker(A)$.

- Es posible completar esta base a una base

$$x_1, \dots, x_{nul}, x_{nul+1}, \dots, x_n$$

de todo R_n agregando $n - nul$ vectores l.i.

- Se demuestra que $Ax_{nul+1}, \dots, Ax_n$ es una base de $Im(A)$. Esto terminaría la demostración.

- Se demuestra que $Ax_{nul+1}, \ldots, Ax_n$ es una base de $Im(A)$.
- 1) Genera todo $Im(A)$ ✓
- 2) Es un conjunto l.i.

- Intentar el punto 1 de tarea 2:

Punto 2: $\sum_{nul+1}^{n} \alpha_i (Ax_i) = 0 \Rightarrow z = \sum_{nul+1}^{n} \alpha_i x_i \in Ker(A)$

$\Downarrow$

$z \in span\{x_1, \ldots, x_{nul}\}$

$\Rightarrow z = \sum_{1}^{nul} \alpha_i x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{nul} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{nul+1} \alpha_i x_i = 0$

$\exists \alpha_i$

$\Uparrow$

$\forall i \; \alpha_i = 0$ pues $x_1, \ldots, x_n$ li

$\| $

$A\left(\sum_{nul+1}^{n} \alpha_i x_i\right) = 0$

Matrices Inversas

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

- La matriz identidad $I_n \in R_{n \times n}$ es la matriz que solo tiene 1's en la diagonal.
- Claramente $AI_n = I_m A = A$ para toda $A \in R_{m \times n}$
- La inversa una matriz **cuadrada** A es la matriz B que cumple que $AB = BA = I_n$.

$$A(Bx) = (AB)x = I_n x = x$$

- No todas las matrices son invertibles pero si la inversita existe entonces es **única**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{I_n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Normas

- ¿Qué es una norma?
- ***Norma*** es una “fancy word” para **“tamaño”** o **“longitud”.**
- Uno <u>abstrae</u> las propiedades que una “longitud” o tamaño debe tener.

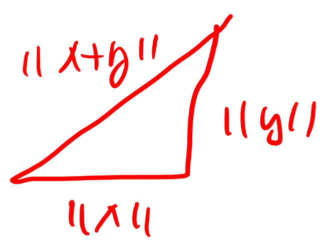
- Úna función $\|\cdot\|$ es una norma en un conjunto V si

1. $\|x\| \geq 0$ para toda $x \in V$

2. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para toda $x \in V, \alpha \in R$

4. (la más famosa) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$



Ejemplo: normas-p en R^n (la norma-2 es la norma usual)

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum |x_i|$$

Normas matriciales

- No existe una única forma de definir una norma en el espacio de matrices (afortunadamene un teorema de álgebra lineal que no vamos a ver… dice que todas las normas en espacios vectoriales de dimensión finita son equivalente en cierto sentido…)

Sin embargo hay dos estrategias comunes:

A) normas inducidas por normas de vectores (la norma inducida por la norma Euclidiana usual es la más importante)

B) norma entrada-por-entrada (la norma de Frobenius es la más importante) (fácil de entender)

Pensar a la matriz como un vector, desenrollar la matriz.

ej $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$

Normas inducidas

- Geométricamente son las mas interesantes pero son difíciles de calcular.
- La norma matricial ||·|| inducida por la norma vectorial ||·|| es

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

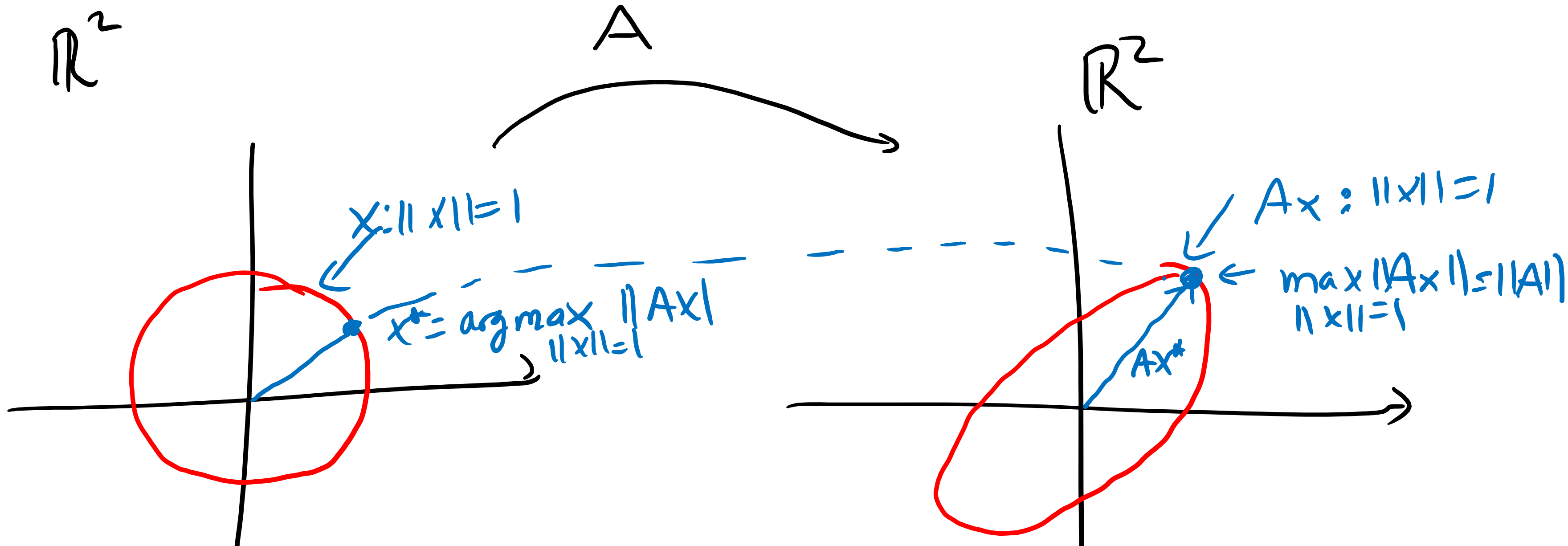
input matriz input vector

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$$

$$\max_x \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\|$$

Es la *"máxima distorsión de un vector unitario"*

La más común es la norma 2



En norma 2: $\|x\|_2 = 1 \iff \sqrt{\sum x_i^2} = 1 \iff \sum x_i^2 = 1$

$$\overset{\text{matriz}}{\|A\|} \overset{\text{def}}{=} \max_{\underset{\text{vector}}{\|x\|=1}} \overbrace{\|Ax\|}^{\text{vector}}$$

norma vectorial <u>induce</u> norma matricial

Norma entrada-por-entrada

- Son las más fáciles de calcular y por lo tanto las más usadas.
- La p-norma entrada por entrada es:

$$\|A\|_p = \left(\Sigma_{i,j} |A|_{i,j}^p\right)^{1/p}$$

Si $p = 2$ entonces se llama norma de Frobenius, a veces denotado $\|A\|_F$

Es como si pensaramos la matriz como un vector muy largo de $m \cdot n$ de largo.

Determinantes

- ¿Qué son?
- Sea $A \in R_{n\times n}$ una matriz cuadrada:

Ni siquiera intenten ver la fórmula oficial:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in Perm(1,\ldots,n)} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

$$Perm\{1,2\} = \left\{\begin{matrix} + & 1\,2 \\ - & 2\,1 \end{matrix}\right\}$$

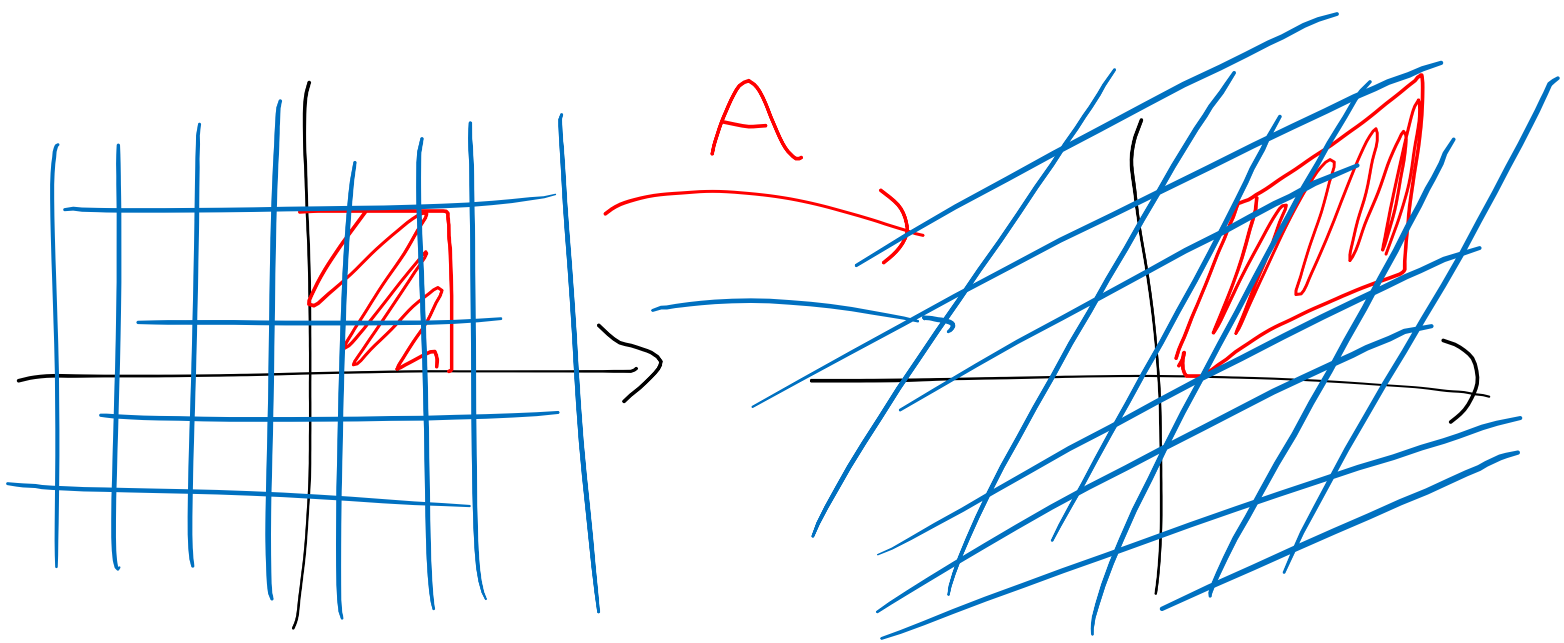
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = +ad - bc$$

Interpretación Geométrica

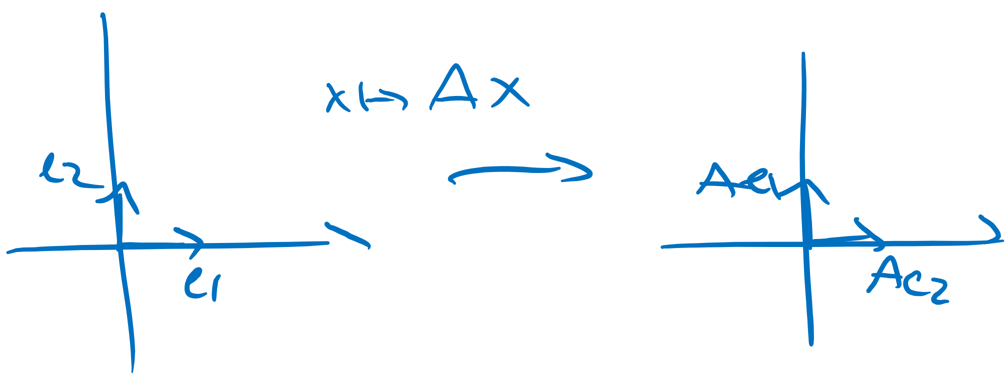
- Mejor interpretación: el determinante es la distorsión del volumen/área tras aplicar la transformación. Es muy fácil de ver en el caso diagonal!

$$\det(A) = \frac{\text{nueva área}}{\text{área original}}$$



- Una observación: los volúmenes pueden ser negativos!! (*si se cambia la "orientación" de los ejes)*

- *Ej*: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(A) = -1$



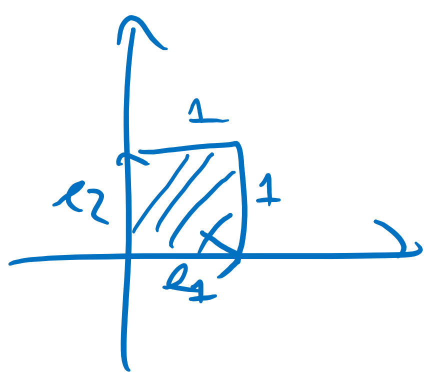
- Primero veamos que pasa si la matriz es diagonal

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

- La formula del determinante se reduce a

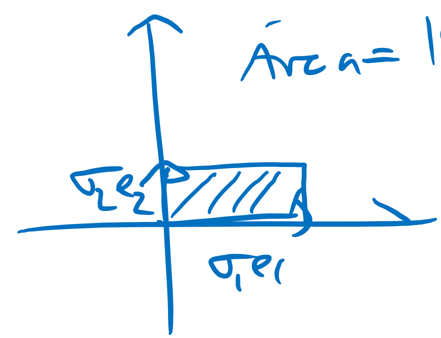
$$\det(D) = \prod d_i = d_1 \times \cdots \times d_n$$

- En este caso es fácil ver que el determinante es el cambio en el volumen.



diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$



Área $= |\sigma_1 \sigma_2|$

base $= \|\sigma_1 e_1\| = |\sigma_1| \, \|e_1\| = |\sigma_1|$

altura $= \|\sigma_2 e_2\| = |\sigma_2|$

Determinantes e invertibilidad

- Una matriz A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$.

- Las matrices invertibles se llaman también **no singulares.**