

PARCIAL I

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. No son procedentes las apelaciones sobre preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con ténpera (corrector). Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Considere la palabra PERMUTACION. ¿Cuántos anagramas se pueden construir con las letras de esta palabra si

(a) no hay restricción? (2 puntos)

$$11! = 39\,916\,800$$

(b) las vocales deben ir después de la segunda posición? (4 puntos)

$$\begin{aligned} Et\ 1 & : \text{ Elegir espacios vocales : } \binom{9}{5} \\ Et\ 2 & : \text{ Colocar vocales : } 5! = 120 \\ Et\ 3 & : \text{ Colocar el resto de las letras : } 6! = 720 \\ Total & : \binom{9}{5} \cdot 120 \cdot 720 = 10\,886\,400 \end{aligned}$$

(c) hay por lo menos dos vocales después de la quinta posición? (6 puntos)

Por complemento

Caso 1 : Hay exactamente una vocal después del quinto lugar

Et 1 : Seleccionar el lugar donde se coloca la vocal : $\binom{6}{1}$

Et 2 : Elegir vocal y colocarla : $\binom{5}{1}$

Et 3 : Colocar el resto de las vocales : $\binom{5}{4} \cdot 4!$

Et 4 : Colocar el resto de las letras: $6!$

Total : $\binom{6}{1} \binom{5}{1} \binom{5}{4} \cdot 4! \cdot 6! = 2592\,000$

Caso 2 : Sin vocales después del quinto lugar

Et 1 : Colocar vocales en los primeros cinco lugares : $5!$

Et 2 : Colocar el resto : $6!$

Total : $5! \cdot 6! = 86\,400$

Total : $2592\,000 + 86\,400 = 37\,238\,400$

Por tanto, el total de anagramas en los cuales hay

por lo menos dos vocales después del quinto lugar es :

$$39\,916\,800 - 37\,238\,400 = 2\,678\,400$$

2. El estudiante de primaria que desee ingresar al Colegio Bienestar Seguro debe realizar una prueba de 20 ítemes de selección única distribuidos en 5 ítemes sobre cada una de las siguientes disciplinas: matemática, ciencias, español y estudios sociales. Cada ítem tiene 4 opciones de respuesta. ¿De cuántas maneras se puede contestar esta prueba si

- (a) no hay restricciones (se puede dejar las preguntas que uno quiera sin contestar)? (2 puntos)

$$5^{20} = 95\,367\,431\,640\,625$$

- (b) se deben dejar exactamente dos ítemes sin contestar y estos deben ser de una misma disciplina? (4 puntos)

$$4 \cdot \binom{5}{2} \cdot 4^3 \cdot 4^{15} = 2748\,779\,069\,440$$

- (c) se debe dejar exactamente un ítem sin contestar para cada disciplina? (2 puntos)

$$5^4 \cdot 4^{16} = 2684\,354\,560\,000$$

- (d) se debe contestar al menos un ítem de cada disciplina? (6 puntos)

$$\begin{aligned} & |U| - |\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4}| \\ &= 5^{20} - \left(4 \cdot 5^{15} - \binom{4}{2} 5^{10} + \binom{4}{3} 5^5 - 1 \right) \\ &= 95\,245\,419\,909\,376 \end{aligned}$$

3. Considere la palabra TORTUGUERO. ¿Cuántos anagramas se pueden formar a partir de las letras de esta palabra en las cuáles

(a) inicie con vocal y las letras de la palabra OGO estén juntas en cualquier orden? (6 puntos)

2 T, 2 O, 2 R, 2 U, 1 G y 1 E

Caso 1 : Inicia con U

Et 1 : Coloco la U: 1 forma

Et 2 : Colocar la caja OGO: $C(7, 1)$

Et 3 : Permutar la caja: $\frac{3!}{2!}$

Et 4 : Permutar el resto: $\frac{6!}{2!^2}$

Total : $7 \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{6!}{2!^2} = 3780$

Caso 2 : Inicia con E

$1 \cdot \binom{7}{1} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{6!}{2!^3} = 1890$

Caso 3 : Inicia con O

Et 1 : Coloco la O: 1 forma

Et 2 : Colocar la caja GO y permutarla: 2!

Et 3 : Permutar el resto: $\frac{7!}{2!^3}$

Total : $2! \cdot \frac{7!}{2!^3} = 1260$

Total : $3780 + 1890 + 1260 = 6930$

= 1270 080

(b) no deben haber vocales antes de la quinta posición?

(4 puntos)

2 T, 2 O, 1 E; deben ir de la quinta posición en adelante

Et 1 : Escoger los lugares donde van vocales: $C(6, 5)$

Et 2 : Colocar las vocales: $\frac{5!}{2!^2}$

Et 3 : Permutar el resto: $\frac{5!}{2!^2}$

Total : $6 \left(\frac{5!}{2!^2} \right)^2 = 5400$

4. En la tienda TELCOMPU tienen existencia suficiente de memorias USB de 2 Gigas, 4 Gigas, 8 Gigas y 16 Gigas. Sin embargo, las memorias de 2 Gigas no están a la venta, pues por la compra de cada memoria USB de 8 Gigas te regala una gratis de 2 Gigas. Suponiendo que entre las memorias de cada tipo son idénticas, ¿de cuántas maneras se pueden obtener 20 memorias USB (compradas más regaladas) con la condición de que se deben comprar seis memorias más de 16 gigas que de 4 gigas? (6 puntos)

Sean x_1 : núm de memorias de 2 Gigas adquiridas

x_2 : núm de memorias de 4 Gigas adquiridas

x_3 : núm de memorias de 8 Gigas adquiridas

x_4 : núm de memorias de 16 Gigas adquiridas

Se tiene que $x_1 = x_3$ y $x_4 = x_2 + 6$

Sustituyendo en

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ se tiene

$$x_3 + x_2 + x_3 + x_2 + 6 = 20,$$

$$x_2 + x_3 = 7, \quad (*)$$

$$C(2 + 7 - 1, 7) = \binom{8}{7} = 8 \text{ formas de comprar las memorias}$$