

III Examen Parcial

Instrucciones Generales: Este examen es de desarrollo por lo cual debe aparecer el procedimiento necesario para resolver cada ejercicio así como las justificaciones respectivas en las demostraciones. Trabaje de forma ordenada. No se permite el uso de calculadoras programables. No se aceptan reclamos sobre aquellos ejercicios que deje resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. El tiempo considera la resolución del ejercicio opcional.

1. Observe que:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} = \frac{4}{9}$$

A partir de las identidades anteriores conjeture, sin demostrar, una fórmula general que le permita calcular

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 101}$$

3 puntos

2. Demuestre, usando el método de inducción matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}$ $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ es divisible por 133. 5 puntos
3. Determine la fórmula por recurrencia de la sucesión cuya fórmula explícita es $a_n = 1 + 2 \cdot 3^n - 2^n$; $n \geq 0$ 4 puntos

4. Considere la sucesión por recurrencia

$$a_0 = -1$$

$$a_1 = -3$$

$$a_2 = 2$$

$$a_n = -4a_{n-1} + 3a_{n-2} + 18a_{n-3} ; n \geq 3$$

Determine la fórmula explícita de a_n .

4 puntos

5. Considere el grupo (\mathbb{Z}_7^*, \odot) . Determine el neutro y el inverso (simétrico) de cada elemento.

4 puntos

6. Considere la estructura algebraica (\mathbb{R}, \perp) , con $a \perp b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$

- a) Demuestre que (\mathbb{R}, \perp) es un grupo y además que es abeliano.

5 puntos

- b) Calcule $5^{-2} \perp 2^3$

3 puntos

7. En una estructura algebraica $(E, *)$ que posee elemento neutro e , se dice que a es un elemento involutivo si $a * a = e$.

En la estructura algebraica $(\mathbb{R}^*, *)$; con $a * b = 5ab$. Calcule todos sus elementos involutivos.

3 puntos

Ejercicio Opcional:

Sea (G, \star) un grupo con neutro e . Determine x de forma que se satisfaga que $b \star c \star x^2 \star a = c \star x \star a$ (justifique cada paso)

3 puntos