Instituto Tecnológico de Costa Rica | II Semestre 2016
Escuela de Matemática | Tiempo: 2 horas y 30 minutos
Álgebra Lineal para Computación | Puntaje Total: 34 puntos

II Examen Parcial

Sábado 22 de octubre 2016

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Utilice cuaderno de examen u hojas previa y debidamente grapadas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable, teléfono celular, ni cualquier otro dispositivo con memoria de texto o conectividad inalámbrica.

---

1. Considere la operación $\otimes$ definida en $\mathbb{R}$ por $a \otimes b = a + 2ab + b$. Muestre que $\frac{-1}{2}$ es el único elemento en $\mathbb{R}$ que no poseen elemento simétrico bajo esta operación. **[3 puntos]**

2. Sea T el conjunto de los múltiplos de 3, es decir, $x \in T$ si y solo si $x = 3n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
Se define sobre T la operación binaria $\perp$ mediante la regla $x \perp y = \dfrac{xy}{3} \quad \forall\, x, y \in T$.

   a) Muestre que la estructura $(T, \perp)$ es cerrada, asociativa y conmutativa. **[3 puntos]**
   b) Determine el elemento neutro de la estructura $(T, \perp)$. **[1 punto]**
   c) Encuentre todos los elementos de la estructura $(T, \perp)$ que son invertibles. **[2 puntos]**
   d) Determine todos los elementos absorventes en la estructura $(T, \perp)$. **[1 punto]**

   Nota:
   Un elemento a de la estructura $(T, \perp)$ es ***absorvente*** si y solo si $a \perp b = a = b \perp a \quad \forall\, b \in T$.

3. Sea $(G, \circ)$ un grupo, con $G = \{a, b, c, d, e\}$ donde la operación $\circ$ está definida por la tabla:

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	a	b	e	c
b	a	b	c	d	e
c	b	c	e	a	d
d	e	d	a	c	b
e	c	e	d	b	a

   a) ¿Cuál es el elemento neutro de $(G, \circ)$? **[1 punto]**
   b) ¿Cuál es el elemento simétrico de a en la estructura $(G, \circ)$? **[1 punto]**
   c) ¿Es $(G, \circ)$ un grupo abeliano? Justifique **[1 punto]**
   d) Determine dos subgrupos de la estructura $(G, \circ)$ **[1 punto]**
   e) Resuelva, para x, la ecuación $a \circ e \circ x^2 = c \circ x \circ d \circ a$ en $(G, \circ)$ **[3 puntos]**

4. Si A es una matriz cuadrada se define su **traza** -y se escribe **tr(A)**- como la suma de las entradas que se ubican en la diagonal de A. Así, si:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & 5 & 7 \\ -1 & \mathbf{-9} & 0 \\ 5 & 2 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

entonces $\mathbf{tr(A) = 4 + \text{-}9 + 3 = \text{-}2}$

Sea H el conjunto de las matrices en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cuya traza es cero. Demuestre que $(H, +)$ es un subgrupo de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$ donde $+$ representa la suma usual de matrices. **[3 puntos]**

5. Sea $\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \Big/ x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

Se sabe que $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ es un anillo, con la suma y multiplicación usuales en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) Muestre que $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ es conmutativo y posee elemento unidad. **[2 puntos]**

b) Muestre que $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ es un anillo con divisores de cero. **[2 puntos]**

6. Sea $S = \{A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{tal que} \quad (1, -1, 2)A = (0, 0)\}$.

a) Pruebe que $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in S$ **[1 punto]**

b) Pruebe que S es un subespacio vectorial de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ **[3 puntos]**

7. Sea $V = \{at^2 + bt + c \text{ tal que } a, b, c \in \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, con coeficientes reales y sean $u = t^2 + 1$, $v = t^2 + t$ y $w = t + 1$ tres vectores en V.

a) Pruebe que $\{u, v, w\}$ es un conjunto linealmente independiente. **[3 puntos]**

b) Exprese el vector $-3t^2 + 2t - 4$ como combinación lineal de $u, v,$ y w. **[3 puntos]**

II Examen Parcial
SOLUCIONARIO

1. Considere la operación $\otimes$ definida en $\mathbb{R}$ por $a \otimes b = a + 2ab + b$. Muestre que $\frac{-1}{2}$ es el único elemento en $\mathbb{R}$ que no poseen elemento simétrico bajo esta operación. **[3 puntos]**

   Se verifica que 0 es el neutro, pues $x \otimes 0 = x + 2 \cdot x \cdot 0 + 0 = x = 0 + 2 \cdot 0 \cdot x + x = 0 \otimes x \ \forall x \in \mathbb{R}$.
   Si x posee simétrico, entonces $x \otimes x' = 0 \Leftrightarrow x + 2xx' + x' = 0$
   por tanto $x \otimes x' = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{-x}{2x+1}$ con $x \neq \frac{-1}{2}$
   Así, $\frac{-1}{2}$ es el único elemento de $\mathbb{R}$ que no posee simétrico.

2. Sea T el conjunto de los múltiplos de 3, es decir, $x \in T$ si y solo si $x = 3n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
   Se define sobre T la operación binaria $\perp$ mediante la regla $x \perp y = \dfrac{xy}{3} \quad \forall\, x, y \in T$.

   a) Muestre que la estructura $(T, \perp)$ es cerrada, asociativa y conmutativa. **[3 puntos]**

   Sean x, y, z tres elementos de T, entonces $x = 3m \quad y = 3n \quad z = 3r$ con $m, n, r \in \mathbb{Z}$.

   Cerradura:
   $$x \perp y = \frac{xy}{3} = \frac{3m \cdot 3n}{3} = 3mn \in T$$

   Asociatividad:
   $$(x \perp y) \perp z = \frac{xy}{3} \perp z = \frac{3m \cdot 3n}{3} \perp 3r = 3mn \perp 3r = 3mnr$$
   $$x \perp (y \perp z) = 3m \perp \frac{3n \cdot 3r}{3} = 3m \perp 3nr = \frac{3m \cdot 3nr}{3} = 3mnr$$
   .

   Conmutatividad:
   $$x \perp y = \frac{xy}{3} = \frac{yx}{3} = y \perp x$$

   b) Determine el elemento neutro de la estructura $(T, \perp)$. **[1 punto]**

   Neutro:
   El elemento neutro de la estructura es 3 pues, si $x \neq 0$, entonces $x = x \perp y = \dfrac{xy}{3} \Longleftrightarrow y = 3$

   c) Encuentre todos los elementos de la estructura $(T, \perp)$ que son invertibles y sus respectivos simétricos. **[2 puntos]**

   Inversos:
   $$3 = x \perp y = \frac{3m \cdot 3n}{3} = 3mn \Longleftrightarrow mn = 1 \Longleftrightarrow m = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow m = n = 1 \vee m = n = -1$$
   por lo que los únicos elementos que tienen inverso son 3 y -3. Cada uno de ellos es su propio inverso.

   d) Determine todos los elementos absorventes en la estructura $(T, \perp)$. **[1 punto]**

   Absorvente: Si a es un elemento absorvente de $(T, \perp)$ entonces $a = a \perp b = \frac{ab}{3} \quad \forall\, b \in T$. O de forma equivalente $3a = ab \Longleftrightarrow 3a - ab = 0 \Longleftrightarrow a(3 - b) = 0$ y como esto debe cumplirse para todo elemento b de T, necesariamente debe tenerse que $a = 0$.

3. Sea $(G, \circ)$ un grupo, con $G = \{a, b, c, d, e\}$ donde la operación $\circ$ está definida según la siguiente tabla:

$\circ$	a	b	c	d	e
a	d	a	b	e	c
b	a	b	c	d	e
c	b	c	e	a	d
d	e	d	a	c	b
e	c	e	d	b	a

a) ¿Cuál es el elemento neutro de $(G, \circ)$? **[1 punto]**
De la tabla se sigue que el neutro de $(G, \circ)$ es b

b) ¿Cuál es el elemento simétrico de a en la estructura $(G, \circ)$? **[1 punto]**
El elemento simétrico de a es c, pues $a \circ c = b = c \circ a$

c) Determine dos subgrupos de la estructura $(G, \circ)$ **[1 punto]**
Los únicos subgrupos de $(G, \circ)$ son $(G, \circ)$ y $(\{b\}, \circ)$

d) Resuelva la ecuación $\quad a \circ e \circ x^2 = c \circ x \circ d \circ a \quad$ en la estructura $(G, \circ)$ **[3 puntos]**

$$a \circ e \circ x^2 = c \circ x \circ d \circ a$$

$$(a \circ e) \circ x \circ x = c \circ x \circ (d \circ a)$$

$$c \circ x \circ x = c \circ x \circ e$$

$$a \circ (c \circ x \circ x) = a \circ (c \circ x \circ e)$$

$$(a \circ c) \circ x \circ x = (a \circ c) \circ x \circ e$$

$$b \circ x \circ x = b \circ x \circ e$$

$$(b \circ x) \circ x = (b \circ x) \circ e$$

$$x \circ x = x \circ e$$

$$x^{-1} \circ x \circ x = x^{-1} \circ x \circ e$$

$$(x^{-1} \circ x) \circ x = (x^{-1} \circ x) \circ e$$

$$b \circ x = b \circ e$$

$$x = e$$

4. Si A es una matriz cuadrada se define su **traza** -y se escribe $\mathbf{tr(A)}$- como la suma de las entradas que se ubican en la diagonal de A. Así, si:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & 5 & 7 \\ -1 & \mathbf{-9} & 0 \\ 5 & 2 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

entonces $\mathbf{tr(A) = 4 + -9 + 3 = -2}$

Sea H el conjunto de las matrices en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cuya traza es cero. Demuestre que $(H, +)$ es un subgrupo de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$ donde $+$ representa la suma usual de matrices. **[3 puntos]**

Observe que $0_{3\times 3} \in H$ por lo que $H \neq \emptyset$

Sean $B = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & b & c \\ d & \mathbf{e} & f \\ g & h & \mathbf{i} \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & s & t \\ u & \mathbf{v} & w \\ x & y & \mathbf{z} \end{pmatrix}$ dos matrices en H

Entonces $\mathbf{tr(B) = a + e + i = 0}$ y $\mathbf{tr(C) = r + v + z = 0}$

Observe que $B - C = \begin{pmatrix} \mathbf{a\text{-}r} & b-s & c-t \\ d-u & \mathbf{e\text{-}v} & f-w \\ g-x & h-y & \mathbf{i\text{-}z} \end{pmatrix}$

Así, $tr(B-C) = a - r + e - v + i - z = a + e + i - (r + v + z) = 0 - 0 = 0$ por lo que $B - C \in H$

Por lo tanto $(H, +)$ es un subgrupo de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$

5. Sea $\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \Big/ x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

Se sabe que $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ es un anillo, con la suma y multiplicación usuales en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) Muestre que $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ es conmutativo y posee elemento unidad. **[2 puntos]**

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu & 0 \\ 0 & yv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

La matriz I_2 es el elemento unidad de $\mathcal{U}$

b) Muestre que $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ es un anillo con divisores de cero. **[2 puntos]**

Observe que $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

por lo que $\mathcal{U}$ posee divisores de cero.

6. Sea $S = \{A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $(1, -1, 2)A = (0, 0)\}$.

a) Pruebe que $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in S$ **[1 punto]**

$(1, -1, 2) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = (0, 0)$ por lo tanto $B \in S$

b) Pruebe que S es un subespacio vectorial de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ **[3 puntos]**

Por la parte anterior $S \neq \emptyset$
Además $(1,-1,2)(\alpha A + B) = (1,-1,2)(\alpha A) + (1,-1,2)(B)$
$= (\alpha)(1,-1,2)A + (1,-1,2)(B) = (\alpha)(0,0) + (0,0) = (0,0)$

7. Sea $V = \{at^2 + bt + c$ tal que $a, b, c \in \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, con coeficientes reales y sean $u = t^2 + 1$, $v = t^2 + t$ y $w = t + 1$ tres vectores en V.

a) Pruebe que u, v, w son linealmente independientes. **[3 puntos]**

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = 0$

$$\Longrightarrow x\left(t^2+1\right) + y\left(t^2+t\right) + z\,(t+1) = xt^2 + x + yt^2 + yt + zt + z = 0$$
$$\Longrightarrow (x+y)\,t^2 + (y+z)\,t + (x+z) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -z \\ x = -z \end{cases}$$

De lo que se concluye que $x = -y = z = -x \Longrightarrow x = -x = 0 = y = z$
Por lo tanto, el conjunto V es linealmente independiente

b) Exprese el vector $-3t^2 + 2t - 4$ como combinación lineal de $u, v,$ y w. **[3 puntos]**

$$-3t^2 + 2t - 4 = x\left(t^2+1\right) + y\left(t^2+t\right) + z\,(t+1) = (x+y)\,t^2 + (y+z)\,t + (x+z)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ y + z = 2 \\ x + z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\tfrac{9}{2}, y = \tfrac{3}{2}, z = \tfrac{1}{2}$$

Entonces $-3t^2 + 2t - 4 = \frac{-9}{2}\left(t^2+1\right) + \frac{3}{2}\left(t^2+t\right) + \frac{1}{2}\,(t+1)$