IC3002: Práctica de Examen #1

Entregar el Sin fecha, pero le conviene el martes 24, Marzo , 2015

tecDigital 12:pm

José Castro

Contents

Problema 1

¿Cual de las siguientes funciones crece más rápido?

1. $n!!$ o $(2^n)!$

   RESPUESTA:

   Eliminamos los factoriales externos y queda la comparación entre $n!$ y 2^n, de las cuales ya sabemos que crece más rṕido el $n!$, por lo tanto crece más rápido

   $$n!!$$

2. 2^{2^n} o $2^{n!}$

   RESPUESTA:

   Eliminamos la base y comparamos los exponentes, que son 2^n y $n!$. De nuevo sabemos que $n!$ crece más rápido, lo que nos da que el que crece más rápido es

   $$2^{n!}$$

3. $n!^2$ o 2^{2n}

   RESPUESTA

   Basta ver que $2^{2n} = 2^{n2}$, así que eliminamos el exponente del cuadrado y comparamos las bases, que de nuevo son 2^n y $n!$, claramente crece más rápido $n!$, lo que indica que de la comparación original el que crece más rápido es

   $$n!^2$$

4. $\sqrt{2^n}$ o $\sqrt{n!}$

   RESPUETA

   Eliminamos raz y comparamos las bases, crece más rápido el factorial

   $$\sqrt{n!}$$

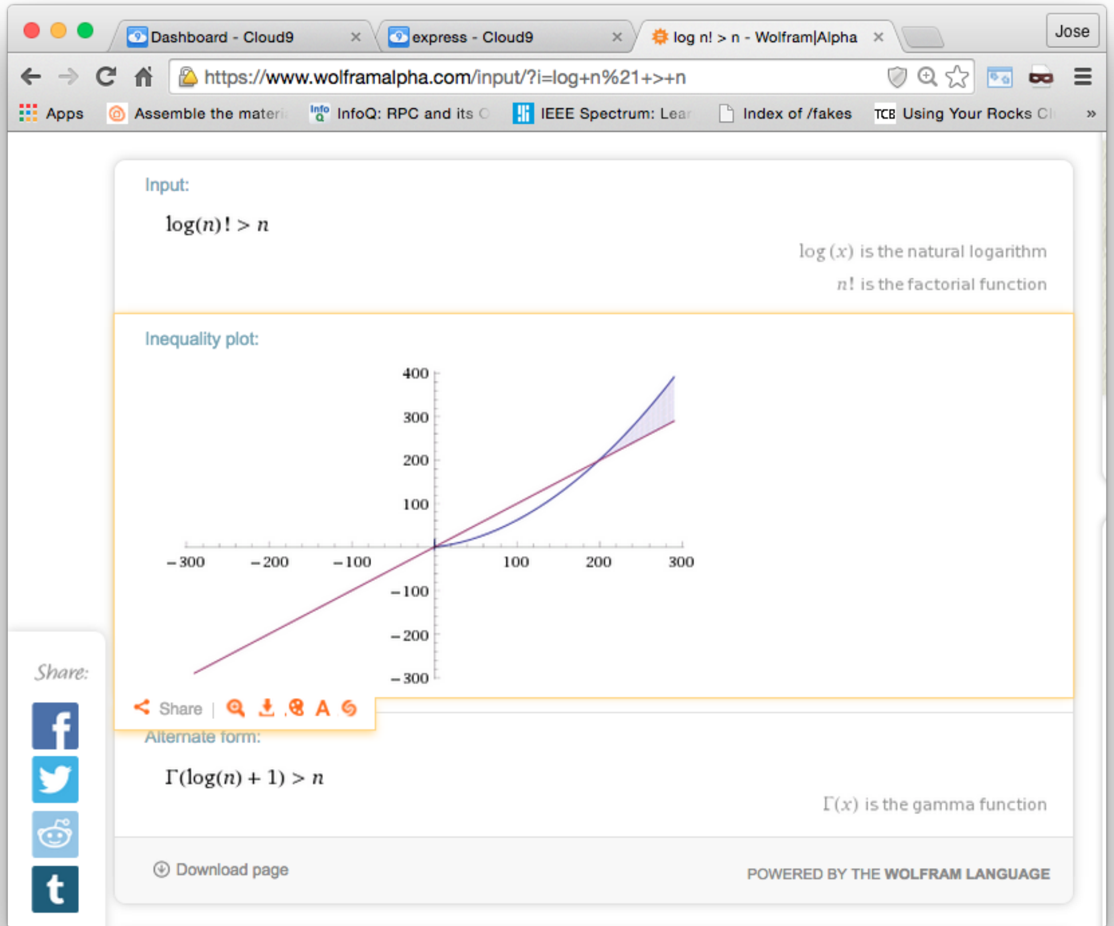
5. n o $\log(n!)$

   RESPUESTA:

   Esta es la menos obvia del conjunto, en clase mencioné que tiene la misma tasa, pero comparándolas con mas cuidado crece más rápido $\log(n!)$. De hecho su tasa de crecimiento es:

   $$\log n! = \log\left(\Pi_{i=1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n} \log i = O(n \log n)$$

   Pueden traficar estas funciones en WolframAlpha:



Problema 2

Ordene las siguientes funciones por su crecimiento asintótico:
$[\sqrt{n}] \ldots [2^{n!}] \ldots [\log^2 n] \ldots [n \log n] \ldots [2^{2^n}] \ldots [n^{1/10}] \ldots [\log \log n] \ldots [n!] \ldots [n^2]$
RESPUESTA:

$$\log \log n < \log^2 n < n^{1/10} < \sqrt{n} < n \log n < n^2 < n! < 2^{2^n} < 2^{n!}$$

Problema 3

Dada la definición de límite como:

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = k \iff (\forall \epsilon\, \exists n_0 \; tal\ que\ si\ n \geq n_0 \Rightarrow |f(n) - k| < \epsilon)$$

Utilícela para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = r \Longrightarrow f = O(g)$$

RESPUESTA:
Asumimos que se cumple que el límite de $f(n)/g(n) = r$, y nos damos un épsilon arbitrario para empezar la prueba.
Sea un $\epsilon > 0$, sabemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = r &\iff \text{por la definición de limite} \\
\exists n_0 \cdot \text{tal que si } n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \epsilon &\iff \text{por la definición de valor absoluto} \\
-\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon &\iff \text{reacomodamos} \\
-\epsilon g(n) < f(n) < \epsilon g(n) &\iff \text{por definición de valor absoluto} \\
|f(n)| < \epsilon g(n) &\Longrightarrow \text{reacomodamos por definición de O} \\
\exists n_0, r = \epsilon \text{ tal que si } n \geq n_0 \Longrightarrow f(n) < r(g) &\iff \\
f = O(g) &
\end{aligned}$$

Problema 4

Demuestre que las siguientes recurrencias representan la misma función:

$$f(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ f(n-1) + 2 & n > 1 \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ 4 & n = 2 \\ 2f(n-1) - f(n-2) & n > 2 \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ 4 & n = 2 \\ 6 & n = 3 \\ f(n-1) + f(n-2) - f(n-3) & n > 3 \end{cases}$$

Problema 5

Suponga que $f = O(n)$

1. demuestre que
   (a) $f(n)/n = O(1)$
   (b) $f(n)/n^2 = o(1)$
2. caracterice $f(n)/n^3$ de la forma más exacta posible

Problema 6

Demuestre que:

$$[f = o(g)] \iff [f = O(g) \land g \neq O(f)]$$

Problema 7

1. demuestre que: $2^{n+r} = O(2^n)$.
2. demuestre que: $2^{2n-r} \neq O(2^n)$.
3. ¿Es $2^{rn} = O(2^n)$?

Problema 8

Demuestre que:

1. n^r crece mas rápido que n^s para todo $r > s$.

   RESPUESTA:

   Sea $r > s$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{n^r} &= \text{reacomodo de la potencia} \\
\lim_{n\to\infty} n^{s-r} &= \text{(s-r) es negativo, pasamos a la fracción} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{r-s}} \nearrow^0 &= 0 \quad \text{(r-s) es positivo, límite es 0}
\end{aligned}$$

   Como el límite de la fracción es 0, eso indica que $n^s = o(n^r)$, y la característica de ser o pequeña indica que n^s crece mas lentamente que n^r, o l o que es lo mismo n^r crece más rápido que n^s.

2. r^n crece mas rápido que s^n para todo $r > s > 1$

   RESPUESTA:

   Sea de nuevo $r > s > 1$ y veamos el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{s^n}{r^n} &= \text{reacomodamos} \\
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{s}{n}\right)^n \nearrow^0 &= 0 \quad \text{la fracccion s/r es menor a 1}
\end{aligned}$$

   Claramente, tanto s^n como r^n tienden a $+\infty$, y por el límite anterior $s^n = o(r^n)$, lo que nos dice que r^n crece más rápido que s^n.

Problema 9

Demuestre que:

1. $\lfloor\lfloor n/m\rfloor/l\rfloor = \lfloor\lfloor n/l\rfloor/m\rfloor = \lfloor n/lm\rfloor$

   RESPUESTA:

   Sea

$$
\begin{aligned}
k = \left\lfloor \frac{\lfloor n/m\rfloor}{l} \right\rfloor & \quad \iff \\
k \le \frac{\lfloor n/m\rfloor}{l} < k+1 & \quad \iff \\
lk \le \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor < l(k+1) & \quad \iff \\
lk \le \frac{n}{m} < l(k+1) & \quad \iff \\
k \le \frac{n}{lm} < (k+1) & \quad \iff \\
k = \left\lfloor \frac{n}{lm} \right\rfloor & \quad \implies \\
\left\lfloor \frac{\lfloor n/m\rfloor}{l} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{lm} \right\rfloor & \quad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}
$$

   La misma derivación se puede aplicar para demostrar que $\lfloor\lfloor n/l\rfloor/m\rfloor = \lfloor n/lm\rfloor$, probando que todos son iguales.

2. $\left\lfloor \frac{n+\lfloor n/2\rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor$

   RESPUESTA:

$$
\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{n+\lfloor n/2\rfloor}{2} \right\rfloor = k & \quad \iff \\
2k \le n + \lfloor n/2\rfloor < 2(k+1) & \quad \iff \\
2k - n \le \lfloor n/2\rfloor < 2(k+1) - n & \quad \iff \\
2k - n \le n/2 < 2(k+1) - n & \quad \iff \\
2(2k-n) \le n < 2[2(k+1) - n] & \quad \iff \\
4k - 2n \le n < 4(k+1) - 2n & \quad \iff \\
4k \le n + 2n < 4(k+1) & \quad \iff \\
4k \le 3n < 4(k+1) & \quad \iff \\
k \le \frac{3n}{4} < k+1 & \quad \iff \\
k = \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor & \quad \implies \\
\left\lfloor \frac{n+\lfloor n/2\rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor & \quad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}
$$

3. $\lfloor n/3\rfloor + \lfloor (n+1)/3\rfloor + \lfloor (n+2)/3\rfloor = n$

Problema 10

1. Demuestre que si $\lfloor n/2^i \rfloor = 1 \iff i = \lfloor \log n \rfloor$

   RESPUESTA:

   sea

$$
\begin{aligned}
\lfloor n/2^i \rfloor = 1 &\quad \iff \\
1 \le n/2^i < 2 &\quad \iff \\
2^i \le n < 2(2^i) &\quad \iff \\
2^i \le n < 2^{i+1} &\quad \iff \\
i \le \log n < i+1 &\quad \iff \\
i = \lfloor \log n \rfloor &\quad \text{Q.E.D}
\end{aligned}
$$

2. ¿Si $\lceil n/2^i \rceil = 1$, cuál es el valor de i?

   RESPUESTA:

$$
\begin{aligned}
\lceil n/2^i \rceil = 1 &\quad \iff \\
0 < n/2^i \le 1 &\quad \iff \\
0 < n \le (2^i) &\quad \iff \\
0 < n \le 2^i &\quad \iff \\
-\infty < \log n \le i &\quad \iff \\
\lceil \log n \rceil \le i &
\end{aligned}
$$

   Solo podemos saber que i acota al techo de $\log n$, no se puede ser mas preciso porque la cota inferior es $-\infty$

3. Demuestre que $\lceil \log(n+1) \rceil = \lfloor \log n \rfloor + 1$

   RESPUESTA:

   Sea

$$
\begin{aligned}
\lceil \log(n+1) \rceil = k &\quad \iff \\
k-1 < \log(n+1) \le k &\quad \iff \\
2^{k-1} < n+1 \le 2^k &\quad \iff \\
2^{k-1} \le n < 2^k &\quad \iff \\
k-1 \le \log n < k &\quad \iff \\
k-1 = \lfloor \log n \rfloor &\quad \iff \\
k = \lfloor \log n \rfloor + 1 &\quad \Longrightarrow \\
\lceil \log(n+1) \rceil = \lfloor \log n \rfloor + 1 &\quad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}
$$

4. Demuestre que $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$

   RESPUESTA:

Sea

$$
\begin{aligned}
\lfloor (n+1)/2 \rfloor = k & \quad \iff \\
k \leq (n+1)/2 < k+1 & \quad \iff \\
2k \leq n+1 < 2k+2 & \quad \iff \\
2k-1 \leq n < 2k+1 & \quad \iff \quad \text{todos los valores son enteros} \\
2k-2 < n \leq 2k & \quad \iff \\
2(k-1) < n \leq 2k & \quad \iff \\
k-1 < \frac{n}{2} \leq k & \quad \iff \\
k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil & \quad \implies \\
\lfloor (n+1)/2 \rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil & \quad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}
$$

Problema 11

Demuestre que

1. $\lfloor \log \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor \log x \rfloor$

   RESPUESTA:

   Sea

$$
\begin{aligned}
\lfloor \log \lfloor x \rfloor \rfloor = k & \quad \iff \\
k \leq \log \lfloor x \rfloor < k+1 & \quad \iff \\
2^k \leq \lfloor x \rfloor < 2^{k+1} & \quad \iff \\
2^k \leq x < 2^{k+1} & \quad \iff \\
k \leq \log x < k+1 & \quad \iff \\
k = \lfloor \log x \rfloor & \quad \implies \\
\lfloor \log \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor \log x \rfloor & \quad \text{Q.E.D}
\end{aligned}
$$

2. $f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ f(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & n > 1 \end{cases} \iff f(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$

   RESPUESTA:

   Suponemos n grande, lo que nos da:

$$
\begin{aligned}
f(n) & \quad = \\
f(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \quad = \\
f(\lfloor \lfloor n/2 \rfloor /2 \rfloor) + 1 + 1 & \quad = \\
f(\lfloor n/2^2 \rfloor) + 2 & \quad = \\
f(\lfloor \lfloor n/2^2 \rfloor /2 \rfloor) + 1 + 2 & \quad = \\
f(\lfloor n/2^3 \rfloor) + 3 & \quad = \\
\vdots & \\
f(\lfloor n/2^k \rfloor) + k & \quad = \quad \text{por problema 10 sabemos que } \lfloor n/2^k \rfloor = 1 \iff k = \lfloor \log n \rfloor \\
f(1) + \lfloor \log n \rfloor & \quad = \\
\lfloor \log n \rfloor + 1 & \quad \text{Q.E.D}
\end{aligned}
$$

Problema 12

Demuestre que

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
   RESPUESTA:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} &\iff \quad \text{multiplicando todo por } \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \\
(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = 1 &\iff \\
(n+1) - n = 1 &\iff \\
1 = 1 &\quad \text{Q.E.D}
\end{aligned}$$

2. $\lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1 \geq \left\lceil \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \right\rceil \geq \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 2$
   RESPUESTA:
   Para $n = 1$

$$\lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1 = \left\lceil 2\sqrt{1} \right\rceil - 1 = 1 \geq \left\lceil \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{i}} \right\rceil \geq \left\lceil 2\sqrt{1} \right\rceil - 2 = 0$$

Se cumple,

Ahora asumimos que se cumple para n, probamos sśolo el lado izquierdo $\lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1 \geq \left\lceil \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \right\rceil$ ya que el otro lado es análgo.

Por hipótesis de inducción sabemos que:

$$\begin{aligned}
\lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1 \geq \left\lceil \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \right\rceil &\iff \quad \text{podemos meter a -1 dentro del techo} \\
\lceil 2\sqrt{n} - 1 \rceil \geq \left\lceil \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \right\rceil &\iff \quad \text{porque el techo preserva el orden} \\
2\sqrt{n} - 1 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} &\iff \quad \text{agregamos el n-ésimo + 1 término a ambos lados} \\
\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 1 \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} &\iff \quad \text{reacomodamos} \\
\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 1 \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} &\iff \quad \text{multiplicamos por 2 arriba y abajo} \\
\frac{2}{2\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 1 \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} &\iff \quad \text{separamos la raíz} \\
2\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} - 1 \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} &\implies \quad \text{si el denominador es más pequeño, la fracción crece} \\
2\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + 2\sqrt{n} - 1 \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} &\iff \quad \text{por el resultado del problema anterior} \\
2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + 2\sqrt{n} - 1 \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} &\iff \quad \text{distribuimos}
\end{aligned}$$

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n} - 1 \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \iff \text{simplificamos}$$

$$2\sqrt{n+1} - 1 \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \iff \text{porque la función techo preserva el orden}$$

$$\lceil 2\sqrt{n+1} - 1 \rceil \geq \left\lceil \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \right\rceil \iff \text{sacamos -1 del techo}$$

$$\lceil 2\sqrt{n+1} \rceil - 1 \geq \left\lceil \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} \right\rceil \quad \text{Q.E.D}$$

Problema 13

Demuestre que

1. Demuestre que
   (a) $\lceil (n+1)/k \rceil = \lfloor n/k \rfloor + 1$.
   (b) $\lceil \log(n+1) \rceil = \lfloor \log n \rfloor + 1$.
   (c) $\lceil \sqrt{n+1} \rceil = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$
2. ¿Bajo qué condiciones debe cumplir una función f para poder afirmar que $\lceil f(n+1) \rceil = \lfloor f(n) \rfloor + 1$

Problema 14

Sea $f(n)$ el n^{esimo} número de fibonacci.

1. Demuestre que es posible encontrar x^n utilizando $O(\log n)$ multiplicaciones.
2. demuestre que f obedece a la relación de recurrencia para $n \geq 2$

$$\begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \end{pmatrix}$$

3. Demuestre que $f(n+m+2) = f(n+1)f(m+1) + f(n)f(m)$.
4. Escriba un algoritmo para generar f(n) en tiempo logarítmico.