INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — II SEMESTRE 2013
ESCUELA DE MATEMÁTICA — TIEMPO 2 HORAS 30 MIN
PROBABILIDADES — VALOR 42 PTS

PARCIAL III

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. No son procedentes las apelaciones sobre preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con témpera (corrector). Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. En una reunión hay cuatro hombres y tres mujeres. Se eligen personas al azar una a una hasta completar una pareja. Si X es la variable aleatoria que indica el total de personas que se eligen, determine:

   (a) El rando de la variable X. (2 puntos)

$$\begin{aligned} \Omega &= \{hm, mh, hhm, mmh, hhhm, mmmh, hhhhm\} \\ R_X &= \{2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

   (b) La función de probabilidad de X. (4 puntos)

$$P(X=2) = P(hm \cup mh) = P(hm) + P(mh) = P(h)P(m\,|h) + P(m)P(h\,|m) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} = \frac{4}{7}$$

$$P(X=3) = P(hhm \cup mmh) = P(hhm) + P(mmh)$$
$$= P(h)P(h\,|h)\;P(m\,|hh) + P(m)P(m\,|m)\;P(h\,|mm)$$
$$= \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{7}$$

$$P(X=4) = P(hhhhm \cup mmmh) = P(hhhm) + P(mmmh)$$
$$= P(h)P(h\,|h)\;P(h\,|hh)\;P(m\,|hhh) + P(m)P(m\,|m)\;P(m\,|mm)\;P(h\,|mmm)$$

$$P(X=5) = P(hhhhm) = 1 - \frac{4}{7} - \frac{2}{7} - \frac{4}{35} = \frac{1}{35}$$

$$f_X(k) = \begin{cases} \frac{4}{7} \; si \; k=2 \\ \frac{2}{7} \; si \; k=3 \\ \frac{4}{35} \; si \; k=4 \\ \frac{1}{35} \; si \; k=5 \end{cases}$$

2. Considere la variable aleatoria continua X con función de densidad f_X definida por

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x+k} \; si \; x \geq 2 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

   (a) Verifique que $k = 6$. (4 puntos)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= \int_2^{\infty} 3e^{-3x+k}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b 3e^{-3x+k}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{3e^{-3x+k}}{-3}\Big|_2^b \\
&= \lim_{b\to\infty} -e^{-3x+k}\Big|_2^b = \lim_{b\to\infty}\left(e^{k-6}-e^{k-3b}\right) = e^{k-6} = 1 \\
\Rightarrow\ & k = 6
\end{aligned}$$

(b) Demuestre que la función generadora de momentos de la variable X es $m_X(t) = -\dfrac{e^{2t}}{t-3}$ si $t < 3$. (6 puntos)

$$m_X(t) = E(e^{xt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f_X(x)dx = \int_2^{\infty} e^{xt}e^{-3x+6}dx = e^6\int_2^{\infty} e^{(t-3)x}dx =$$

$$e^6\lim_{b\to\infty}\frac{e^{(t-3)x}}{t-3}\Big|_2^b = e^6\left(\lim_{b\to\infty}\frac{e^{(t-3)b}}{t-3} - \frac{e^{(t-3)2}}{t-3}\right) = -e^6\frac{e^{(t-3)2}}{t-3} = -\frac{e^{2t}}{t-3} \text{ siempre que } t<3$$

3. Se ha determinado que el tiempo en minutos que tarda una gasolinera, llamada Fast Station, en llenar un tanque de gasolina sigue una distribución exponencial con media de 4 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que Fast Station tarde más de 6 minutos en llenar un tanque? (4 puntos)

$$\begin{aligned}
\text{Sea } T &: \quad \text{el tiempo, en minutos, que tarda Gas Station en llenar un tanque} \\
T &\sim Exp\,(\lambda) \\
E\,(T) &= \frac{1}{\lambda} = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \\
Var\,(T) &= \frac{1}{\lambda^2} = 16 \\
P\,(T>6) &= 1 - P\,(T\leq 6) \\
&= 1-\left(1-\exp\left(-\frac{1}{4}\cdot 6\right)\right) = e^{-\frac{3}{2}} = 0.223\,13
\end{aligned}$$

4. La cantidad de agua en las botellas Manantial Puro sigue una distribución Normal con un promedio de 1005 ml por botella y una desviación estándar de 50 ml. Las botellas, antes de ser distribuidas a los puntos de venta, pasan por una inspección donde son desechadas aquellas que tienen una cantidad inferior a 950 ml

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que una botella sea desechada? (3 puntos)

$$X \sim N\left(1005, 50^2\right)$$
$$P\,(X \leq 950) = \phi\left(\frac{950-1005}{50}\right) = \phi\,(-1.1)$$

(b) Se quiere empacar las botellas en cajas, ¿cuántas botellas como mínimo deben ponerse en cada caja para que la cantidad total de agua en la caja sea mayor a 10 000 ml, con una probabilidad superior al 95%? (6 puntos)

$$S_n \sim N\left(1005n, 50^2n\right)$$
$$P\,(S_n > 10000) = 1-\phi\left(\frac{10000-1005n}{50\sqrt{n}}\right) > 0.95$$
$$\phi\left(\frac{10000-1005n}{50\sqrt{n}}\right) < 0.05 \Longrightarrow$$
$$\frac{10000-1005n}{50\sqrt{n}} < -1.645 \Longrightarrow n > 10.21 \quad R/\quad 11$$

5. En una canasta hay solo bolas rojas y blancas. Sea p la probabilidad de extraer una bola blanca de la canasta. De 100 extracciones con reposición se sabe que la probabilidad de obtener a lo sumo 30 bolas blancas es aproximadamente del 40%. Determine el valor aproximado de p. (5 puntos)

$$X \sim B(100, p)$$
$$\text{Suponga que } np \geq 5, nq \geq 5$$
$$P(X \leq 30) = P(X \leq 30.5) = \phi\left(\frac{30.5 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right) = 0.4$$
$$\Longrightarrow \frac{30.5 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} = -0.25$$
$$\Longrightarrow p = 0.316\,629$$

6. El tiempo que tarda una persona en contestar una encuesta telefónotica sobre las próximas elecciones de la empresa UNI es, en promedio, 200 segundos con una desviación promedio de 20 segundos. La empresa contrató encuestadores para tal fin.

   (a) Si un encuestador realiza 30 encuestas, ¿Cuál es la probabilidad de que tarde en promedio al menos 190 segundos en cada encuesta? (4 puntos)

$$TLC : \overline{X} \underset{aprox}{\sim} N\left(200, \frac{20^2}{30}\right)$$
$$P\left(\overline{X} \geq 190\right) = 1 - P\left(Z < \frac{190 - 200}{\sqrt{\frac{20^2}{30}}}\right) = 1 - \phi(-2.738\,6)$$

   (b) Si un encuestador realiza 55 encuestas, ¿Cuál es la probabilidad de que tarde más de tres horas en realizarlas? (4 puntos)

$$TLC : S_{55} \underset{aprox}{\sim} N\left(200 \cdot 55, 20^2 \cdot 55\right)$$
$$P(S_{55} > 10\,800) = 1 - \phi\left(\frac{10\,800 - 200 \cdot 55}{\sqrt{20^2 \cdot 55}}\right) = 1 - \phi(-1.348\,40)$$