

PARCIAL II

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. No son procedentes las apelaciones sobre preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con témpera (corrector). Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas. Sólo puede utilizar las fórmulas y tablas permitidas para el curso.

1. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \frac{609}{100} \left(\frac{2}{5}\right)^{4x+2} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- (a) Verifique que f_X satisface las condiciones necesarias para ser función de distribución de probabilidad. (4 puntos)
- (b) Sea $m \in \mathbb{N}$, determine la función de distribución acumulada evaluada en m . (4 puntos)
- (c) Determine la probabilidad de que X sea mayor a dos. (3 puntos)
2. Sea X una variable aleatoria discreta con valor esperado μ_x tal que $\text{Var}(X)$ y $E((2X - 5\mu_x)^2)$ existen. Pruebe que $E((2X - 5\mu_x)^2) = 4\text{Var}(X) + 9\mu_x^2$ (4 puntos)
3. En la casa, Sara tiene diez lapiceros, de los cuales solo cuatro escriben. Sara antes de irse a la escuela, toma cinco lapiceros al azar y los mete en su cartuchera vacía. Determine la probabilidad de que a lo sumo dos lapiceros elegidos por Sara escriban. (5 puntos)
4. Históricamente en nuestro país se ha determinado que el número de fallecidos por ahogamiento durante la semana santa (de lunes a domingo) sigue una distribución de Poisson con un promedio de 3 defunciones por día.
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de tener más de 6 defunciones en un día cualquiera de la próxima semana santa? (3 puntos)
- (b) Un día en semana santa es catalogado como **lamentable** por parte de la Comisión de Emergencias si fallecen más de seis personas. ¿Cuál es la probabilidad de que en la próxima semana santa, sean declarados exactamente dos días como **lamentables** por parte de la Comisión de Emergencias? (4 puntos)

5. Un experimento consiste en lanzar dos dados distinguibles. Considere la variable aleatoria X : la diferencia, en valor absoluto, obtenido en los dados. Por ejemplo si se obtuvo (2, 3) entonces $X = |2 - 3| = 1$.

(a) Hallar el rango y la función de probabilidad de la variable X (5 puntos)

(b) En una feria, un juego consiste en lanzar dos dados diferentes. El juego tiene un costo de 500 colones. El concursante recibe 800 colones si obtiene un 1 de diferencia absoluta entre los resultados, recibe 400 colones si obtiene un 2 ó 3 de diferencia absoluta entre los resultados y en caso contrario no recibe dinero. Por ejemplo si el al lanzar los dados se obtiene un 5 y un 3, la diferencia absoluta es 2, por lo que obtiene 400 colones. Sea G la ganancia obtenida en el juego. Determine $E(G)$. Usted tiene un amigo que desea saber si le conviene o no jugar este juego para poder obtener ganancias, ¿qué le recomienda usted? (4 puntos)

6. Un experimento tiene una probabilidad de éxito p y de fracaso q . El experimento se repiten varias veces hasta que se dé alguna de las siguientes condiciones:

- 1) Se acumulan dos éxitos
- 2) Se dan dos fracasos consecutivos

Determine el espacio muestral y la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X que representa el total de repeticiones que se debe hacer el experimento. (4 puntos)

Algunas fórmulas que podría necesitar pero quizás no.

$$1. \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$2. \sum_{i=0}^n r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$3. \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}, \text{ si } |r| < 1.$$

$$4. \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$