

TERCER EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. (a) Utilice el método de inducción matemática para demostrar la validez, para todo $n \geq 2$, con n número natural, de la fórmula

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \cdots + n \cdot (n + 3) = \frac{n(n + 1)(n + 5)}{3}$$

(4 puntos)

- (b) Además, utilice la fórmula anterior para calcular el valor exacto de

$$12 \cdot 15 + 13 \cdot 16 + 14 \cdot 17 + \cdots + 990$$

(2 puntos)

2. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $2^{2n} + 15n - 1$ es divisible por 9, para todo $n \geq 2$, con n número natural.

(4 puntos)

3. Considere la sucesión a_n definida por $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ si $n \geq 3$, con $a_0 = 2$, $a_1 = -4$, $a_2 = 4$

- (a) Utilice ésta fórmula recursiva para calcular el valor de a_4 .

(1 punto)

- (b) Determine la fórmula explícita para esta relación y utilice esta fórmula para encontrar el valor de a_4 .

(4 puntos)

4. Suponga que la fórmula explícita asociada a la relación por recurrencia a_n , para $n \geq 2$, es:

$$a_n = 2(-1)^n - 2^n - 2n(-1)^n$$

Determine una fórmula recursiva para esta sucesión. (3 puntos)

5. En $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se define la operación \otimes como:

$$(a, b) \otimes (c, d) = (3ac, b + d - 2)$$

Si se sabe que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes)$ es un grupo abeliano, calcule el resultado de

$$[(2, 3)^2 \otimes (-1, -1)]^{-1} \otimes (1, -2)^{-3}$$

(5 puntos)

6. En \mathbb{R} se define la operación interna \otimes como:

$$a \otimes b = 5ab$$

Analice qué propiedades cumple dicha operación y clasifique la estructura (\mathbb{R}, \otimes) .

(3 puntos)

7. Considere el conjunto \mathbb{Z}_8 , con la operación interna \oplus como la adición usual de clases de equivalencia.

(a) Determine el elemento neutro y los inversos de cada elemento del grupo (\mathbb{Z}_8, \oplus) . (2 puntos)

(b) Determine todos los subgrupos del grupo (\mathbb{Z}_8, \oplus) . (3 puntos)