

2015 3 2

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
 ESCUELA DE MATEMÁTICA
 Álgebra Lineal para Computación

Tiempo: 2 h. 15 m.
 Total: 31 puntos
 Fecha: 23 de marzo de 2015

Primer examen parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios o procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes la apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono móvil.

1. Resuelva el sistema:
$$\begin{cases} x - y + z + 2w &= 3 \\ 3x + y + 2z + 3w &= 1 \\ 7x + 5y + 4z + 5w &= -3 \end{cases} \quad (5 \text{ puntos})$$

2. Para las matrices $B \in M_{r \times q}(\mathbb{R})$, $A \in M_{q \times r}(\mathbb{R})$ y $C \in M_{q \times p}(\mathbb{R})$. Pruebe, entrada por entrada, que $(2B + A^t)C = 2BC + A^tC$. (4 puntos)

3. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Si se sabe que la matriz X , de 2×2 , satisface la ecuación $XA = 3X - 2BB^t$, utilice operaciones matriciales para despejar a X de dicha ecuación y luego calcule a X . (4 puntos)

4. Considere el sistema de ecuaciones en las variables x, y : (5 puntos)

$$\begin{cases} mx + 5y &= 3 \\ 3mx + my &= n \end{cases}$$

Determine los valores de m y n para que el sistema:

- (a) Tenga solución única.
- (b) No tenga solución.
- (c) Tenga infinita cantidad de soluciones.

5. Si A , B y C son tres matrices invertibles de 4×4 , tales que $\det(A) = -2$ y $\det(B^t) = \frac{3}{5}$, calcule $\det(3B^{-1}C^tAC^{-1})$. (3 puntos)

6. Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema: (4 puntos)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z &= 0 \\ x + y + 2z &= 5 \\ -x - 3y + 4z &= 0 \end{cases}$$

7. Se dice que una matriz C de $n \times n$ es **antisimétrica** si cumple que $C^t = -C$; se dice que es **idempotente** si $C^2 = C$ y se dice que es **involutiva** si $C^2 = I_n$.

Sean A y B matrices de $n \times n$, pruebe que:

- (a) Si A y B son antisimétricas, entonces $2A - 5B$ es antisimétrica. (3 puntos)
- (b) Si A es idempotente, entonces $2A - I_n$ es involutiva. (3 puntos)