

Tercer Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, se deben presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de celular durante el desarrollo de la prueba. Este es un examen de desarrollo, por tanto, debe aparecer todos los pasos, y sus respectivas justificaciones, que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. [3 puntos] Considere la igualdad

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} = \frac{5}{2} - \frac{2n+3}{2^n}$$

Si se sabe que dicha igualdad es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (**No lo demuestre**).
Calcule el valor exacto de

$$\frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \cdots + \frac{27}{16384}$$

2. [5 puntos] Utilice el método de inducción matemática para demostrar que

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

3. [5 puntos] Considere la sucesión de Fibonacci definida por

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

Calcule la fórmula explícita para la sucesión anterior.

4. [4 puntos] Determine la fórmula por recurrencia para la sucesión b_n , para $n \geq 1$, cuya fórmula explícita es:

$$b_n = n + 5 + 3^{n+1}$$

5. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación \perp por: $(a, b) \perp (x, y) = (a + x - 3, \frac{1}{2}by)$

- (a) [5 puntos] Demuestre que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \perp)$ es un grupo abeliano.
(b) [2 puntos] Calcule el valor de $[(3, 7) \perp (5, 2)^{-1}]^{-2}$.
(c) [1 punto] ¿Es $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \perp)$ un grupo abeliano? Justifique.

6. Considere el conjunto $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$. Sobre A se define la operación \triangle de la siguiente manera:

\triangle	3	5	7	9	11	13
3	5	9	11	3	13	7
5	9	3	13	5	7	11
7	11	13	5	7	9	3
9	3	5	7	9	11	13
11	13	7	9	11	3	5
13	7	11	3	13	5	9

Si se sabe que (A, \triangle) es un grupo abeliano.

- [2 puntos]** Determine el elemento neutro y los inversos de cada uno de los elementos de A .
- [2 puntos]** Calcule el resultado de la operación $[(3 \triangle 5^{-1})^{-1} \triangle (11^3 \triangle 9)]^{-2}$
- [2 puntos]** Calcule todos los subgrupos de (A, \triangle) .