INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN

21 de noviembre de 2012
Total: 34 puntos
Tiempo: 2 horas

III EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios o procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes la apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono móvil.

1. Para cada una de las siguientes funciones, determine si es o no una transformación lineal
   (a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to M_{2\times 2}$ dada por $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. **(4 puntos)**
   (b) $T\colon P_2 \to \mathbb{R}$ dada por $T(ax^2+bx+c) = a+bc+1$. **(4 puntos)**
2. Sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal.
   Un vector $u \in V$ se llama **punto fijo de** T si $T(u) = u$.
   Determine todos los puntos fijos de la tranformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$. **(4 puntos)**
3. Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to P_2$ dada por $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (2a-b)x^2 + a - 3b$.
   (a) Encuentre una base para el $\mathrm{Ker}(T)$. **(4 puntos)**
   (b) Determine la dimensión del $\mathrm{Ker}(T)$ y la dimensión de la $\mathrm{Im}(T)$. **(3 puntos)**
4. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal biyectiva y sea T^{-1} la función inversa de T. Demuestre que T^{-1} también es una transformación lineal. **(5 puntos)**
5. Considere la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to P_1$ tal que
   $$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (2a-3b)x - 4b$$
   (a) Demuestre que T es biyectiva. **(4 puntos)**
   (b) Determine T^{-1}. **(4 puntos)**
   (c) Calcule $T^{-1}(4x-2)$. **(2 puntos)**