Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Álgebra Lineal para Computación

Tiempo: 2 horas 20 minutos
Puntaje Total: 30 puntos
II semestre 2017

Solución III Examen Parcial
Miércoles 22 de Noviembre

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a la respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración. No se permite el uso de dispositivos con memoria de texto no conectividad a Internet, así como el uso de hojas sueltas.

---

1. Determine si la función T es una trasformación lineal o no, para cada uno de los siguientes casos, justifique su respuesta.

   (a) Sea $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(a + bx + cx^2) = (2b - c, a, c - 2a - 2b)$. *(2 puntos)*

$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) &= T(\alpha(a + bx + cx^2) + (d + ex + fx^2)) \\ &= T((\alpha a + d) + (\alpha b + e)x + (\alpha c + f)x^2) \\ &= (2(\alpha b + e) - (\alpha c + f), (\alpha a + d), (\alpha c + f) - 2(\alpha a + d) - 2(\alpha b + e)) \\ &= \alpha(2b - c, a, c - 2a - 2b) + (2e - f, d, f - 2d - 2e) \\ &= \alpha T(u) + T(v) \end{aligned}$$

   (b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(a, b, c) = (2, a + b + c, a - b + c)$. *(2 puntos)*
   No es lineal pues $T(0, 0, 0) = (2, 0, 0)$

2. Se define V como el espacio vectorial tal que $V = \{ax^3 + bx / a, b \in \mathbb{R}\}$ y las transformaciones lineales $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow V$ y $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definidas por:

$$S(a, b, c) = -bx^3 + (a - c)x \quad ; \quad T(ax^3 + bx) = (a, -a, b, b)$$

   (a) Calcule la composición $T \cdot S$ *(4 puntos)*

$$T(S(a, b, c)) = T(-bx^3 + (a - c)x) = (-b, b, a - c, a - c)$$

   (b) Determine $(T \cdot S)(1, 2, 3)$. *(1 puntos)*

$$T(S(1, 2, 3)) = (-2, 2, -2, -2)$$

3. Considere la transformación lineal, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ x + y \end{pmatrix}$$

(a) Justifique si T es o no inyectiva. *(3 puntos)*

$$\begin{gathered} 2x-y=0 \to 2x=y \\ x+3y=0 \to x=-3y \\ x+y=0 \to x=-y \\ \to x=0, y=0 \\ \to inyectiva \end{gathered}$$

(b) Justifique si T es o no sobreyectiva. *(2 puntos)*
$dimNuc(T) + dimImg(T) = 2$, Como es inyectiva $dimNuc(T) = 0$, por lo tanto no es Sobreyectiva

4. Sea $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ una tranformación lineal que satisface que:

$$T(x+1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad T(2x+3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Verifique que el conjunto $\{x+1, 2x+3\}$ es li *(2 puntos)*
Son li pues uno no es multiplo del otro

(b) Determine el criterio $T(ax+b)$ con a y b constantes fijas. *(3 puntos)*
$ax+b = C_1(x+1) + C_2(2x+3)$
$ax+b = (C_1+2C_2)x + (C_1+3C_2)$
$\begin{cases} C_1 + 2C_2 = a \\ C_1 + 3C_2 = b \end{cases}$

$C_1 = 3a-2b$
$C_2 = b-a$
$ax+b = (3a-2b)\,(x+a) + (b-a)\,(2x+3)$
$T\,(ax+b) = (3a-2b)\,T\,(x+a) + (b-a)\,T\,(2x+3)$
$T\,(ax+b) = (3a-2b)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-a)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} T\,(ax+b) = \begin{pmatrix} -6a+4b \\ 2a-b \end{pmatrix}$

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con matriz del cambio de base en las bases canónicas.

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ y-z \end{pmatrix}$$

Donde C_1, C_2 son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

a) Determine una base para el núcleo de T y la nulidad *(3 puntos)*

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=y=z$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow Nuc(T) = cl\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rrightarrow baseNuc(T) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rrightarrow nul(T) = 1$$

b) Determine una base para la imagen de T y el rango *(3 puntos)*

$$T(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-z\\y-z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rrightarrow Base = Canónica \Rrightarrow rango = 2$$

6. Calcule los subespacios asosciados a cada valor propio de la matriz: *(5 puntos)*

$$det(A-aI)=det\begin{pmatrix}1-a&2&3\\0&1-a&0\\2&1&2-a\end{pmatrix}=(1-a)(a^2-3a-4)=(1-a)(a+1)(a-4)$$

$$(A+1I)=\begin{pmatrix}1+1&2&3\\0&1+1&0\\2&1&2+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rrightarrow\begin{pmatrix}2&2&3\\0&2&0\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$y=0, x=\frac{-3z}{2}\Rrightarrow V_1=cl\{(-3/2,0,1)\}$

$$(A-1I)=\begin{pmatrix}1-1&2&3\\0&1-1&0\\2&1&2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rrightarrow\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$y=\frac{-3z}{2}, x=\frac{-y-z}{2}\Rrightarrow y=\frac{-3z}{2}, x=\frac{-z}{4}\Rrightarrow V_1=cl\{(-1/4,-3/2,1)\}$

$$(A-4I)=\begin{pmatrix}1-4&2&3\\0&1-4&0\\2&1&2-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rrightarrow\begin{pmatrix}-3&2&3\\0&-3&0\\2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$y=0, x=z\Rrightarrow V_1=cl\{(1,0,1)\}$