INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

7 de mayo de 2012
Total: 31 puntos
Tiempo: 2 horas 15 minutos

Segundo Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, se deben presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de celular durante el desarrollo de la prueba. Este es un examen de desarrollo, por tanto, debe aparecer todos los pasos, y sus respectivas justificaciones, que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones definidas de $A = \{2, 3, 4\}$ en $B = \{a, b, c, d, e\}$. La matriz de $\mathcal{R}$ cumple que $M_{\mathcal{R}}[i, j] = 1 \Leftrightarrow [\ i = j - 1 \ \vee \ j = 5\ ]$, y la matriz de $\mathcal{S}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Determine el gráfico de la relación $\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}$. **(3 puntos)**
   (b) Determine la matriz asociada a la relación $\overline{\mathcal{R}} - \mathcal{S}$. **(2 puntos)**

2. En $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ se define la relación $\mathcal{R}$ como $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Longleftrightarrow [ad = bc]$
   (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. **(4 puntos)**
   (b) Determine la clase de equivalencia de $(5, 3)$. **(2 puntos)**

3. Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son dos relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto A, con A no vacío, demuestre que la relación $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{-1}$ es de equivalencia. **(4 puntos)**

4. Considere la función $f\colon \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\}$ definida por $f(x) = \dfrac{1 - 6x}{3x - 6}$,
   (a) Demuestre que f es biyectiva. **(4 puntos)**
   (b) Determine el criterio $f^{-1}(x)$ y compruebe que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. **(3 puntos)**

5. Para $A = \{1, 2, 3\}$, defina la función $f\colon A \times A \to A \times A$ por $f\big((a, b)\big) = (4 - a, 4 - b)$.
   (a) Determine si f es inyectiva y si es sobreyectiva. **(2 puntos)**
   (b) Si $E = \{(a, b) \in A \times A \ / \ \ a + b = 4\}$, verifique que $f(E) = E$. **(2 puntos)**
   (c) Calcule $f^{-1}(\{(1, 2), (3, 2)\})$. **(1 punto)**

6. Sean A, B y C conjuntos no vacíos, suponga que f es una función de A en B y además, que g es una función de B en C.
   Demuestre que si $g \circ f$ es sobreyectiva y g es inyectiva, entonces f es sobreyectiva.
   (4 puntos)