INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
Álgebra Lineal para Computación (MA-2405)

Tiempo: 2 h. 30 m.
Total: 38 puntos
Fecha: 6 de septiembre de 2010

Primer examen parcial

Instrucciones: Trabaje en forma ordenada y clara. Escriba todos los procedimientos que utilice para resolver los ejercicios propuestos.

1. Considere las matrices $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Calcule $B^t \cdot (C + 2I_3)^{-1}$ (5 puntos)

2. Utilice el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema de ecuaciones y determine el conjunto solución de dicho sistema: (5 puntos)

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

3. Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema: (4 puntos)

$$\begin{cases} -x + 4y + 2z = 0 \\ x + y + z = 4 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

4. Si B y C son matrices de 4×4, tales que $\det(adj(C)) = 8$ y $\det(B^{-1}) = \frac{3}{2}$, calcule $\det(3B \cdot C)$ (4 puntos)

5. Considere el sistema de ecuaciones en la variables x, y: (6 puntos)

$$\begin{cases} mx + y = 3 \\ 9x + my = n \end{cases}$$

   Determine los valores de m y n para que el sistema:

   (a) No tenga solución.
   (b) Tenga solución única.
   (c) Tenga infinita cantidad de soluciones.

6. Sean A una matriz de tamaño $p \times q$, B y C matrices de $r \times q$. Pruebe, entrada por entrada, que $A(B-2C)^t = AB^t - 2AC^t$. (5 puntos)

7. Se dice que una matriz A de $n \times n$ es *ortogonal* si cumple que $A^{-1} = A^t$.

   (a) Pruebe que si B y C son ortogonales, entonces BC es ortogonal. (2 puntos)

   (b) Pruebe que si B es ortogonal, entonces $\det(B) = -1$ ó $\det(B) = 1$. (2 puntos)

8. Suponga que A es una matriz de $m \times m$ que satisface la condición $A^2 = A$. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, se cumple que: (5 puntos)

$$(A + I_m)^n = I_m + (2^n - 1)A$$