INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMATICA — TIEMPO 2 HORAS 20 MINUTOS
PROBABILIDADES — VALOR 46 PTS

SEGUNDO PARCIAL, I-2013

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Las preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con tempera (corrector) no podrán apelarse. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = k\frac{2^{2x+1}}{7^{x-1}} \quad \text{con } x = 0, 1, 2, 3, ...$$

   Determine el valor de k. (5 puntos)

2. Todos los sábados, el finalista del programa Sábado Pequeño tiene la opción de ganar un automóvil. Para ello se tienen 10 sobres: 6 marcados con la palabra CHACAL y los otros en blanco. El concursante debe elegir al azar 5 sobres y si obtiene a lo sumo 2 sobres con CHACAL se gana el automóvil.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un finalista se gane el automóvil? (5 puntos)

   (b) Un programa se considera atractivo si el finalista se gana el automóvil. De diez programas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos tres sean atractivos? (5 puntos)

   (c) En 100 programas, ¿aproximadamente cuántos programas se espera que sean atractivos? (3 puntos)

3. Un ingeniero elaboró una máquina para hacer puertas de $1m \times 50cm$. La máquina elabora las puertas de forma secuencial, donde el proceso de fabricación de cada puerta se da en dos fases: En la primera, se construye a partir de aserrín, y en la segunda fase, la pinta. El número de imperfecciones que tiene una puerta elaborada en la primera fase sigue una distribución de Poisson con un promedio de 5 imperfecciones. Si una puerta tiene más de 10 imperfecciones es desechada. Además, para ahorrar pintura, en la segunda fase, si la máquina detecta una puerta que se debe desechar, no la pinta y se apaga para que se quite esta puerta, con el inconveniente de que no se puede encender hasta el día siguente.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que una puerta sea desechada? (3 puntos)

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un día al poner la máquina a funcionar, ésta elabore solo 25 puertas pintadas en forma continua y se apague? (5 puntos)

4. Sean X y Y variables aletorias discretas tales que

$$m_X(t) = \left(\frac{e^t + 1}{2}\right)^{20}, \qquad Y = X^2 - 5X + 6.$$

(a) Determine la esperanza y variancia de X. (6 puntos)

(b) Determine la esperanza de Y. (3 puntos)

5. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \frac{4^x e^{-4}}{2\,(x!)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \quad si\ x = 0, 1, 2, 3, ...$$

Pruebe que la función generadora de momentos de X es

$$m_X(t) = \frac{e^{4e^t - 4}}{2} + \frac{1}{2\,(2 - e^t)}$$

si $e^t < 2$. (6 puntos)

6. En una canasta hay 6 bolas rojas y 4 bolas blancas. Suponga que se hacen extracciones, con reposición, de la canasta hasta obtener una bola extraída de color distinto a las bolas anteriormente extraídas. Sea X el número total de extracciones realizadas. Por ejemplo, $X = 5$ significa que se extrajeron 4 blancas y una roja al final, o 4 rojas y una blanca al final. Determine el rango y la función de distribución de X. (5 puntos)