INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA | *13 de junio de 2011*
ESCUELA DE MATEMÁTICA | *Total: 33 puntos*
MATEMÁTICA DISCRETA | *Tiempo: 2 h. 10 m.*

TERCER EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. (a) Utilice el método de inducción matemática para demostrar la validez, para todo $n \geq 1$, con n número natural, de la fórmula **(5 puntos)**

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

   (b) Además, utilice la fórmula anterior para calcular el valor exacto de **(1 punto)**

$$37 \cdot 39 + 38 \cdot 40 + \cdots + 77 \cdot 79$$

2. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $3^{3n+1} + 2^{n+1}$ es divisible por 5, para todo $n \geq 1$, con n número natural. **(5 puntos)**

3. Considere la sucesión a_n definida por

$$a_n = -6a_{n-1} - 12a_{n-2} - 8a_{n-3}$$

   si $n \geq 4$, con $a_1 = -4$, $a_2 = 12$, $a_3 = -48$. Determine la fórmula explícita para esta relación. **(4 puntos)**

4. Suponga que la fórmula explícita asociada a la relación por recurrencia a_n, para $n \geq 2$, es:

$$a_n = 5 - n - 3^n$$

   Determine una fórmula recursiva para esta sucesión. **(4 puntos)**

5. En $\mathbb{R}$ se define la operación interna $*$ como:

$$a * b = a + b + 5$$

Pruebe que la estructura $(\mathbb{R}, *)$ es un grupo abeliano. **(4 puntos)**

6. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación $\otimes$ como:

$$(a, b) \otimes (c, d) = (a + c - 1, 2bd)$$

Si se sabe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ es un grupo abeliano:

(a) Calcule el elemento neutro de esta estructura. **(2 puntos)**

(b) Calcule la fórmula del inverso de (a, b), es decir, $(a, b)^{-1}$. **(3 puntos)**

7. En el conjunto $\mathcal{D} = \{a, b, c, d, e, f\}$ se define la operación interna $*$ por medio de la tabla:

$*$	a	b	c	d	e	f
a	e	d	f	b	a	c
b	f	e	d	c	b	a
c	d	f	e	a	c	b
d	c	a	b	f	d	e
e	a	b	c	d	e	f
f	b	c	a	e	f	d

(a) Determine todos los subgrupos del grupo $(\mathcal{D}, *)$. **(4 puntos)**

(b) Calcule el resultado de $(a^3 * f^{-2})^{-1} * b$. **(1 punto)**