INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMATICA — TIEMPO 2 HORAS 20 MIN
PROBABILIDADES — VALOR 50 PTS

TERCER PARCIAL, II-2014

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Las preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con corrector no podrán apelarse. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Sea X una variable aleatoria continua cuya distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{7}\right)^{k-1} & si \quad 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

   (a) Determine el valor de k. (4 puntos)

   (b) Halle la fórmula de la función de distribución acumulada de X (6 puntos)

2. Sea X una variable aleatoria continua cuya distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{4-2x} & si \quad x \geq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

   (a) Determine la función generadora de momentos para $X : m_X(t)$ para $t < 2$. (6 puntos)

   (b) Sea $Y = X + e^X$. Determine $E(Y)$ (5 puntos)

3. El tiempo de vida útil de una tablet marca XTEC sigue una distribución exponencial con una media de 3 años. Dada la variedad de marcas de tablet en el mercado, la organización Evalúa Tablet se ha dedicado a evaluar estos dispositivos y considera que una tablet es de buena calidad si tiene una vida útil mayor a 4 años.

   (a) Determine la probabilidad de que una tablet XTEC sea de buena calidad. (4 puntos)

(b) A partir del 2017 la empresa Evalúa Tablet otorgará un certificado de calidad a las empresas que fabrican tablet y que cumplan el siguiente test: al elegir 40 tabletas al azar, estás deben ser, en promedio, de buena calidad. Determine la probabilidad de que XTEC obtenga el certificado de buena calidad. (5 puntos)

4. Dada una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2 recuerde que utilizando la desigualdad de Chebishev se tiene que para todo $k > 0$:

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

(a) Verifique que $P(|X-\mu| < k\sigma) \geq \dfrac{k^2-1}{k^2}$. (3 puntos)

(b) Si X es una variable aleatoria continua tal que $E(X) = 25$ y $Var(X) = 4$. Acote inferiormente $P(20 < X < 30)$. (4 puntos)

5. Dadas las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$, mutuamente independientes tales que:

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \text{ con } \mu_i = 10i \quad y \quad \sigma_i^2 = 2i,$$

para $i = 1, 2, ..., n$. Considere la variable aleatoria $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

(a) Verifique que $E(\bar{X}) = 5n + 5$ y que $Var(\bar{X}) = n + 1$. Sugerencia: recuerde que $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. (3 puntos)

(b) Determine el menor valor de n que satisface que la probabilidad de que $\overline{X} < 5n$ sea superior al 10%.. (4 puntos)

6. El peso de una bolsa de tomate de cierta distribuidora alimenticia sigue una distribución normal con media de 1000 gramos y desviación estándar de 75 gramos. Debido a la sobre oferta de tomate, deciden hacer paquetes de 3 bolsas y vender cada paquete por 1000 colones. Un inspector decide revisar 1000 de tales paquetes. Si al menos 175 de ellos pesan menos de 2975 g, entonces castigará a la distribuidora con una multa. ¿Cuál es aproximadamente la probabilidad de que la distribuidora sea castigada? (6 puntos)