Resolución del Juego de la Torre de Hanoi dada cualquier Configuración Inicial.

Lugo, Julio[1]; Páez, Elvis[2], Berti, Antonio[3], González, Darwin[4]

[1 2 3 4] *Escuela de Ingeniería de Sistemas, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela*

Resumen: Se realizó un análisis y estudio del clásico juego de la Torre de Hanoi dada cualquier configuración ingresada por el usuario. Se determinó que existen $\mathbf{3^n}$ jugadas válidas posibles dentro de una partida de *n* discos, las cuales al desarrollarse como un grafo se obtiene una topología fractal derivada del triángulo de Pascal conocida como *Triángulo de Sierpinski*. A través del estudio de la recurrencia del juego per sé, se obtuvo que el número mínimo de pasos para resolver el problema está dado por la expresión de recurrencia $\boldsymbol{T(n) = 2^n - 1}$. El algoritmo utilizado para resolver el problema se basó en una generalización del juego clásico, en donde se debía llevar el n-ésimo disco de la configuración a la z-ésima torre. Dicho algoritmo fue programado en el lenguaje de programación C++ y desarrollado en la plataforma de creación de aplicaciones QtCreator Apuntalando a esta heurística, se obtuvo una solución óptima coincidente con un recorrido sobre caminos mínimos ejecutado sobre el fractal resultante.
Palabras clave: Hanoi, recurrencia, recursión, arbitrario, solución.

1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo a Hofstadter (1985), la Torre de Hanoi es un juego matemático que consiste de tres varillas y un número de discos perforados de distintos tamaños, los cuales pueden colocarse en cualquier varilla. El juego clásico comienza con todos los discos en una pila de orden ascendente, con todos los discos del juego formándola, con el disco más pequeño en el tope, esta posición es conocida como la forma cónica. El objetivo del juego es mover la pila entera a otra, siguiendo las siguientes reglas:

- Solo un disco se puede mover a la vez.
- Cada movimiento consiste en tomar el disco superior de una de las pilas y colocarlo en el tope de otra pila.
- Ningún disco puede colocarse encima de otro más pequeño.

Por inducción matemática, se puede obtener que la relación de recurrencia para la resolución del problema es:

$$T(n) = 2T(n-1) + 1, \forall (n > 0) \qquad (1)$$

Cuya expresión en forma cerrada, viene dada por la expresión exponencial:

$$T(n) = 2^n - 1 \qquad (2)$$

Haciendo uso de técnicas de conteo, se descubre que el número de jugadas válidas posibles en un juego, viene dado por la expresión:

$$N^{\underline{o}}\ de\ jugadas\ posibles = 3^n \qquad (3)$$

Dicha expresión se puede observar mediante el triángulo de Sierpinski, como se aprecia en la imagen:

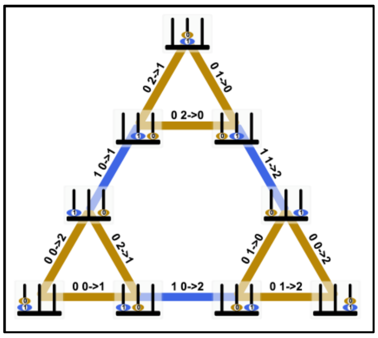

Figura 1. Triángulo de Sierpinski para un juego con dos discos (Fuente: https://camo.githubusercontent.com/f7205976ceed07bf2e219102bff254a5e3c07c5f/687474703a2f2f692e696d6775722e636f6d2f4875716a31774c2e706e67)

2. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

El objetivo de esta asignación fue desarrollar utilizando un algoritmo recursivo, una forma de solucionar una torre de Hanoi que, en lugar de estar dada inicialmente por una forma cónica sobre una varilla, podía estar dada en cualquier configuración de todas las posibles. La estrategia para resolver el problema se resumió en: *"agarra todos los discos donde quiera que estén y forma la torre en Z"*. Se procedió a resolver el problema mediante el siguiente algoritmo:

1. Si $n = 0$, fin.
2. Sea X el poste donde se encuentra el disco *n*. Si X = Z, forma la torre 1...$n-1$ (usando este mismo algoritmo) en Z y termina.
3. Sea Y el poste que no es ni Z ni X. Forma la torre 1...$n-1$ en Y (usando este mismo algoritmo).
4. Lleva el disco *n* de X a Z.
5. Forma la torre 1...$n-1$ en Z (usando este mismo algoritmo, o bien otro de los vistos antes, puesto que la torre 1...$n-1$ ya está formada en Y).

Este algoritmo, luego desarrollado en C++ sobre el entorno de desarrollo QtCreator, mostró resultados satisfactorios y consistentes a la teoría expuesta.

1 jmanuellugo96@gmail.com
2 elvispaez18@gmail.com
3 tplaza15@g.mail.com
4 darwingb66@gmail.com