$\mathcal{P}$ráctica $\mathcal{G}$eneral
$\mathcal{T}$ransformaciones $\mathcal{L}$ineales

1. Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales y sea $\mathcal{T}_0 : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una función tal que $\mathcal{T}_0(v) = 0, \ \forall v \in \mathcal{V}$. Demuestre que $\mathcal{T}_0$ es una transformación lineal. Esta transformación es conocida como *transformación cero.*

2. Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real y sea $\mathcal{I} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ la aplicación definida por $\mathcal{I}(v) = v, \ \forall v \in \mathcal{V}$. Demuestre que $\mathcal{I}$ es una transformación lineal. $\mathcal{I}$ se conoce como *transformación identidad sobre* $\mathcal{V}$.

3. En cada uno de los casos siguientes, $\mathcal{F}$ es una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$; determine si $\mathcal{F}$ es una aplicación lineal o no lo es.

   (a) $\mathcal{F}(x, y) = (x, y + 3)$
   (b) $\mathcal{F}(x, y) = (2x - y, x - y)$
   (c) $\mathcal{F}(x, y) = (y^2, 3x)$
   (d) $\mathcal{F}(x, y) = (2x + y, 3y - 4x)$

4. Para cada una de las funciones $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ que se enuncian, realice lo siguiente:

   i. Verifique que $\mathcal{T}$ es transformación lineal y determine $dim(V)$
   ii. Determine $Nucl(\mathcal{T})$, una base de $Nucl(\mathcal{T})$ y $n(\mathcal{T})$
   iii. Determine $r(\mathcal{T})$, una base de $Im(\mathcal{T})$ e $Im(\mathcal{T})$

   (a) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (a, -b)$
   (b) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (a, a + b, a - b)$
   (c) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (2a, a + b)$
   (d) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = a(x + 2)^2 + b(x + 2) + c$
   (e) Para B, alguna matriz fija de tamaño 2×3,
   $$\mathcal{T} : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 3}, \text{ con } \mathcal{T}(X) = XB$$
   (f) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (2a + b, a)$
   (g) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \text{ con } \mathcal{T}(a, b, c) = (a + b + c, b + c, 3a + b, 2b + c)$

(h) Para $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a,b) = (a + \lambda b, -b)$$

(i) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1, \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = (b + 2c)x + a + c$

(j) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a,b) = (a - b, a + b)$

(k) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a,b) = (a + b, a - b)$

(l) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a,b) = (2a + b, a - 2b)$

(m) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3, \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$

(n) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2, \text{ con } \mathcal{T}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$

(o) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = a(2x + 1)^2 + b(2x + 1) + c$

(p) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1, \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = bx + c$

(q) $\mathcal{T} : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}, \text{ con } \mathcal{T}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2a + 3b + c - d$

(r) $\mathcal{T} : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}, \text{ con } \mathcal{T}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 3a - 2b - c + 4d - 3$

(s) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1, \text{ con } \mathcal{T}(ax + b) = a(x + 3) + b$

(t) Para $C_{[0,1]} = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \middle/ f \text{ es función continua} \right\}$,

$$\mathcal{T} : C_{[0,1]} \to \mathbb{R}, \text{ con } \mathcal{T}(f) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt, \quad \text{donde } g \text{ es una función fija en } C_{[0,1]}$$

(u) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{ con } \mathcal{T}(a,b,c) = (c - b, c - a, a + b)$

5. Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son espacios vectoriales reales y $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una transformación lineal, demuestre que $\mathcal{T}(u - v) = \mathcal{T}(u) - \mathcal{T}(v), \ \ \forall u, v \in \mathcal{V}$.

6. Considere la función $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 1}$, tal que $\mathcal{T}\big(p(x)\big) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$

   (a) Demuestre que $\mathcal{T}$ es una transformación lineal.

   (b) Determine el núcleo de la transformación y una base de $Im(\mathcal{T})$

7. Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales y sea $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. Demuestre que si $\mathcal{W}_1$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{W}$ entonces $\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{W}_1)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$, con $\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{W}_1) = \left\{ v \in \mathcal{V} \middle/ \mathcal{T}(v) \in \mathcal{W}_1 \right\}$

8. Suponga que $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una transformación lineal, tal que $Nucl(\mathcal{T}) = \{0\}$

   Demuestre que si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{V}$, entonces $\{\mathcal{T}(v_1), \mathcal{T}(v_2), \ldots, \mathcal{T}(v_n)\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{W}$.

9. Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathcal{V}$.

   Demuestre que si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son transformaciones lineales, tales que $\mathcal{T}_1(v_i) = \mathcal{T}_2(v_i)$, $\forall v_i \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{T}_1(v) = \mathcal{T}_2(v), \ \ \forall v \in \mathcal{V}$.

10. Determine $Nucl(\mathcal{T})$, $n(\mathcal{T})$, $Im(\mathcal{T})$ y $r(\mathcal{T})$ si $\mathcal{T} : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ está definida por $\mathcal{T}(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2$

11. Sea $\mathcal{B} = \{(1,2,3)\,,(2,5,3)\,,(1,0,10)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal, tal que $\mathcal{T}(1,2,3) = (1,0)$, $\mathcal{T}(2,5,3) = (1,0)$ y $\mathcal{T}(1,0,10) = (0,1)$. Calcule:

    (a) $\mathcal{T}(0,0,0)$
    (b) $\mathcal{T}(1,1,1)$
    (c) $\mathcal{T}(x,y,z), \ \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

12. Considere el conjunto $\mathcal{B} = \Big\{2x, x-3\Big\}$

    (a) Verifique que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{P}_1$
    (b) Si $\mathcal{T} : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal, para la que se sabe que $\mathcal{T}\,(2x) = (2,4,0)$ y $\mathcal{T}\,(x-3) = (-2,5,0)$, determine $\mathcal{T}\,(p(x))\,, \ \ \forall p(x) \in \mathcal{P}_1$

13. Sea $\mathcal{B} = \Big\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\Big\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal, tal que $\mathcal{T}(1,0,1) = (3,7,13)$, $\mathcal{T}(0,1,1) = (1,5,7)$ y $\mathcal{T}(1,1,0) = (0,4,4)$. Calcule la matriz de transformación correspondiente a $\mathcal{T}$ y a partir de ella una fórmula para obtener $\mathcal{T}(x,y,z)$, con (x,y,z) un elemento arbitrario en $\mathbb{R}^3$.

14. Considere el espacio vectorial $\mathcal{V}$ generado por el conjunto *l.i.* $\mathcal{B} = \Big\{\operatorname{sen} x, \cos x\Big\}$ y sea $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ una transformación lineal definida por $\mathcal{T}(f) = f'$

    (a) Determine el vector $w = \mathcal{T}(3\cos x - \operatorname{sen} x)$
    (b) Escriba el vector w como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.

15. Sea $\mathcal{T} : \mathcal{M}_{3\times 2} \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal definida por:

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \Big(x_1 - x_4, 0, x_2, x_3\Big)$$

    (a) Determine $Nucl(\mathcal{T})$ y su dimensión.
    (b) Determine una base para $Im(\mathcal{T})$

16. Sea $\mathcal{T}:\mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ una transformación lineal, tal que:
$Nucl(\mathcal{T}) = \left\{ \left(x, y, 0, x-y\right) \Big/ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ y, además,
$Im(\mathcal{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} \Big/ a-d=0,\ 2b-c=0 \right\}$
   (a) Determine una base para $Nucl(\mathcal{T})$
   (b) Determine $r(\mathcal{T})$
   (c) Determine $\mathcal{T}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$.
   (d) Utilice el resultado anterior y determine $\mathcal{T}(2,-1,4,0)$

17. Sea $\mathcal{L} = \left\{ \mathcal{T}:\mathcal{V} \to \mathcal{W} \Big/ \mathcal{T} \text{ es tranformación lineal} \right\}$, con $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales. En $\mathcal{L}$ se define una operación "adición $(+)$ de dos elementos de $\mathcal{L}$" y una operación "multiplicación $(\cdot)$ de un número real por un elemento de $\mathcal{L}$" de la siguiente manera:
   (a) $\forall \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{L};\ \forall v \in \mathcal{V}, \quad (\mathcal{F}+\mathcal{G})(v) = \mathcal{F}(v) + \mathcal{G}(v)$
   (b) $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{L};\ \forall \lambda \in \mathbb{R};\ \forall v \in \mathcal{V}, \quad (\lambda \cdot \mathcal{F})(v) = \lambda \cdot \mathcal{F}(v)$

   Demuestre que:
   (a) $(\mathcal{F}+\mathcal{G})$ y $(\lambda \cdot \mathcal{F})$ pertenecen a $\mathcal{L}$; es decir, $(\mathcal{F}+\mathcal{G})$ y $(\lambda \cdot \mathcal{F})$ son transformaciones lineales de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$.
   (b) $(\mathcal{L}, +, \cdot\mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

18. Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ transformaciones lineales de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$, y $\mathcal{H}$ una transformación lineal de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$, demuestre que:
$$\mathcal{H} \circ (\mathcal{F}+\mathcal{G}) = \mathcal{H} \circ \mathcal{F} + \mathcal{H} \circ \mathcal{G}$$

19. Considere la transformación lineal $\mathcal{T}:\mathcal{M}_{3\times 1} \to \mathcal{P}_2$, definida por:
$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ax^2 + (b-c)x$$
   Si se sabe que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}' = \left\{ x^2, x, 1 \right\}$ son bases de $\mathcal{M}_{3\times 1}$ y $\mathcal{P}_2$, respectivamente, determine la matriz A que representa la transformación $\mathcal{T}$ utilizando las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

20. Considere la matriz A que se enuncia a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} -20 & 27 & 9 \\ -12 & 16 & 6 \\ -6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Verifique que $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$ son valores propios de A.

(b) Determine una base para el espacio vectorial asociado con $\lambda = 1$

(c) Determine una base para el espacio vectorial asociado con $\lambda = -2$

21. Para cada una de las siguientes matrices determine sus valores característicos y sus vectores característicos; para cada valor característico λ determine el subespacio vectorial E_λ asociado a λ.

(a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(g) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(h) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(j) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(k) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

(l) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(m) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$