INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN

I semestre de 2007
Total: 27 puntos
Tiempo: 2 horas

PRIMER EXAMEN PARCIAL

1. Utilizando el método de Gauss-Jordan (basado en operaciones elementales), resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

(4 puntos)

$$\begin{cases} -8x + 3y + z & = & -25 \\ 5x - 2y & = & 16 \\ x - z & = & 2 \\ -5x + 2y + z & = & -16 \end{cases}$$

2. Determine dos matrices (no nulas) de tamanño 2×2, A y B respectivamente, tales que $AB = 0$.

(3 puntos)

3. Considere las matrices $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, determine $(PQ)^{-1}$

(4 puntos)

4. Una matriz A es simétrica si cumple que $A = A^t$. Sean A y B matrices simétricas, determine si cada enunciado es falso o verdadero (justifique)

(4 puntos)

   (a) La matriz $A + B$ es simétrica.
   (b) La matriz AB es simétrica.

5. Demuestre que si A es una matriz triangular superior de tamaño $n \times n$, entonces su determinante es igual al producto de sus elementos de su diagonal principal.

(4 puntos)

6. Considere el sistema de ecuaciones en la variables x, y, donde m, $n \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} mx - 3y & = & 1 \\ 2mx + my & = & n \end{array}\right.$$

Determine los valores de m y n para que el sistema:

(a) Tenga solución única.

(b) No tenga solución.

(c) Tenga infinita cantidad de soluciones.

(4 puntos)

7. Se sabe que si A es una matriz de $n \times n$ que posee inversa, se cumple:

$$A \cdot \frac{Adj(A)}{det(A)} = I_n$$

Donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$. Demuestre que si B es una matriz de $n \times n$ que posee inversa, entonces:

$$\left(Adj(B^t)\right)^t = det(B) \cdot B^{-1}$$

(4 puntos)