$\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica $\quad$ $\mathcal{T}$iempo: 3 horas
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática $\quad$ $\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 50 puntos
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación $\quad$ $\mathcal{J}$unio de 2014

$\mathcal{E}$xamen de $\mathcal{R}$eposición

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Sean $x \in \mathbb{R}$ y las matrices reales A, B y C, definidas como: (3 pts)

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -11 & -1 \\ 29 & 8 \end{pmatrix}$$

Encuentre el valor x, de manera que se satisfaga la igualdad $AB^t = C$

2. Utilizando el método de Gauss-Jordan, determine el conjunto solución y una solución particular del siguiente sistema de ecuaciones lineales: (5 pts)

$$\begin{cases} -2x + 2y - 3z - w = -1 \\ x - y + 2z + 3w = 10 \\ z + 7w = 1 \end{cases}$$

3. Sea $(\mathcal{G}, *)$ algún grupo cuyo elemento neutro es e. Usando inducción matemática, demuestre que $\forall x, y \in \mathcal{G}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $\left(x' * y * x\right)^n = x' * y^n * x$ (4 pts)

4. Considere los grupos $\left(\mathbb{Z}_2, +\right)$ y $\left(\mathbb{Z}_3, +\right)$ y sea $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. $\forall\, (a, b), (c, d) \in \mathcal{G}$ se define:

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$$

Si se sabe que $(\mathcal{G}, *)$ es grupo:

(a) Determine los seis elementos de $\mathcal{G}$ (2 pts)
(b) Determine la tabla de operación binaria para $(\mathcal{G}, *)$ (2 pts)
(c) Encuentre el elemento simétrico de $\left(\hat{1}, \hat{1}\right)$ (1 pto)

5. Si se tiene que $\mathcal{W} = \left\{a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) / a - 3b - c = 0\right\}$, verifique que $\mathcal{W}$ es subespacio de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (4 pts)

6. Si se sabe que $\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Big/ a - b = 0, c + 2d = 0 \right\}$ es subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, determine una base de $\mathcal{W}$ y $\dim(\mathcal{W})$ (4 pts)

7. Sea $\{x, y, z\}$ un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^3$. Demuestre que $\mathcal{B} = \{x, x + y, y - z\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ (3 pts)

8. Considere los vectores $u, w \in \mathbb{R}^3$, tales que $u = (-4, \alpha - 1, 0)$ y $w = (2, 2 - \beta, 0)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Encuentre los valores de α y β para que se cumplan, de manera simultánea, las condiciones siguientes: (4 pts)

   (a) u y w son linealmente dependientes.

   (b) $u \in \mathcal{G}en\left(\{(2, 1, 3), (-1, 0, 1)\}\right)$

9. Sea $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{T}\left(a + bx + cx^2\right) = (c - 2b, -a, 2a + 2b - c,)$ una transformación lineal. Obtenga:

   (a) Núcleo de $\mathcal{T}$ y nulidad de $\mathcal{T}$ (5 pts)

   (b) Rango de $\mathcal{T}$ y una base de la imagen de $\mathcal{T}$ (5 pts)

10. Sea $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}\left(a + b\,x + c\,x^2\right) = -2a + b\,x + (2b - c + a)\,x^2 + 3c\,x^3$ una transformación lineal. Si se tiene que $\mathcal{B}_1 = \left\{-1, x^2, -2x\right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{x^2, x, -2, -x^3\right\}$ son bases del dominio y del codominio de $\mathcal{T}$, respectivamente, conteste lo que se pide en cada caso:

    (a) Determine la matriz representativa de $\mathcal{T}$ relativa a las bases enunciadas. (5 pts)

    (b) Utilizando la matriz de representación de $\mathcal{T}$ que obtuvo en el inciso (a), calcule $\mathcal{T}\left(2 - 3x + 4x^2\right)$ (3 pts)