INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN

II semestre 2011
Total: 29 puntos
Tiempo: 2h. 30 m.

III Examen Parcial

1. Considere la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2z \\ x+z \\ y+w \end{pmatrix}$

   (a) Encuentre el núcleo, la imagen, el rango y la nulidad de T. **(4 puntos)**

   (b) Determine una base para la imagen de T. **(2 puntos)**

2. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal donde $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y+3z \\ 4x-2y+6z \\ -6x+3y-9z \end{pmatrix}$
   Determine la matriz asociada a la transformación T (base canónica). **(2 puntos)**

3. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determine los valores característicos y el espacio propio asociado al menor de esos valores. **(5 puntos)**

4. Considere la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-3y \end{pmatrix}$ y las bases $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Determine la matriz de cambio de base de B_1 a B_2. **(4 puntos)**

5. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal y suponga que $\dim(V) = \dim(W) = n$. Demuestre que:

   (a) Si T es inyectiva entonces, T es sobreyectiva. **(2 puntos)**

   (b) Si T es sobreyectiva entonces, T es inyectiva. **(2 puntos)**

6. Sea $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal con $T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ -b+2c \\ a+b+2c \end{pmatrix}$.

   (a) Demuestre que T es biyectiva. **(3 puntos)**

   (b) Calcule el criterio de T^{-1}. **(2 puntos)**

7. Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal tal que $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x^2+2x-1$, $T\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3x+2$. Determine el criterio de T. **(4 puntos)**