$\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemáticas
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación

$\mathcal{T}$iempo: 2 horas
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 33 puntos
$\mathcal{J}$unio de 2013

$\mathcal{E}$xamen de $\mathcal{R}$eposición

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes reclamos en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Sea A alguna matriz de orden n; si $A^2 = \mathcal{I}_n$, se dice que A es involutiva y si $A^2 = A$, se dice que A es idempotente.

   (a) Determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ es involutiva, idempotente o si no es de alguno de los tipos mencionados. (2 pts)

   (b) Demuestre que si B es alguna matriz de orden n, tal que B es idempotente, entonces la matriz $C = 2B - \mathcal{I}_n$ es involutiva. (2 pts)

2. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Determine, sin resolver sistemas de ecuaciones, la matriz P que satisfaga $AP - B = \mathcal{I}_3$ (4 pts)

3. Si se sabe que el siguiente sistema lineal posee infinito número de soluciones, determine su conjunto solución utilizando el método de Gauss–Jordan. (4 pts)

$$\begin{cases} a - 2b + c - d + 2e = 10 \\ 2a - 4b + 4d + 2e = 8 \\ -4a + 8b + c - 11d - 2e = -10 \end{cases}$$

4. Sea $\left(\mathcal{G}, *\right)$ un grupo cuyo elemento neutro es e y sea a un elemento fijo de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{H} = \left\{x \in \mathcal{G} \big/ x * a = a * x\right\}$, demuestre que $\left(\mathcal{H}, *\right)$ es subgrupo de $\left(\mathcal{G}, *\right)$ (4 pts)

5. Sea $\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \Big/ x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Si se sabe que $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ es anillo, verifique que es conmutativo y con elemento unidad. (3 pts)

6. Sea $\mathcal{W} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 3y = 0 \right\}$. Determine si $\mathcal{W}$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$ (3 pts)

7. Sean $\mathcal{T} : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ una función definida por $\mathcal{T}(a + bx) = (b - a, a - b)$, $\mathcal{B}_1 = \left\{ -x, 1 \right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{ (0, -1), (1, 0) \right\}$ bases de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

   (a) Verifique que $\mathcal{T}$ es transformación lineal. (3 pts)

   (b) Determine una base del núcleo de $\mathcal{T}$ y una base de la imagen de $\mathcal{T}$ (3 pts)

   (c) Obtenga la matriz representativa de $\mathcal{T}$ relativa a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ (3 pts)

   (d) Determine $[\mathcal{T}(4x - 3)]_{\mathcal{B}_2}$ utilizando la matriz del inciso c. (2 pts)