$\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática
$\mathcal{A}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación

$\mathcal{T}$iempo: 2 horas y 30 minutos
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 35 puntos
$\mathcal{A}$gosto de 2015

$\mathcal{I}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Verifique que A satisface la ecuación $A^2 - 4A - 5\mathcal{I} = \mathcal{O}$ (3 pts)

   (b) Utilizando el resultado del inciso anterior, demuestre que $A^{-1} = \frac{1}{5}\left(A - 4\mathcal{I}\right)$ (2 pts)

   (c) Halle A^{-1} (2 pts)

2. Sean A y B matrices de tamaño $p \times q$, y sea C alguna matriz de tamaño $p \times m$. Demuestre, entrada por entrada, que $A^tC + B^tC = (A+B)^t\,C$ (4 pts)

3. Se dice que dos matrices P y Q son *anticonmutativas* si satisfacen $PQ = -QP$ y se dice que son *conmutativas* si satisfacen $PQ = QP$.

   Si A, B y C son matrices tales que A y C son anticonmutativas y, además, B y C son conmutativas, demuestre que $(AB - BA)\,C = C\,(BA - AB)$ (4 pts)

4. Se dice que una matriz P es *idempotente* si $P^2 = P$.

   (a) Determine si la matriz $Q = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ es idempotente o no. (2 pts)

   (b) Demuestre que si se cumple $AB = A$ y $BA = B$, entonces las matrices A y B son matrices idempotentes. (3 pts)

5. Si A y B son matrices no singulares, demuestre que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (3 pts)

$\alpha|A|$

$-|A|$ swith Filas

6. Si se sabe que $A \sim B$ y que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -7$, halle $|B|$ donde (4 pts)

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{-2a}{5} & \dfrac{-2b}{5} & \dfrac{-2c}{5} \\ 3a + \dfrac{x}{2} & 3b + \dfrac{y}{2} & 3c + \dfrac{z}{2} \end{pmatrix}$$

7. Utilice inducción matemática y demuestre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3 pts)

8. Utilizando el método Gauss–Jordan, determine el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales: (5 pts)

$$\begin{cases} -x + 2y + z - 3w = -3 \\ 2x - 4y + z = 6 \\ x - 2y + w = 3 \end{cases}$$