INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *Tiempo: 2 h. 30 m.*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 35 puntos*
Álgebra Lineal para Computación (MA-2405) — *Fecha: 20 de diciembre de 2011*

PRIMER EXAMEN PARCIAL (Verano 2011-2012)

1. Para las matrices $C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ dadas, calcule el resultado de $I_3 - C^{-1} + 3B^tB$. **(5 puntos)**

2. Determine el conjunto solución del sistema: **(4 puntos)**

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 3x + 5y - 2z - w = -2 \\ x - y + 2z - w = 4 \end{cases}$$

3. Si se sabe que (a, b, c, d) es la solución del sistema: **(4 puntos)**

$$\begin{cases} 2x - z = 1 \\ 3y - 2w = 0 \\ x - y + w = -2 \\ 5y + 4z + w = 0 \end{cases}$$

Utilice la regla de Cramer para encontrar el valor de la constante b.

4. Considere el sistema de ecuaciones en la variables x, y: **(6 puntos)**

$$\begin{cases} 3ax - 4y = 2b \\ -x + 3ay = 3b + 1 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros a y b para que el sistema:

(a) No tenga solución.
(b) Tenga solución única.
(c) Tenga infinita cantidad de soluciones.
(d) Determine el conjunto solución en el caso de que la solución sea única.

5. Si A y B son matrices de 4×4, tales que $\det(A) = -4$ y $\det(B^{-1}) = \frac{5}{4}$, calcule $\det(3B \cdot Adj(2A))$ **(4 puntos)**

6. Sean A una matriz de tamaño $r \times p$, B matriz de $q \times r$, C matriz de $r \times q$. Pruebe, entrada por entrada, que $(2B^t - C)^t A = 2BA - C^t A$. **(5 puntos)**

7. Si A es una matriz de $n \times n$ tal que $A^3 = 0$, pruebe que $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$. **(3 puntos)**

8. Si A una matriz involutiva de $n \times n$ tal que $\frac{1}{2}(A + I_n)$ es invertible, demuestre que $\det\left(\frac{1}{2}(A + I_n)\right) = 1$. **(4 puntos)**