$\mathcal{I}$nstituto $\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemáticas
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación

$\mathcal{T}$iempo: 2 horas
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 27 puntos
$\mathcal{M}$arzo de 2 008

$\mathcal{I}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Sean $x \in \mathbb{R}$ y las matrices reales A, B y C, definidas como: (3 pts)

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -11 & -1 \\ 29 & 8 \end{pmatrix}$$

   Encuentre el valor x, de manera que se satisfaga la igualdad $AB^t = C$

2. Si A y B son matrices invertibles y $det(A) = 5$, calcule $det\left(B^{-1}AB\right)$ (3 pts)

3. Si la matriz A está definida como $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple el siguiente resultado: (4 pts)

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 2^{n-1}-1 & 1 & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

4. Determine, en caso de existir, A^{-1} si se tiene que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ (4 pts)

5. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Si B es la matriz que se obtiene a partir de A luego de multiplicar la j-ésima fila de A por un número real λ. Utilice la definición que permite hallar el determinante de una matriz y demuestre que $det(B) = \lambda \cdot det(A)$ (4 pts)

6. Se dice que una matriz A es *simétrica* si $A^t = A$ y que es *antisimétrica* si $A^t = -A$

   (a) Verifique que la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ es *antisimétrica.* (1 pto)

   (b) Demuestre que si A es *antisimétrica*, entonces A^2 es *simétrica.* (3 pts)

7. Utilizando el método de Gauss-Jordan, determine el conjunto solución y una solución particular del siguiente sistema de ecuaciones lineales: (5 pts)

$$\begin{cases} -2x + 2y - 3z - w = -1 \\ x - y + 2z + 3w = 10 \\ z + 7w = 1 \end{cases}$$