INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *Verano de 2009-10*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 33 puntos*
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN — *Tiempo: 2 h. 30 m.*

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

1. Sea $W \subset \mathbb{R}^4$ el espacio solución del siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \end{cases}$$

   (a) Encuentre una base para W y determine la dimension de W. **(4 puntos)**

   (b) Encuentre una base para el espacio de filas de la matriz de coeficientes del sistema homogéneo anterior. **(2 puntos)**

2. Sea $p(x) = -4x^2 + x - 7$ un vector del espacio vectorial P_2. Exprese a p como combinación lineal de los vectores $x^2 - 2x + 2$, $2x^2 - x + 3$, $-2x + 2$. **(4 puntos)**

3. Sea $S = \{u, v, w\}$ una base para el espacio vectorial V. Determine si el conjunto $S_1 = \{v + 2w - 2u, w + 2v + u, v + 3u - w\}$ es o no, base de V. **(4 puntos)**

4. Considere los subespacios de P_2, dados por $H_1 = \{p \in P_2 \ / \ p'(1) = 0\}$ y por $H_2 = Gen\{x^2 + 1, x\}$,

   (a) Determine una base de H_1 y una base de H_2. **(2 puntos)**

   (b) Obtenga una base para $H_1 \cap H_2$. **(2 puntos)**

   (c) Determine la dimensión de $H_1 \cup H_2$. **(1 punto)**

5. Determine si el conjunto $\{(-1, 2, 1), (2, -2, 1), (1, 0, 2), (0, 2, 3)\}$ genera o no al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. **(4 puntos)**

6. Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} : a + c - 2d = 0 \wedge 3a + 2c + d = 0 \right\}$

   (a) Pruebe que W es subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$. **(4 puntos)**

   (b) Determine una base de W y calcule su dimensión. **(2 puntos)**

7. Sean V algún espacio vectorial y $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un subconjunto de V, tal que S es linealmente independiente. Si $x \in V$, tal que $x \notin Gen(S)$, demuestre que el conjunto $H = \{x, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es, también, linealmente independiente. **(4 puntos)**