Instituto Tecnológico de Costa Rica — Cálculo

Escuela de Matemática — I S 2006

II PARCIAL

1. (3 puntos) Calcule la derivada de $f(x) = x\tan^3(\sqrt{2^{-x}})$

2. Calcule los siguientes límites

   (a) (4 puntos) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

   (b) (3 puntos) $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)e^{\frac{4}{x-2}}$

3. (3 puntos) Halle los puntos en los que la recta tangente a la función $f(x) = 3\ln(x^2+1) - 4\arctan(x) - 3x$, sea horizontal

4. (4 puntos) Para la función $f(x) = \dfrac{3x}{(5-x)^2}$, encuentre los intervalos donde sea creciente, los intervalos donde es decreciente y los extremos relativos.

5. Calcule las siguientes derivadas

   (a) (4 puntos) $\left[\tan^3(1-2x) + \dfrac{xe^{-x}}{\cos(3x)}\right]'$

   (b) (4 puntos) $\left[\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x}\cdot\ln\left(\dfrac{5}{x^2}\right)\right]'$

6. (3 puntos) Halle todas las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

7. (3 puntos) Halle una ecuación para la recta tangente a la función $f(x) = \ln(3-x) + \dfrac{\ln(x-1)}{2}$ en el punto $(2, 0)$

8. (3 puntos) Sean f es una función derivable, donde además se sabe que $f(2) = 4$, $f'(2) = 3$ y $f'(4) = -5$. Calcule la derivada de $h(x) = f(f(x)) + f(x^2)$ para luego evaluar $h'(2)$

9. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$

   (a) (1 punto) Halle D_f y los cortes con los ejes

   (b) (1.5 puntos) Verifique que $x = 1$ es A.V y que $y = x - 2$ es A.O de f

   (c) (1.5 puntos) Construya la tabla de $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ y halle los extremos relativos

   (d) (1.5 puntos) Construya la tabla de $f''(x) = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$ y halle los puntos de inflexión

   (e) (1.5 puntos) Haga la tabla resumen y grafique la función.

10. (3 puntos) Halle una ecuación para la recta tangente a la función $f(x) = \ln(2 + x) + \dfrac{\sqrt{1 - 3x}}{x^2}$ en el punto $(-1, 2)$

11. (4 puntos) Calcule (no simplifique) la derivada de

$$f(x) = e^{\cos(x^5)} \tan^3(x - 10^x)$$

12. (4 puntos) Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)^2}$, y analice si existe algún $c \in \left]\frac{9}{4}, 4\right[$ tal que $f'(c) = 0$, justifique. De existir c encuentre un posible valor

13. (4 puntos) Verifique la siguiente igualdad $\left[x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})\right]' = 2\sqrt{x^2+1}$

14. (4 puntos) Para $f(x) = x^3 + x^2$, halle los puntos sobre la gráfica de f en los que la recta tangente tenga pendiente 1

15. (4 puntos) Calcule el siguiente límite $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)^{\tan x}$

16. (4 puntos) Encuentre los extremos absolutos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, 2]$

17. (4 puntos) Compruebe que la función $f(x) = x^3 - 4x - 1$, satisface las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 2]$y halle todos los c que satisfacen la conclusión del teorema.

18. (4 puntos) Calcule (no simplifique) la derivada de

$$f(x) = \sec^3(e^{-x^2}) + \frac{\sqrt[3]{x} - \cos x}{\arctan x}$$

19. (4 puntos) Si f es una función derivable que cumple que $f(4) = \frac{1}{2}$, $f'(4) = 6$, $f'(2) = -3$ y $f(2) = 4$. Calcule la derivada de $h(x) = f(f(x)) - f(x^2) + f^3(x)$ para luego evaluar $h'(2)$

20. (3 puntos) Calcule $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{e^x}{\ln x} \right)$

21. (3 puntos) Halle una ecuación para la recta tangente a la función $f(x) = 4x - x^2$ que no se interseque con la recta de ecuación: $2y - 4x = 5$

22. (4 puntos) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$ encuentre los intervalos donde sea creciente, los intervalos donde es decreciente, los extremos relativos y absolutos.