INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
Álgebra Lineal para Computación (MA-2405)

*Tiempo: 2 h. 20 m.*
*Total: 33 puntos*
*Fecha: 10 de enero de 2012*

# SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (Verano 2011-2012)

1. En el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_{17}^*, \cdot)$:

   (a) Calcule el resultado de $\left(\dot{13}\right)^{-1} \cdot \left[\dot{4} \cdot \left(\dot{2}\right)^{-3}\right]^{-2}$ **(2 puntos)**

   (b) Calcule, si es posible, un subgrupo de orden cuatro y otro de orden seis. **(3 puntos)**

2. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación $\otimes$ como $(a, b) \otimes (c, d) = (a + c + 2, 3bd)$. Si se sabe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ es grupo abeliano:

   (a) Determine la fórmula explícita de $(a, b)^{-1}$ **(3 puntos)**

   (b) Calcule el valor exacto de $(2, -1)^{-3} \otimes (5, -\frac{1}{4})^2$ **(2 puntos)**

3. Si se sabe que $\{u, v, w, z\}$ es una base del espacio vectorial $V$. Determine si el conjunto $\{v - 3u + z, 2w - v + z, 2v + u - w, -z - 2v + w\}$ es o no, base de $V$. **(3 puntos)**

4. Considere el subespacio de $P_4$ dado por $H = \{p \in P_4 \ / \ p'(1) = 0 \wedge p(1) = 0\}$. Determine una base de $H$ y calcule su dimensión. **(5 puntos)**

5. Determine si el conjunto $\{(-1, 2, 1), (1, 0, 2), (3, -4, 0), (2, -2, 1)\}$ genera o no al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. **(4 puntos)**

6. Demuestre que el conjunto de las matrices simétricas es un subespacio vectorial del espacio vectorial $(M_n, +, \cdot)$. **(4 puntos)**

7. Sea $D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2 \ / \ a^2 + b^2 \leq 1, \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Determine si $(D_2, +)$ es o no un grupo. **(3 puntos)**

8. Sean $V$ algún espacio vectorial y $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un subconjunto de $V$, tal que $S$ es linealmente independiente. Si $x \in V$, tal que $x \notin Gen(S)$, demuestre que el conjunto $H = \{x, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es, también, linealmente independiente. **(4 puntos)**