INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN

II semestre de 2009
Total: 45 puntos
Tiempo: 2 h. 40 m.

PRIMER EXAMEN PARCIAL

1. Dadas las matrices (5 puntos)

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Sabiendo que X es invertible, determine explícitamente la matriz

$$Z = (2X^{-1} - Y^t)X$$

2. Determine el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones:
   (6 puntos)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= -19 \\ x_1 - 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 15 \\ 3x_1 + 3x_2 + 15x_3 - 8x_4 &= -56 \end{cases}$$

3. Calcule el determinante de la siguiente matriz. (5 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Sean A, $B \in M_{n\times n}$, tales que $A = B^t A^t$, pruebe que se cumple que $det(B) = 1$ ó $det(A) = 0$.
   (4 puntos)

5. Sean A y B matrices cuadradas de orden n, tales que B no es invertible y A es equivalente por filas a B. Pruebe que A no es invertible.
   (4 puntos)

6. Sea P una matriz cuadrada de orden n tal que $P^2 = P$. Considere la matriz $A = 2P - I_n$.

   (a) Utilice las propiedades de las operaciones con matrices para probar que se cumple que $A^2 = I_n$ (4 puntos)

   (b) Es A invertible? Justifique. (2 puntos)

7. Considere el sistema de ecuaciones (8 puntos)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + bz & = & 2 \\ ax + 2ay + 6z & = & 4 + b \\ ay + 2z & = & b \end{array} \right.$$

   en la variables x, y, z, donde a, b son parámetros reales. Determine los valores de a y b, si existen, para los cuales:

   (a) El sistema tiene solución única.

   (b) El sistema no tenga solución.

   (c) El sistema tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

   (d) El sistema tiene infinitas soluciones que dependen de dos parámetros.

8. Sea $X \in M_{n\times 1}$

   (a) Determine el tamaño de las matrices X^tX y XX^t. (2 puntos)

   (b) Sea B una matriz simétrica ($B^t = B$) y considere la matriz

$$A = B - \frac{2}{X^tX}XX^t$$

   Pruebe, entrada por entrada, que $A = A^t$. (5 puntos)