Comprendiendo las Probabilidades

Giovanni Sanabria Brenes

Contenidos

Presentación

¿Qué es la probabilidad? Dado un fenómeno aleatorio, como lanzar un par de dados, la probabilidad busca medir la posibilidad de ocurrencia de cada uno de sus posibles resultados, bajo ciertas condiciones. En un sentido práctico, Ivar Ekeland (1992) señala que

La toma de decisión en un futuro incierto puede, pues
- en principio por lo menos - ser enteramente
reducida al cálculo de probabilidades.

El presente material brinda un estudio general de la teoría de Probabilidades y es fruto de la experiencia adquirida durante varios semestres impartiendo cursos sobre probabilidades y del desarrollo de varias propuestas de enseñanza del tema en congresos.

Así, para el estudio de las técnicas de conteo se introduce dos creaciones didácticas: CASOS y ETAPAS, derivadas de los principios de la suma y el producto del análisis combinatorio.

Por otro lado, para mejorar la comprensión del concepto de probabilidad se introduce el apartado probabilidad frecuencial. Este apartado, introduce la probabilidad de un evento, desde un enfoque frecuencial o estadístico, de acuerdo a su compatibilidad con la observaciones del evento en varias repeticiones del experimento aleatorio.

El libro "Comprendiendo las Probabilidades" está dirigido a estudiantes de las carreras de Ingeniería en Computación y de Enseñanza de la Matemática. Sin embargo, ignorando algunos desarrollos teóricos, ciertas partes del texto pueden ser utilizadas por estudiantes de olimpiadas matemáticas y de otras carreras universitarias. En los apéndices se brinda un breve repaso sobre los tópicos necesarios para el estudio de la teoría de probabilidades.

Sobre el nivel de dificultad, a lo largo del texto se profundizan ciertos tópicos que son adicionales al estudio general de las probabilidades. Así, las secciones, teoremas, ejemplos y ejercicios marcados con (♣) son opcionales, y dirigidos al lector que desea ampliar su conocimiento del mundo de la aleatoriedad.

Capítulo I

Introducción al Análisis Combinatorio

Se abordan los fundamentos, principios y técnicas de conteo principales del Análisis Combinatorio, de una manera muy comprensiva y sistemática. Se espera que el lector desarrolle habilidades de manera progresiva que le permitan resolver problemas de conteo cada vez más complejos. Se recomienda al lector repasar Teoría de Conjuntos (Apéndice A) y funciones (Apéndice B).

1 Introducción

¿Por qué los problemas de combinatoria son difíciles? Al respecto André Antibí [**?**] señala que:

> *"Ahora bien en este tipo de problema, por pura tradición, en mi opinión, se indica rara vez los pasos a seguir y evidentemente, esto contribuye a hacer las cosas más difíciles... Se trabaja sobre conjuntos finitos, ciertamente, pero raramente se está en capacidad, en este tipo de problema, de especificar y de contar uno a uno los elementos del conjunto del cual se quiere calcular el cardinal"*

Durante varios semestres se ha notado que para muchos estudiantes universitarios, en cursos de probabilidad, les es difícil aplicar las técnicas de combinatoria, esto dío origen a la siguiente interrogante ¿Cómo abordar la enseñanza de la combinatoria?

Este capítulo busca dar respuesta a estas interrogantes, por medio de dos creaciones didácticas: CASOS y ETAPAS, derivadas de los principios de la suma y el producto del análisis combinatorio. La compresión adecuada de estos principios y su aplicación sistemática por medio de esquemas de casos y etapas, permiten hacerle frente con éxito a los problemas de combinatoria.

El presente material va dirigido a estudiantes universitarios de matemática, enseñanza de la matemática y computación. Y aborda los fundamentos, principios y técnicas de conteo principales del Análisis Combinatorio.

El conteo cotidiano es una asociación entre un conjunto de números y un conjunto de objetos, donde un número es asignado a cada objeto. Cuando se aprende a contar, se cometen algunos errores: se repiten números (no hay inyectividad en las asignaciones) o se brinca números (no hay sobreyectividad en las asignaciones). Así, de manera progresiva, se parte de la primer técnica de conteo de seres humanos: las funciones biyectivas, hasta abordar técnicas más sofisticadas.

Se espera que el lector obtenga una concepción más sólida y comprensiva del los elementos del análisis combinatorio por medio del presente material. Se recomienda al lector repasar Teoría de Conjuntos (Apéndice A) y funciones (Apéndice B).

2 Fundamentos y principios elementales del conteo

2.1 Definiciones y teoremas básicos del análisis combinatorio.

Definición 1 *Se define **el conjunto** $\mathbf{S_n}$, como el conjunto formado por los primeros n números naturales, es decir*

$$S_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$$

Definición 2 *Dado un conjunto finito A, se dice que la **cardinalidad** de A es n y se escribe $|A| = n$, si y solo si existe una biyección entre A y S_n, es decir, A posee n elementos.*

Ejemplo 1 *Dados los conjuntos $A = \{a, c, d, g, h\}$ y $B = \{1, +, \{1, 2\}, A\}$, se tiene que $|A| = 5$, y $|B| = 4$. Note que establecer una biyección de A a S_5 es equivalente a una manera de contar los elementos de A.*

Definición 3 *Dos conjuntos finitos A y B son equipotentes si y solo si $|A| = |B|$. Se escribe que $A \simeq B$. Note que si $A \simeq B$ entonces A y B tienen igual cantidad de elementos.*

Ejemplo 2 *Note que los conjuntos $A = \{a, c, d, g\}$ y $B = \{1, +, \{1, 2\}, A\}$ son equipotentes.*

El siguiente teorema brinda una caracterización de los conjuntos equipotentes y a la vez, da una herramienta para determinar si dos conjuntos son equipotentes.

Teorema 1 *Dados dos conjuntos finitos A y B, decir que estos son equipotentes, es equivalente a que exista una biyección entre ellos.*

Prueba. *1. Supongamos que A y B son equipotentes, es decir $|A| = |B| = n$, como $|A| = n$, $|B| = n$ entonces existen dos funciones biyectivas f_1 y f_2, tales que:*

$$f_1 : A \to S_n, \qquad f_2 : B \to S_n,$$

dado que la inversa de una función es biyectiva y la composición de funciones biyectivas es también biyectiva, entonces la función

$$g = f_2^{-1} \circ f_1 : A \to B$$

es una biyección de A a B.

2. *Suponga que existe una función $g : A \to B$ biyectiva, y que $|A| = n$, es decir existe una función biyectiva $f_1 : A \to S_n$. Se debe probar que $|B| = n$, basta encontrar al menos una función $f_2 : B \to S_n$ biyectiva. Tome $f_2 = f_1 \circ g^{-1}$ (verifique que esta función sirve).*

Ejemplo 3 *Sea A el conjunto de todos los números de tres dígitos en base 10, estos van de 000 a 999, por lo tanto $|A| = 1000$. Sea $D = \{0, 1, 2, ..., 9\}$, y considere la función*

$$\begin{array}{rccc} f: & D \times D \times D & \to & A \\ & (b_1, b_2, b_3) & & 100 \cdot b_1 + 10 \cdot b_2 + b_3 \end{array}$$

Se intuye que f es una biyectiva, lo cuál se puede comprobar fácilmente, por lo tanto, $D \times D \times D \simeq A$, y entonces $|D \times D \times D| = 1000$.

Ejemplo 4 *Dado un conjunto $B \subseteq U$, recuerde que la función característica de B en U, es una función de U en $\{0, 1\}$, definida por $f_B(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in B \\ 0 & si \quad x \notin B \end{cases}$. Considere un conjunto A de cardinalidad n y el conjunto 2^A de funciones de A a $\{0, 1\}$: $2^A = \{f \mid f : A \to \{0, 1\}\}$ .Se define la función*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & P(A) & \to & 2^A \\ & S & & f_S \end{array}$$

que toma un subconjunto S de A y le asocia la función característica de S en A. Como φ es biyectiva (pruébelo), entonces $P(A) \simeq 2^A$.

El siguiente teorema brinda tres resultados base del análisis combinatorio, que será los casos particulares de los principios elemento a desarrollar en la siguiente sección.

Teorema 2 *Sean A y B dos conjuntos finitos, se tiene que:*

1. *Si A y B son excluyentes entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.*
2. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
3. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Prueba. *1. Suponga que $|A| = n$, $|B| = m$, entonces existe dos funciones biyectivas f_1 y f_2, tales que:*

$$f_1 : A \to S_n, \qquad f_2 : B \to S_m,$$

se define la función $g : A \cup B \to S_{n+m}$ por $g(x) = \begin{cases} f_1(x) & si \quad x \in A \\ f_2(x) + n & si \quad x \in B \end{cases}$, dado que esta función es biyectiva entonces $|A \cup B| = n + m = |A| + |B|$.

2. *Queda como ejercicio:*
   (a) *Pruebe que $A \times \{b\} \simeq A$*
   (b) *Sea $|A| = n$, pruebe por inducción que $|A \times B| = n \cdot |B|$*
3. *Queda como ejercicio. Justifique y utilice las siguientes igualdades:*

$$|A \cup B| = |A| + |B - A|, \qquad |B| = |B - A| + |B \cap A|.$$

Seguidamente, se brindan otros resultados de cardinalidad.

Teorema 3 *Sean A y B dos conjuntos finitos, se tiene que:*

1. $|A| \geq 0$.
2. $|A| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = \phi$.
3. *Si $A \subseteq B$ entonces $|A| \leq |B|$.*
4. *Si B es el universo de A, entonces $\left|\overline{A}\right| = |B| - |A|$.*
5. *Sea $f : A \to B$,*
   (a) *si f es inyectiva, entonces $|A| \leq |B|$.*
   (b) *si f es sobreyectiva, entonces $|A| \geq |B|$.*

Prueba. *El resultado 1 y 2 son una consecuencia directa de la definición de cardinalidad*

3. *Note que A y $B - A$ son excluyentes, por el teorema 2 parte 1, se tiene que*

$$|B| = |A \cup (B - A)| = |A| + \underbrace{|B - A|}_{\geq 0,\ por\ 1},$$

por lo tanto, $|A| \leq |B|$.

4. *Se tiene que* $A \cup \overline{A} = B$, *como* A *y* $\overline{A}$ *son excluyentes, entonces*

$$|B| = \left|A \cup \overline{A}\right| = |A| + \left|\overline{A}\right|,$$

de donde se obtiene el resultado.

5. a. *Si* f *es inyectiva, entonces* $g : A \to f(A)$, *con* $g(x) = f(x)$ *es biyectiva, donde* $f(A)$ *es el ámbito de* f, *entonces* $A \simeq f(A)$, *es decir*

$$|A| = |f(A)| \qquad (*)$$

y como $f(A) \subseteq B$, *por* 3 *se tiene que*

$$|f(A)| \leq |B|. \qquad (**)$$

De $*$ *y* $**$ *se concluye que* $|A| \leq |B|$.

5. b. *Queda como ejercicio:*

5.b.I *En* A *se define la relación* R *por* $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. *Pruebe que* R *es una relación de equivalencia.*

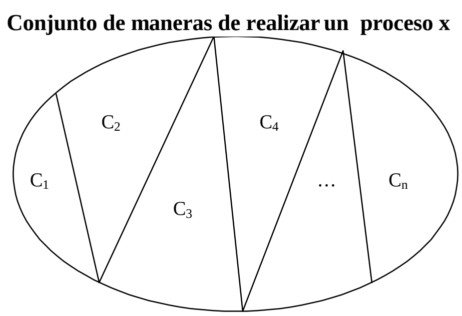
5.b.II *Pruebe que* $B \simeq A/R$.

5.b.III *Pruebe que existe una función inyectiva* $g : A/R \to A$..

2.2 Los principios elementales de conteo

Teorema 4 ***(Principio de la suma)*** *Si las maneras de realizar un proceso se clasifican en* k *casos, y* C_i *es el conjunto de maneras de realizar el proceso ubicadas en el caso* i , *con* $i = 1, 2, 3..., k.$, *se tiene que en el*

Caso I: *hay* $n_1 = |C_1|$ *maneras de realizar el proceso.*
Caso II: *hay* $n_2 = |C_2|$ *maneras de realizar el proceso.*
$\vdots$ $\qquad\qquad\vdots$
Caso k: *hay* $n_k = |C_k|$ *maneras de realizar el proceso.*



Entonces el número total de manera de realizar el proceso es $n_1 + n_2 + ... + n_k$. *Matemáticamente, si* $C_1, C_2, ..., C_n$ *son conjuntos excluyentes dos a dos, entonces*

$$|C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n| = |C_1| + |C_2| + ... + |C_n|.$$

Prueba. ***(Por inducción)***. *Sea*

$$\begin{aligned} P(n) \quad : \quad & |C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n| = |C_1| + |C_2| + ... + |C_n|, \text{ con} \\ & C_1, C_2, ..., C_n \text{ conjuntos excluyentes dos a dos.} \end{aligned}$$

se debe mostrar que $P(n)$ se cumple para todo natural $n \geq 2$.

1. *$P(2)$: $|C_1 \cup C_2| = |C_1| + |C_2|$, con C_1 y C_2 excluyentes, es verdadero por el teorema 2.*

2. *Supongamos que $P(n)$ es verdadero (HI) y probemos que se cumple*

$$\begin{aligned} P(n+1) \quad : \quad & |C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n \cup C_{n+1}| = |C_1| + |C_2| + ... + |C_n| + |C_{n+1}|, \text{ con} \\ & C_1, C_2, ..., C_n, C_{n+1} \text{ conjuntos excluyentes dos a dos.} \end{aligned}$$

Sea $D = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$, como $C_1, C_2, ..., C_n, C_{n+1}$ son excluyentes dos a dos, entonces los conjuntos D y C_{n+1} son excluyentes, así se obtiene que

$$\begin{array}{ccc} & |C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n \cup C_{n+1}| & \\ = & |D \cup C_{n+1}| & \text{(definición de } D\text{)} \\ = & |D| + |C_{n+1}| & \text{(teorema 2, parte 1)} \\ = & |C_1| + |C_2| + ... + |C_n| + |C_{n+1}| & \text{(HI)} \end{array}$$

Por lo tanto, $P(n+1)$ es verdadero. Se concluye que $P(n)$ es verdadero para todo natural $n \geq 2$.

Ejemplo 5 *El colegio San Bartolomé tiene 5 grupos de quinto año, 9 grupos de cuarto año y 18 grupos de noveno año. Una empresa regalará una fiesta a un grupo de tercer ciclo de dicho colegio, si el grupo se elige al azar, ¿de cuántas maneras se puede seleccionar?*
Sea U el conjunto de grupos de tercer ciclo, se desea averiguar la cardinalidad de U. El proceso de selección de un grupo, puede estar en alguno de los siguientes casos

Caso I.	*Elegir un grupo de quinto: hay 5 maneras.*
Caso II:	*Elegir un grupo de cuarto: hay 9 maneras .*
Caso III:	*Elegir un grupo de noveno: hay 18 maneras.*

Por lo tanto, el número de maneras de elegir un grupo de tercer ciclo es $5 + 9 + 18 = 32$.

Teorema 5 ***(Principio del Producto).*** *La realización de un proceso se divide en k etapas. Sea E_i el conjunto de maneras de realizar la etapa i, con $i = 1, 2, 3..., k.$, suponga que*

Etapa I:	*hay $n_1 = \|E_1\|$ maneras de realizarla.*
Etapa II:	*hay $n_2 = \|E_2\|$ maneras de realizarla.*
$\vdots$	$\vdots$
Etapa k:	*hay $n_k = \|E_k\|$ maneras de realizarla.*

Entonces el número total de manera de realizar el proceso es $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$. Matemáticamente,

$$|E_1 \times E_2 \times ... \times E_n| = |E_1| \cdot |E_2| \cdot ... \cdot |E_n| .$$

Prueba. *Se realiza por inducción utilizando el teorema 2, parte* 2.

Para aplicar la regla del producto, es importante que tome en cuenta las siguientes observaciones:

1. Para determinar las maneras de realizar la etapa enésima, se asume que se realizaron las etapas anteriores (etapa I, etapa II,..., etapa $(n-1)$-ésima).

2. El orden en que se cuentan las maneras de realizar cada etapa no influye en el resultado.

Ejemplo 6 *Cuántos números de cuatro dígitos se puede formar con los dígitos 1,2,3,4,5,6,7, si:*

1. *No hay restricciones*
   El proceso de forma uno de estos números se puede dividir en cuatro etapas:

Etapa I.	*Se elige el primer dígito (dígito de las unidades): hay 7 maneras.*
Etapa II.	*Se elige el segundo dígito : hay 7 maneras.*
Etapa III.	*Se elige el tercer dígito : hay 7 maneras.*
Etapa IV.	*Se elige el cuarto dígito : hay 7 maneras.*

   Por lo tanto, se pueden formar $7^4 = 2401$ números, si no hay restricciones.

2. *No se pueden repetir los números.*
   Considere las siguientes etapas del proceso de creación de una de estos números:

Etapa I.	*Se elige el primer dígito (dígito de las unidades): hay 7 maneras.*
Etapa II.	*Se elige el segundo dígito : hay 6 maneras.*
Etapa III.	*Se elige el tercer dígito : hay 5 maneras.*
Etapa IV.	*Se elige el cuarto dígito : hay 4 maneras.*

Por el principio del producto, se forman $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ *números de cuatro dígitos distintos.*

3. *no se pueden repetir los números y el dígito de las centenas es impar.*

   El proceso de formaciones de estos números, se puede dividir en las siguientes etapas:

Etapa I.	*Se elige el tercer dígito (dígito de las decenas): hay* $\|\{1,3,5,7\}\| = 4$ *maneras*
Etapa II.	*Se elige el primer dígito : hay 6 maneras.*
Etapa III.	*Se elige el segundo dígito : hay 5 maneras.*
Etapa IV.	*Se elige el cuarto dígito : hay 4 maneras.*

   Así, se puede formar $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 480$ *números de cuatro dígitos bajo las condiciones solicitadas.*

Ejemplo 7 *En un concurso se tienen 5 hombres y 6 mujeres, los cuales deben tratar de conseguir sentarse en una banca de cinco personas una vez terminada la música. ¿De cuántas maneras, al finalizar la música, se pueden obtener cinco personas sentadas en la banca de forma intercalada (no hay dos hombres ni dos mujeres sentadas juntas?*
Enumeremos los asientas de la banca del 1 al 5. Las maneras de sentar en la banca se clasifican en 2 casos:

Caso I:	*En el 1° asiento hay una mujer.*
Etapa I.	*Se elige la mujer que ocupará el* 1° *asiento: hay* 6 *maneras.*
Etapa II.	*Se elige el hombre que ocupará el* 2° *asiento: hay* 5 *maneras.*
Etapa III.	*Se elige la mujer que ocupará el* 3° *asiento: hay* 5 *maneras.*
Etapa IV.	*Se elige el hombre que ocupará el* 4° *asiento: hay* 4 *maneras.*
Etapa V.	*Se elige la mujer que ocupará el* 5° *asiento: hay* 4 *maneras.*
	Total: hay $6 \cdot 5^2 \cdot 4^2 = 2400$ *maneras en el caso* I*.*
Caso II:	*En el 1° asiento hay una hombre:*
Etapa I.	*Se elige el hombre que ocupará el* 1° *asiento: hay* 5 *maneras.*
Etapa II.	*Se elige la mujer que ocupará el* 2° *asiento: hay* 6 *maneras.*
Etapa III.	*Se elige el hombre que ocupará el* 3° *asiento: hay* 4 *maneras.*
Etapa IV.	*Se elige la mujer que ocupará el* 4° *asiento: hay* 5 *maneras.*
Etapa V.	*Se elige el hombre que ocupará el* 5° *asiento: hay* 3 *maneras.*
	Total: hay $6 \cdot 5^2 \cdot 4 \cdot 3 = 1800$ *maneras en el caso* II

Aplicando el principio de la suma hay $2400 + 1800 = 4200$ *maneras.*

La mayoría de los errores de conteo se deben a la aplicación incorrecta del Principio del Producto. Cuando un proceso se divide en k etapas y E_i es el conjunto de maneras de realizar la etapa i, una manera de realizar todo el proceso equivale a un único elemento de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$, es decir existe una única combinación de valores de las etapas que generan dicha manera.

Ejemplo 8 ***(Error de conteo)*** *Se tienen* 4 *confites (un* ***f****rutini, un* ***m****orenito, una* ***t****apita y un* ***c****aramelo) que serán repartidos entre María y Francisco, bajo la condición de que a María le correspondan al menos* 2 *confites. ¿Cuántas maneras hay de repartirlos?*
La forma de dividir el proceso de repartición de confites en las siguientes etapas genera un error de conteo.

Etapa I. *Se elige 2 confites para María: hay* 6 *maneras*
(pues de fijo le corresponden 2)
Las maneras son: $\{f, m\}, \{f, t\}, \{f, c\}, \{m, t\}, \{m, c\}, \{t, c\}$.

Etapa II. *Se reparten los confites restantes (faltan 2): hay* 4 *maneras.*

# de manera	*María*	*Francisco*
1	*confites 1 y 2*	*ninguno*
2	*confite 1*	*confite 2*
3	*confite 2*	*confite 1*
4	*ninguno*	*confites 1 y 2*

Total:. $6 \cdot 4 = 24$ *maneras (**INCORRECTO**)*

Verifiquemos el error de conteo. Una manera de realizar el proceso es que a Francisco le toque la tapita y a María el resto. Esta manera es generada por más de una combinación de valores de las etapas, dos de ellas son:

	Combinación 1	***Combinación 2***
Etapa I.	*María: se le da* m *y* c	*María: se le da* f *y* c
Etapa II.	*María: se le da* f *Francisco: se le da* t	*María: se le da* m *Francisco: se le da* t

Como ejercicio realice el conteo correctamente.

Teorema 6 ***(Principio de Inclusión-Exclusión)****. Sean* $A_1, A_2, ..., A_n$ *conjuntos finitos entonces*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| &= (-1)^2 \sum_{i=1}^{n} |A_i| + (-1)^3 \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + ... \\ &+ \quad (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| \end{aligned}$$

En particular si $n = 3$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| .$$

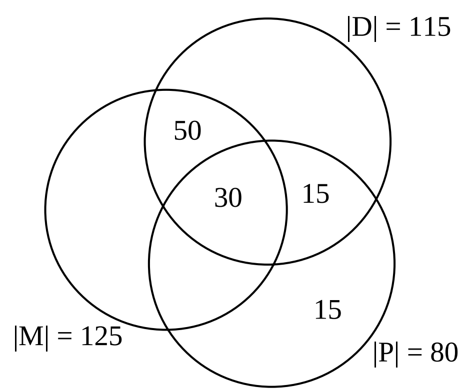
Prueba. *Este resultado se prueba utilizando inducción y el teorema 2, parte* 2.

Ejemplo 9 *En la universidad Bienestar Seguro, se matricularon en este año* 200 *personas en la carrera de computación, de las cuales se tiene la siguiente información: hay* 125 *matriculas en el curso Matemática Discreta,* 115 *en una deportiva y* 80 *en el curso Programación I. Además con respecto a la matricula en estos tres cursos, se sabe que:* 45 *matricularon el curso Programación I y la deportiva,* 15 *solamente en el curso de programación,* 50 *matricularon solamente el curso de matemática y la deportiva, y* 30 *matricularon los 3 cursos. ¿Cuántos estudiantes no matricularon ninguno de los tres cursos? ¿Cuántos estudiantes matricularon solamente el curso Matemática Discreta?*

Sea U el conjunto de estudiantes de estudiantes matriculados en la carrera de computación, entonces $|U| = 200$. Considere los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} M &= \{x \in U \mid x \text{ esta matriculado en Matemática Discreta}\} \\ D &= \{x \in U \mid x \text{ esta matriculado en la deportiva}\} \\ P &= \{x \in U \mid x \text{ esta matriculado en Programación } I\} \end{aligned}$$

De acuerdo a los datos suministrados se tiene que: $|M| = 125$, $|D| = 115$, $|P| = 80$, $|P \cap D| = 45$, $|P - (M \cup D)| = 15$, $|M \cap D - P| = 50$, $|M \cap D \cap P| = 30$.



Entonces $|M \cap D| = 80$, $|M \cap P| = 80 - 2 \cdot 15 = 50$, *por el principio de inclusión-exclusión, se obtiene que*

$$\begin{aligned} |M \cup D \cup P| &= |M| + |D| + |P| - |P \cap D| - |M \cap D| - |P \cap D| + |M \cap D \cap P| \\ &= 125 + 115 + 80 - 45 - 80 - 50 + 30 = 175. \end{aligned}$$

Note que el principio se puede aplicar de manera natural a partir del gráfico sin utilizar explícitamente la fórmula. Por lo tanto, el número de estudiantes que no matricularon *ninguno de los tres cursos es* $\left|\overline{M \cup D \cup P}\right| = |U| - |M \cup D \cup P| = 200 - 175 = 25$. *Por otro lado el número de estudiantes que matricularon solamente el curso Matemática Discreta es* $|M - (D \cup P)| = 125 - 50 - |M \cap P| = 25$.

Teorema 7 ***(Principio del palomar).*** *Si se tienen* n *palomas ubicadas en* m *palomares, y* $n > m$, *entonces hay por lo menos un palomar con dos o más palomas.*

Prueba. *Se comienzan a distribuir las palomas en palomares distintos y cuando todos los palomares tenga una paloma, faltaran de ubicar* $n - m > 0$ *palomas.*

Ejemplo 10 *Demuestre que si se escogen* 7 *números del* 1 *al* 12, *dos de ellos sumarán* 13. *Considere los conjuntos (palomares):* $A_1 = \{1, 12\}$, $A_2 = \{2, 11\}$, $A_3 = \{3, 10\}$, $A_4 = \{4, 9\}$, $A_5 = \{5, 8\}$, $A_6 = \{6, 7\}$. *Los siete números (palomas) a escoger están ubicados en alguno de los seis conjuntos, por el principio del palomar, hay dos números que estará ubicados en el mismo conjunto.*

2.3 Ejercicios

1. (♣) Sean A y B dos conjuntos tales que $|A| = n, |B| = m$. Considere el conjunto de funciones de A en B

$$B^A = \{f \quad | \quad f : A \to B\}.$$

   Mediante la creación de una función biyectiva, pruebe que

$$B^A \simeq \underbrace{B \times B \times B \times ... \times B}_{\text{n veces}}.$$

2. (♣) Pruebe las siguientes proposiciones

   (a) $A \simeq A$

   (b) $A \simeq B \implies B \simeq A$

   (c) $A \simeq B \wedge B \simeq C \implies A \simeq C$

   (d) $A \simeq B \wedge C \simeq D \wedge A \cap C = \phi \wedge B \cap D = \phi \implies A \cup C \simeq B \cup D$

   (e) $A \simeq B \wedge C \simeq D \implies A \times C \simeq B \times D$

(f) $A \times B \simeq B \times A$

(g) $A \times \{x\} \simeq A \quad \wedge \quad \{x\} \times A \simeq A$

(h) $A \simeq B \wedge C \simeq D \quad \Longrightarrow \quad A^C \simeq B^D$

(i) $B \cap C = \phi$ entonces $A^{B\cup C} \simeq A^B \times A^C$

(j) $(A \times B)^C \simeq A^C \times B^C$

3. ($\clubsuit$) Sea A el conjunto de posibles soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + ... + x_r = n$:
$$A = \{(x_1, x_2, ..., x_r) \in \mathbb{N}^r \mid x_1 + x_2 + ... + x_r = n\}$$
y considere el conjunto B de maneras de distribuir n objetos idénticos en r cajas. Mediante la creación de una función biyectiva, pruebe que $A \simeq B$.

4. Cuántos anagramas de 3 letras se puede formar con las letras $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ si

   (a) no hay restricciones. $R/$ 729

   (b) las letras no se pueden repetir y los anagramas deben empezar con vocal. $R/$ 168

   (c) las letras no se pueden repetir y los anagramas deben terminar en consonante. $R/$ 336

   (d) las letras no se pueden repetir y los anagramas deben empezar con vocal y terminar en consonante. $R/$ 126

5. Realice correctamente el problema de conteo planteado en el ejemplo 8.

6. Se tiene una urna con 12 bolas enumeradas del uno al doce, una persona debe seleccionar 4 bolas y colocar en fila en el orden en que las seleccionó. ¿De cuántas maneras se pueden extraer las cuatro bolas de forma que la tercera tenga un número múltiplo de 3? $R/$ 3960

7. Cuántos números telefónicos de 7 dígitos se pueden construir con los dígitos $0, 1, 2, ..., 9$ si

   (a) no hubiera restricciones. $R/$ 10000000

   (b) los números deben ser de líneas residenciales (no pueden empezar con 0,1,3 ni 8). $R/$ 6000000

(c) los números no se pueden repetir, deben empezar con 1 *o* 2 y deben terminar en número par (el cero se considera par). *R/* 60 480

8. En un estudio de 270 estudiantes, se halló que 90 sobresalían en matemática, 90 en música y 90 en deportes. A su vez, se halló que 30 sobresalían en matemática y música, 30 en deportes y música, 10 en las tres disciplinas, y 50 solamente en deportes.

   (a) ¿Cuántos estudiantes sobresalen en matemática y deportes? *R/* 20

   (b) ¿Cuántos estudiantes no sobresalen en dichas disciplinas (música, matemática y deportes)? *R/* 70

9. Pruebe la generalización del principio del palomar: Si se tienen n palomas que se van a ubicar en m palomares, y $n > m$, entonces hay por lo menos un palomar como al menos $\left[\left|\dfrac{n-1}{m}\right|\right] + 1$ palomas (donde $[|x|]$ es la parte entera de x.

10. Demuestre que si se compran 50 lapiceros, y solo hay 7 tipos de lapiceros, entonces hay por lo menos 8 lapiceros del mismo tipo.

11. Sea U un conjunto finito no vacío, que se considerará como el universo. Sean A, B y C subconjuntos de U tales que A y C son disjuntos, y $|A \cap B| = \dfrac{|A|\,|B|}{|U|}$.

    (a) Demuestre que $\left|A \cap \overline{B}\right| = \dfrac{|A|\,\left|\overline{B}\right|}{|U|}$, (sugerencia $A = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$)

    (b) Pruebe que $|(A - B) \cup C| = |A| + |C| - |A \cap B|$.

3 Conteo de Permutaciones, Arreglos y Combinaciones

A continuación se estudiarán, las tres técnicas de conteo principales.

3.1 Conteo de Permutaciones de objetos distintos

Definición 4 *Una permutación de n objetos distintos es un ordenamiento de ellos. El número de permutaciones de n objetos distintos se denota por $P(n)$.*

Ejemplo 11 *Las permutaciones de las tres letras a, b, c son*

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba,$$

por lo tanto $P(3) = 6$.

Teorema 8 $P(n) = n!$

Prueba. [1]*El proceso de formar una permutación de n objetos se puede dividir en etapas*

Etapa I.	*Colocar el objeto que ocupará la primera posición: hay n maneras*
Etapa II.	*Colocar el objeto que ocupará la segunda posición: hay $n-1$ maneras.*
Etapa III.	*Colocar el objeto que ocupará la tercer posición: hay $n-2$ maneras.*
$\vdots$	$\vdots$
Etapa n°.	*Colocar el objeto que ocupará la enésima posición: hay 1 manera.*

Por lo tanto, aplicado el principio del producto se obtiene que $P(n) = n\cdot(n-1)\cdots 1 = n!$.

Ejemplo 12 *¿Cuántas permutaciones se pueden formar con las letras de la palabra "Jorge" ?*
R/ $P(5) = 5! = 120$.

Ejemplo 13 *Cuántas permutaciones se pueden formar con los números $0, 1, 3, 5, 6, 9$ si*

[1] Al ver la prueba, los puntos suspensivos indican que rigurosamente se debe realizar por inducción sobre n. Sin embargo, se asume que este tipo de demostración (muy intuitiva) es satisfactoria

1. *los números* $1,3,5$ *están juntos.*
   El proceso de creación de una permutación de los números bajo esa condición, se puede dividir en dos etapas:

   Etapa I. *Permutar los cuatro objetos* $0, \boxed{135}, 6$ *y* 9 : *hay* $P(4)$ *maneras.*
   Etapa II. *Permutar los números dentro del objeto* $\boxed{135}$:*hay* $P(3)$ *maneras.*

   Por el principio del producto, hay $4! \cdot 3! = 144$ *permutaciones en las cuales los números* $1,3,5$ *están juntos.*

2. *El número* 3 *está después de la segunda posición y el número 6 debe ir en cualquier lugar que este posterior al lugar del número* 3.
   Las posibles permutaciones se clasifican en tres casos:

   Caso I: *Permutaciones en las cuales el* 3 *está en la tercer posición* $,\,,\underline{3},\,,\,,$
   Etapa I. *Colocar el* 3 : *hay una manera.*
   Etapa II. *Colocar el* 6 : *hay* 3 *maneras.*
   (puede ir en $4°, 5°$ *o* $6°$ *posición)*
   Etapa III. *Colocar el resto* : *hay* $4!$ *maneras.*
   (quedan 4 lugares y 4 números)
   Total: $1 \cdot 3 \cdot 4! = 72$

   Caso II
   Permutaciones en las cuales el 3 *está en la cuarta posición:* $,\,,\,,\underline{3},\,,$
   Et I. *Colocar el* 3 : *hay* 1 *manera.*
   Et II. *Colocar el* 6 : *hay* 2 *maneras.*
   Et III. *Colocar el resto* : $4!$ *maneras.*
   Total: $1 \cdot 2 \cdot 4! = 48$

   Caso II.
   Permutaciones en las que el 3 *está en la quinta posición:* $,\,,\,,\,,\underline{3},$
   Et I. *Colocar el* 3 : *hay* 1 *manera.*
   Et II. *Colocar el* 6 : *hay* 1 *manera.*
   Et III. *Colocar el resto* : $4!$ *maneras.*
   Total: $1 \cdot 1 \cdot 4! = 24$

   R/ $72 + 48 + 24 = 144$.

3. *los números* 3 *y* 6 *deben ir separados por al menos un lugar*
   Sea A *el conjunto de permutaciones en las cuales* 3 *y* 6 *van juntos, determinemos la cardinalidad de* A :

   Etapa I. *Permutar los cuatro objetos* $0, 1, \boxed{36}, 5$ *y* 9 : *hay* $5!$ *maneras.*
   Etapa II. *Permutar los números dentro del objeto* 36 : *hay* $2!$ *maneras.*

   por lo tanto $|A| = 5! \cdot 2$, *como el número total de permutaciones es* $6!$, *entonces el número de permutaciones en las cuales los números* 3 *y* 6 *deben ir separados por al menos un lugar es* $\left|\overline{A}\right| = 6! - 5! \cdot 2 = 5! \cdot 4 = 480$.

Ejemplo 14 *Sea A y B un conjuntos de cardinalidad n, ¿cuántas funciones biyectivas existen de A en B?*

Se puede suponer que los elementos de A están en un cierto orden, en "fila", entonces para cada permutación de los elementos de B existe una única función biyectiva (asocia el primer elemento de A con el primero de la permutación de B, el segundo de A con el segundo de la permutación de $B, ...$), es decir si $\varphi = \{f \mid f : A \to B \text{ es biyectiva}\}$ y $\mathbb{P} = \{x \mid x \text{ es una permutación de los elementos de } B\}$, entonces

$$\varphi \simeq \mathbb{P}, \text{ por lo tanto } |\varphi| = |\mathbb{P}| = n!$$

3.2 Conteo de arreglos tomados de objetos distintos

Definición 5 *Un arreglo o permutación de r objetos tomados de n objetos distintos, es una* ***escogencia ordenada*** *de r objetos tomados de los n objetos. El número de arreglos de r objetos tomados de n objetos distintos se denota por $P(n,r)$.*

Ejemplo 15 *Los arreglo de 2 letras tomas de las 4 letras a, b, c y d, son*

$$ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc.$$

Por lo tanto $P(4,2) = 12$.

Teorema 9 $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Prueba. *El proceso de creación de un arreglo de r objetos tomados de n, se puede dividir por etapas:*

Etapa I.	*Se escoge el objeto que ocupará la* **primera** *posición: hay $n - \mathbf{0}$ maneras.*
Etapa II.	*Se escoge el objeto que ocupará la* **segunda** *posición: hay $n - \mathbf{1}$ maneras.*
Etapa III.	*Se escoge el objeto que ocupará la* **tercera** *posición: hay $n - \mathbf{2}$ maneras.*
$\vdots$	$\vdots$
Etapa $\mathbf{r}^\circ$.	*Se escoge el objeto que ocupará la $\mathbf{r}^\circ$ posición: hay $n - (\mathbf{r} - \mathbf{1})$ maneras.*

Por el principio del producto se obtiene que $P(n,r) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Ejemplo 16 *Una pequeña asociación está formada por* 15 *personas, se desea formar la directiva de la asociación (un presidente, un vicepresidente y un secretario). ¿De cuantas maneras se puede efectuar estos nombramientos?*

Se desean escoger ordenadamente 3 *personas de quince ya que se puede suponer que la primera persona selecciona será el presidente, la segunda el vicepresidente y la tercera el secretario (lo que importa es que hay un orden, es indiferente el orden en que se elijan). Así, el número de maneras de conformar la directiva es* $P(15,3) = \dfrac{15!}{12!} = 2730.$

Note que $P(n) = P(n,n)$, pues una permutación de n objetos es una escogencia ordenada de n de los n objetos.

3.3 Conteo de Combinaciones tomados de objetos distintos

Definición 6 *Una combinación de r objetos tomados de n distintos, es una selección de r objetos tomados de los n, es decir, si A es el conjunto de los n objetos, entonces, una combinación de r objetos tomados de los n es un subconjunto de A de cardinalidad r. El números de combinaciones de r objetos tomados de n distintos se denota $C(n,r)$.*

Ejemplo 17 *Las combinaciones de 2 objetos tomados de* $\{a,b,c\}$ *son*

$$\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}.$$

Por lo tanto $C(3,2) = 3$.

Teorema 10 $C(n,r) = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

Prueba. *Se sabe que el número de selecciones ordenadas de r objetos de n es $P(n,r)$, este conteo se puede realizar por etapas:*

Etapa I. *Se seleccionan los r objetos de n: hay $C(n,r)$ maneras.*
Etapa II. *Se ordenan los r objetos seleccionados: hay $P(r)$ maneras.*

Por el principio del producto se obtiene que $P(n,r) = C(n,r) \cdot P(r)$, de donde se obtiene que

$$C(n,r) = \frac{n!}{P(r)\cdot(n-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

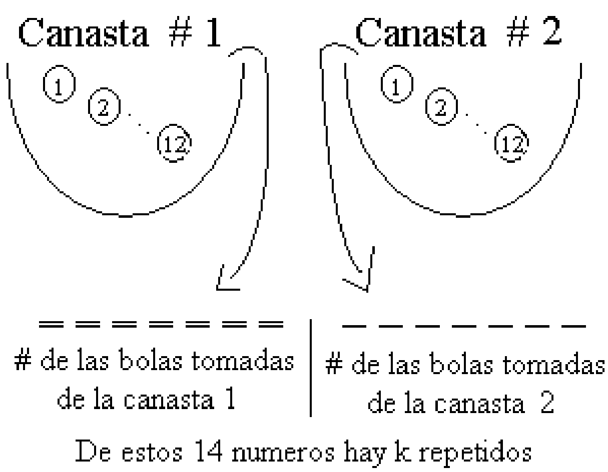
Ejemplo 18 *Suponga que en la Asamblea Legislativa hay 16 diputados demócratas, 26 diputados republicanos y 11 minoritarios. Se debe hacer una comisión de 8 diputados. ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión de forma que haya 3 diputados demócratas, 4 diputados republicanos y uno minoritario?*

Etapa I.	*Se seleccionan 3 diputados demócratas: hay* $C(16,3) = 560$ *maneras*
Etapa II.	*Se seleccionan 4 diputados republicanos: hay* $C(26,4) = 14\,950$ *maneras*
Etapa III.	*Se selecciona un diputado minoritario: hay* $C(11,1) = 11$ *maneras*

Así, por el principio del producto, se obtiene que el resultado es $560 \cdot 14\,950 \cdot 11 = 92\,092\,000$.

Ejemplo 19 *¿Cuantos subconjuntos de* 6 *elementos tiene* S_{15}, *en los cuales este el* 3 *como elemento?*
El número total de subconjuntos de 6 *elementos de* S_{15} *es* $C(15,6)$, *de estos hay* $C(14,6)$ *que no contiene al* 3, *por lo tanto el número subconjuntos de* 6 *elementos de* S_{15} *que tienen el* 3 *como elemento es* $C(15,6) - C(14,6) = 2002$.

Ejemplo 20 *Se tiene dos canastas, cada una tiene* 12 *bolas enumeradas del* 1 *al* 12. *De cada canasta se sacan* 7 *bolas y se anotan los números de las 14 bolas extraídas, determine una fórmula que indique de cuántas maneras se puede obtener* k *números repetidos con* $k \in \{2,3,4,5,6,7\}$.



Dado que los números se anotan, se desea contar las maneras en las cuales de 14 *números anotados del* 1 *al 12, hay* k *repetidos. El proceso de anotación de estos números se puede* *dividir en etapas:*

Etapa I. *Se anotan el número de las* 7 *bolas de la canasta 1*
Hay $C(12,7) = 792$ *maneras.*

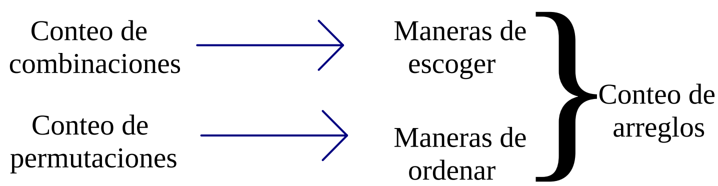
Etapa II. *Se anotan los* k *números que son iguales a los ya anotados y que corresponden a las* k *bolas seleccionadas de la canasta 2.*
Hay $C(7,k)$ *maneras.*

Etapa III. *Se anotan los* $7-k$ *números que hacen falta de las bolas seleccionadas de la canasta 2 (estos números son distintos a los anotados).*
Hay $C(12-7, 7-k)$

Por el principio del producto hay $f(k) = 792 \cdot C(7,k) \cdot C(12-7, 7-k)$ *maneras de obtener* k *números repetidos.*

3.4 Mezcla de las técnicas de conteo vistas

Las técnicas estudiadas anteriormente son fácilmente distinguibles:



Ejemplo 21 *Sea* A *un conjunto de* n *elementos y* B *un conjunto de* $n-1$ *elementos. ¿Cuántas funciones sobreyectivas existen de* A *a* B*?*

En este caso, una función sobreyectiva de A *en* B*, es aquella que toma dos elementos de* A *y les asigna un elemento de* B*, y luego entre los elementos restantes de* A *y* B *(sobran* $n-2$*) se forma una biyección, el conteo de estas funciones se puede realizar por etapas:*

Etapa I. *Se seleccionan 2 elementos de* A*: hay* $C(n,2)$

Etapa II. *Se selecciona un elemento de* B *: hay* $C(n-1,1)$ *maneras*

Hasta aquí, se asume que los dos elementos de A *son asociados a un elemento de* B*.*

Etapa III. *Se realiza una biyección entre conjuntos de* $n-2$ *elementos: Hay* $P(n-2)$ *maneras*

Por el principio del producto el número de funciones sobreyectivas de A *en* B *es*

$$C(n,2) \cdot C(n-1,1) \cdot P(n-2)$$

Los errores de conteo pueden ser de dos tipos, por el reconteo de objetos o por el no conteo de objetos. El primer tipo es el más frecuente.

Ejemplo 22 *Considere el ejemplo anterior y suponga que el proceso de creación de funciones biyectivas de A en B, se realiza de acuerdo a las siguientes etapas:*

Etapa I. *Se selecciona un elemento de A: hay $C(n,1)$ maneras*
(este será el que sobra al tratar de hacer la biyección de A en B)
Etapa II. *Se asigna el elemento seleccionado a un elemento de B: hay $C(n-1,1)$ maneras*
Hasta aquí, se asume que un elemento de A es asociado a uno de B.
Etapa III. *Se realiza una biyección entre conjuntos de $n-1$ elementos: hay $P(n-1)$ maneras*

Entonces si se dice que el número de funciones biyectivas es $C(n,1)\cdot(n-1)P(n-1)$, ¿qué error se comete?
Consideremos dos elementos de $A: a_1, a_2$. De acuerdo a las etapas en que se divide el proceso de creación de una función, se puede crear una función f que en la primera etapa se seleccione a_1, en la segunda etapa a_1 se le asigne $b \in B$, y en la tercera etapa a a_2 se le asigne b. Otro función g se obtiene cuando en la primer etapa se seleccione a_2, en la segunda etapa a_2 se le asigne b y en la tercera etapa a a_1 se le asigne b. Sin embargo, note que $g=f$, por lo tanto a un reconteo de funciones.

Ejemplo 23 *Se tienen 15 libros de matemáticas distintos, de los cuales, tres son sobre probabilidad. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar estos libros en un estante, si el primer libro de probabilidad debe estar en la quinta o novena posición?*
El proceso de colocación de libro en el estante se puede dividir en casos y cada caso en etapas:

Caso I: *El primer libro de probabilidad se coloca en la quinta posición*
Etapa I. *Escoger el libro que ocupará en la quinta posición. Hay 3 maneras*
Etapa II. *Se colocan los otros dos libros probabilidad. Hay $P(10,2)$ maneras (Se escogen ordenadamente 2 de los diez campos, pues los libros son distintos)*
Etapa III. *Se colocan los otros 12 libros restantes. Hay $P(12)$ maneras*
Total: $3\cdot P(10,2)\cdot 12!$

*En el **Caso II**, El primer libro de probabilidad se coloca en la novena posición, y dividiendo el proceso en etapas similares al caso I se obtienen $3\cdot P(6,2)\cdot 12!$ maneras de colocar los libros en el segundo caso. Por lo tanto, el número de maneras de colocar los 15 libros en un estante es*

$$3\cdot P(10,2)\cdot 12! + 3\cdot P(6,2)\cdot 12! = 3\cdot 120\cdot 12!$$

Ejemplo 24 *Se tiene* 20 *bolitas todas diferentes, 5 son de color verde, 5 son de color rojo, 5 de color azul y 5 de color amarillo. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 3 bolitas de diferentes colores?*

El proceso de elegir las bolitas de diferentes colores se puede dividir en etapas:

Etapa I.	*Escoger los colores de las bolitas a elegir. Hay* $C(4,3)$ *maneras*
Etapa II.	*Escoger las bolitas de los colores seleccionados. Hay* $C(5,1)^3$ *maneras*
	(De cada color escogido hay 5 bolitas, de estas se elige una)
	Total: $C(4,3)\cdot C(5,1)^3 = 500$

Otra manera de resolver este ejercicio es la siguiente:

Etapa I.	*Escoger la primer bolita. Hay* $C(20,1)$ *maneras*
Etapa II.	*Escoger la* 2° *bolita de diferente color a la primera. Hay* $C(15,1)$ *maneras*
Etapa III.	*Escoger la* 3° *bolita de diferente color a la* 1° *y* 2°. *Hay* $C(10,1)$ *maneras*

Al hablar de $1^\circ, 2^\circ$ *y* 3° *bolita, estamos agregando el orden en que se extraen las bolas, por ejemplo, extraer la bola 2 roja, la bola 5 verde y la bola 4 blanca se ve diferente de extraer la bola 5 verde, la bola 2 roja y la bola 4 blanca. Sin embargo, de acuerdo a la pregunta del ejercicio, no interesa el orden, para ello el proceso de elegir las bolas ordenadamente se puede ver en dos etapas:*

Etapa I.	*Se seleccionan las 3 bolitas de diferentes colores: hay* X *maneras.*
Etapa II.	*Se ordenan las 3 bolitas seleccionadas: hay* $3!$ *maneras.*
TOTAL	$3!X = C(20,1)\,C(15,1)\,C(10,1)$

Por lo tanto, el total de maneras de elegir 3 bolitas de diferentes colores es

$$X = \frac{C(20,1)\,C(15,1)\,C(10,1)}{3!} = 500$$

Ejemplo 25 *En la final de la Olimpiada Matemática 2007 de cierto país se premiaron a 12 estudiantes: 2 con medalla de Oro, 4 con medalla de Plata y* 6 *con medalla de Bronce. De cuántas maneras se pueden colocar en fila para tomarles la Foto Anual de Medallistas* 2007 *si: los estudiantes que obtuvieron medalla de Oro debe ir juntos en el centro y los demás puede ir en cualquier otro posición de manera que a la derecha de los estudiantes con medalla de Oro queden exactamente 2 estudiantes con medalla de Plata y 3 con medalla de Bronce.*

Opción #1 *El proceso de colocación se divide en las siguientes etapas:*

Etapa I.	*Se colocan los estudiantes con medalla de oro. Hay* 2 *maneras*
Etapa II.	*Se eligen los de plata que van a la izquierda. Hay* $C(4,2)$ *maneras*
Etapa III.	*Se colocan los de plata que van a la izquierda. Hay* $P(4,2)$ *maneras*
Etapa IV.	*Se colocan los de plata restantes a la derecha. Hay* $P(4,2)$ *maneras*
Etapa V.	*Se eligen los de bronce que van a la izquierda. Hay* $C(6,3)$ *maneras*
Etapa VI.	*Se colocan los de bronce que van a la izquierda. Hay* $3!$ *maneras*
Etapa VII.	*Se colocan los de bronce restantes a la derecha. Hay* $3!$ *maneras*
TOTAL	$2!C(4,2)\left[C(5,2)\cdot 2!\right]^2 C(6,3)\left[3!\right]^2 = 3456\,000$

Opción #2 *El proceso de colocación se divide en las siguientes etapas:*

Etapa I.	*Se colocan los estudiantes con medalla de oro. Hay* 2 *maneras*
Etapa II.	*Se eligen los de plata que van a la izquierda. Hay* $C(4,2)$ *maneras*
Etapa III.	*Se eligen los de bronce que van a la izquierda. Hay* $C(6,3)$ *maneras*
Etapa IV.	*Se colocan los que van a la derecha. Hay* $5!$ *maneras*
Etapa V.	*Se colocan los que van a la izquierda. Hay* $5!$ *maneras*
TOTAL	$2C(4,2)\,C(6,3)\,5!^2 = 3456\,000$

Opción #3 *El proceso de colocación se divide en las siguientes etapas:*

Etapa I.	*Se colocan los estudiantes con medalla de oro. Hay* 2 *maneras*
Etapa II.	*Se eligen los lugares de los de plata que van a la izquierda. Hay* $C(5,2)$ *maneras*
Etapa III.	*Se eligen los lugares de los de plata que van a la derecha. Hay* $C(5,2)$ *maneras*
Etapa IV.	*Se colocan los que plata. Hay* $4!$ *maneras*
Etapa V.	*Se colocan los de bronce. Hay* $6!$ *maneras*
TOTAL	$2C(5,2)\,C(5,2)\,4!6! = 3456\,000$

3.5 Ejercicios

1. . Una empresa está compuesta por 30 hombres y 20 mujeres. Si se debe elegir 5 personas al azar para que conformen una delegación que asistirá a una actividad. De cuántas maneras se pueden conformar la delegación si deben haber:

   (a) No hay restricciones. *R/* 2118 760

   (b) 3 mujeres. *R/* 495 900

   (c) a lo sumo 4 mujeres. *R/* 2103 256

(d) más de dos hombres. $R/$ 1462 006

(e) dos parejas hombre-mujer. $R/$ 1267 300

2. Se tiene una canasta con 15 bolas enumeradas del 1 al 15. Las bolas con número del 1 al 7 son rojas, y las demás son verdes. Si se eligen dos bolas al azar, de cuántas maneras se pueden elegir:

   (a) dos bolas verdes. $R/$ 28

   (b) a lo sumo una bola roja. $R/$ 84

   (c) dos bolas que tengan número par. $R/$ 21

   (d) dos bolas rojas y que tengan número par. $R/$ 2

   (e) dos bolas que sean rojas o que tengan número par. $R/$ 55

3. Suponga que en la Asamblea Legislativa está compuesta por 33 diputados neoliberales y 20 paternalistas.

   (a) Se debe hacer una comisión de 7 diputados. ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión de forma que haya 3 diputados neoliberales y 4 paternalistas? $R/$ 26 434 320

   (b) Una vez que se forma la comisión de 7 diputados, se debe se debe nombrar al presidente, al vicepresidente y al secretario de la comisión. ¿De cuántas maneras pueden hacerse efectuarse los nombramientos? $R/$ 210

4. Suponga que en la Asamblea Legislativa hay 16 diputados liberacionistas, 26 diputados socialcristianos y 11 minoritarios. En Liberación hay 9 mujeres, en la Unidad 12 mujeres y en los minoritarios 5 mujeres. Se debe hacer una comisión de 7 diputados.

   (a) ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión de forma que haya 3 mujeres y 4 hombres? $R/$ 45 630 000

   (b) ¿De cuántas maneras se puede formar la comisión de forma que haya 3 mujeres liberacionistas, 2 hombres y una mujer socialcristianos, y 1 hombre minoritario? $R/$ 550 368

5. Se tiene una baraja de naipe (52 cartas: 13 espadas,13 corazones, 13 tréboles, 13 diamantes, cada grupo tiene la siguiente numeración: As,2,3,4,5,6,7,8,9,J,Q,K). Se eligen cinco cartas, de cuántas maneras se pueden obtener

(a) 3 ases. *R/* 4512

(b) exactamente: 2 corazones y 2 diamantes. *R/* 158 184

(c) al menos 3 corazones *R/* 241 098

(d) exactamente dos pares de cartas con igual número y una cata con número distinto a las démas. *R/* 54 912

(e) exactamente dos "9" y al menos tres tréboles. *R/* 8448

(f) todas las cartas con número distinto. *R/* 1317 888

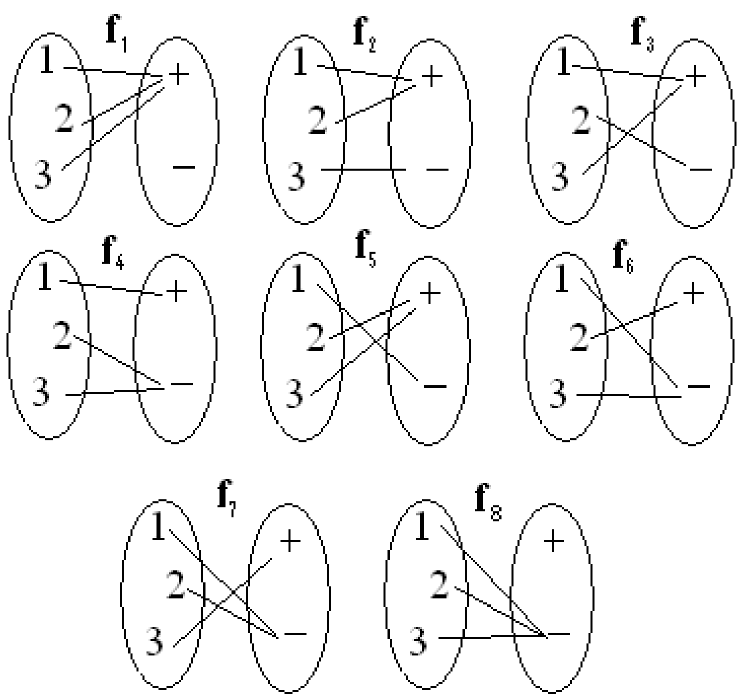
4 Otras técnicas de conteo

4.1 Cardinalidad del conjunto de funciones sobre conjuntos finitos

Definición 7 *Sea A y B conjuntos finitos, se denota el conjunto de funciones de A en B por*

$$\mathcal{F}(A,B) = \{f \quad | \quad f : A \to B\}.$$

Ejemplo 26 *Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{+,-\}$. De acuerdo al concepto de función, las posibles funciones de A en B son:*



Por lo tanto, $|\mathcal{F}(A,B)| = 8$.

Teorema 11 $|\mathcal{F}(A,B)| = |B|^{|A|}$.

Prueba. *Sean $|A| = n, |B| = m$, suponga que se ordenan los elementos de A de alguna manera. De acuerdo al concepto de función, el proceso de creación de una función de*

A en B, se puede realizar por etapas:

Etapa I.	*Se asigna el primer elemento de A a un elemento de B: hay m maneras.*
Etapa II.	*Se asigna el segundo elemento de A a un elemento de B: hay m maneras.*
Etapa III.	*Se asigna el tercer elemento de A a un elemento de B: hay m maneras.*
$\vdots$	$\vdots$
Etapa n°.	*Se asigna el enésimo elemento de A a un elemento de B: hay m maneras.*

Aplicando el principio del producto se obtiene que $|\mathcal{F}(A,B)| = \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot ... \cdot m}_{n\,veces} = m^n$.

Ejemplo 27 *Sean $|A| = n, |B| = m$, dado que $\mathcal{F}(A,B) \simeq \underbrace{B \times B \times B \times ... \times B}_{n\,veces}$ (ver ejercicio 1, sección 2.3) entonces:*

$$\left|\underbrace{B \times B \times B \times ... \times B}_{n\,veces}\right| = m^n$$

Ejemplo 28 *Una excursión de 10 extranjeros, pasan a almorzar a Terra Mall, y se encuentran con 4 locales de comida abiertos. Si se asume que cada persona elegirá un único local, ¿de cuántas maneras pueden las personas elegir el local donde comprarán los alimentos?*

Sea A el conjunto de personas y B el conjunto de locales. Una manera de que las personas eligen un local equivale a una función de A en B, pues a cada persona se le asigna un único local. Por lo tanto, el número de formas de asignar un local a cada persona es $|B|^{|A|} = 4^{10}$.

Ejemplo 29 *¿De cuántas maneras se puede contestar un cuestionario de 10 preguntas de Falso o Verdadero, si se pueden dejar a lo sumo 2 preguntas en blanco?*
Sea $B_i = \{V, F\}$ el conjunto de posibles maneras de contestar la pregunta i, si no se deja en blanco. Las formas de contestar el cuestionario se clasifican en tres casos:

Caso I. *No se deja ninguna en blanco: hay $|B_1 \times B_2 \times ... \times B_{10}| = 2^{10}$ maneras*

Caso II. *Se dejan uno en blanco*

- ***Etapa I.*** *Se elige la pregunta a dejar en blanco: hay $C(10,1)$ maneras.*
- ***Etapa II.*** *Se contestan las nueve preguntas: hay $|B_1 \times B_2 \times ... \times B_9| = 2^9$ maneras.*

Caso III. *Se dejan dos en blanco*

- ***Etapa I.*** *Se elige las preguntas a dejar en blanco: hay $C(10,2)$ maneras.*
- ***Etapa II.*** *Se contestan las ocho preguntas: hay $|B_1 \times B_2 \times ... \times B_8| = 2^8$ maneras.*

Por los principios de suma y producto, se concluye que hay $2^{10}+10\cdot 2^{9}+C(10,2)\cdot 2^{8}=17\,664$ *maneras de contestar el cuestionario.*

4.2 Cardinalidad del conjunto potencia y el binomio de Newton

Teorema 12 *Sea* A *un conjunto de* n *elementos, entonces*

$$|P(A)|=2^{n}$$

Prueba. *En el ejemplo* (4) *se demostró que* $\mathcal{F}(A,\{0,1\})\simeq P(A)$, *por lo tanto*

$$|P(A)|=|\mathcal{F}(A,\{0,1\})|=|\{0,1\}|^{|A|}=2^{n}.$$

Ejemplo 30 *Si* $A=\{1,2,3\}$, *entonces* $|P(A)|=2^{3}$, *en efecto*

$$P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

Ejemplo 31 *Dado un conjunto de* A *de* n *elementos, recuerde que* $C(n,k)$ *es el número de subconjuntos de* A *que tiene* k *elementos. El total de subconjuntos de* A *se pueden clasificar en casos:*

Caso I.	*Subconjuntos de* 0 *elementos: hay* $C(n,0)$
Caso II.	*Subconjuntos de* 1 *elemento: hay* $C(n,1)$
Caso III.	*Subconjuntos de* 2 *elementos: hay*
$\vdots$	$\vdots$
Caso n°.	*Subconjuntos de* n *elementos: hay* $C(n,n)$

Por lo tanto $C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+...+C(n,n)$, *es el número total de subconjuntos de* A, *es decir*

$$\sum_{k=0}^{n}C(n,k)=|P(A)|=2^{n}.$$

Teorema 13 *La función* $C(n,k)$ *cumple las siguientes propiedades:*

1. $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = |P(A)| = 2^n.$

2. $C(n,k) = C(n, n-k)$, *para* $k = 0, 1, 2, ..., n.$

3. *(Triángulo de Pascal)* $C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1).$

Prueba. 1. *Se probó en el ejemplo anterior.*

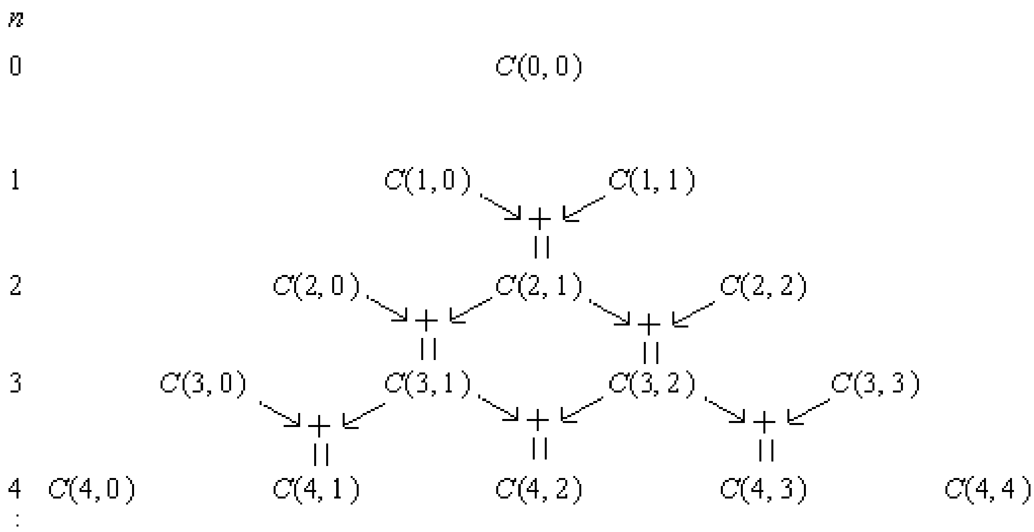
2. *Note que*

$$C(n, n-k) = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(k)!} = C(n,k).$$

3. *Se tiene que*

$$\begin{aligned}
& C(n-1,k) + C(n-1,k-1) \\
= \; & \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} \\
= \; & \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \\
= \; & \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right] \\
= \; & \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{k\,(n-k)} \\
= \; & \frac{n!}{(n-k)!\,(k)!} = C(n,k)
\end{aligned}$$

El resultado 3 del teorema anterior se conoce como el Triángulo de Pascal ya que se puede representar como:



Note además que por el resultado 2 este triángulo es simétrico con respecto a su altura vertical, además como $C(n,0) = C(n,n) = 1$, entonces el triángulo puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Teorema 14 ***(Binomio de Newton)*** *Sea n un número natural, entonces*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, a^{n-k} b^k.$$

Prueba. *(Por inducción) Sea $P(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, a^{n-k} b^k$.*

1. *Para* $n = 0$, *se tiene que* $P(0) : (a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} C(0,k)\, a^{0-k} b^k$ *es verdadero pues*

$$\sum_{k=0}^{0} C(0,k)\, a^{0-k} b^k = C(0,0)\, a^{0-0} b^0 = 1.$$

2. *Supongamos que* $P(n)$ *es verdadero* (HI), *y demostremos que se cumple*

$$P(n+1) : (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C(n+1,k)\, a^{n+1-k} b^k$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
& (a+b)^{n+1} \\
= \; & (a+b) \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, a^{n-k} b^k && \textit{(por HI)} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, a^{n-k} b^{k+1} && \textit{(distributividad)} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} C(n,k-1)\, a^{n-k+1} b^k && \textit{(cambio de índice en la } 2^{da} \textit{ suma)} \\
= \; & \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left[C(n,k) \; + \; C(n,k-1) \right] a^{n+1-k} b^k \right\} + C(n,0)\, a^{n+1} b^0 + C(n,n)\, a^0 b^{n+1} \\
= \; & \sum_{k=1}^{n} \left[C(n+1,k) \; a^{n+1-k} b^k \right] + a^{n+1} + b^{n+1} && \textit{(por el Triángulo de Pascal)} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n+1} C(n+1,k)\, a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

Ejemplo 32 *Utilizando el Triángulo de pascal y el binomio de Newton se obtiene que*

n											*Binomio de Newton*	
0					1					$\Longrightarrow$	$(a+b)^0$	$= 1$
1				1		1				$\Longrightarrow$	$(a+b)^1$	$= a+b$
2			1		2		1			$\Longrightarrow$	$(a+b)^2$	$= a^2 + 2ab + b^2$
3		1		3		3		1		$\Longrightarrow$	$(a+b)^3$	$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4	1		4		6		4		1	$\Longrightarrow$	$(a+b)^4$	$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Ejemplo 33 *Utilizando el binomio de Newton para $a = b = 1$, se obtiene que*

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \cdot 1^{n-k} \cdot 1^{k} = (1+1)^n = 2^n,$$

resultado que se obtuvo por otro camino en el ejemplo(31).

Ejemplo 34 *Sea A un conjunto de cardinalidad 11. ¿Cuántos subconjuntos de cardinalidad par posee A?*

El número de subconjuntos de cardinalidad par de A es $\sum_{k=0}^{5} C(11,2k)$, dado que $C(11,2k) = C(11,11-2k)$ entonces

$$\begin{aligned} & 2\sum_{k=0}^{5} C(11,2k) \\ = & \sum_{k=0}^{5} C(11,2k) + \sum_{k=0}^{5} C(11,11-2k) \quad \textit{(Note que } 11-2k = 2(5-k)+1\textit{)} \\ = & \sum_{k=0}^{5} C(11,2k) + \sum_{j=0}^{5} C(11,2j+1) \qquad \textit{(tomando } j = 5-k\textit{)} \\ = & \sum_{k=0}^{11} C(11,k) = 2^{11} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el número de subconjuntos de cardinalidad par de A es 2^{10}, de donde se deduce que este número indica también la cantidad de subconjuntos de cardinalidad impar. ¿Será que todo conjunto tiene igual cantidad de subconjuntos pares e impares? (Demuéstrelo o refútelo).

4.3 Conteo de Permutaciones con objetos repetidos

Ejemplo 35 *Considere la palabra "ese". Una permutación de las letras de esta palabra es “**see**”,si en esa permutación, se cambia de lugar las **e** se vuelve a obtener la misma permutación. Por lo tanto las únicas permutaciones que se pueden realizar con las letras de la palabra dada son:*

$$ese, ees, see.$$

Así, a pesar de que la palabra tiene la tres letras, el número de permutaciones no es $P(3) = 6$, pues las letras no son distintas, hay algunas repetidas.

Notación. Se tienen n objetos de los cuales hay:

$$\begin{array}{ll} k_1 & \text{objetos idénticos tipo } 1 \\ k_2 & \text{objetos idénticos tipo } 2 \\ & \vdots \\ k_r & \text{objetos idénticos tipo } r \end{array}$$

(Note que $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$) El número de permutaciones de los n objetos se denota por $P(n; k_1, k_2, ..., k_r)$.

Ejemplo 36 *De acuerdo al ejemplo anterior, la palabra "ese" tiene* 2 *e y* 1 *s, entonces* $P(3; 2, 1) = 3$.

Ejemplo 37 *¿Cuántas permutaciones se pueden formar con las letras de la palabra: "Matematica"?*
Esta palabra tiene 10 letras, de las cuales hay repetidas: 2 *m,* 3 *a,* 2 *t. El proceso de creación de una permutación con las letras de esa palabra se puede dividir en etapas:*

Etapa I.	*Se escogen los lugares donde van ir las* 3 ***a*** *y se colocan: hay* $C(10, 3)$ *maneras. (Quedan* 7 *campos)*
Etapa II.	*Se escogen los lugares donde van ir las* 2 **m** *y se colocan: hay* $C(7, 2)$ *maneras. (Quedan* 5 *campos)*
Etapa III.	*Se escogen los lugares donde van ir las* 2 **t** *y se colocan: hay* $C(5, 2)$ *maneras. (Quedan* 3 *campos y faltan tres letras distintas de colocar)*
Etapa IV.	*Se colocan las tres letras restantes: hay* $P(3)$ *maneras.*

Por lo tanto, el número de permutaciones es

$$P(10; 3, 2, 2, 1, 1, 1) = C(10, 3) \cdot C(7, 2) \cdot C(5, 2) \cdot 3! = 151\,200.$$

Teorema 15 $P(n; k_1, k_2, ..., k_r) = \dfrac{n!}{k_1! k_2! \cdot ... \cdot k_r!}$.

Prueba. *Se deja de ejercicio (Sugerencia: utilice el ejemplo anterior como modelo).*

Ejemplo 38 *Cuántos anagramas se pueden hacer con las letras de la palabra "ENSEÑANZA" si*

1. *no hay restricciones.*
   Dado que la palabra tiene 9 letras: 2 E, 2 N, 2 A, 1 S, 1 Ñ y 1 Z, entonces el número de anagramas es
$$P(9;2,2,2,1,1,1) = \frac{9!}{2!2!2!} = 45\,360.$$
2. *las letras E,S,E deben ir juntas en cualquier orden.*
   En este caso, el proceso de formación de un anagrama se divide en dos etapas:

   Etapa I. *Ordenar los siete objetos* $N, \boxed{ESE}, \tilde{N}, A, N, Z$ *y* A : *hay* $\dfrac{7!}{2!2!}$ *maneras.*

   Etapa II. *Permutar los números dentro del objeto* $\boxed{ESE}$: *hay* $\dfrac{3!}{2!}$ *maneras.*

   Por lo tanto, el número de maneras de formar un anagrama bajo las condiciones dadas es $\dfrac{7!}{2!2!} \cdot 3 = 3780.$

Ejemplo 39 *¿Cuántos anagramas existen de la palabra "matematico", en los cuales las dos "a" no estén juntas, ni las dos "m", ni las dos "t" ?*
Sea U el conjunto de todos los anagramas de la palabra "matematico", que se considera el universo, note que $|U| = \dfrac{10!}{2!2!2!} = 453\,600.$ *Considere los siguientes conjuntos:*
$$\begin{aligned} A &= \{x \in U \mid \ x \text{ es un anagrama con las dos "a" juntas}\} \\ B &= \{x \in U \mid \ x \text{ es un anagrama con las dos "m" juntas}\} \\ C &= \{x \in U \mid \ x \text{ es un anagrama con las dos "t" juntas}\} \end{aligned}$$
Se debe averiguar el valor de
$$\left|\overline{A \cup B \cup C}\right| = |U| - |A \cup B \cup C|.$$
Dado que
$$\begin{aligned} &|A| = |B| = |C| = P(9;2,2,1,1,1,1,1) = \frac{9!}{2!2!} = 90\,720. \\ &|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = P(8;2,1,1,1,1,1,1) = \frac{8!}{2!} = 20\,160 \\ &|A \cap B \cap C| = P(7) = 7! = 5040 \end{aligned}$$
Aplicando el principio de inclusión-exclusión se obtiene que
$$|A \cup B \cup C| = 3 \cdot 90\,720 - 3 \cdot 20\,160 + 5040 = 216\,720.$$
Por lo tanto, el número de anagramas de la palabra "matematico", en los cuales las dos "a", las dos "m" y las dos "t" no estén juntas, es
$$\left|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right| = 453\,600 - 216\,720 = 236\,880.$$

4.4 Conteo de combinaciones con repetición

Ejemplo 40 *La pulpería LA MINITA tiene* 3 *tipos de confites: frutinis, morenitos y confites de menta. Juan se desea comprar* 10 *confites, ¿de cuántas maneras puede Juan seleccionar los diez confites, si se tienen de todos tipos en suficiente cantidad?*

Dados los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid x \text{ es una manera de escoger los confites}\} \\ B &= \{y \mid y \text{ es una permutación de las letras de la palabra "0000000000}||\text{"}\} \end{aligned}$$

Considere la función $f : A \to B$, *que toma una manera* x *de escoger los confites:* x_1 *frutinis,* x_2 *morenitos y* x_3 *confites de menta, y le asigna la permutación*

$$f(x) : \underbrace{0...0}_{x_1 \text{ veces}} \mid \underbrace{0...0}_{x_2 \text{ veces}} \mid \underbrace{0...0}_{x_3 \text{ veces}}$$

Por ejemplo:

x	$f(x)$
2 *frutinis,* 3 *morenitos y* 5 *confites de menta*	00 | 000 | 00000
9 *morenitos y* 1 *confites de menta*	| 000000000 | 0
10 *frutinis*	0000000000 | |

Dado que f *es una biyectiva, entonces* $A \simeq B$, *por lo tanto el número de maneras de escoger los confites es*

$$|A| = |B| = P(12; 10, 2) = \frac{12!}{10!2!} = C(12, 10) = 66.$$

Teorema 16 *El número de maneras de escoger* r *objetos de* n *tipos de objetos es* $C(n + r - 1, r)$.

Prueba. *Se deja de ejercicio (Sugerencia: utilice el ejemplo anterior como modelo).*

Teorema 17 *El número de soluciones naturales (son de forma* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$*) de la ecuación* $x_1 + x_2 + ... + x_n = r$ *es* $C(n + r - 1, r)$. *(Se asume que* $0 \in \mathbb{N}$ *)*

Prueba. *El problema es equivalente a seleccionar* r *unos de* n *cajas donde cada caja tiene un tipo diferente de unos (Por ejemplo en la ecuación* $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, *una solución es* $(1, 3, 4)$ *que equivale a seleccionar un uno de la primer caja,* 3 *unos de segunda caja y* 4 *unos de la tercera). Entonces por el teorema anterior el número de soluciones naturales de la ecuación es* $C(n + r - 1, r)$.

Ejemplo 41 *El número de soluciones naturales de* $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ *es* $C(3 + 2 - 1, 2) = 6$, *estas son*

$$(2,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,2,0), (0,1,1), (0,0,2).$$

Ejemplo 42 *Determine el número de soluciones naturales de* $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ *si*

1. x_1 *es* 5 *o* 9.
   Las soluciones naturales de la ecuación bajo esta condición se clasifican en dos casos:

Caso I.	*Si* x_1 *es* 5, *la ecuación queda* $x_2 + x_3 = 15$ *y hay* $C(2 + 15 - 1, 15)$ *soluciones.*
Caso II.	*Si* x_1 *es* 9, *la ecuación queda* $x_2 + x_3 = 11$ *y hay* $C(2 + 11 - 1, 11)$ *soluciones.*

   Por el principio de la suma hay $C(16, 15) + C(12, 11) = 28$ *soluciones.*

2. $x_2 \geq 9$.
   Note que x_2 *se puede escribir como* $9 + y$, *donde* $y \geq 0$, *por lo tanto las soluciones naturales de la ecuación* $x_1 + x_2 + x_3 = 20, x_2 \geq 9$, *son las también las soluciones naturales de la ecuación* $x_1 + y + x_3 = 11$, *estas son* $C(3 + 11 - 1, 11) = 78$ *soluciones.*

3. $x_3 < 11$.
   El total de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ *es* $C(3 + 20 - 1, 20) = 231$. *Por otro lado, el número de soluciones naturales de la ecuación* $x_1 + x_2 + x_3 = 20, x_3 \geq 11$ *es el número de soluciones naturales de la ecuación* $x_1 + x_2 + y = 9$, *el cuál es* $C(3 + 9 - 1, 9) = 55$. *Por lo tanto el número de soluciones naturales de la ecuación* $x_1 + x_2 + x_3 = 20, x_3 < 11$ *es* $231 - 55 = 176$.

Ejemplo 43 *En un acuario solo hay tres tipos de peces: 15 peces guramy, 11 peces espada y 17 peces gato. Karla desea comprar algunos peces, y suponga que no se ha distinción entre peces de un mismo tipo. De cuántas maneras puede comprar*

1. *10 peces con al menos 2 de cada uno.*
   El proceso de selección se puede dividir en etapas:

Etapa I.	*Se seleccionan dos peces de cada tipo*: *hay* 1 *manera.* *(recuerde que no se distinguen peces de un mismo tipo)*
Etapa II.	*Se seleccionan los* 4 *peces faltantes (Note que aún queda de todos tipos en cantidad suficiente) :hay* $C(3 + 4 - 1, 4)$ *maneras.*

Por lo tanto, hay $C(6,4) = 15$ *maneras de seleccionar los peces. Otra forma de resolver el problema es contar el número de soluciones naturales de la ecuación* $x_1+x_2+x_3 = 10$, $x_i \geq 2$, *para* $i = 1, 2, 3$.

2. *14 peces con al menos un pez gato.*
Sean

$$\begin{array}{ll} x_1: & \#\ \text{de peces guramy comprados.} \\ x_2: & \#\ \text{de peces espada comprados.} \\ x_3: & \#\ \text{de peces gato comprados.} \end{array}$$

Note que a lo sumo se puede comprar 11 *peces espada, por lo tanto el número de maneras de comprar 14 peces con al menos un pez gato, es equivalente al número de soluciones naturales de la ecuación:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14, x_2 \leq 11, x_3 \geq 1,$$

que es igual al número de soluciones naturales de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + y = 13, x_2 \leq 11.$$

Hay $C(3 + 13 - 1, 13) = 105$ *soluciones de la ecuación* $x_1 + x_2 + y = 13$. *Además el número de soluciones naturales de la ecuación* $x_1 + x_2 + y = 13, x_2 \geq 12.$ *es igual a*

$$\left|\left\{(x_1, z, y) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + z + y = 1\right\}\right| = C(3 + 1 - 1, 1) = 3,$$

por lo tanto el número de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + y = 13, x_2 \leq 11$ *es* $105 - 3 = 102$. *Se concluye que hay* 102 *maneras de comprar 14 peces con al menos un pez gato.*

4.5 Conteo de distribuciones

4.5.1 Distribuciones de r objetos distinguibles en n cajas distintas

Ejemplo 44 *Se van a distribuir una bicicleta, un bola de fútbol y un nintendo entre Karla y Jorge. Las maneras de distribuir los objetos son:*

# de distribución	***Objetos asignados a Karla***	***Objetos asignados a Jorge***
1	*bicicleta*	*bola y nintendo*
2	*bola*	*bicicleta y nintendo*
3	*nintendo*	*bicicleta y bola*
4	*NINGUNO*	*bicicleta, bola y nintendo*
5	*bicicleta y nintendo*	*bola*
6	*bicicleta y bola*	*nintendo*
7	*bola y nintendo*	*bicicleta*
8	*bicicleta, bola y nintendo*	*NINGUNO*

Note que algunas de estas distribuciones son muy injustas.

Teorema 18 *El número de maneras de distribuir r objetos distinguibles en n cajas distintas si*

1. *se tiene que $r < n$ y a lo sumo deben estar un objeto en cada caja es $P(n, r)$.*
2. *no hay restricciones es n^r*

Prueba. 1. *El proceso de distribución de los r objetos, se puede realizar por etapas:*

Etapa I. *Se seleccionan r cajas de las n : hay $C(n, r)$ maneras.*
(A cada caja escogida se le asignará en objeto)
Etapa II. *Se asignan los r objetos a las r cajas seleccionadas: hay $P(r)$ maneras.*
(Equivale a permutar los r objetos, pues son distintos)

Así se asigna el objeto 1 a la primer caja seleccionada, el objeto 2 a la segunda caja escogida,... Por lo tanto hay $C(n, r) \cdot r! = P(n, r)$ maneras de distribuir los objetos.

2. *Sea A el conjunto de objetos y B el conjunto de cajas, entonces $|A| = r$ y $|B| = n$. Sea C el conjunto de posibles distribuciones de r objetos distinguibles en n cajas distintas. Si cada distribución $x \in C$ se le asigna la función $f_x : A \to B$ la cual toma un objeto z y le asigna la caja $f_x(z)$ que le toco según la distribución x, entonces existe una biyección entre los conjuntos C y $\mathcal{F}(A, B)$, por lo tanto*

$$|C| = |\mathcal{F}(A, B)| = |B|^{|A|} = n^r.$$

Ejemplo 45 *Los confites: 5 frutinis (cada uno de un sabor distinto) y 12 chupas (todos diferentes) se van a distribuir entre María, Lucia y Juan. De cuántas maneras se puede distribuir estos confites si*

1. *A Lucia le corresponden a lo sumo un frutini.*
Las maneras de realizar la distribución se dividen en dos casos:

Caso I. *A Lucia le corresponden un frutini*
Etapa I. *Se selecciona el frutini de Lucia: hay $C(5, 1)$ maneras.*
Etapa II. *Se distribuyen los otros frutinis entre María y Juan: hay 2^4 maneras*
Etapa II. *Se distribuyen los chupas: hay 3^{12} maneras*
Caso II. *A Lucia no le corresponden frutinis*
Etapa I. *Se distribuyen los frutinis entre María y Juan: hay 2^5 maneras*
Etapa II. *Se distribuyen los chupas: hay 3^{12} maneras*

Aplicando los principios de suma y producto, se obtiene que las maneras de distribuir los confites, si a Lucia le corresponden a lo sumo un frutini es

$$5 \cdot 2^4 \cdot 3^{12} + 2^5 \cdot 3^{12} = 59\,521\,392$$

2. *A Juan le corresponden al menos 10 chupas.*
   Las maneras de realizar la distribución se dividen en tres casos (indique cuales son las etapas de realización de la distribución en cada caso) :

Caso I.	*A Juan le corresponden 10 chupas*
	hay $3^5 \cdot C(12, 10) \cdot 2^2$ *distribuciones en este caso*
Caso II.	*A Juan le corresponden 11 chupas*
	hay $3^5 \cdot C(12, 11) \cdot 2^1$ *distribuciones en este caso*
Caso III.	*A Juan le corresponden 12 chupas*
	hay 3^5 *distribuciones en este caso*

Por lo tanto, hay $3^5 \left[C(12, 10) \cdot 2^2 + C(12, 11) \cdot 2^1 + 1 \right] = 70\,227$ *maneras de distribuir los confites, suponiendo que a Juan le corresponden al menos 10 chupas.*

4.5.2 Distribuciones de r objetos no distinguibles en n cajas distintas

Ejemplo 46 *Se distribuyen cuatro bolitas idénticas entre Francisco y Maríanela, las posibles maneras de hacer la distribución, son:*

# de distribución	***Bolitas asignadas a Maríanela***	***Bolitas asignadas a Francisco***
1	○ ○ ○ ○	*NINGUNA*
2	○ ○ ○	○
3	○ ○	○ ○
4	○	○ ○ ○
5	*NINGUNA*	○ ○ ○ ○

Así, hay 5 *posibles maneras de distribuir las bolitas.*

Teorema 19 *El número de maneras de distribuir* r *objetos no distinguibles en* n *cajas distintas si*

1. *se tiene que* $r < n$ *y a lo sumo deben estar un objeto en cada caja es* $C(n, r)$.
2. *no hay restricciones es* $C(n + r - 1, r)$

Prueba. *1. El proceso de distribución se divide en dos etapas:*

Etapa I.	*Se seleccionan r cajas de las n : hay $C(n,r)$ maneras.* *(A cada caja escogida se le asignará en objeto)*
Etapa II.	*Se asignan los r objetos a las r cajas seleccionadas: hay 1 manera.* *(pues los objetos son idénticos)*

Por lo tanto, hay $C(n,r)$ maneras de distribuir los objetos, si a lo sumo deben estar un objeto en cada caja.

2. Sea x_i el número de objetos que quedaran en la caja i, con $i = 0, 1, ..., n$, dado que en total se distribuyen r objetos, entonces

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = r.$$

Note que como los objetos no son distinguibles, solo interesa el número de objetos en cada caja. Por lo tanto el número de maneras de distribuir los objetos equivale al número de soluciones de la ecuación $x_1+x_2+...+x_n = r$, el cuál es $C(n+r-1, r)$.

Ejemplo 47 *En un concurso, Mario, Lucia y Sandra han ganado 12 premios: 7 viajes para una persona a Orlando y 5 premios sorpresa distintos. Sin embargo dichos premios van a ser distribuidos aleatoriamente entre los participantes mencionados. De cuántas maneras se puede distribuir dichos premios si*

1. *No hay restricciones.*
   El proceso de distribución sigue las siguientes etapas:

Etapa I.	*Se distribuyen los 7 viajes (objetos idénticos) : hay $C(3+7-1, 7)$ maneras*
Etapa II.	*Se distribuyen los premios (objetos distintos): hay 3^5 maneras*

   Por lo tanto, hay $C(7+3-1, 7) \cdot 3^5 = 8748$ maneras de distribuir los premios.

2. *A Mario le toque por lo menos 2 viajes y solamente 2 premios sorpresa.*
   Considere las siguientes etapas del proceso de distribución

Etapa I.	*Se asignan dos viajes a Mario: hay 1 manera* *(Los viajes son idénticos)*
Etapa II.	*Se distribuyen los 5 viajes restantes: hay $C(3+5-1, 5)$ maneras.*
Etapa III.	*Se seleccionan dos premios sorpresa para Mario: hay $C(5,2)$ maneras.* *(Los premios sorpresa son objetos distinguibles)*
Etapa IV.	*Se distribuyen los premios 3 premios sorpresa restantes entre Sandra y Lucia: hay 2^3 maneras.*

4.6 Más ejemplos

Ejemplo 48 *¿De cuántas maneras se pueden distribuir 5 libros distintos de probabilidad entre Jorge, Karla y Anthony si a cada uno le corresponde al menos un libro?*

Opción 1. *Dado que sería un error ver el proceso en dos etapas: darle un libro a cada uno y luego repartir el resto (¿Por qué?) Una manera de proceder es por medio de casos:*

- ***Caso I.*** *A Jorge le corresponden 3 libros*
  - ***Etapa I.*** *Se selecciona 3 libros para Jorge: hay* $C(5,3)$ *maneras.*
  - ***Etapa II.*** *Se selecciona 1 libro para Karla: hay* $C(2,1)$ *maneras*
  - ***Etapa II.*** *Se selecciona 1 libro para Anthony: hay* 1 *manera*
- ***Caso II.*** *A Jorge le corresponden 2 libros*
  - ***Etapa I.*** *Se selecciona 2 libros para Jorge: hay* $C(5,2)$ *maneras.*
  - ***Etapa II.*** *Se distribuyen los 3 libros restantes entre Karla y Anthony*
    - ***Caso I.*** *A Karla le corresponden 2 libros: hay* $C(3,2)$ *maneras*
    - ***Caso II.*** *A Karla le corresponden 1 libro: hay* $C(3,1)$ *maneras*
- ***Caso III.*** *A Jorge le corresponden 1 libro*
  - ***Etapa I.*** *Se selecciona 1 libro para Jorge: hay* $C(5,1)$ *maneras.*
  - ***Etapa II.*** *Se distribuyen los 4 libros restantes entre Karla y Anthony*
    - ***Caso I.*** *A Karla le corresponden 3 libros: hay* $C(4,3)$ *maneras*
    - ***Caso II.*** *A Karla le corresponden 2 libros: hay* $C(4,2)$ *maneras*
    - ***Caso II.*** *A Karla le corresponden 1 libro: hay* $C(4,1)$ *maneras*

Así, el número de maneras de distribuir los libros es

$$C(5,3)\,C(2,1)+C(5,2)\,(C(3,2)+C(3,1))+C(5,1)\,(C(4,3)+C(4,2)+C(4,1))=150.$$

Opción 2. *Una mejor manera de resolver el problema es por medio del principio de inclusión-exclusión. Sean*

$$\begin{aligned}
U &: \text{ conjunto de maneras de distribuir los libros}\\
A_1 &= \{x\in U \mid \text{ en } x \text{ a Jorge le corresponde al menos un libro}\}\\
A_2 &= \{x\in U \mid \text{ en } x \text{ a Karla le corresponde al menos un libro}\}\\
A_3 &= \{x\in U \mid \text{ en } x \text{ a Anthony le corresponde al menos un libro}\}
\end{aligned}$$

Así queremos averiguar la cardinalidad del conjunto $A_1\cap A_2\cap A_3$:

$$\begin{aligned}
|A_1\cap A_2\cap A_3| &= |U|-\left|\overline{A_1\cap A_2\cap A_3}\right|\\
&= |U|-\left|\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}\right|\\
&= |U|-\left(C(3,1)\left|\overline{A_1}\right|-C(3,2)\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right|+\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right|\right)\\
&= 3^5-\left(C(3,1)\,2^5-C(3,2)\cdot 1+0\right)\\
&= 150
\end{aligned}$$

Al igual que la opción 1 se obtiene que, el número de maneras de distribuir los libros 150.

El ejemplo anterior, opción 2, nos brinda una manera de contar las funciones sobreyectivas.

Ejemplo 49 *Dados dos conjunto A y B tales que $|A| = n, |B| = m$ con $n > m$, determine el número de funciones sobreyectivas de A en B.*

Supongamos que $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_m\}$. Considere los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{rcl} U & : & \textit{conjunto de todas las funciones de } A \textit{ en } B \\ F_1 & = & \{f \in U| \textit{ en } f \textit{ a } b_1 \textit{ le corresponde al menos una preimagen}\} \\ F_2 & = & \{f \in U| \textit{ en } f \textit{ a } b_2 \textit{ le corresponde al menos una preimagen}\} \\ & & \vdots \\ F_m & = & \{f \in U| \textit{ en } f \textit{ a } b_m \textit{ le corresponde al menos una preimagen}\} \end{array}$$

Así, el número de funciones sobreyectivas de A en B es igual a la cardinalidad del conjunto $F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_m$:

$$\begin{aligned} |F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_m| &= |U| - \left|\overline{F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_m}\right| \\ &= |U| - \left|\overline{F_1} \cup \overline{F_2} \cup ... \cup \overline{F_m}\right| \\ &= |U| - \left(C(m,1)\left|\overline{F_1}\right| - C(m,2)\left|\overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right| + \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right|\right) \end{aligned}$$

Aplicando el principio de inclusión-exclusión se obtiene que $\left|\overline{F_1} \cup \overline{F_2} \cup ... \cup \overline{F_m}\right|$ es igual a

$$\begin{aligned} & C(m,1)\left|\overline{F_1}\right| - C(m,2)\left|\overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right| + C(m,3)\left|\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}\right| - ... + \\ & (-1)^m C(m, m-1)\left|\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap ... \cap \overline{F_{m-1}}\right| + (-1)^{m+1}\left|\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap ... \cap \overline{F_m}\right| \\ = \; & C(m,1)(m-1)^n - C(m,2)(m-2)^n + C(m,3)(m-3)^n - ... + \\ & (-1)^m C(m, m-1) \cdot 1 + (-1)^{m+1} \cdot 0 \\ = \; & \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} C(m,k)(m-k)^n \end{aligned}$$

Por lo tanto el número de funciones sobreyectivas de A en B es igual a

$$\begin{aligned} |U| - \left|\overline{F_1} \cup \overline{F_2} \cup ... \cup \overline{F_m}\right| &= m^n - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} C(m,k)(m-k)^n \\ &= m^n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k C(m,k)(m-k)^n \end{aligned}$$

Ejemplo 50 *El programa TV GANADORES el día domingo eligió a 15 finalistas (7 son del área metropolitana), de estos 5 serán los ganadores de un viaje a CANCUN. De cuántas maneras se pueden elegir los ganadores de manera que se seleccione al menos un finalista que no sea del área metropolitana.*

Seguidamente se presentan tres maneras diferentes de resolver este ejercicio.

Opción #1. *Utilizando el principio de inclusión-exclusión*

Considere los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{rl} U: & \text{conjunto de maneras de elegir los ganadores} \\ A_i = & \{x \in U \mid \text{en } x \text{ se elige al finalista persona } i \text{ del área no metropolitana}\} \\ & \text{con } i = 1, 2, 3, .., 8 \end{array}$$

El número de maneras de elegir los ganadores de forma que se seleccione al menos un finalista que no sea del área metropolitana es

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_8| &= C(8,1)|A_1| - C(8,2)|A_1 \cap A_2| + C(8,3)|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &\quad - C(8,4)|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + C(8,5)|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \\ &= C(8,1)C(14,4) - C(8,2)C(13,3) + C(8,3)C(12,2) - C(8,4)C(11,1) + C(8,5) \\ &= 8008 - 8008 + 3696 - 770 + 56 = 2982 \end{aligned}$$

Opción #2. *Utilizando casos*

Caso I. *Elegir un finalista del área metropolitana: hay* $C(8,1)C(7,4)$ *maneras.*
Caso II. *Elegir 2 finalistas del área metropolitana: hay* $C(8,2)C(7,3)$ *maneras.*
Caso III. *Elegir 3 finalistas del área metropolitana: hay* $C(8,3)C(7,2)$ *maneras.*
Caso VI. *Elegir 4 finalistas del área metropolitana: hay* $C(8,4)C(7,1)$ *maneras.*
Caso V. *Elegir 5 finalistas del área metropolitana: hay* $C(8,5)$ *maneras.*

Caso III: *Elegir un grupo de noveno: hay* 18 *maneras.*

El número de maneras de elegir los ganadores de forma que se seleccione al menos un finalista que no sea del área metropolitana es

$$C(8,1)C(7,4) + C(8,2)C(7,3) + C(8,3)C(7,2) + C(8,4)C(7,1) + C(8,5) = 2982$$

Opción #3. *Por Complemento.*

El número de maneras de elegir los ganadores de forma que se seleccione al menos un finalista que no sea del área metropolitana, es igual a restarle al total de maneras de elegir los ganadores, aquellas en las que no se eligen finalistas del área no metropolitana:

$$C(15,5) - C(7,5) = 2982$$

Ejemplo 51 *En una noche de este mes 4 fantasmas de Tibás salen a asustar por la noche a San José, en su trabajo se encuentran con dos amigos fantasmas provenientes de Guanacaste. Por lo emocionante de su labor los sorprende el amanecer y se meten a las 4 cuevas de los fantasmas de Tibás ocupándolas de manera aleatoria. De cuántas maneras pueden distribuirse los fantasmas en las 4 cuevas, si ninguna cueva queda desocupada.*

Opción #1. *Utilizando el principio de inclusión-exclusión*

Considere los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{rl} U: & \text{conjunto de maneras de distribuir los fantasmas en las cuevas} \\ P_i = & \{x \in U \mid \text{ en } x \text{ al menos un fantasma queda en la cueva } i\} \\ & \text{con } i = 1,2,3,4 \end{array}$$

Por el principio de inclusión-exclusión se tiene que

$$\begin{aligned} |P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4| &= |U| - \left|\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_3} \cup \overline{P_4}\right| \\ &= 4^6 - \left(4 \cdot 3^6 - C(4,2)\,2^6 + C(4,3)\,1^6\right) \\ &= 1560 \end{aligned}$$

Opción #2. *Utilizando casos. Hay dos casos, que tres fantasmas queden en una misma cueva o que en dos cuevas queden 2 fantasmas en cada una:*

$$C(4,1)\,C(6,3)\,3! + C(4,2)\,C(6,2)\,C(4,2)2! = 1560.$$

Opción #3. *Utilizando anagramas.*

Considere la palabra de 6 letras formada por las letras P_1, P_2, P_3, P_4 donde si P_i está en la posición j de la palabra indica que el fantasma j eligió la cueva i. Así se consideran los dos casos de la forma anterior:

1. *Caso 1: tres fantasmas en una misma cueva. Se elige la cueva que será elegida por 3 fantasmas: hay $C(4,1)$ maneras. Luego las maneras de asignar las cuevas equivale a permutar nuestra palabra la cual tiene exactamente 3 repetidas, hay $\dfrac{6!}{3!}$ maneras. Total del caso 1:*
$$C(4,1)\,\frac{6!}{3!}.$$
2. *Caso 2: dos cuevas con 2 fantasmas cada una. Se eligen estos dos cuevas, hay $C(4,2)$ maneras. Luego las maneras de asignar las cuevas equivale a permutar nuestra palabra la cual tiene 2 pares de letras idénticas, hay $\dfrac{6!}{2!2!}$ maneras. Total del caso 2:*
$$C(4,2)\,\frac{6!}{2!2!}.$$

Total:

$$C(4,1)\frac{6!}{3!}+C(4,2)\frac{6!}{2!2!}=1560.$$

4.7 Ejercicios

1. Si $A=\{a,e,f\}, B=\{b,e,h\}, C=\{a,h\}, C\times D=\{(a,e),(h,e),(a,a),(h,a),(a,b),(h,b)\}$ con $U=\{a,b,e,f,h,m\}$ el conjunto universo. Calcule:

   (a) $|P[\ C\cap(A-B)]\times C|$ *R/* 4

   (b) $|\ P[(C-D)\times(B\cap D)\ ]\ |$ *R/* 4

2. Sean A,B y C conjuntos arbitrarios tal que $A\cap C=\phi$, $|A\cup B|=10$ y $|A\cap B|=2$,. Determine la cardinalidad de el conjunto $P(A-C)\times P(B)$ *R/* 4096

3. Si $A=\{a,e\}, B=\{b,e,h\}, C=\{a,h\}, (B\cup C)-D=\{a,b\}$ con $U=\{a,b,e,f,h,m\}$ el conjunto universo. Calcule:

   (a) $|P[\ C-(A\triangle B)]|$ *R/* 1

   (b) $|\ P(C-D)\times(A-D)\ |$ *R/* 2

4. Sean A,B,C tres conjuntos tales que $A\cap B=\phi, |A\cup B|=8, |P(C)|=128, |C-A|=4$. Calcule:

   (a) $|P(A)\times P(B-A)|$ *R/* 256

   (b) $|P[(A\cap C)\times C]|$ *R/* 2097152

5. Considere la parte 2 del ejemplo (45) en la que a Juan le corresponden al menos 10 chupas. Suponga que para realizar el conteo de las distribuciones, se divide el proceso de formación de una distribución en etapas:

   Etapa I. Se distribuyen los frutinis: hay 3^4 maneras
   Etapa II. Se selecciona 10 chupas para Juan: hay $C(12,10)$ maneras.
   Etapa II. Se distribuyen los chupas restantes: hay 3^2 maneras
   (Se incluye a Juan pues a el le pueden corresponder mas de 10 confites)

   Entonces el número de maneras de distribuir los confites, es $3^4\cdot C(12,10)\cdot 3^2=48\,114$ suponiendo que a Juan le corresponden al menos 10 chupas. Sin embargo este error de conteo es muy diferente al obtenido en le ejemplo. Describa el error de conteo cometido.

6. Cosidere la palabra: OLIMPIADA Cuántos anagramas existen de esta palabra si
   (a) no hay restricciones $R/\quad 90720$
   (b) deben comenzar con P o M, y las letras M, I, L, I aparecen juntas en cualquier orden. $R/\quad 900$
   (c) las "I" no están juntas. $R/\quad 70560$
   (d) La primera "A" esta después de la 5 posición. $R/\quad 15120$

7. Considere la palabra: **PRINCIPIO.** Cuántas palabras diferentes (anagramas) se pueden formar con esta palabra si
   (a) No hay restricciones. $R/\quad 30\,240$
   (b) Si deben comenzar en "R" y además, las letras: C,O,R,N deben ir juntas en cualquier orden. $R/\quad 60$

8. Considere la palabra "INTRODUCCION"
   (a) ¿Cuántos anagramas (permutaciones) existen de esta palabra? $R/\quad 29937600$
   (b) Un anagrama de esta palabra es bonito si cumple que:
      i. Las letras I,I,C,C,D están juntas en cualquier orden.
      ii. Las letras O,O,T están juntas en cualquier orden.

      ¿Cuántos anagramas bonitos existen de esta palabra? $R/\quad 32400$

9. Don Juan dejo como herencia a sus tres hijos: Jorge, Karla y Anthony, cinco quintas distintas y seis automóviles idénticos. Don Juan en su testamento, dejo escrito que deseaba que Jorge, su hijo menor, recibiera 2 quintas y por lo menos dos automóviles, sin embargo, dichos bienes debían ser distribuidos al azar, De cuantas maneras se pueden distribuir los bienes si
   (a) No hay restricciones. $R/\quad 6804$
   (b) Se desea cumplir la voluntad de don Juan. $R/\quad 1200$
   (c) Jorge recibirá por lo menos 3 quintas. $R/\quad 1428$
   (d) Cada uno recibirá al menos una quinta y al menos un automóvil. $R/\quad 1500$

10. Se distribuyen 10 entradas generales a un concierto entre María, Ana y Melisa. ¿De cuántas maneras se pueden repartir las entradas si a Melisa le corresponden a lo sumo 4 entradas? Suponga que para resolver este problema se divide el proceso de repartición en las siguientes etapas:

Etapa I.	Distribuir 4 entradas entre las 3 mujeres: hay $C(4+3-1,4)$ maneras.
Etapa II.	Distribuir las entradas restantes entre María y Ana: hay $C(6+2-1,6)$ maneras
TOTAL	$C(4+3-1,4)\,C(6+2-1,6) = 105$

Explique por qué el conteo es incorrecto y verifique que la respuesta correcta es 45.

11. En una fiesta hay 20 personas.

    (a) Se desea elegir a al menos tres personas para que realizar una actividad ¿Cuántas maneras hay de elegir las personas de la actividad? $R/\ \ 1048\,365$

    (b) ¿Cuántas maneras hay de elegir un número par de personas? $R/\ \ 524\,288$

12. Un edificio tiene n pisos. Suponga que:

    (a) En el primer piso se sube $n+1$ personas.

    (b) En el segundo piso se bajan 2 personas y no ingresan más personas al ascensor.

    (c) En cada uno de los pisos siguientes: se baja al menos una persona y no ingresan más personas al ascensor.

    (d) En el último piso se bajan las personas que quedan en el ascensor.

    ¿De cuantás posibles maneras se pueden bajar las personas del ascensor? $R/\ \ \dfrac{(n+1)!\,(n-2)}{4}$

13. Considere la palabra "$SEMANASANTA$"

    (a) ¿Cuántos anagramas (permutaciones de las letras) existen de esta palabra ? $R/\ \ 415\,800$

    (b) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra en los cuales las vocales estén juntas y las consonantes también? $R/\ \ 1800.$

    (c) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra en los cuales la "E" este ubicada en el centro (6° posición) y se tengan al menos dos "A" antes de la "E"? $R/\ \ 27\,900$

14. Entre Ana, Juan y Melissa compraron en Golfito 10 sardinas (todas distintas) y 12 tarros de frutas (todos distintos). De cuántas maneras se pueden repartir los comestibles comprados si a Ana le corresponden exactamente 5 tarros de frutas, a Juan 4 o 5 sardinas y a Melissa al menos 3 tarros de frutas. $R/\ \ 1686\,085\,632$

15. El colegio X tiene 10 secciones de décimo. De cada grupo se han pre-seleccionado los 10 mejores promedios. De los estudiantes pre-seleccionados, se elegirán al azar 35 estudiantes para que representen al colegio en un concurso intercolegial. ¿De cuántas maneras se pueden escoger se pueden elegir los estudiantes, si se quiere escoger todos los estudiantes pre-seleccionados de una misma sección, por lo menos. $R/\quad 1.16341264 \times 10^{23}$

16. Pruebe que el número de maneras de distribuir r objetos distinguibles en n cajas distintas si se toma en cuenta el orden dentro de cada caja es $r!C\left(n+r-1,r\right)$. (Sugerencia: considere dos etapas).

17. Sea A el conjunto de distribuciones de r objetos distinguibles en n cajas distintas en las cuales hay
$$\begin{array}{ll} k_1 & \text{objetos en la caja 1} \\ k_2 & \text{objetos en la caja 2} \\ & \vdots \\ k_n & \text{objetos en la caja } n \end{array}$$
Muestre que $|A| = P\left(r;k_1,k_2,...,k_r\right)$ (Sugerencia: pruebe que A es equipotente al conjunto de anagramas de una palabra determinada).

18. ¿Cuántos anagramas existen de la palabra "ANALISIS", en los cuales las dos "A" no estén juntas, ni las dos "I"? $R/\quad 2880$

19. En el concurso RETOS realizado por la Universidad Bienestar Seguro, Rebeca, Fabiola y Victor son los ganadores de este mes. Entre estos ganadores se distribuirán 7 libros (todos distintos) y 10 entradas generales al próximo partido de Saprissa. Suponga que los premios se distribuyen al azar.
    (a) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los premios en las cuales a cada ganador le corresponde al menos 2 entradas y al menos dos libros? $R/\quad 9450$
    (b) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los premios en las cuales a Rebeca le correspondan al menos 2 libros y a lo sumo 5 entradas? $R/\quad 82\,161$

20. Considere la palabra "REFERENDUM" Determine el número de anagramas de esta palabra que comienzan con D o M, y donde las letras R, R, N, U van después de la cuarta posición. $R/\quad 7200$

21. El restaurante Mac Burger tiene 8 sucursales en la ciudad C, cada una con 12 empleados. Para motivar a sus empleados a decidido elegir 50 empleados al azar para regalarles una entrada a un concierto. ¿De cuántas maneras se pueden elegir los empleados de forma que no se elijan a todos los empleados de una misma sucursal? $R/\quad 5916\,302\,907\,754\,879\,586\,580\,641\,040$

22. Un anagrama de una palabra es un ordenamiento de sus letras. Se dice que un anagrama Y de cierta palabra contiene la palabra X si las letras de X aparecen juntas en cualquier orden en Y. Considere la palabra "$PARANGANICUTIRI$"

    (a) ¿Cuántos anagramas (permutaciones de las letras) existen de esta palabra? $R/\quad 9081\,072\,000$

    (b) ¿Cuántos anagramas (permutaciones de las letras) existen de esta palabra en los cuales la primer vocal, de izquierda a derecha, este después de la 5° posición? $R/\quad 169\,344\,000$

    (c) Determine el número de anagramas de esta palabra que contienen a la palabra "$AAAP$", contienen a la palabra "$NNRR$" y estás palabras están separadas por al menos una letra. $R/\quad 1128\,960$

    (d) Determine el número de anagramas de esta palabra que contienen a la palabra "$AAAPNNRR$", pero con las N separadas. $R/\quad 8467\,200$

23. Entre Karla, Juan y Viviana se compraron 12 lapiceros azules marca M y 6 pilot de diferentes colores. Suponga que los objetos se distribuyen al azar entre los tres.

    (a) De cuántas maneras se pueden repartir los objetos comprados si a Melissa le corresponde exactamente 3 pilot y a lo sumo 7 lapiceros. $R/\quad 12\,160$

    (b) ¿Cuántas maneras hay de que cada uno recibirá al menos un lapicero y al menos un pilot, y a Juan le corresponda al menos 3 pilot? $R/\quad 8250$

24. La escuela rural X está formada por 5 secciones, cada una con 15 estudiantes.. Para el 12 de octubre se van a elegir 21 estudiantes al azar para se encargue de organizar el acto cívico. De cuántas maneras se puede elegir al menos 4 estudiantes de cada sección $R/\quad 52\,126\,185\,120\,384\,375$

25. Sea $m > 4$. Determine el total de maneras de distribuir $3m + 4$ objetos idénticos en 4 cajas distintas con a lo sumo m objetos por caja. $R/\quad \dfrac{(m-3)(m-1)(m-2)}{6}$

26. En el concurso RAZONAMIENTO MATEMÁTICO realizado por la Universidad Bienestar Seguro, Rebeca, Fabiola y Víctor son los ganadores de este mes. Entre estos ganadores se distribuirán 5 libros (todos distintos) y 10 entradas generales al próximo partido de la selección. Suponga que los premios se distribuyen al azar.

    (a) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los premios en las cuales a Rebeca le corresponda exactamente 3 premios ? $R/\quad 2216$

    (b) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los premios en las cuales a Víctor le toquen más de un libro, a Fabiola a lo sumo un libro y a Rebeca al menos 5 entradas? $R/\quad 1701$

27. Diez personas (4 Mujeres y 6 Hombres) si sientan en 10 sillas enumeradas del 1 al 10. De cuántas maneras se pueden sentar las personas en las sillas si
    (a) no hay restricciones $R/\quad 10!$
    (b) las mujeres deben ir sillas impares $R/\quad 86\,400$
    (c) al menos una mujer debe ir una silla impar $R/\quad 3542\,400$

28. Considere la palabra "IMPLEMENTACION"
    (a) ¿Cuántos anagramas (permutaciones) existen de esta palabra? $R/\quad 5448\,643\,200$
    (b) Determine el número de anagramas de esta palabra en los cuales las vocales estén juntas y después de la cuarta posición. $R/\quad 9072\,000$
    (c) Determine el número de anagramas de esta palabra en los cuales: las letras MIMIP vayan juntas en cualquier orden al igual que las letras de LETAE, sin embargo las letras repetidas deben ir separadas por al menos una letra. $R/\quad 103\,680$

29. En el concurso TV-PARTIDO se tienen dos equipos, el equipo A formado por 4 mujeres y 6 hombres, y el equipo B formado por 7 mujeres y 3 hombres. La próxima actividad está formada por 10 personas, cinco de cada equipo. Cuántas maneras hay de elegir las personas para la próxima actividad de manera que:
    (a) de cada equipo se elijan 2 mujeres $R/\quad 2520$
    (b) en total estén 4 mujeres en la actividad $R/\quad 9450$

30. El juego BUSCA-PALABRAS es para 2 jugadores, cada jugador tiene 8 fichas con una letra en cada ficha. Ambos jugadores sin ver sus fichas colocan 4 fichas al azar sobre la mesa. Luego, cada jugador por cada palabra con sentido que obtenga de las fichas en la mesa obtiene un punto, posteriormente se retiran las fichas de la mesa y a cada jugador se le completa sus fichas con 8 fichas para la siguiente partida. Suponga que en una partida Karla tiene las fichas A, L, G, E, B, A, N, U y Jorge tiene las fichas P, A, K, E, I, R, O, M, y cada uno coloca 4 letras al azar sobre la mesa. Cuántas maneras hay de obtener 8 letras en la mesa con solamente dos A y una E. $R/\quad 625$

31. La empresa ANTEL ha donado a la Universidad Bienestar Seguro 12 computadores idénticos y 5 impresoras distintas. Estas donaciones serán distribuidas entre los 4 laboratorios que posee la universidad
    (a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las donaciones en los 4 laboratorios? $R/\quad 465\,920$

(b) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las donaciones en los 4 laboratorios si en el Laboratorio LAIMA deben poner exactamente dos impresoras y a lo sumo 4 computadores? $R/$ 90450

32. El programa TV GANADORES el día domingo eligió a 15 finalistas (7 son del área metropolitana), de estos 5 serán los ganadores de un viaje a CANCUN. De cuántas maneras se pueden elegir los ganadores de manera que se seleccione al menos un finalista que no sea del área metropolitana. $R/$ 2982

33. Una pequeña empresa formada por 10 personas decide realizar una encerrona en un hotel de montaña, por una tarde. La actividad inicia con un almuerzo donde cada persona puede elegir un plato de 5 distintos. De cuántas maneras pueden elegir las personas su almuerzo de manera que el plato 1 y el plato 2 sean elegidos por al menos una persona. $R/$ 7727 522

34. Una agencia del turismo ha decido promocionar el turismo local obsequiando paquetes vacacionales a 6 personas ya escogidas. Las personas pueden elegir una del as siguientes paquetes:

Paquete 1:	viaje a a Isla San Lucas
Paquete 2:	viaje a Monteverde
Paquete 3:	viaje al Volcán Turrialba
Paquete 4:	viaje al Chirripo

De cuántas maneras pueden elegir las personas el paquete vacacional de manera que cada paquete sea elegido por al menos una persona. $R/$ 1568

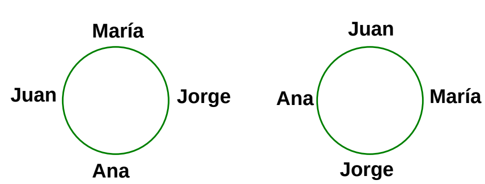
35. En un concurso hay 7 finalistas. Entre ellos se repartirán 3 obsequios distintos y 5 viajes idénticos a Cancún. De cuántas formas diferentes se pueden hacer la distribución si se quiere que

(a) ningún finalista reciba más de un obsequio ni más de un viaje. $R/$ 4410

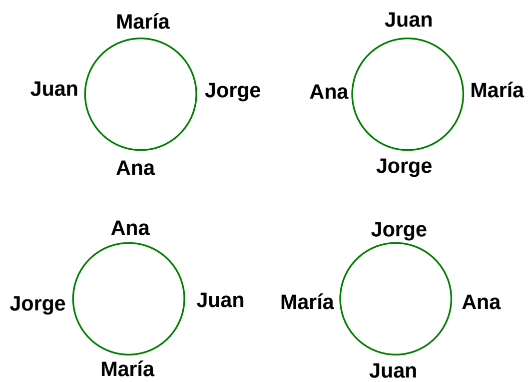
(b) todos los finalistas reciban algún premio $R/$ 1596

36. (♣) (**Permutaciones circulares**) De cuántas maneras se pueden sentar n personas en una mesa redonda con n asientas si:

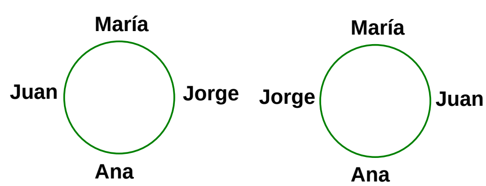
(a) Se distinguen los asientos. Es decir, si $n = 4$, las siguientes formas diferentes de sentarse:



(b) No se distinguen los asientos y solo interesa que se mantenga el mismo vecino a la izquierda y a la derecha de cada persona. Si $n = 4$, las siguientes formas de sentarse son la misma:



(c) No se distinguen los asientos y solo interesa que cada persona tenga los mismos vecinos, sin importar de que lado los tenga. Por ejemplo, si $n = 4$, las siguientes formas de sentarse son la misma:



Capítulo II

Teoría Elemental de Probabilidades

Se estudia la función de probabilidad, sus propiedades y cálculos. Se establece la Regla de Laplace y la Probabilidad Condicional como funciones de probabilidad. Finalmente, se deducen el teorema de las Probabilidad Totales y la Regla de Bayes. Los resultados estudiados son aplicados en la resolución de problemas.

1 Fenómenos estudiados por la probabilidad

Los fenómenos o experimentos pueden ser de dos tipos:

Fenómenos o experimentos

$\swarrow$ $\searrow$

Deterministas	Aleatorios
En circunstancias normales se sabe su resultado	No se conoce su resultado

Ejemplo 52 *Algunos fenómenos deterministas son:*

1. *Encender un disco de una cocina. Resultado: el disco se calienta.*
2. *Abrir la llave de un tubo. Resultado: sale agua.*
3. *El décimo dígito de la sucesión binaria* 101101110... *Resultado: es un 1.*

Ejemplo 53 *Algunos fenómenos aleatorios son:*

1. *El resultado de la lotería.*
2. *El resultado al lanzar un dado.*
3. *El número de personas que están en una determinada hora en un cajero.*
4. *La temperatura para mañana en San José en una hora determinada*

Los experimentos estudiados por la probabilidad son aleatorios y tiene las características siguientes

1. Se conocen todos los posibles resultados antes de realizarse el experimento
2. No se sabe cuál de los posibles resultados se obtendrá en un experimento particular
3. El experimento puede repetirse

Ejemplo 54 *El lanzamiento de un dado es un fenómeno aleatorio estudiado por la probabilidad, pues sus posibles resultados son* $1, 2, 3, 4, 5$ *y* 6*. Además no se tiene certeza de cuál resultado se obtiene al lanzar el dado, y el dado se puede lanzar varias veces.*

Por probabilidad se entiende la medida de la posibilidad de ocurrencia que tiene cada uno de los resultados de un fenómeno. Así en un modelo probabilístico se debe:

1. Describir el fenómeno
2. Identificar los posibles resultados
3. Determinar la probabilidad asociada a cada resultado

Pero, ¿Cómo encontrar la probabilidad a cada uno de estos resultados? En las siguientes secciones se responde esta interrogante.

2 Conceptos básicos

Para un determinado experimento se define:

Definición 8 ***Espacio muestral:*** *es el conjunto de todos los posibles resultados, este se denota:* Ω

Definición 9 ***Eventualidad:*** *es un resultado particular, es decir un elemento de* Ω :

$$x \text{ es una eventualidad} \Leftrightarrow x \in \Omega$$

Definición 10 ***Evento:*** *es un conjunto de resultados, es decir un subconjunto de* Ω :

$$A \text{ es una evento} \Leftrightarrow A \subseteq \Omega$$

Definición 11 ***Ocurrencia de un evento.*** *Se dice que un evento ocurre si sucede una y solo una de sus eventualidades.*

Definición 12 ***Evento casi seguro:*** Ω

Definición 13 ***Evento casi imposible:*** ϕ

Ejemplo 55 *Considere el experimento "Tirar un dado"*
El espacio muestral es:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Observe que 6 *es una eventualidad. Algunos eventos son:*

$$\begin{array}{rc} A: & \text{el resultado del dado es impar} \\ B: & \text{el resultado del dado es mayor a 4} \end{array}$$

Note que

$$A = \{1, 3, 5\} \subseteq \Omega, \quad B = \{5, 6\} \subseteq \Omega$$

Si el resultado del dado es 3 *entonces se dice que el evento* A *ocurre, el Evento* B *no ocurre.*

Teorema 20 ***(Eventos Compuestos)*** *Si A y B son eventos entonces:*

$$A \cup B, A \cap B, A - B \text{ y } A \triangle B \text{ son eventos}$$

Prueba. *Note que como A y B son eventos: $A, B \subseteq \Omega$ y entonces*

$$A \cup B, A \cap B, A - B, A \triangle B \subseteq \Omega$$

por lo tanto estos subconjuntos de Ω son eventos. ■

Estos eventos son llamados eventos compuestos y note que:

1. $A \cup B$ ocurre si y solo si, ocurre A o ocurre B.
2. $A \cap B$ ocurre si y solo si, ocurre A y ocurre B.
3. $A - B$ ocurre si y solo si, ocurre A y no ocurre B.
4. $A \triangle B$ ocurre si y solo si, ocurre A ó ocurre B.

Ejemplo 56 *Se tiene una canasta con 15 bolas enumeradas del uno al quince. Las bolas con número del 1 al 7 son rojas y las demás son verdes. Considere el experimento que consiste en elegir una bola al azar de la canasta. Dados los eventos:*

$$\begin{array}{lcl} A & : & \text{la bola elegida es verde} \\ B & : & \text{la bola elegida es roja} \\ C & : & \text{la bola elegida tiene un número par} \end{array}$$

entonces: el evento $B \cup C$ ocurre si la bola elegida es roja o tiene número par, el evento $A \cap C$ ocurre si la bola elegida es verde con número par, el evento $C - A$ ocurre si la bola elegida es roja con número impar y el evento $C \triangle B$ ocurre si la bola elegida tiene número par ó es roja.

3 Probabilidad Frecuencial

Dado un experimento, la probabilidad o medida de posibilidad de que ocurra un evento determinado A será un número entre 0 y 1, que se interpreta como un porcentaje. Así si la probabilidad de A es 0.8, esto indica que el evento tiene un 80% de posibilidad de ocurrir.

¿Cómo determinar intuitivamente la probabilidad de que ocurra un evento? Para que la probabilidad sea útil debe existir una correspondencia entre la probabilidad y la realidad, es decir si el experimento se repite varias veces, la frecuencia relativa observada con que ocurre un evento debe ser cercana a la medida de la posibilidad de que ocurra ese evento. Está frecuencia relativa observada se le llamará **probabilidad frecuencial**, la cual se espera que, bajo ciertas condiciones, se aproxime a la probabilidad de que ocurra el evento (llamada **probabilidad teórica**)

Ejemplo 57 *Dado el fenómeno de lanzar un dado, ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 6? Se lanza un dado 100 veces y se observa que en 15 veces se obtiene un 6, por lo tanto la probabilidad frecuencial observada de obtener un 6 es* $\frac{15}{100} = 15\%$ *que es cercana a la probabilidad teórica de* $\frac{1}{6} = 16.\overline{6}\%$*, la que en las próximas secciones veremos cómo obtener.*

Pero, ¿cuántas veces debe repetirse el experimento para que la probabilidad frecuencial se acerque a la real?

Ejemplo 58 *(**¿Juegas o no?**) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Karla, Jorge y Anthony desean determinar si vale la pena jugar el juego, para ello deciden que cada uno juegue veinte veces DADOS A SEIS obteniendo los siguientes resultados:*

	# de veces que se ganó	*Probabilidad frecuencial de ganar*	*¿Vale la pena Jugar?*
Karla	*7*	$\frac{7}{20} = 35\%$	*NO*
Jorge	*10*	$\frac{10}{20} = 50\%$	*ES INDIFERENTE*
Anthony	*12*	$\frac{12}{20} = 60\%$	*SI*

Se puede apreciar que los resultados obtenidos utilizando la probabilidad frecuencial son muy distintos. Tal parece que algunas probabilidades frecuenciales no se acercar al valor real de la probabilidad. ¿Cuál es realmente la probabilidad de ganar DADOS A SEIS?

Ejemplo 59 *(**¡El falso determinismo!**) Un software asegura que detecta el 90% de los fraudes bancarios que ocurren en las tarjetas. Ante esto el Banco de Los Sueños decide adquirir el software para detectar los fraudes que le ocurre a sus clientes en las tarjetas. Sin embargo, en el primer momento de uso, el software no detectó un fraude. El banco decide demandar a la empresa, pero al revisar el software, resulta que los cálculos están bien hechos. ¿Qué está sucediendo, pues en el primer intento falló?*

Los dos últimos ejemplos revelan que no necesariamente la probabilidad frecuencial se va a acercar a la probabilidad real. Entonces ¿qué condiciones deben cumplirse para que la frecuencia relativa observada se acerque a la probabilidad teórica? Las condiciones las establece la **Ley de los Grandes Números**[2]:

Dado un experimento, sea A un evento. Si el experimento se repite un número suficientemente grande de veces, entonces la probabilidad frecuencial de A será muy cercana al valor real de la probabilidad.

[2] Este resultado se demuestra formalmente en el último capítulo.

Donde el número de veces que se repite el experimento depende de la variabilidad de sus resultados.

Ejemplo 60 (***Verificando la Ley de los grandes números***). *Al lanzar una moneda legal se sabe que hay un 50% de probabilidad de que salga escudo. Se desea simular esta situación utilizando Excel, para ello utilicemos la función* ***ALEATORIO.ENTRE(min;max)*** *la cuál devuelve un número entero aleatorio entre los enteros min y max. Así en la celda* ***A1*** *de Excel se copia:*

	A	B
1	=ALEATORIO.ENTRE(1;2)	
2		
3		

Se va a considerar el 1 como CORONA y el 2 como ESCUDO. Luego, utilizando el mouse se puede arrastrar esta fórmula hasta la celda ***A10*** *obteniendo por ejemplo:*

	A	B
1	1	
2	1	
3	2	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9	1	
10	2	

Aquí se están simulando 10 lanzamientos de una moneda. En este caso la probabilidad frecuencial de obtener un ESCUDO es $\frac{2}{10} = 20\%$ *que es muy alejada de la probabilidad esperada de 50%. Para lanzar nuevamente la moneda, basta actualizar las celdas, esto se logra escribiendo algo (por ejemplo un igual o dar suprimir) en una celda desocupada. Sin embargo, al cambiar nuevamente los valores, se obtiene que en la mayoría de los casos, la probabilidad frecuencial se aleja de la probabilidad real de* 50% *. Esto se debe a que el número de lanzamientos es insuficiente.*

¿Qué sucede si se realizan varios lanzamientos? Suponga que se tiene diez personas y cada

una simula diez lanzamientos como se vio anteriormente y obtienen los siguientes resultados:

	Persona									
#	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	1	2	2	2	2	2	1	2	2	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
4	1	2	1	2	2	2	2	1	2	1
5	2	1	1	2	1	2	2	1	2	2
6	2	1	1	1	2	1	2	2	1	1
7	2	1	2	2	2	2	2	1	1	1
8	1	2	1	1	1	2	2	2	2	2
9	1	2	1	2	1	2	2	1	1	1
10	1	2	1	1	2	1	2	1	2	2
probabilidad frecuencial	0,3	0,7	0,2	0,7	0,6	0,8	0,7	0,4	0,5	0,6

Observe que la mayoría de probabilidades frecuenciales obtenidas por cada persona dictan de la esperada. Sin embargo, si se consideran todos los lanzamientos, entonces la probabilidad frecuencial de obtener ESCUDO es $\dfrac{51}{100} = 51\%$ *que es bastante cercano al 50%.*

Ejemplo 61 ***(¿Juegas o no?)*** *Las distintas respuestas a la pregunta ¿Vale la pena Jugar DADOS A SEIS? del ejemplo* (58) *se debe a las pocas veces que se jugó el juego. Simulemos este juego 100 veces este juego para eso se denota en la hoja de Excel:*

Celda:	*A1*	*B1*	*C1*
Escribir:	*Dado1*	*Dado2*	*¿Ganó?*
Celda:	*A2*	*B2*	*C2*
Escribir:	*=ALEATORIO.ENTRE(1;6)*	*=ALEATORIO.ENTRE(1;6)*	*=SI(A2+B2<=6;"SI";"NO")*

Donde la función ***SI(cond;res1;res2)*** *devuelve el* ***res1*** *si se cumple la condición* ***cond****, de lo contrario devuelve el resultado* ***res2****. Note que si la de los resultados de los dados es menor a 6 (****A2+B2<=6****) entonces se da con respuesta* ***SI*** *pues si se ganó el juego. Hasta el momento se ha simulado solo un juego, donde un posible resultado de este juego es:*

	A	B	C
1	Dado 1	Dado2	¿Ganó?
2	4	1	SI
3			

Para simular 100 juegos basta seleccionar las celdas escritas de la fila 2 y con el mouse arrastrar estas fórmulas hasta la fila 101, obteniendo

	A	B	C
1	Dado 1	Dado2	¿Ganó?
2	3	4	NO
3	6	6	NO
4	⋮	⋮	⋮
99	5	6	NO
100	1	1	SI
101	2	1	SI
102			

Para determinar cuántas veces se ganó el juego de las 100 partidas se puede escribir en un celda vacía

=CONTAR.SI(C2:C101;"=SI")

La función CONTAR.SI calcula las veces que aparece SI en las celdas respectivas de la columna C. En nuestro caso, el valor que da esta calda es 44. *Por lo tanto, la probabilidad frecuencial de ganar el juego es de* 44%. *Más adelante se verá que la probabilidad teórica de ganar el juego es de* $\frac{5}{12} \approx 41.67\%$. *Así no vale la pena jugar DADOS A SEIS.*

En este ejemplo, la probabilidad frecuencial no está lo suficientemente cerca de la probabilidad teórica. Esto se debe a que, a diferencia del ejemplo tras anterior, hay mayor variabilidad en los resultados del experimento. Es decir, lanzar un dado tiene más resultados que lanzar una moneda, por lo que se requiere un número mayor de repeticiones del experimento para que la probabilidad frecuencial este suficientemente cercana a la probabilidad real.

Ejemplo 62 *(**¡El falso determinismo!**) La Ley de los Grandes nos ayuda a justificar el falso determinismo indicado en el ejemplo* (59) *. El hecho de que exista una probabilidad alta (90%) de que el software detecte fraudes no significa que se puede asegurar que va a detectar el primer fraude o los primeros fraudes, sino que en un número suficientemente grande de fraudes, detectará alrededor del 90%. Simulemos, en Excel, ésto en un número pequeño de fraudes (diez). Para ello escriba en las respectivas celdas:*

Celda:	*A1*	*B1*
Escribir:	*=ALEATORIO()*	*=SI(A1<=0.9;"Se detectó";"No se detectó")*

*La Función **ALEATORIO()** indica un número real aleatorio entre 0 y 1. Esto nos permite simular los resultados del software, si el valor dado por **ALEATORIO()** es menor igual a*

0.9 el software detectó el fraude, de lo contrario no lo detecta. Luego, como hemos visto, con el mouse se arrastran estas fórmulas hasta la fila 10. Si bien se puede obtener una simulación donde prácticamente los diez fraudes fueron detectados, fácilmente (actualizando las celdas) se obtienen casos como este:

1	0,68750046	Se detectó
2	0,97619271	No se detectó
3	0,26931474	Se detectó
4	0,16517495	Se detectó
5	0,73325355	Se detectó
6	0,94599857	No se detectó
7	0,20288272	Se detectó
8	0,66723848	Se detectó
9	0,98883887	No se detectó
10	0,99951653	No se detectó

Aquí la probabilidad frecuencial de detectar fraudes es de 60% *muy alejada del* 90%, *pero el software, bajo nuestra simulación está trabajando bien.*

Ejemplo 63 *El falso determinismo se puede presentar en los juegos de apuesta con una alta probabilidad de ganar. Si hay una alta probabilidad de ganar un juego, esto no significa que en las primeras partidas va a ganar, muchos ante una o algunas derrotas iniciales se suele retirar. Sin embargo si se juega un número suficiente de veces entonces se ganará un buen porcentaje de partidas. Puede darse el caso contrario, una persona juega por primera vez lotería y pese a que la probabilidad de ganarse el premio mayor es muy baja, se gana este premio. Pero, ¿qué sucede si sigue jugando un número suficiente de veces?*

Ejercicio 1 *(**La ley de los grandes números: valores absolutos o relativos**). Explore con Excel la siguiente afirmación: De acuerdo a la Ley de los grandes números, entre más veces se tira una moneda, más cerca estará el número obtenido de escudos de la mitad del total los lanzamientos.*

La afirmación del ejercicio anterior es falsa, la Ley de los Grandes Números se refiere a valores relativos no absolutos. Dicha afirmación es una malinterpretación frecuente de la Ley de los grandes números y se desmiente en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 64 *En la siguiente tabla se describir los resultados en dos secuencias de lanza-*

mientos de una moneda legal:

# de lanzammientos	*# de escudos*	*Diferencia entre el # de escudos y la mitad de los lanzamientos*	*Probabilidad frecuencial de obtener un escudo*
20	*8*	*2*	$\frac{8}{20} = 40\%$
200	*95*	*5*	$\frac{95}{200} = 47.5\%$

Como se aprecia en este caso, al aumentar el número de lanzamiento, pese a que en términos absolutos el número de escudos se aleja de la mitad de lanzamientos, en términos relativos se acerca al 50% de los lanzamientos. Esto se debe a que una diferencia de una unidad entre el número de escudos y la mitad de lanzamientos no pesa igual en 20 lanzamientos que en 200 lanzamientos.

Ejemplo 65 ***(La bola de fútbol)*** *En un refresco que compró Juan en la pulpería la MINITA, cercana a su colegio, se ganó una bola de fútbol. Sin embargo, al reclamar su premio en la MINITA, la encargada le indicó que el premio solamente se lo puede dar el camión repartidor y únicamente pasa el Martes entre 10am y 11am aleatoriamente, y en la pulpería se queda exactamente 10 minutos. Dado que Juan está en clases ese día, decide elegir al azar un tiempo entre 10am y 11pm para fugarse de clases y esperar en la pulpería exactamente diez minutos para ver si logra encontrarse con el camión repartidor. ¿Cuál es la probabilidad de que el martes obtenga su premio?*

Utilizamos Excel para modelar el problema. Para ello escriba en las respectivas celdas:

Celda:	*A1*	*B1*	*C1*
Escribir:	*Hora de llegada del camión*	*Hora de llegada de Juan*	*¿Obtiene el premio?*
Celda:	*A2*	*B2*	*C2*
Escribir:	*=ALEATORIO()*	*=ALEATORIO()*	*=SI(ABS(A2-B2)<=1/6;"SI";"NO")*

Se interpretará el valor de ALEATORIO() como los minutos en horas después de las 10am. Así., si en la celda A2 el valor de ALEATORIO() es 0,15 se tiene que $0,15h = 9$ min, *por lo tanto la hora de llegada del camión sería a las 10:09 am. Por otro lado, la función ABS(num) devuelve el valor absoluto de num. Asi, dado que ambos (Juan y el camión) esperan 10 minutos que equivale a* $\frac{1}{6}$ *de hora, si la diferencia entre las horas de llegada es menor a* $\frac{1}{6}$ *, entonces Juan obtiene el premio ese martes, de lo contrario debe esperar al siguiente. Para simular esta situación 500 veces, como se ha visto, se seleccionan las celdas* *escritas de la fila 2 y con el mouse se arrastran estas fórmulas hasta la fila 501, obteniendo:*

	A	B	C
1	Hora de llegada del camión	Hora de llegada de Juan	¿Obtiene el premio?
2	0,696406965	0,872092338	NO
3	0,598863964	0,667165174	SI
4	0,044151278	0,270634535	NO
5	⋮	⋮	⋮
499	0,885655151	0,836425422	SI
500	0,919716788	0,835197463	SI
501	0,205350839	0,578373853	NO

Por ejemplo, en la tercer simulación se tiene que

$$0.598863964h \approx 35.93\,\text{min} \quad y \quad 0.667164174h \approx 40.03\,\text{min}$$

Por lo tanto el camión llega aproximadamente a las 10:36 am y Juan a las 10:40 am, por lo tanto Juan obtiene su premio. De las 500 simulaciones, el número de veces que Juan logra obtener su premio se obtiene escribiendo en una celda vacía:

=CONTAR.SI(C2:C501;"=SI")

En nuestro caso, este valor es de 157. Por lo tanto, la probabilidad frecuencial de que Juan obtenga el próximo martes la bola es de $\dfrac{157}{500} = 31.4\%$. *La probabilidad real es de* $\dfrac{11}{36} \approx 30.56\%$.

Ejemplo 66 ***(El Problema de Monty Hall***[3]***)*** *En un concurso se tiene tres puertas, detrás de una de ellas hay un auto y detrás de las otras hay una cabra. El participante debe elegir una de las tres puertas, sin abrirla. Después Monty, el presentador, abre una de las dos puertas restantes en la que hay una cabra. Así quedan dos puertas sin abrir una con auto y otra con cabra. Monty ofrece la posibilidad al presentador de cambiar su puerta o permanecer con su elección. ¿Qué es mejor, cambiar de puerta o no?*

A primera instancia se puede creer, como muchos Matemáticos en el pasado, que pasarse de puerta no influye en la probabilidad de ganar el auto. Sin embargo, al simular el problema podemos obtener sorpresas. Primero, la pregunta a responder es equivalente a la siguiente: Si el participante decide cambiarse de puerta, ¿cuál es la probabilidad de ganar el auto?. Utilizando Excel para modelar el problema, suponga que las puertas están numeradas del 1

[3]Este problema es uno de los más controversiales en probabilidad y se basa en un programa de televisión de los 70's.

al 3. Primero debemos elegir la puerta donde está el premio y la puerta elegida inicialmente por el participante, para ello escriba en las respectivas celdas:

Celda:	*A1*	*B1*
Escribir:	*Puerta donde está el auto*	*Puerta elegida inicialmente*
Celda:	*A2*	*B2*
Escribir:	*=ALEATORIO.ENTRE(1;3)*	*=ALEATORIO.ENTRE(1;3)*

Luego en la celda ***C1*** *se escribe: Puerta abierta por el presentador. ¿Qué puerta abre Monty? Si la puerta donde se encuentra el auto y la elegida inicialmente son distintas, entonces Monty abre la única distinta a éstas: tal puerta es la número* ***6-A2-B2****, esto por cuanto las puertas están enumeradas con* 1,2 *y* 3. *Al sumar dichas numeraciones, obtenemos* 6. *Así que si el concursante eligió la puerta 2 y el auto se encuentra en la puerta 3, Monty abrirá la número* $6-2-3=1$*, Pero, si las puerta* ***A2*** *y* ***B2*** *son la misma, entonces Monty elige la puerta que va a abrir al azar. Así se escribe en la celda C2:*

= *SI(NO(B2=A2);6-A2-B2;SI(NO(B2=1);*
SI(ALEATORIO()<0,5;1;6-A2-1);SI(ALEATORIO()<0,5;2;3)))

Posteriormente se escribe las celdas respectivas:

Celda:	*D1*	*E1*	*F1*
Escribir:	*¿Se pasa de puerta?*	*Puerta elegida al final*	*¿Ganó el auto?*
Celda:	*D2*	*E2*	*F2*
Escribir:	*=SI(ALEATORIO()<0,5 ;"SI";"NO")*	*=SI(D2="SI";6-C2-B2;B2)*	*= SI(Y(D2="SI";E2=A2); "pasó y ganó"; SI(Y(D2="NO";E2=A2); "no pasó y ganó";"perdió"))*

¿Se pasa de puerta? Dado que Monty abrió una puerta, entonces dado que las 2 puertas tienen la misma probabilidad de ser escogida, hay un 50% de probabilidad de pasarse de puerta. La puerta elegida al final depende de la decisión tomada en ***D2****. Luego, se enuncian los diferentes resultados en* ***F2****, se diferencia si se ganó el auto por cambiarse o no de puerta. Para simular esta concurso 2000 veces, como se ha visto, se seleccionan las celdas escritas de*

la fila 2 y con el mouse se arrastran estas fórmulas hasta la fila 2001, obteniendo por ejemplo:

	A	B	C	D	E	F
1	Puerta donde está el auto	Puerta elegida inicialmente	Puerta abierta por el presentador	¿Se pasa de puerta?	Puerta elegida al final	¿Ganó el auto?
2	1	1	2	NO	1	no pasó y ganó
3	2	1	3	SI	2	pasó y ganó
4	1	2	3	SI	1	pasó y ganó
5	1	2	3	NO	2	perdió
6	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1999	1	3	2	NO	3	perdió
2000	1	1	2	NO	1	no pasó y ganó
2001	1	1	2	SI	3	perdió

Si el participante decide cambiarse de puerta, la probabilidad frecuencial de ganar el auto está dado por

$$\frac{\#\ \textit{de veces que se paso y ganó}}{\#\ \textit{de veces que se pasa de puerta}}$$

Para obtener este valor, se escribe en una celda vacía

=CONTAR.SI(F2:F2001;"paso y ganó")/CONTAR.SI(D2:D2001;"SI")

En nuestro la probabilidad frecuencial es aproximadamente de $67,92\%$ *que es cercana a la probabilidad real de cambiarse de puerta, la cual es de* $\frac{2}{3}$.

El estudio anterior permitió establecer un concepto intuitivo de probabilidad y debe verse como una etapa previa para un abordaje más formal en busca de la probabilidad teórica. A través de las simulaciones hechas en Excel, se logran realizar una cantidad considerable de repeticiones de un experimento con muestras cada vez más grandes, logrando con ello, acercarse a la probabilidad teórica del evento en cuestión, ahorrando tiempo.

Seguidamente se establece todo la teoría necesaria para un abordaje más formal de la probabilidad.

4 Función de probabilidad

Para definir la función de probabilidad, que toma un evento y le asigna un valor que indique la posibilidad de ocurrencia, es necesario poner condiciones sobre su dominio, el cual es un conjunto de eventos o sea un subconjunto de $P(\Omega)$.

4.1 Espacio probabilizable o $\sigma-$algebra

Definición 14 *Sea $\mathbb{A}$ un conjunto de eventos, es decir $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$*[4]*. Se dice que $\mathbb{A}$ es un espacio probabilizable o una $\sigma-$algebra sobre Ω si y solo si cumple los siguientes axiomas:*

Axioma 1 $\Omega \in \mathbb{A}$

Axioma 2 $X \in \mathbb{A} \Longrightarrow \overline{X} \in \mathbb{A}$

Axioma 3 $X, Y \in \mathbb{A} \Longrightarrow X \cup Y \in \mathbb{A}$

Ejemplo 67 *Los conjuntos*

$$\{\phi, \Omega\} \quad y \quad P(\Omega)$$

son $\sigma-$algebra sobre Ω.

Teorema 21 *Sea $\mathbb{A}$ un espacio probabilizable sobre Ω, se cumple que*

1. $\phi \in \mathbb{A}$
2. $X, Y \in \mathbb{A} \Longrightarrow X \cap Y \in \mathbb{A}$

Prueba. *Note que*

$$\begin{array}{lll} 1) & \Omega \in \mathbb{A} & \textit{(axioma 1)} \\ \Longrightarrow & \overline{\Omega} \in \mathbb{A} & \textit{(axioma 2)} \\ \Longrightarrow & \phi \in \mathbb{A} & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 2) & X, Y \in \mathbb{A} & \\ \Longrightarrow & \overline{X}, \overline{Y} \in \mathbb{A} & \textit{(axioma 2)} \\ \Longrightarrow & \overline{X} \cup \overline{Y} \in \mathbb{A} & \textit{(axioma 3)} \\ \Longrightarrow & \overline{X \cap Y} \in \mathbb{A} & \textit{(De Morgan)} \\ \Longrightarrow & X \cap Y \in \mathbb{A} & \textit{(axioma 2)} \end{array} \quad \blacksquare$$

[4] Se denota con $\mathbb{P}(X)$ el conjunto de subconjuntos de Ω, para diferenciarlo de $P(X)$, la probabilidad de X.

4.2 Función de probabilidad

Definición 15 *Sea $\mathbb{A}$ un espacio probabilizable sobre Ω, una función de probabilidad o una probabilidad es un función*

$$P : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumple los siguientes axiomas:

Axioma 4 $(\forall X \in \mathbb{A})\, P(X) \geq 0$

Axioma 5 $P(\Omega) = 1$

Axioma 6 *Si se tiene una secuencia contable de eventos de $\mathbb{A}$ mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de la unión de los eventos es la suma de las probabilidades de cada evento. Así si la secuencia de eventos es finita $E_1, E_2, ..., E_n$ entonces*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

y si la secuencia es infinta $E_1, E_2, ...$ entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

En particular si $X, Y \in \mathbb{A}$ y $X \cap Y = \phi$, entonces $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$.

Teorema 22 *(**Propiedades de la función de probabilidad**) Sea $\mathbb{A}$ un espacio probabilizable sobre Ω, y $P : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de probabilidad, se cumple que si $X, Y \in \mathbb{A}$:*

1. $P\left(\overline{X}\right) = 1 - P(X)$.
2. $P(\phi) = 0$.
3. $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$.
4. $X \subseteq Y \Longrightarrow P(X) \leq P(Y)$

Prueba. *Se probarán la 1 y 2, las demás quedan de ejercicio.*

$$\begin{array}{lcl} 1) & \overline{X} \cup X = \Omega & \\ \Longrightarrow & P(\Omega) = P(X) + P\left(\overline{X}\right) & \textit{(axioma 6)} \\ \Longrightarrow & 1 = P(X) + P\left(\overline{X}\right) & \textit{(axioma 5)} \\ \Longrightarrow & P\left(\overline{X}\right) = 1 - P(X) & \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} 2) & P(\phi) = P\left(\overline{\Omega}\right) & \\ \Longrightarrow & P(\phi) = 1 - P(\Omega) & \textit{(por 1)} \\ \Longrightarrow & P(\phi) = 1 - 1 = 0 & \textit{(axioma 5)} \end{array}$$

■

Ejercicio 2 *Sea* $\Omega \neq \phi$ *un conjunto finito y sea* $\mathbb{A}$ *un espacio probabilizable sobre* Ω*. Se define la función* $P : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$P(X) = \frac{|X|}{|\Omega|}$$

Pruebe que P *es una función de probabilidad.*

Definición 16 *Una secuencia numerable de eventos* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es creciente si y solo si*

$$E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_n \subset ...$$

y es decreciente si

$$E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n \supset ...$$

Teorema 23 *Dada una secuencia numerable de eventos* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *creciente o decreciente, se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right)$$

Prueba (♣) *Ejercicio. Sugerencia: Siga el siguiente esquema de prueba:*

CASO I. $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es creciente*

1. *Pruebe que* $\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i = E_{n-1}$
2. *Considere la sucesión de eventos* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $F_1 = E_1$ *y* $F_n = E_n \cap \overline{E_{n-1}}$ *para* $n > 1$*. Pruebe que*
   (a) $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una secuencia numerable de eventos mutuamente excluyentes.*
   (b) $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$
   (c) $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$
3. *Utilice lo anterior para demostrar el resultado.*

CASO II. $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es decreciente. Ejercicio: Utilice el caso I y complementos para demostrar el resultado.* ■

4.3 Ejercicios

1. (♣) Sea $\mathbb{A}$ un espacio probabilizable sobre Ω, pruebe que

   (a) La unión infinita numerable de elementos de $\mathbb{A}$ es un elemento de $\mathbb{A}$.

   (b) La intersección infinita numerable de elementos de $\mathbb{A}$ es un elemento de $\mathbb{A}$.

2. (♣) Sean $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$ un espacios probabilizables sobre Ω, para los conjuntos siguientes determine si son o no espacios probabilizables sobre Ω. Si lo es demuéstrelo y sino justifique esta posición.

   (a) $\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2$

   (b) $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2$

   (c) $\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2$

3. (♣) Sea Ω un conjunto infinito . Un conjunto X es contable si es finito o si existe una función $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ biyectiva. Sea

$$\mathbb{A} = \left\{ X \subseteq \Omega \mid X \text{ o } \overline{X} \text{ es contable} \right\}$$

   Si Ω es contable, pruebe que $\mathbb{A}$ un espacio probabilizable sobre Ω.

4. Pruebe que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. (♣) Pruebe que $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$ es igual a

$$(-1)^2 \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + (-1)^3 \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + ... + (-1)^{i+1} \sum_{k_1<k_2<...<k_i} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap ... \cap A_{k_i})$$
$$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

6. Pruebe que $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) - P\left(A \cap \overline{B} \cap C\right) - P\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) - 2P(A \cap B \cap C)$

7. Pruebe la desigualdad de Boole

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

8. Pruebe la desigualdad de Bonferroni:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

9. Pruebe la generalización de la desigualdad de Bonferroni:
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - (n-1)$$

10. Dados dos eventos A y B se define su distancia por $d(A,B) = P(A \Delta B)$
    (a) Pruebe que $d(A,\Omega) = 1 - P(A)$.
    (b) Sean A, B y C eventos. Pruebe que
    $$d(A,B) + d(B,C) - d(A,C) = 2\left(P\left(A \cap \overline{B} \cap C\right) + P\left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right)\right)$$
    (c) Pruebe que d cumple la Desigualdad Triangular:
    $$d(A,B) + d(B,C) \leq d(A,C)$$
    (d) Determine condiciones sobre los eventos A y B para que $d(A,B) = 0$
    (e) (♣) Dada una secuencia numerable de eventos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente, demuestre que si $i \leq j \leq k$ entonces
    $$d(A_i, A_k) = d(A_i, A_j) + d(A_j, A_k)$$

5 Ley de Laplace y las eventualidades equiprobables

5.1 Definición y propiedades

Definición 17 *Sea Ω un conjunto no vacío y finito. La función de probabilidad $P : P(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*
$$P(X) = \frac{|X|}{|\Omega|}$$
*es llamada **la ley de Laplace**. Una forma de interpretarla es:*
$$P(X) = \frac{\#\text{ de casos favorables a } X}{\#\text{ de casos totales}}$$

La Ley de Laplace es la función de probabilidad que más se utilizará para realizar cálculos.

Ejemplo 68 *Se lanza un dado, considere los eventos son:*
$$\begin{array}{rc} A: & \text{el resultado del dado es impar} \\ B: & \text{el resultado del dado es mayor a 4} \end{array}$$
Entonces $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{2}{6}$.

Definición 18 *(**Eventualidades Equiprobables**) Sea $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y sea P una función de probabilidad. Se dice que los elementos de Ω son equiprobables si:*

$$P(\{x_i\}) = p, \text{ para todo } i = 1, 2, ..., n$$

Teorema 24 *Sea $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Si las eventualidades son equiprobables entonces $P(\{x_i\}) = \frac{1}{n}$ para todo $i = 1, 2, ..., n$.*

Prueba. *Hipótesis: $P(\{x_i\}) = p$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Se de probar que $p = \frac{1}{n}$. Note que*

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Así, $1 = np$ y por lo tanto $p = \frac{1}{n}$. ■

Teorema 25 *La Ley de Laplace asume que todas las eventualidades son equiprobables.*

Prueba. *Ejercicio.* ■

OBSERVACIÓN La ley de Laplace se aplica bajo las siguientes condiciones:

a) Ω es no vacío y finito
b) Las eventualidades son equiprobables

Ejemplo 69 *Considere la palabra "CORRUPCION". Un anagrama de esta palabra es coherente si tiene las dos R juntas y las vocales U, I separadas. Si se eligen una anagrama de CORRUPCION al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea coherente?*

Considere el evento

$$A: \text{ el anagrama elegido es coherente.}$$

Note que el total de anagramas de esta palabra es $|\Omega| = \frac{10!}{2!2!2!} = 453600$ y además $|A| = \frac{9!}{2!2!} - \frac{8!}{2!} = 70\,560$, por lo tanto

$$P(A) = \frac{70\,560}{453600} = \frac{7}{45}.$$

Ejemplo 70 *(**¿Juegas o no?**) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde.*

¿Vale la pena jugar el juego?

Considere las posibles sumas de los puntos al lanzar los dados:

					Dado 1		
	+	1	2	3	4	5	6
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	7
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	7	8
Dado 2	3	**4**	**5**	**6**	7	8	9
	4	**5**	**6**	7	8	9	10
	5	**6**	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

De estos 36 resultados hay 15 que son menores iguales a 6, *por lo tanto la probabilidad de ganar el juego es*

$$\frac{15}{36} \approx 41.67\%$$

Dado que es menor al 50% no vale la pena jugar el juego.

Ejercicio 3 *(Un camino incorrecto). En el ejemplo anterior, suponga que se considera* Ω *como todos las posibles sumas de los resultados de los dados:*

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

De estos hay 5 que son menores iguales a 6, entonces la probabilidad de ganar el juego es

$$\frac{5}{11} \approx 45.45\%$$

Lo cual es incorrecto. ¿A qué se debe el error? El error se debe a utilizar la Regla de Laplace cuando las eventualidades no son equiprobables. Como se observa, en la tabla del ejemplo anterior, por ejemplo la eventualidad 5 tiene más probabilidad de ocurrir que la eventualidad 11. Además, en el ejemplo (58) *se observó que la probabilidad frecuencial se acerca a* $\dfrac{15}{36}$ *cuando el número de jugadas es suficientemente grande.*

Ejercicio 4 *Se reparten 10 confites idénticos al azar entre Juan, Ana y Pablo. Determine la probabilidad de que*

1. *a Juan le toque* 6 *confites* *R/* $\dfrac{5}{66}$

2. *a Ana le toque al menos* 4 *confites* *R/* $\dfrac{14}{33}$

Ejercicio 5 *Si se sientan 7 personas de manera aleatoria en una banca con asientos numerados del 1 al 7, ¿Cuál es la probabilidad de que Anthony y Karla (2 de las 7 personas) queden en los primeros 4 lugares?* *R/* $\dfrac{2}{7}$

Ejercicio 6 *Juan va a la pulpería La Minita a comprar* 12 *bombillos para iluminar un salón. En esta pulpería solo tienen bombillos ILUMINA de* $25v, 50v$ *y* $75v$*, y de cada uno de estos tipos hay en suficiente cantidad, excepto de* $75v$*, pues solo quedan* 5*. Se asume que el salón queda bien iluminado si se utilizan a lo sumo* 4 *bombillos de* $25v$ *y más de* 3 *de* $75v$*. Si Juan compra los bombillos al azar, determine la probabilidad de que los compre de manera que el salón quede bien iluminado.* *R/* $\dfrac{10}{63}$

5.2 Generalización de la Ley de Laplace

Teorema 26 *(**Generalización de la Ley de Laplace**) Sea u una medida asociada a* Ω *(* $u(X)$ *: medida de* $X \subseteq \Omega$*) entonces una función de probabilidad está dada por:*

$$P(X) = \frac{u(X)}{u(\Omega)}.$$

Prueba. *Asumimos que una medida u es no negativa y que la medida de conjuntos mutuamente excluyentes es la suma de las medidas de cada conjunto. Note que*

1. $P(X) \geq 0$ *para todo* $X \subseteq \Omega$*, pues u es una función no negativa.*

2. $P(\Omega) = \dfrac{u(\Omega)}{u(\Omega)} = 1$

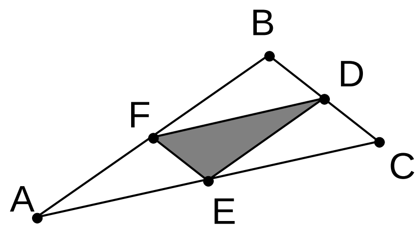
3. *Sea* $E_1, E_2, ...$ *una secuencia numerable de eventos mutuamente excluyentes, entonces*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \frac{u\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)}{u(\Omega)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} u(E_i)}{u(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u(E_i)}{u(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \quad \blacksquare$$

Así se tiene que

1. Si Ω es finito, la medida es la cardinalidad: $u(x) = |x|$.
2. Si Ω es un intervalo, la medida es la longitud.
3. Si Ω es una región cerrada en un plano, la medida es el área.
4. Si Ω es una región cerrada en el espacio, la medida es el volumen.

Ejemplo 71 *Considere el ΔABC cuyas lados miden a, b y c. Sean D, E y F los puntos medios de los lados del ΔABC. Se elige un punto al azar en el interior de este triángulo, determine la probabilidad de que este punto este en el interior del ΔDEF.*



Note que $\Omega = \{X | X$ *es un punto en el interior del* $\Delta ABC\}$, *utilizando la Fórmula de Herón se tiene que*

$$u(\Omega) = \acute{a}rea\,(\Delta ABC) = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\frac{b+c-a}{2}\frac{a+c-b}{2}\frac{a+b-c}{2}}$$

Sea A : *el punto escogido está en el interior del* ΔDEF. *Dado que las medidas de los lados del* ΔDEF *son* $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ *entonces*

$$\begin{aligned} u(A) &= \acute{a}rea\,(\Delta DEF) = \sqrt{\frac{a/2+b/2+c/2}{2}\frac{b/2+c/2-a/2}{2}\frac{a/2+c/2-b/2}{2}\frac{a/2+b/2-c/2}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\frac{b+c-a}{2}\frac{a+c-b}{2}\frac{a+b-c}{2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

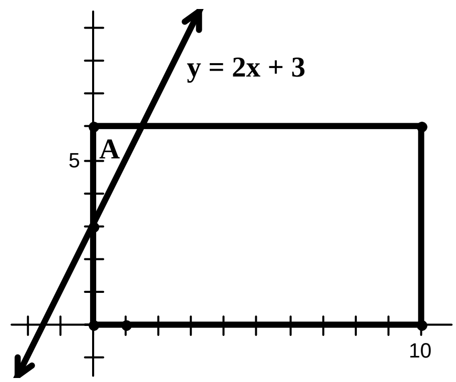
$$P(A) = \frac{u(A)}{u(\Omega)} = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 72 *Considere el rectángulo formado por los puntos $A(0,0), B(10,0), C(0,6), D(10,6)$. Se elige un punto $P(x,y)$ al azar en el interior del rectángulo, cuál es la probabilidad de que $y - 2x > 3$.*

Sean

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x,y) \,|\, (x,y) \text{ es un punto en el interior del rectángulo } ABC\} \\ A &= \{(x,y) \in \Omega | y > 2x + 3\} \end{aligned}$$

Note que $y > 2x + 3$ es el semiplano que está por encima de la recta $y = 2x + 3$. Para dibujo está recta solo se requieren 2 puntos, por ejemplo $(0, 3)$ y $(3, 9)$:



Note que la recta interseca al rectángulo en $(0, 3)$ y $\left(\frac{3}{2}, 6\right)$. Por lo tanto, A es el interior de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 y $\frac{3}{2}$. Así, utilizando como medida el área se tiene que

$$P(A) = \frac{u(A)}{u(\Omega)} = \frac{\frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{2}}{10 \cdot 6} = \frac{1}{40}.$$

Ejemplo 73 ***(La bola de fútbol)*** *En un refresco que compró Juan en la pulpería la MINITA, cercana a su colegio, se ganó una bola de fútbol. Sin embargó, al reclamar su premio en la MINITA, la encargada le indicó que el premio solo se lo puede dar el camión repartidor y este pasa el Martes entre 10am y 11am aleatoriamente, y solo está en la pulpería aproximadamente 10 minutos. Dado que Juan está en clases ese día, decide elegir al azar un tiempo entre 10am y 11pm para fugarse de clases y esperar en la pulpería exactamente diez minutos para ver si logra encontrarse con el camión repartidor. ¿Cuál es la probabilidad de que el martes obtenga su premio?*

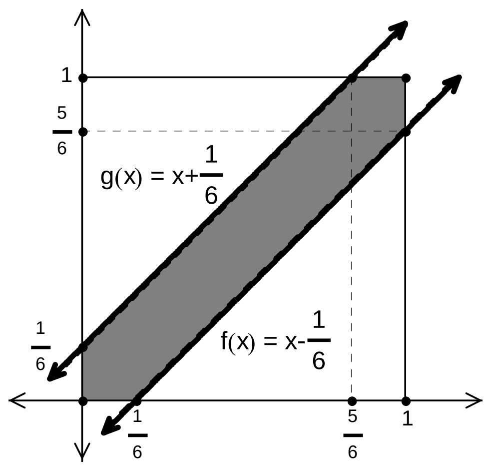
Dado que ambos, Juan y el camión, llegan entre 10am y 11am se puede considerar los minutos en horas después de las 10am en que llegan. Así, Juan llega X horas después de las 10am y el camión llega Y horas después de las 10am, donde $0 \leq X, Y \leq 1$. Así las posibles llegadas a la MINITA de Juan y el camión están dadas por

$$\Omega = \{(X, Y) | 0 \leq X, Y \leq 1\} = [0, 1] \times [0, 1]$$

Note que Ω es la región de un cuadrado de lado 1, por lo tanto el área de Ω es 1 h^2, así el área favorable es 1 h^2. Para determinar el área favorable, para que ambos se encuentre la *diferencia en las horas de llegadas debe ser menor igual a* $10\,\text{min} = \frac{1}{6}h$*, es decir*

$$|Y - X| \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq Y - X \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow X - \frac{1}{6} \leq Y \leq X + \frac{1}{6}$$

Por lo tanto, la región favorable es la región del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ *que se encuentra sobre la recta* $Y = X - \frac{1}{6}$ *y por debajo de la recta* $Y = X + \frac{1}{6}$:



Para determinar el área favorable, note que el área no favorable está formada por dos triángulos congruentes de base $\frac{5}{6}$ *y altura* $\frac{5}{6}$*. Así el área favorable es*

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}h^2$$

y la probabilidad de que Juan obtenga su premio el martes es

$$\frac{\frac{11}{36}h^2}{1h^2} = \frac{11}{36} \approx 30.56\%\,.$$

Ejercicio 7 *Un automóvil parte de un punto* A *a un* B *por una carretera cuya longitud es de* 20 *km. En el camino el auto se descompone y no puede proseguir. Si la falla pudo ocurrir en cualquier punto del camino con la misma probabilidad, entonces ¿cuál es la probabilidad de que el auto esté más cerca de* A *que de* B*?* *R/* $\frac{1}{2}$

Ejercicio 8 *Un segmento de un metro es cortado en dos puntos al azar formando 3 segmentos ¿Cuál es la probabilidad de que con los 3 segmentos se pueda formar un triángulo?* *R/* $\frac{1}{4}$

5.3 Ejercicios

1. Sea A un conjunto de n elementos y B un conjunto de $n-1$ elementos. Considere la experiencia de elegir al azar una función de A a B

   (a) Describa el espacio muestral de dicha experiencia

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la función escogida sea sobreyectiva?

2. En un concurso, Mario, Lucia y Sandra han ganado 12 premios: 7 viajes para una persona a Orlando y 5 premios sorpresa distintos. Sin embargo dichos premios van a ser distribuidos aleatoriamente entre los participantes mencionados. ¿Cuál es la probabilidad de que a Mario le toque por lo menos 2 viajes y 2 premios sorpresa? $R/\quad 0.648\,15$

3. Don Juan dejo como herencia a sus tres hijos: Jorge, Karla y Anthony, cinco quintas distintas y seis automóviles idénticos. Don Juan en su testamento, dejo escrito que deseaba que Jorge, su hijo menor, recibirá 2 quinta y por lo menos dos automóviles, sin embargo, dichos bienes debían ser distribuidos al azar, ¿Cuál es la probabilidad, de que se cumpla la voluntad de Don Juan?

4. Se tiene una urna con 12 bolas enumeradas del uno al doce, una persona debe seleccionar 4 bolas y colocar en fila en el orden en que las seleccionó. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona al extraer las cuatro bolas la tercera tenga un número múltiplo de 3? $R/\quad \dfrac{1}{3}$

5. En el concurso RETOS realizado por la Universidad Bienestar Seguro, Rebeca, Fabiola y Victor son los ganadores de este mes. Entre estos ganadores se distribuirán 7 libros (todos distintos) y 10 entradas generales al próximo partido de Saprissa. Suponga que los premios se distribuyen al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que a Rebeca le correspondan al menos 2 libros y a lo sumo 5 entradas? $R/\quad 0.569\,21$

6. El restaurante Mac Burger tiene 8 sucursales en la ciudad C, cada una con 12 empleados. Para motivar a sus empleados a decidido elegir 50 empleados al azar para regalarles una entrada a un concierto. ¿Cuál es la probabilidad de que no se elijan a todos los empleados de una misma sucursal? $R/\quad 0.998\,45$

7. En una determinada ciudad el año pasado hubieron 200 nacimientos. Determine la probabilidad de que al menos 2 de estos nacimientos ocurran en la misma fecha. $R/$ Si el año no es bisiesto: $1-\dfrac{365!}{165!365^{200}}$

8. (♣) En un juego, se realizan lanzamientos consecutivos de longitud k hasta obtener una secuencia de longitud k de escudos. Considere los siguientes eventos:

A_i : el juego finaliza en la $i - \acute{e}sima$ secuencia

B_n : de las m secuencias que cabe en n lanzamientos, ninguna es la ganadora.

C_n : la secuencia ganadora no ocurre en cualquier secuencia que hay en n lanzamientos

(a) Pruebe que $P(A_i) = \dfrac{(2^k - 1)^{i-1}}{2^{ki}}$ y que $P\left(\overline{B_n}\right) = 1 - \left(\dfrac{2^k - 1}{2^k}\right)^m$

(b) Demuestre que $P(C_n) \leq P(B_n)$.

(c) Pruebe, utilizando probabilidad, que si se lanza una moneda indefinidamente, finalmente se obtendrá una secuencia ganadora.

6 Probabilidad Condicional y eventos independientes

6.1 Concepto de independencia

Definición 19 *(**Eventos independientes**) Dos eventos son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad del otro*

Ejemplo 74 *Se tiene una canasta con 10 bolas numeradas del 1 al 10. Las bolas del 1 al 7 son verdes y las demás rojas. De la canasta Juan con los ojos vendados extrae una bola al azar. ¿Qué probabilidad tiene Juan de sacar una bola con número par?*

Considere los eventos

A: la bola extraída tiene un número par

B: la bola extraída es verde

Note que $P(A) = \dfrac{5}{10}$, *así la probabilidad de que la bola extraída tenga un número par es* $\dfrac{1}{2}$. *Suponga que se obtiene información sobre la bola extraída por Juan, resulta que la bola extraída es verde (ocurrió B) entonces, bajo esta condición, se intuye que la probabilidad de que la bola seleccionada tenga un número par es*

$$\frac{\#\ \textit{de casos favorables}}{\#\ \textit{de casos totales}} = \frac{3}{7}$$

Dado que la ocurrencia de B afecta la probabilidad de A, entonces A y B son dependientes.

6.2 Probabilidad condicional

Sean A y B eventos donde $B \neq \phi$. Denotemos con

$$P(A|B) : \text{probabildad de } A \text{ dado que ocurrió } B$$

¿Cómo se puede definir el valor de $P(A|B)$? Suponiendo que las eventualidades son equiprobables y Ω es finito, utilizando la Ley de Laplace, se tiene que

$$P(A|B) = \frac{\#\text{ de casos favorables}}{\#\text{ de casos totales}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esto brinda un manera para definir la probabilidad condicional.

Definición 20 *Sea $\mathbb{A}$ una $\sigma-$álgebra sobre Ω y P una función de probabilidad sobre Ω. Sea B un evento no nulo, se define la probabilidad Condicional sobre B por*

$$P(X|B) = \frac{P(X \cap B)}{P(B)}$$

y se lee "probabilidad de X dado B"

Teorema 27 *La Probabilidad Condicional $P_B(X) = P(X|B)$ sobre un evento no nulo B es una función de probabilidad.*

Prueba. *Ejercicio.* ■

Teorema 28 *Sea C y B eventos no nulos se tiene que*

$$P((A|B)|C) = P(A|(B \cap C))$$

Prueba. *Por el teorema anterior se tiene que $P_C(X) = P(X|C)$ es una función de probabilidad, entonces por la definición anterior se tiene que*

$$P_C(A|B) = \frac{P_C(A \cap B)}{P_C(B)}$$

Note que $P_C(A|B) = P((A|B)|C)$ y entonces

$$\begin{aligned} P((A|B)|C) &= \frac{P_C(A \cap B)}{P_C(B)} = \frac{P(A \cap B|C)}{P(B|C)} = \frac{P(C)P(A \cap B|C)}{P(C)P(B|C)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \\ &= \frac{P(B \cap C)P(A|(B \cap C))}{P(B \cap C)} = P(A|(B \cap C)). \quad ■ \end{aligned}$$

Ejercicio 9 *Se tiene una canasta con 15 bolas enumeradas del uno al 15. Las bolas con número entre 1 y 7 son rojas, y las demás son verdes. Se elige una bola al azar, considere los eventos:*

$$\begin{array}{ll} A: & \textit{la bola extraída es verde} \\ B: & \textit{la bola extraída es roja} \\ C: & \textit{la bola extraída tiene un número par} \end{array}$$

Determine las siguientes probabilidades: $P(A), P(B), P(\overline{C}), P(A|C), P(B \cap C), P(A \cup C)$. *¿Son A y C eventos independientes?*

6.3 Resultados sobre la independencia de eventos

Teorema 29 *A y B son eventos independientes si y solo si*

$$P(A|B) = P(A) \quad \wedge \quad P(B|A) = P(B).$$

Prueba. *Por definición y notación establecida.* ■

Teorema 30 *A y B son eventos independientes si y solo si* $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Prueba. *Primero probemos que si A y B son eventos independientes entonces* $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

$$\begin{array}{rll} & P(A) = P(A|B) & \textit{(hipótesis)} \\ \Longrightarrow & P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} & \textit{(definición)} \\ \Longrightarrow & P(A) P(B) = P(A \cap B) & \end{array}$$

Por otro lado, suponga que $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ *entonces*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P(B)}{P(B)} = P(A)$$

y de manera $P(B|A) = P(B)$. *Así, por el teorema anterior A y B son independientes.* ■

Teorema 31 *A y B son eventos independientes si y solo si* $P(A|B) = P(A)$

Prueba. *Ejercicio.* ■

Ejemplo 75 *Se dice que dos eventos X y Y son probabilísticamente gemelos si para cualquier evento Z se cumple:* $P(X \cap Z) = P(Y \cap Z)$. *Sea A, B, C tres eventos sobre un espacio muestral finito tales que: A y B son probabilísticamente gemelos y disjuntos. Pruebe que*

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) = P\left(\overline{B}\right) - P(A \Delta C).$$

Note que

$$
\begin{array}{rcr}
 & P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right) & \\
= & 1-P\left(A\cup B\cup C\right) & \textit{(De Morgan)}\\
= & 1-\left(P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)-P\left(A\cap C\right)-P\left(B\cap C\right)\right. & \\
 & \left.-P\left(A\cap C\right)-P\left(A\cap B\cap C\right)\right) & \textit{(Inclusión - Exclusión)}\\
= & 1-\left(P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)-P\left(A\cap C\right)-P\left(B\cap C\right)\right) & \textit{(A y B disjuntos)}\\
= & 1-\left(P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)-2P\left(A\cap C\right)\right) & \textit{A y B gemelos}\\
= & 1-\left(P\left(A\cup C\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap C\right)\right) & \\
= & 1-\left(P\left(A\Delta C\right)+P\left(B\right)\right) & \\
= & P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\Delta C\right) &
\end{array}
$$

Ejercicio 10 *Sean A y B dos eventos independientes. Pruebe que*

$$P\left(A\cup B\right)=1-P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)$$

Teorema 32 *Sean A y B eventos independientes entonces*

1. *$\overline{A}$ y B son independientes*
2. *$\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes*

Prueba. *Ejercicio* ■

6.4 Reglas del producto

Anteriormente vimos que los eventos A y B son independientes si y solo si

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)P\left(B\right).$$

Este resultado nos permite generalizar el concepto de independencia por medio de la siguiente definición.

Definición 21 *(**Regla del producto 1**) Se dice que los eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ son mutuamente independientes si y solo si*

$$P\left(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)\cdot ...\cdot P\left(A_n\right)$$

Ejemplo 76 *Se lanzan dos dados distinguibles, ¿cuál es la probabilidad de que se obtenga un resultado total de 4?*

Si bien el ejercicio se puede resolver de forma sencilla por Laplace, la idea es ejemplificar la definición anterior. Se definen los siguientes eventos:

$$
\begin{array}{rl}
A_i: & \textit{el resultado del dado } 1 \textit{ es } i\\
B_i: & \textit{el resultado del dado } 2 \textit{ es } i
\end{array}
$$

para $i = 1, 2, .., 6$. *Así, se debe averiguar*

$$\begin{aligned} & P((A_1 \cap B_3) \cup (A_2 \cap B_2) \cup (A_3 \cap B_1)) \\ = & \quad P(A_1 \cap B_3) + P(A_2 \cap B_2) + P(A_3 \cap B_1) \\ = & \quad P(A_1) P(B_3) + P(A_2) P(B_2) + P(A_3) P(B_1) \quad \textit{(Regla del producto 1)} \\ = & \quad \frac{1}{6}\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{6} \\ = & \quad \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Teorema 33 *Sean* A *y* B *eventos sobre un espacio muestral* Ω, *se tiene que*

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$$

Prueba. *Por definición* ■

Ejercicio 11 *En la Universidad Bienestar Seguro, de los estudiantes de nuevo ingreso en la Carrera de Computación, el* 30% *matriculó Matemática Discreta (MD), el* 40% *programación (P) y el* 70% *una deportiva (D). Además el* 50% *de los que llevan* MD *matricularon* P, *el* 20% *de los que llevan* P *matricularon* D *y el* 60% *de los que llevan* D *matricularon* MD. *Suponiendo que todos los estudiantes se matricularon en al menos un curso, ¿Qué porcentaje de estudiantes matricularon los tres cursos?*

Teorema 34 ***(Regla del producto 2)****En general se cumple que*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) &= P(A_1) P(A_2|A_1) \cdot P(A_2|(A_1 \cap A_2)) \cdot \\ & \quad ... \cdot P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})) \end{aligned}$$

Prueba. *Ejercicio: Inducción, se utiliza el resultado anterior.* ■

Para facilitar la notación, generalmente se omite la intersección. Así, el teorema anterior se escribe:

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) \cdot P(A_2|(A_1 A_2)) \cdot ... \cdot P(A_n|(A_1 A_2 ... A_{n-1}))$$

Ejemplo 77 *Se tiene una urna con 12 bolas enumeradas del 1 al 8. Considere la experiencia aleatoria de extraer bolas de la urna, al azar y de una en una, de acuerdo a la siguiente regla: si la bola extraída tiene un número impar se retorna a la urna antes de la siguiente extracción, en caso contrario no se retorna. Se finaliza cuando se halla extraído, con o sin reposición, dos bolas con números impares. ¿Cuál es la probabilidad de extraer 4 bolas en total?*

Considere los eventos

$$\begin{aligned} I_i &: \textit{la i-ésima bola extraída es impar.} \\ P_i &: \textit{la i-ésima bola extraída es par.} \end{aligned}$$

Se desea la probabilidad

$$\begin{aligned}
& P\left(\left(I_1P_2P_3I_4\right)\cup\left(P_1P_2I_3I_4\right)\cup\left(P_1I_2P_3I_4\right)\right)\\
= & P\left(I_1P_2P_3I_4\right)+P\left(P_1P_2I_3I_4\right)+P\left(P_1I_2P_3I_4\right)\\
= & P\left(I_1\right)P\left(P_2|I_1\right)P\left(P_3|I_1P_2\right)P\left(I_4|I_1P_2P_3\right) \qquad \textit{(Regla del producto 2)}\\
& +P\left(P_1\right)P\left(P_2|P_1\right)P\left(I_3|P_1P_2\right)P\left(I_4|P_1P_2I_3\right)\\
& +P\left(P_1\right)P\left(I_2|P_1\right)P\left(P_3|P_1I_2\right)P\left(I_4|P_1I_2P_3\right)\\
= & \frac{4}{8}\frac{4}{8}\frac{3}{7}\frac{4}{6}+\frac{4}{8}\frac{3}{7}\frac{4}{6}\frac{4}{6}+\frac{4}{8}\frac{4}{7}\frac{3}{7}\frac{4}{6}\\
= & \frac{1}{14}+\frac{2}{21}+\frac{4}{49}=\frac{73}{294}
\end{aligned}$$

Ejercicio 12 *Se tiene una canasta con 15 bolas enumeradas del uno al 15. Las bolas con número entre 1 y 7 son rojas, y las demás son verdes. Se elige tres bolas sucesivamente, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja, la segunda verde y la tercera sea roja?* $R/\ \dfrac{8}{65}$

Ejercicio 13 *En una canasta se tienen* 10 *bolas rojas y* 1 *bola verde. Se comienza a sacar bolas al azar sucesivamente bajo las siguientes reglas:*

Regla 1:	*Si la bola extraída es roja no se devuelve a la canasta y se agrega una bola verde a la canasta*
Regla 2:	*Si la bola es verde no se devuelve a la canasta*

El proceso termina hasta obtener 2 verdes extraídas ¿Cuál es la probabilidad de sacar en total 4 bolas? $R/\ \dfrac{16\,659}{66\,550}\approx 0.250\,323$

Ejercicio 14 *Se tiene una canasta con 10 bolas enumeradas del uno al 10. Las bolas con número entre 1 y 7 son rojas, y las demás son verdes. Se empiezan a extraer bolas de una en una hasta que en dos elecciones consecutivas se obtengan dos bolas rojas.*

1. *Describa el espacio muestral*
2. *Determine la probabilidad de que el número de bolas extraídas es 5.* $R/\ \dfrac{11}{120}$

Ejercicio 15 (♣) *Suponga que se tiene una caja infinitamente grande vacía y una cantidad infinita numerable de bolas etiquetadas: bola 1, bola 2,... Suponga que faltando un minuto para la* 1pm *se meten a la caja las bolas del* 1 *al* 10 *y luego se saca una de las bolas de la urna al azar. Faltando* 1/2 *minuto para la* 1pm*, se meten a la caja las bolas del* 11 *al* 20 *y luego se saca una de las bolas de la urna al azar. Faltando* 1/4 *minuto para la* 1pm*, se meten a la caja las bolas del* 21 *al* 30 *y luego se saca una de las bolas de la urna al azar, el proceso continua de manera similar.*

1. *Considere el evento C_n la bola 1 se encuentra en la caja después de las primeras n extracciones. Determine la probabilidad de C_n.* $R/ \quad P(C_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{9i}{9i+1}$

2. *Describa el evento $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ y simplifíquelo.*

3. *Conjeture sobre el valor de $\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{9i}\right)$ y demuéstrelo (OPCIONAL).*

4. *Determine la probabilidad de que la bola numero 1 este en la caja a la 1pm.*

5. *¿Cuántas bolas hay en la caja a la 1pm?*

6.5 Ejercicios

1. Dada una experiencia aleatoria, considere los eventos A, B y C, tales que A y B son eventos independientes, A y C son disjuntos. Pruebe que $P[(A-B)\cup C] = P(A) + P(C) - P(A\cap B)$.

2. Sean A y B dos eventos no nulos y disjuntos. Pruebe que A y B son dependientes.

3. Dados los eventos A, B y C de un determinado fenómeno aleatorio, suponga que B y C son independiente y además

$$P(A\cup B) = 0.7,\ P\left(\overline{A}\right) = 0.4,\ P(B\cap C) = 0.07,\ P(C) = 0.35.$$

   (a) Determine $P(B\cup C)$ y $P(A \mid B)$ $R/ \quad P(B\cup C) = 0.48, \quad P(A\mid B) = 0.5$

   (b) ¿Son A y B eventos indepedientes? $R/$ no

4. Pruebe que $P\left(\overline{A}|B\right) = 1 - P(A|B)$

5. Se tienen dos urnas con las siguientes bolas:

	Bolas rojas	**Bolas negras**
Urna 1:	10	8
Urna 2:	6	7

Considere el experimento de extraer bolas secuencialmente de las urnas de la siguiente forma: se inicial sacando bolas de la urna 1, en el momento en que salga una bola roja se pasa a sacar bolas de las urna 2, cuando se obtenga una roja se pasa a sacar bolas de la urna 1 y así sucesivamente. El proceso termina cuando se saquen 2 bolas negras. Considere el evento A : el número de cambios de urna es igual a dos. Determine $P(A)$. $R/ \quad 0.175\,97$

6. (♣) Se lanza un par de dados distinguibles indefinidamente. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un resultado de 4 antes que un resultado de 5? $R/\ \frac{3}{7}$

7 Probabilidades totales y Regla de Bayes

7.1 Probabilidad totales

Seguidamente se presentan una serie de problemas con el fin de deducir intutivamente el Teorema de Probabilidades Totales

Ejemplo 78 *(**Valores absolutos numéricos**) En una escuela de música hay 200 alumnos. El 30% recibe clases de piano y el 70% restante va a clases de guitarra. El 15% de los estudiantes que reciben piano les gusta comer ensalada al igual que el 40% de los que reciben guitarra. ¿Qué porcentaje de los estudiantes les gusta comer ensalada?*

Se tiene que

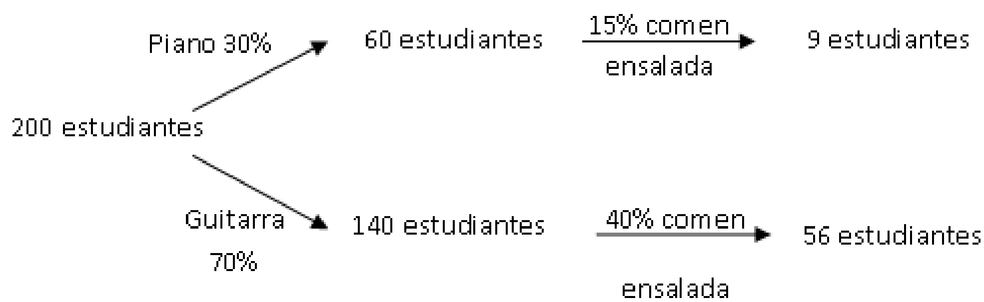


Diagrama de Valores absolutos

Así, en total hay 65 estudiantes de la escuela que comen ensalada, lo cual equivale al $\dfrac{65}{200} \cdot 100 = 32.5\%$

Ejemplo 79 *(**Valores absolutos algebraicos**) En una escuela de música hay M alumnos. El 20% recibe clases de piano y el 80% restante va a clases de guitarra. El 25% de los estudiantes que reciben piano les gusta comer ensalada al igual que el 30% de los que reciben guitarra. ¿Cuántos estudiantes, en términos de M, les gusta comer ensalada? ¿Qué* *porcentaje de los estudiantes les gusta comer ensalada?*

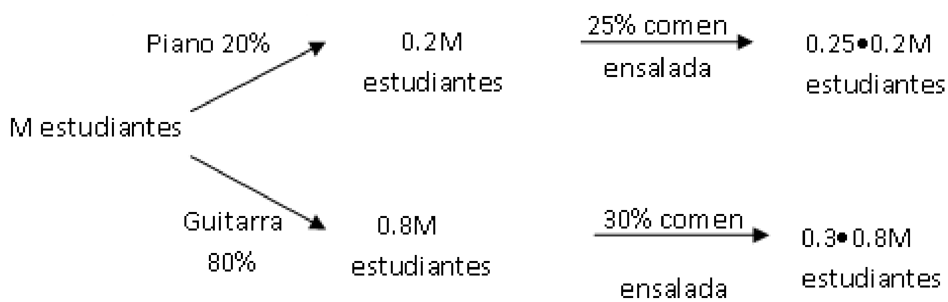


Diagrama de Valores absolutos

En total, el número de estudiantes que les gusta comer ensalada es

$$0.25 \cdot 0.2M + 0.3 \cdot 0.8M = (0.25 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.8)M = 0.29M,$$

Lo cual equivale a un $\dfrac{0.29M}{M} \cdot 100 = 29\%$.

Ejercicio 16 *La siguiente tabla muestra el porcentaje de hombres y mujeres estudiantes de cada unos de los colegios involucrados. Además se indica para cada colegio, el porcentaje de hombres que tienen sobrepeso con respecto al total de hombres, al igual que el porcentaje de mujeres que tienen sobrepeso con respecto al total de mujeres. Determine el porcentaje de estudiantes de cada colegio con sobrepeso.*

Colegio	*% de hombres*	*% de mujeres*	*De los hombres, el % con sobrepeso es*	*De las mujeres, el % con sobrepeso es*	*% de estudiantes con sobrepeso*
A	*20%*	*80%*	*40%*	*55%*	
B	*15%*	*85%*	*70%*	*70%*	
C	*40%*	*60%*	*25%*	*20%*	
D	*65%*	*35%*	*35%*	*10%*	

Obtenga un algoritmo para resolver este tipo de problemas.

Ejemplo 80 *(**Valores relativos: porcentajes**) Las piezas fabricadas por cierta empresa son el elaboradas por las máquinas A,B y C. La máquina fabricó el 50% de las piezas, la máquina B el 30% y el restante 20% es fabricado por la máquina C. El 25% de las piezas fabricadas por la máquina A son defectuosas, al igual que el 15% de las piezas fabricadas por B y el 40% de las fabricadas por C. ¿Qué porcentaje de las piezas fabricadas son defectuosas?*

Representa la resolución del problema por medio de un diagrama.

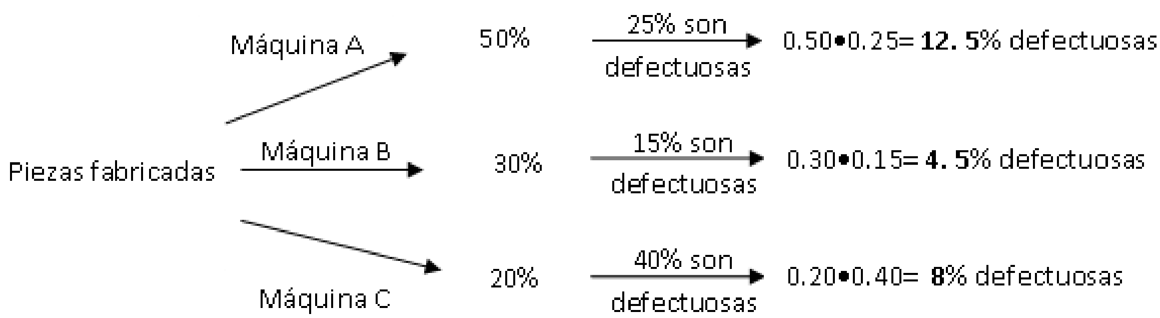


Diagrama de Valores relativos (porcentajes)

El porcentaje de piezas defectuosas es:

$$12.5\% + 4.5\% + 8\% = 25\%$$

es decir, la cuarta parte de las piezas son defectuosas.

Ejercicio 17 *En una encuesta, el 60% de los encuestados indican que el país debe tener relaciones con China, por el contrario, el otro 40% indica que se debe establecer relaciones con Taiwan. El 20% de los encuestados que prefieren relaciones con China practican algún deporte, al igual que el 35% de los encuestados que prefieren relaciones con Taiwan. Para determinar el porcentaje de encuestados que practican algún deporte, ¿es necesario conocer la cantidad total de encuestados? Justifique su respuesta.*

Ejemplo 81 *Un desperfecto en el servicio eléctrico de cierta comunidad puede deberse a: falla en el equipo eléctrico con una probabilidad del 40%, problemas en el equipo electrónico con una probabilidad de 25%, ó por errores humanos con una probabilidad del 35%. Además la probabilidad de que desperfecto pueda solucionarse en menos de una hora es: del 30% si sucedió por errores en el equipo eléctrico, del 60% si el error se presentó en el equipo electrónico y del 20% si fue ocasionado por error humano. Suponga que ocurre un desperfecto al azar.*

1. *Describa el espacio muestral, denote los eventos involucrados y utilice esta notación para simbolizar las probabilidades dadas.*

   Ω es el conjunto de posibles desperfectos. Dada un desperfecto escogido al azar considere los siguientes eventos:

   A_1 : *el desperfecto se debe a un fallo eléctrico.*
   A_2 : *el desperfecto se debe a un fallo electrónico.*
   A_3 : *el desperfecto se debe a un fallo humano.*
   B : *el desperfecto se solucionó en menos de una hora.*

Se tiene que:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.4, \quad P(A_2) = 0.25, \quad P(A_3) = 0.35 \\ P(B|A_1) &= 0.4, \quad P(B|A_2) = 0.6, \quad P(B|A_3) = 0.2 \end{aligned}$$

2. *¿Cuál es la probabilidad de que un desperfecto sea solucionado en menos de una hora? Representa la resolución del problema por medio de un diagrama.*

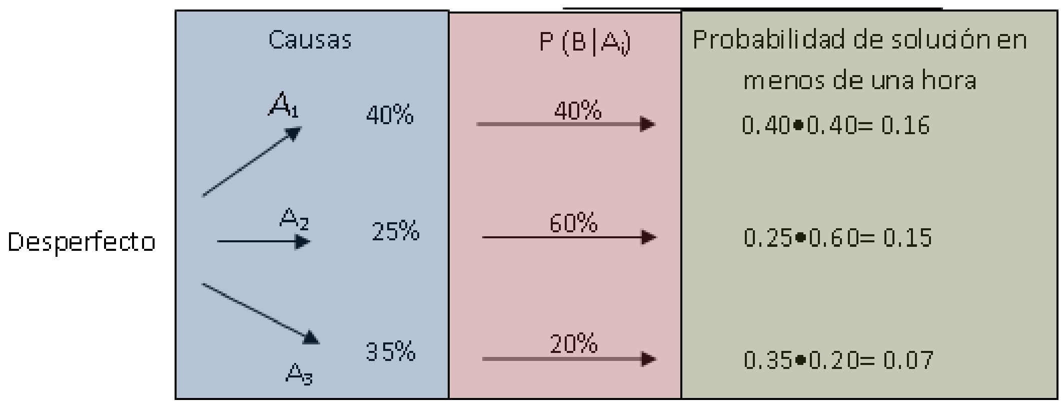


Diagrama de Valores relativos (probabilidades)

La probabilidad solicitada es $0.16 + 0.15 + 0.07 = 38\%$

Ejemplo 82 *Sean* A_1, A_2, A_3 *eventos que forman una partición del espacio muestral* Ω*, y* B *un evento cualquiera. Suponga que las probabilidades*

$$P(A_1), P(A_2), P(A_3), P(B|A_1), P(B|A_2), P(B|A_3)$$

son conocidas. Determine la probabilidad de B*.*

Note que

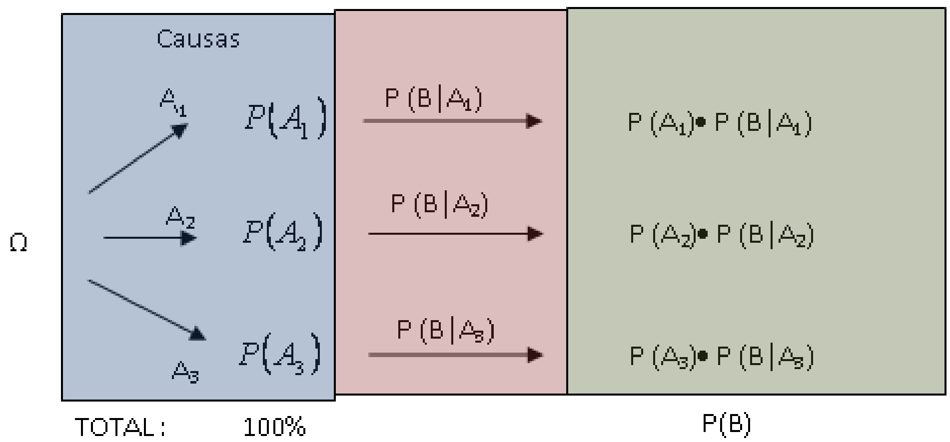


Diagrama de Valores relativos (probabilidades)

Por lo tanto,

$$P(B) = P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + P(A_3)\,P(B|A_3)$$

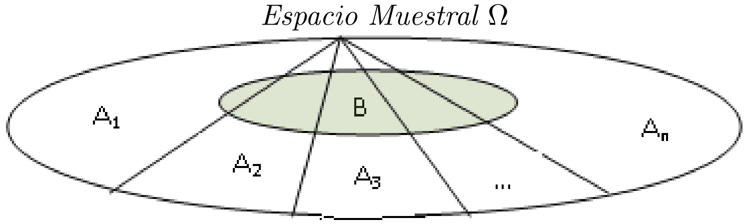
A partir de lo anterior se puede intuir facilmente el teorema siguiente

Teorema 35 *(**Probabilidades totales**) Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos que forman una partición del espacio muestral Ω. Sea B un evento cualquiera, entonces*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B|A_i)$$

Prueba. *Note que*

Espacio Muestral Ω



$$\Omega = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) \qquad \textit{(Eventos disjuntos)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i) \quad \textit{(Regla del producto 2)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 83 *La probabilidad de que una persona de Cartago adquiera una enfermedad es de 10%. Si una persona de Cartago tiene la enfermedad, la probabilidad de que el examen de sangre para detectar la enfermedad sea positivo es de 95%. Si una persona de Cartago está sana, la probabilidad de que el examen de sangre para detectar la enfermedad sea positivo es de 5%. Si una persona de Cartago (que se desconoce si posee o no la enfermedad) se realiza el examen de sangre, ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea positivo?*

En este caso, si se elige una persona al azar de Cartago el espacio muestral (conjunto de posibles resultados) es el conjunto de personas de Cartago. Los eventos involucrados son:

$$\begin{array}{ll} A_1 : & \textit{la persona está enferma} \\ A_2 = \overline{A_1} : & \textit{la persona está sana} \\ B : & \textit{la persona salió positiva en el examen} \end{array}$$

Se tiene que

$$\begin{array}{ll} P(A_1) = 0.1 & P(B|A_1) = 0.95 \\ P(A_2) = 0.9 & P(B|A_2) = 0.05 \end{array}$$

Por lo tanto la probabilidad solicitada es

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) \\ &= 0.1 \cdot 0.95 + 0.9 \cdot 0.05 = 0.14 \end{aligned}$$

Ejercicio 18 *La probabilidad de que un jugador de futbol se lesione en un partido competencia es de 0.05 si hace buen tiempo y de 0.15 si el tiempo es malo. El meteorólogo pronostica que para el próximo partido hay una probabilidad de que llueva del 30% y de que exista buen tiempo es de 70%.. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador se lesione en el próximo partido?* *R/* 8%

Ejercicio 19 *La probabilidad de que una pieza fabricada por la empresa X tenga defectos es del 45%. Las piezas son elaboradas por dos máquinas, la maquina 1 fabrica el 60% de las piezas, y la probabilidad de que una pieza elaborada por la maquina 1 tenga defectos es de 30%. ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza elaborada por la maquina 2 tenga defectos? R/ 67.5%*

7.2 Regla de Bayes

Teorema 36 ***(Regla de Bayes 1)*** *Sean A y B eventos sobre un espacio muestral Ω, con B no vacío. Se tiene que*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Prueba. *Note que*

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} && \text{(definición)} \\ \Longrightarrow\quad P(A|B) &= \frac{P(A)\,P(B|A)}{P(B)} && \text{(Regla del producto 2)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 84 ***(El Problema de Monty Hall[5])*** *En un concurso se tiene tres puertas, detrás de una de ellas hay un auto y detrás de las otras hay una cabra. El participante debe elegir una de las tres puertas, sin abrirla. Después Monty, el presentador, abre una de las dos puertas restantes en la que hay una cabra. Así quedan dos puertas sin abrir una con auto y otra con cabra. Monty ofrece la posibilidad al presentador de cambiar su puerta o permanecer con su elección. ¿Qué es mejor, cambiar de puerta o no?*

El problema se resuelve si se responde a la pregunta: Si el participante decide cambiarse de puerta, ¿cuál es la probabilidad de ganar el auto?. Suponga sin pérdida de generalidad que el participante elige inicialmente la puerta #1 y considere los siguientes eventos:

A_1 : *el auto está en la puerta #1*
A_2 : *el auto está en la puerta #2*
A_3 : *el auto está en la puerta #3*
G : *el participante se gana el auto*
B : *Monthy abre una puerta no elegida que contiene una cabra y el participante se cambia de puerta.*

Se quiere determinar $P(G|B)$. Note que

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Entonces por el Teorema de Probabilidades Totales:

$$P(G|B) = P(A_1)\,P(G|B\cap A_1) + P(A_2)\,P(G|B\cap A_2) + P(A_3)\,P(G|B\cap A_3)$$

[5] Este problema es uno de los más controversiales en probabilidad y se basa en un programa de televisión de los 70's.

Dado que el participante elige inicialmente la puerta #1, entonces Monty abre la #2 o la #3. Si el auto está en la puerta #1, entonces si el participante se cambia de puerta, la probabilidad de ganarse el auto es nula, es decir $P(G|B \cap A_1) = 0$. *Si el auto está en la puerta #2, Monty abre la puerta #3 y si la persona cambia de puerta (cambia la puerta #1 por la #2) entonces se gana el auto, es decir* $P(G|B \cap A_2) = 1$. *Finalmente, si el auto está en la puerta #3, Monty abre la puerta #2 y si la persona cambia de puerta (cambia la puerta #1 por la #3) entonces se gana el auto, es decir* $P(G|B \cap A_3) = 1$. *Por lo tanto, la probabilidad de ganarse el auto si se cambia de puerta es*

$$P(G|B) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Por lo tanto es mejor cambiase de puerta.

Por medio de La Regla de Bayes 1 y el Teorema de Probabilidades Totales, se obtiene el siguiente teorema[6].

Teorema 37 ***(Regla de Bayes 2)*** *Sean* $A_1, A_2, ..., A_n$ *eventos que forman una partición del espacio muestral* Ω. *Sean* A, B *dos eventos arbitrarios, con* B *no vacío, entonces*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)}$$

Prueba. *Ejercicio.* ■

Ejemplo 85 *La empresa TV fabrica televisores de plasma, el* 40% *de los televisores fabricados son de* 21 *pulgadas, el* 35% *de 28 pulgadas y el* 25% *de 32 pulgadas. Por otro lado, el* 30% *de los televisores de de 21 pulgadas tienen daños de fabricación, al igual que el* 20% *de los televisores de 28 pulgadas y el* 10% *de los televisores de* 32 *pulgadas.*

1. *¿Qúe porcentaje de televisores fabricados por la empresa TV tienen daños de fabricación?*

   Se elige un televisor al azar, considere los siguientes eventos

   A_1 : *el televisor es de* 21 *pulgadas*
   A_2 : *el televisor es de* 28 *pulgadas*
   A_3 : *el televisor es de* 32 *pulgadas*
   B : *el televisor tiene daños de fabricación*

[6] En muchos libros este teorema se conoce como la Regla de Bayes. Sin embargo se considera que es más intuitivo y simple, resolver un problema de Regla de Bayes en dos etapas: primero aplicando el Teorema de Probabilidades Totales, y luego la Regla de Bayes 1.

Se tiene los siguientes datos:

$$P(A_1) = 0.4, P(A_2) = 0.35, P(A_3) = 0.25,$$
$$P(B|A_1) = 0.3, P(B|A_2) = 0.2, P(B|A_3) = 0.1$$

Utilizando Probabilidades Totales se tiene que

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) P(B|A_i) = 0.4 \cdot 0.3 + 0.35 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.1 = 0.215$$

2. *Si un televisor, escogido al azar, tiene daños de fabricación, ¿cuál es la probabilidad de que sea de* 32 *pulgadas?*

   Por la Regla de Bayes

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3) P(A_3)}{P(B)} = \frac{0.1 \cdot 0.25}{0.215} = 0.116\,279$$

Ejemplo 86 *En el país C se realizó una encuesta en la cual el* 40% *de los encuestados opina que el país debe tener relaciones con China, el* 27% *opina que el país debe tener relaciones con Taiwán, y el resto no tiene preferencia por que el país tenga relaciones con alguno de estos países. Además el* 43% *de los que quieren relación con China indican disconformidad con el gobierno, al igual que el* 65% *de los que quieren relación con Taiwán. Por otro lado el* 30% *de los que indican disconformidad con el gobierno, no tienen preferencia por que el país tenga relaciones con alguno de estos países. Si un encuestado, elegido al azar, no tiene preferencia por que el país tenga relaciones con alguno de estos países. ¿Cuál es la probabilidad de que indique disconformidad con el gobierno?*

Considere los siguientes eventos

A_1 : *el encuestado quiere relaciones con China*
A_2 : *el encuestado quiere relaciones con Taiwán*
A_3 : *el encuestado no tiene preferencia...*
B : *el encuestado está disconforme con el gobierno*

Se tiene los siguientes datos:

$$P(A_1) = 0.4, P(A_2) = 0.27, P(A_3) = 0.33,$$
$$P(B|A_1) = 0.43, P(B|A_2) = 0.65, P(A_3|B) = 0.3$$

Se solicita determinar $P(B|A_3) = x$. *Utilizando Probabilidades Totales se tiene que*

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) P(B|A_i) = 0.4 \cdot 0.43 + 0.27 \cdot 0.65 + 0.33 \cdot x \\ &= 0.33x + 0.347\,5 \end{aligned}$$

Entonces por la Regla de Bayes:

$$P(B|A_3) = \frac{P(A_3|B)\,P(B)}{P(A3)} \Longrightarrow x = \frac{0.3 \cdot (0.33x + 0.347\,5)}{0.33}$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene el resultado

$$P(B|A_3) = x = 0.451\,299$$

Ejercicio 20 *En una localidad hay tres colegios, el primero tiene el* 25% *de la población estudiantil de quinto año, el segundo el* 35% *y el tercero el* 40%. *En la prueba de bachillerato de Matemáticas se obtuvo un* 85%, 92%, 96% *de promoción en cada colegio respectivamente.*

1. *¿Cuál es la probabilidad de ganar el examen en esa localidad?* $R/$ 0.9185
2. *Si se escoge un estudiante al azar y resulta que perdió la prueba ¿Cuál es la probabilidad de que provenga del primer colegio?* $R/$ 0.4601

Ejercicio 21 *Aplicando la prueba para detectar un tipo de cáncer se ha podido comprobar que el* 90% *de los enfermos y el* 10% *de los sanos reaccionan positivamente a la misma. Si el* 1% *de los pacientes de cierto hospital padecen del cáncer ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que fue sometido a la prueba y reaccionó positivamente, padezca la enfermedad?* $R/$ 0.0833

7.3 Ejercicios

1. Para las elecciones del 2006, en la ciudad C, el 40% de los ciudadanos están seguros en apoyar al candidato X, el 33% están seguros en no votar por dicho candidato, mientras el resto se mantiene indeciso. Además, el 80% de los ciudadanos que apoyan al candidato X, el 15% de los que no lo apoyan y el 40% de los indecisos, están a favor del TLC.

   (a) Determine el porcentaje de los ciudadanos de C que están a favor del TLC. $R/$ 0.477 5

   (b) Si un ciudadano de C está a favor del TLC, ¿cuál es la probabilidad de que apoye al candidato X? $R/$ 0.670 16

2. La Constructora CASA SEGURA ha sido acusada por errores de construcción en las casas fabricadas en el 2007. La empresa se dedica a fabricar tres modelos de casas A, B y C. En el 2007, el 36% de las casa fabricadas son modelo A, el 20% modelo B y el resto son modelo C. El 17% de las casas modelo A tiene errores de construcción, al igual que el 6% de las casas modelo B y el 10% de las casa modelo C.

   (a) Si en el 2007, hubieron 586 casas con errores de construcción ¿Cuántas casas se fabricaron en total en el 2007? $R/$ 5000

(b) Un perito elige una casa al azar fabricada en el 2007. Si la casa elegida tiene errores de construcción, ¿Cuál es la probabilidad de que sea modelo A? $R/ \quad 0.522\,184$

3. De los expresidentes de un país C, el 40% proviene del partido L, el 42% del partido S y el resto de partidos minoritarios. El 85% de los expresidentes que provienen de L han sido corruptos, lo mismo el 90% de los expresidentes provenientes de S, mientras el 50% de los expresidentes restantes han sido corruptos. Se elige un expresidente a azar del país C

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el expresidente elegido haya sido corrupto? $R/ \quad 0.808$

   (b) Si el expresidente elegido fue corrupto, ¿Cuál es la probabilidad de que provenga del partido S? $R/ \quad 0.468$

   (c) Por otro lado, el 80% de los expresidentes corruptos provenientes de S, han estado en la cárcel. Si se elige un expresidente a azar del país C, ¿cuál es la probabilidad de que sea corrupto, provenga de S y haya estado en la cárcel? $R/ \quad 0.302\,52$

4. En un estudio se determinó que el 10% de los egresados en Ingeniería en Computación de la Universidad X, laboran en educación, el 60% laboran como empleados de una compañía y el resto trabajan de manera independiente. Además, el 70% de los ingenieros que laboran en educación no reprobaron ningún curso de matemática, al igual que el 55% de los que son empleados de una compañía y el 85% de los trabajan en forma independiente. Si se elige al azar un egresado de dicha universidad,

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no reprobó ningún curso de matemática?

   (b) Si la persona elegida reprobó el curso de Matemática Discreta, ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje de forma independiente?

5. Un estudio determino que de las personas que han sido estafadas por realizar transacciones en el Banco Bienestar Seguro vía Internet: el 40% no se desconectaron formalmente de la página del banco, el 25% dio a conocer su clave de ingreso y el resto tenía una clave de ingreso fácil de predecir. Además, el 80% de los que no se desconectaron formalmente de la página hacían transacciones diariamente por Internet, al igual que el 70% de los que dieron a conocer su clave de ingreso. Se ha logrado estimar que, de las personas estafadas por Internet que hacían transacciones diariamente, el 30% tenía una clave fácil de predecir. Si una persona fue estafada porque tenía una clave fácil de predecir, ¿cuál es la probabilidad de que realice transacciones diariamente? $R/ \quad 0.606\,12$

6. Para el próximo referéndum en el país C, en la ciudad B, el 38% de los ciudadanos están seguros en votar NO, el 35% están seguros en votar SI, mientras el resto se mantiene indeciso. Además, el 25% de los ciudadanos que apoyan el SI, el 70% de los que apoyan el NO y el 40% de los indecisos, tienen una formación profesional.

(a) Determine el porcentaje de los ciudadanos de B que tienen una formación profesional$R/\quad 0.461\,5$

(b) Si un ciudadano de B tienen una formación profesional, ¿cuál es la probabilidad de que seguro en apoyar el NO? $R/\quad 0.576\,38$

7. Una pareja tiene 2 hijos. La probabilidad de que en un nacimiento se obtenga una niña es 50% y los nacimientos en una familia son eventos independientes. El lunes la madre escoge un hijo para que la acompañe al supermercado y resulta que el hijo escogido es mujer. Si se sabe que la probabilidad de que escoja una mujer sabiendo que sus hijos son una pareja (hombre y mujer) es de $\dfrac{2}{3}$. Determine la probabilidad de que la pareja tenga 2 hijas. $R/\quad \dfrac{3}{7}$

8 Ejercicios finales

1. Se tienen los siguientes confites: 7 morenitos, 4 frutines (cada uno de un sabor distinto) y 8 tapitas. Estos confites se van a distribuir entre María, Lucia y Juan.

   (a) ¿Cual es la probabilidad de que a cada uno le toquen exactamente 2 morenitos ?

   (b) ¿Cual es la probabilidad de que a Juan le toque dos frutines determinados, 3 morenitos y a lo sumo 4 tapitas?

2. Se tienen dos urnas con las siguientes bolas:

	Bolas rojas	**Bolas negras**
Urna 1:	11	9
Urna 2:	6	9

   Considere el experimento de extraer bolas una a una en forma alternada de cada urna, iniciando en la primer urna, hasta obtener dos bolas rojas. Es decir, se extrae una bola de la urna 1 (bola 1), luego una bola de la urna 2 (bola 2), si las bolas 1 y 2 son rojas se termina el experimento, sino se extrae una bola de la urna 1 (bola 3), si entre las bolas 1, 2 y 3 hay dos rojas se termina el experimento, sino se continúa similarmente.

   (a) Sea A todas las posibles eventualidades en las cuales al final se extrajeron 5 bolas. Describa cada uno de los elementos de A.

   (b) Determine $P(A)$. $R/\quad \frac{528}{3325}$

   (c) Sea B el evento "las dos bolas rojas fueron extraídas durante el experimento en forma consecutiva", determine $P(A\cap B), P(B\mid A)$. $R/\quad \frac{3}{16}$

3. En el primer programa de BAILANDO POR UN DESEO, se sentenciaron a tres parejas: la pareja AE, la pareja ER y la pareja MC. Del total de llamadas recibidas para salvar a las parejas sentenciadas: el 50% apoyaron a la pareja MC, el 30% a la pareja ER y las demás a la pareja AE. Además el 20% de las llamadas que apoyaban a la pareja AE fueron recibidas una hora antes de cerrar el concurso, al igual que el 15% de las llamadas que apoyaban a la pareja ER. Si una hora antes de cerrar el concurso se recibieron el 21% de las llamadas

   (a) ¿Qué porcentaje de las llamadas que apoyaban a la pareja MC se recibieron una hora antes de cerrar el concurso? $R/\quad 0.25$

   (b) Si una persona llamó una hora antes de cerrar el concurso ¿Cuál es la probabilidad de que apoyará a la pareja MC? $R/\quad 0.595\,24$

4. Dada la palabra: ATENCION, sea U el conjunto de todos los posibles anagramas de esta palabra, considere los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in U | x \text{ tiene la letra } T \text{ en la } 1^{\circ} \text{ o } 2^{\circ} \text{ posición}\} \\ B &= \{x \in U | x \text{ tiene las letras } T, E, C \text{ juntas en cualquier orden}\} \end{aligned}$$

   Determine $|A \cup B|$. $R/\quad 6960$

5. Una fábrica tiene tres máquinas para producir bombillas. La máquina A produce el 35% del total de bombillas, la máquina B produce el 50% y la máquina C produce el 15% de las bombillas. Sin embargo, las máquinas no son perfectas, la máquina A daña el 10% de las bombillas que produce. La máquina B daña el 5% y la máquina C daña el 20%.

   (a) Si se elige una bombilla al azar ¿Cuál es la probabilidad de que este dañada? $R/\quad 0.09$

   (b) Si una bombilla presenta daños ¿Cuál es la probabilidad de que fue producida por la máquina A? $R/\quad 0.388\,889$

6. Dada una experiencia aleatoria, considere los eventos A, B y C, tales que A y B son eventos independientes, A y C son disjuntos. Pruebe que

$$P(AUBUC) = P(A)\,P\left(\overline{B}\right) + P(B \cup C)$$

7. En el concurso RAZONAMIENTO MATEMÁTICO realizado por la Universidad Bienestar Seguro, Rebeca, Fabiola y Víctor son los ganadores de este mes. Entre estos ganadores se distribuirán 5 libros (todos distintos) y 10 entradas generales al próximo partido de la selección. Suponga que los premios se distribuyen al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que a Rebeca le corresponda exactamente 3 premios ? $R/\ \frac{1108}{8019}$

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que a Víctor le toquen más de un libro, a Fabiola a lo sumo un libro y a Rebeca al menos 5 entradas? $R/\ \frac{7}{66}$

8. El colegio marginal X tiene 5 estudiantes de quinto año que ganaron las pruebas de bachillerato con notas mayores a 90. La asociación VELEMOS POR UN MEJOR FUTURO ha decidido obsequiarles 8 entradas generales para el próximo partido de la selección y 11 viajes todo incluido dentro del país en lugares distintos.

   (a) De cuántas maneras se pueden repartir los obsequios si a cada estudiante le corresponde al menos una entrada y al menos 2 viajes. $R/\ 72\,765\,000$

   (b) Si los obsequios se distribuyen al azar ¿Cuál es la probabilidad de que a cada estudiante le correspondan al menos una entrada y al menos 2 viajes? $R/\ 3.01056 \times 10^{-3}$

9. En el País de las Maravillas los gatos tiene una y solo una de las siguientes cualidades: vuelan, tiene bigotes ó comen pescado. En un censo, Alicia ha determinado que el 25% de los gatos de este país vuelan y el 60% de los gatos no tienen bigotes. Además en este estudio se determinó que el 80% de los gatos que vuelan están locos, al igual que el 70% de los gatos con bigotes y el 20% de los gatos que comen pescado.

   (a) ¿Qué porcentaje de los gatos del País de las Maravillas están locos?. $R/\ 0.55$

   (b) Se elige un gato al azar de este país y resulta que está loco. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga bigotes? $R/\ \frac{28}{55}$

   (c) ¿Qué porcentaje de los gatos del País de las Maravillas tienen bigotes o están locos? $R/\ 0.67$

10. Entre Karla, Juan y Viviana se compraron 12 lapiceros azules marca M y 6 pilot de diferentes colores. Suponga que los objetos se distribuyen al azar entre los tres.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que a Melissa le corresponde exactamente 3 pilot y a lo sumo 7 lapiceros?. $R/\ \frac{12\,160}{66\,339}$

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que a cada uno recibirá al menos un lapicero y al menos un pilot, y a Juan le corresponda al menos 3 pilot? $R/\ \frac{2750}{22\,113}$

11. En la Universidad Bienestar Seguro, el 35% del personal docente es Bachiller, el 43% posee una licenciatura y el resto un postgrado. Además, el 50% de los docentes Bachilleres son adictos al café al igual que el 65% de los licenciados y el 45% de los docentes que posee postgrado.

(a) Determine el porcentaje de docentes que son adictos al café. $R/\quad 0.553\,5$

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un docente adicto al café posea un postgrado? $R/\quad 0.178\,86$.

12. La escuela rural X está formada por 7 secciones, cada una con 20 estudiantes. Para el 12 de octubre se van a elegir 36 estudiantes al azar para se encargue de organizar el acto cívico. ¿Cuál es la probabilidad de que no se elijan a todos los estudiantes de una misma sección?

13. Rebeca ha recibido como premio 12 boletos aéreos para viajar a algún país de Sur América. El lugar de destino para cada viaje, lo puede elegir entre Brasil, Chile y Argentina. Si lo desea Rebeca puede elegir varios boletos a un mismo destino, para viajar acompañada de familiares o amigos. Sin embargo, a lo sumo puede elegir 6 boletos a Argentina. Suponiendo que no se hace distinción entre los boletos para viajar a un mismo destino

    (a) ¿De cuántas maneras puede Rebeca elegir su premio? $R/\quad 70$

    (b) Si Rebeca es casada y posee cinco hijos, ¿Cuál es la probabilidad de que Rebeca elija viajar con al menos su núcleo familiar? $R/\quad \dfrac{3}{5}$

14. Se tiene r objetos idénticos y $r-1$ objetos distintos. Todos estos objetos serán distribuidos en n cajas distinguibles, con $r > n$. (Las respuestas de las preguntas siguientes deben darse en términos de r y n)

    (a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los objetos?

    (b) Si los objetos se distribuyen al azar, ¿Cual es la probabilidad de que cada caja quede con al menos un objeto de los idénticos, y que la caja 1 quede con exactamente 2 de los objetos distinguibles?

15. En el concurso de Razonamiento Matemático realizado por la Universidad Bienestar Seguro, Rebeca, Fabiola y Víctor son los ganadores de este mes. Entre estos ganadores se distribuirán 7 libros (todos distintos) y 15 entradas generales al concierto de Juanes. Suponga que los premios se distribuyen al azar.

    (a) ¿Cuántas maneras hay de distribuir los premios en las cuales a cada ganador le corresponde al menos 2 entradas al concierto? $R/\quad 120\,285$

    (b) Si a cada ganador le corresponde al menos 2 entradas al concierto, ¿Cuál es la probabilidad de que a Rebeca le correspondan 3 libros y a lo sumo 5 entradas? $R/\quad \dfrac{19\,040}{120\,285}$

16. El juego ANAGRAM consiste en 7 fichas, cada una con una letra de la palabra "ANAGRAM". El jugador coloca en fila dichas fichas al azar (sin ver la letra de cada ficha) para formar una palabra. La palabra formada es ganadora si tiene las 3 "A" juntas, neutral si tiene las tres "A" separadas y perdedora en caso contrario. Además se sabe que el 20% de las palabras ganadoras son bonitas, al igual que el 10% de las palabras neutrales y el 15% de las palabras perdedoras. Si Manuel decide jugar el juego

    (a) Determine la probabilidad de que Manuel coloque una palabra bonita. $R/\quad 0.142\,86$

    (b) Si Manuel coloco una palabra que no es bonita, ¿cuál es la probabilidad de que dicha palabra sea ganadora? $R/\quad 0.133\,32$

17. Sean A y B dos eventos no nulos tales que $P(A) = \frac{1}{3}P\left(\overline{B}\right)$ y además $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Pruebe que

    (a) $P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(B)$

    (b) A y B son eventos dependientes.

18. Una secretaria tiene una cajita con clips: n rojos y $n+1$ negros. Si la secretaria toma 3 clips al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya tomado exactamente 2 clip de igual color?

19. Se lanza una moneda un número ilimitado de veces, determine la probabilidad de que se obtenga por primera vez una corona en un lanzamiento impar $R/\quad \frac{2}{3}$

20. Demuestre que $P((A \cup B)|C) = P(A|C) + P(B|C) - P((A \cap B)|C)$

21. En una canasta se tienen 2 bolas rojas, 10 bolas verdes y 3 blancas. Se comienza a sacar bolas al azar sucesivamente bajo las siguientes reglas:

Regla 1:	Si la bola es roja no se devuelve a la canasta
Regla 2:	Si la bola es blanca no se devuelve a la canasta y se agrega una bola verde adicional a la canasta
Regla 3:	Si la bola es verde se dejan de sacar bolas

    ¿Cuál es la probabilidad de sacar en total 4 bolas con al menos 2 blancas? $R/\quad \frac{65\,708}{5788\,125}$

22. (♣) Sea Q_n la probabilidad de que en n lanzamientos de una moneda legal no aparecen 3 coronas consecutivas

(a) Pruebe que

$$\begin{cases} Q_0 = Q_1 = Q_2 = 1 \\ Q_n = \dfrac{Q_{n-1}}{2} + \dfrac{Q_{n-2}}{4} + \dfrac{Q_{n-3}}{8} \quad si \quad n > 2 \end{cases}$$

(b) Determine Q_8. $R/ \quad \dfrac{149}{256}$

23. En una bolsa se tiene n bolas blancas y m bolas rojas. Considere el experimento en que se extrae una bola al azar, se anota su color y se devuelve a la bolsa con r bolas del mismo color. El experimento se repite indefinidamente.

    (a) Determine la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja. $R/ \quad \dfrac{m}{m+n}$

    (b) Suponga que la segunda bola extraída es roja ¿Cuál es la probabilidad de que la primer bola extraída sea roja? $R/ \quad \dfrac{m+r}{m+n+r}$

    (c) (♣) Considere el evento: R_i : la $i - ésima$ bola extraída es roja. Asuma que $P(R_i) = P(R_1)$ para $i \geq 1$.

    i. Suponga que la $k - ésima$ bola extraída es roja ¿Cuál es la probabilidad de que la primer bola extraída sea roja? $R/ \quad \dfrac{m+r}{m+n+r}$

    ii. Encuentre la probabilidad de que la primer bola extraída sea roja, sabiendo que las siguientes k extracciones son rojas $R/ \quad \dfrac{m+kr}{m+n+kr}$

    iii. Muestre que $P(R_i|R_j) = P(R_j|R_i)$ para todo $i \neq j$.

24. En una partida para dos personas suponga que ambas tienen la misma probabilidad de ganarlo. En un torneo se tienen 2^n jugadores, y en la primer eliminatoria se forman parejas al azar para que cada pareja jueguen una partida. Los 2^{n-1} ganadores de la primer partida pasan a la segunda eliminatoria, donde nuevamente forman parejas al azar para jugar. El torneo continua de manera similar hasta obtener el ganador del torneo.

    (a) ¿Cuántas eliminatorias se juegan? $R/ \quad n$

    (b) ¿Cuántas partidas se juegan? $R/ \quad 2^n - 1$

    (c) Dados dos jugadores A y B. Considere los eventos:

    A_i : A juega exactamente i partidas
    J : A y B juegan juntos.

    i. Determine la $P(A_i)$

ii. Pruebe que $P\left(J|A_i\right)=\dfrac{i}{2^n-1}$

iii. Pruebe que $P\left(J\right)=\dfrac{1}{2^{n--1}}$

(d) Considere el evento

$$J_i: \quad A \text{ y } B \text{ juegan juntos en un torneo de } 2^i \text{ jugadores}$$

i. Pruebe, sin usar (b) que

$$P\left(J_n\right)=\frac{1}{2^n-1}+\frac{2^n-2}{2^n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 P\left(J_{n-1}\right)$$

ii. Compruebe esta igualdad utilizando (b).

25. (♣) En un determinado juego se tiene que la probabilidad de ganar es de $\dfrac{1}{3}$. Suponga que se repite el juego un número indefinido de veces, y se quiere hallar la probabilidad de que ocurran n victorias consecutivas antes de m derrotas consecutivas, para ello considere los eventos:

$$\begin{array}{rl} A: & n \text{ victorias consecutivas antes de } m \text{ derrotas} \\ I: & \text{el primer juego se ganó} \\ G: & \text{Los juegos del 2 al } n \text{ son victorias} \\ P: & \text{Los juegos del 2 al } m \text{ son derrotas} \end{array}$$

(a) Pruebe que $P\left(A\right)=\dfrac{1}{3}P\left(A|I\right)+\dfrac{2}{3}P\left(A|\overline{I}\right)$

(b) Demuestre que $P\left(A|I\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right)P\left(A|\left(\overline{G}\cap I\right)\right)$

(c) Pruebe que $P\left(A|\overline{I}\right)=\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{m-1}\right)P\left(A|\left(\overline{P}\cap\overline{I}\right)\right)$

(d) Justifique que $P\left(A|\left(\overline{G}\cap I\right)\right)=P\left(A|\overline{I}\right)$ y que $P\left(A|\left(\overline{P}\cap\overline{I}\right)\right)=P\left(A|I\right)$

(e) Determine la probabilidad de que ocurran n victorias consecutivas antes de m derrotas consecutivas $\qquad R/ \quad \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{m}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}}$

(f) Determine la probabilidad de que ocurran m derrotas consecutivas antes de n victorias consecutivas $\qquad R/ \quad \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}}$

(g) Demuestre que eventualmente sucederán m derrotas consecutivas o n victorias consecutivas.

Capítulo III

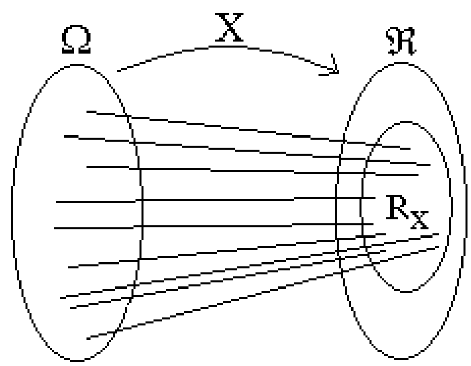
Variables aleatorias discretas

Se define el concepto de variable aleatoria discreta, su función de probabilidad y su función acumulada. Se establece el concepto de esperanza, varianza y función generadora de momentos para una variable aleatoria discreta. Luego se estudian los principales tipos de variables aleatorias: binomial, geométrica, hipergeométrica y Poisson. Finalmente, se establecen las relaciones entre estás distribuciones y se modela por ejemplos la obtención de la función de distribución de una variable discreta dada. Se recomienda al lector el repaso de sumas y series (Apéndice C)

1 Teoría y definiciones

1.1 Distribución de probabilidad simple y acumulada

Definición 22 *Dado un espacio muestral* Ω, *una variable aleatoria* X *es una función de un espacio muestral* Ω *a* $\mathbb{R}$:



Se denota por R_X *el rango de la variable aleatoria.*

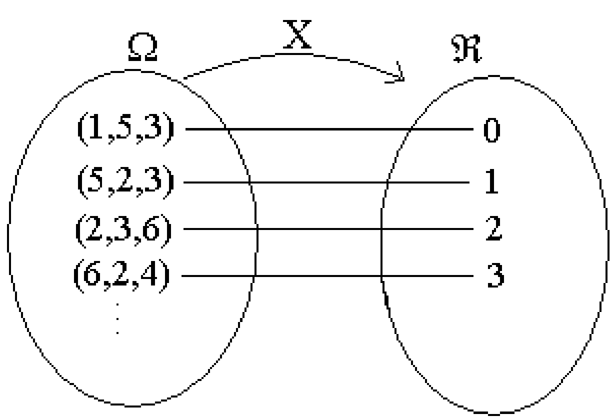
Definición 23 ***Variable aleatoria discreta*** *(v.a.d.) Se dice que* X *es una v.a.d. si y solo si,* X *es variable aleatoria cuyo rango es finito o numerable, pero no denso en* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 87 *Considere el experimento: lanzar un dado 3 veces. En este caso,*

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \text{ es el resultado del lanzamiento } i, \text{ con } i = 1, 2, 3\}$$

Considere la variable aleatoria

$$X : \# \text{ de lanzamientos en los que se obtuvo par}$$



Además, por ejemplo:

$$X((1,2,4)) = 2, \quad X((3,6,5)) = 1$$

Note que $R_X = \{0,1,2,3\}$, *por lo tanto* X *es una variable aleatoria discreta.*

Notación 1 *Sea* P *una probabilidad sobre* Ω. *Se seguirá la siguiente notación de eventos:*

1. $X = x_i$ *es el evento* $\{e \in \Omega \mid X(e) = x_i\}$
2. $X < x_i$ *es el evento* $\{e \in \Omega \mid X(e) < x_i\}$
3. $X \leq x_i$ *es el evento* $\{e \in \Omega \mid X(e) \leq x_i\} = (X < x_i) \cup (X = x_i)$

Ejemplo 88 *En el ejemplo anterior se tiene que* $X = 3$ *es el evento*

$$\{(2,2,2), (2,2,4), (2,2,6), (2,4,2), ...\}$$

Dado que ya se estudio la probabilidad en Ω, ésta junto con la notación anterior se utilizarán para definir la probabilidad sobre el R_x de forma intuitiva. Así, la probabilidad de que la *v.a.d* X tome el valor de k será la probabilidad de que ocurra el evento $X = k$.

Definición 24 *Sea* X *una v.a.d. con espacio muestral* Ω, *sea* P *una probabilidad sobre* Ω. *La función* $f_X : R_X \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f_X(k) = P(X = k)$$

es llamada función de probabilidad para X. *La función de probabilidad se le llama también: función de distribución de probabilidad, ley de probabilidad, función de densidad.*

Teorema 38 *(**Condiciones sobre la función de distribución**) La función de distribución de probabilidad* $f_X : R_X \longrightarrow \mathbb{R}$ *cumple que:*

1. $f_X(x_i) \geq 0$, *para todo* $x_i \in R_X$
2. $\sum\limits_{x_i \in R_X} f_X(x_i) = 1$.

Prueba. *Sea* $x_i \in R_X$, *note que*

$$f_X(x_i) = P(X = x_i) \geq 0$$

por ser una probabilidad, además

$$\sum_{x_i \in R_X} f_X(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} P(X = x_i) = P\left(\bigcup_{x_i \in R_X} (X = x_i)\right) = P(\Omega) = 1 \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 89 *Se lanza un dado 3 veces. Considere la v.a.d. X definida como el número de lanzamientos en los que se obtuvo par. Para determinar la función de distribución de probabilidad de X note que el $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ y*

$$f_X(0) = P(X = 0)$$

Sea Ω el conjunto de resultados al lanzar un dado tres veces, así

$$|\Omega| = 6^3 \quad y \quad |X = 0| = 3^3$$

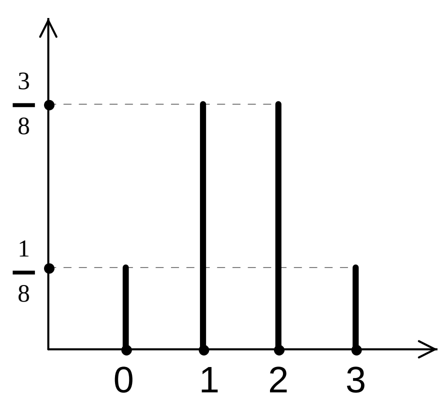
entonces $f_X(0) = P(X = 0) = \dfrac{3^3}{6^3} = \dfrac{1}{8}$, de manera similar

$$\begin{aligned} f_X(1) &= P(X = 1) = \frac{C(3,1)\,3^3}{6^3} = \frac{3}{8} \\ f_X(2) &= P(X = 2) = \frac{C(3,2)\,3^3}{6^3} = \frac{3}{8} \\ f_X(3) &= P(X = 3) = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f_X(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & si \quad k = 0 \quad \vee \quad k = 3 \\ \dfrac{3}{8} & si \quad k = 1 \quad \vee \quad k = 2 \end{cases}$$

Esta función se puede graficar por medio de un histograma para variable discreta



Ejercicio 22 *Se lanza una moneda legal 3 veces. Sea X el número de lanzamientos en los que se obtuvo corona. Determine la función de distribución de probabilidad de X.*

Ejercicio 23 ***(Comparación de la Estadística Descriptiva y la Probabilidad)*** *Se lanza una moneda legal 10 veces. Sea X el número de lanzamientos en los que se obtuvo corona.*

1. *(**¡En Probabilidad!**) Determine la función de distribución de probabilidad para la v.a.d. X y grafíquela por medio de un histograma.*
2. *(**¡En Estadística Descriptiva!**). Considere el experimento: lanzar 10 veces una moneda y anotar el número de lanzamientos en los que se obtuvo par. Realice este experimento 50 veces. Describa los datos anotados realizando la distribución de frecuencias de la variable X y el diagrama de bastones de las frecuencias relativas.*
3. *Compare los gráficos realizados.*

Definición 25 ***(Función de distribución acumulada de probabilidad de una v.a.d.)*** *Sea X una v.a.d. y f_X una ley de probabilidad para X, se dice que $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de distribución acumulada de probabilidad, o de masa, para X si y solo si*

$$F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ x_i \leq x}} f_X(x_i) = \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ x_i \leq x}} P(X = x_i) = P(X \leq x)$$

Ejemplo 90 *Sea X el número de lanzamientos en los que se obtuvo par al lanzar un dado 3 veces, anteriormente se obtuvo que*

$$f_X(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & si \quad k = 0 \quad \vee \quad k = 3 \\ \dfrac{3}{8} & si \quad k = 1 \quad \vee \quad k = 2 \end{cases}$$

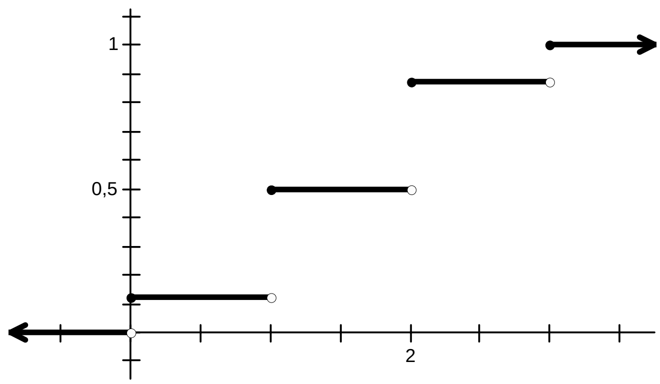
entonces

$$\begin{array}{lll} \text{Si} & k < 0: & F_X(k) = 0 \\ \text{Si} & 0 \leq k < 1: & F_X(k) = f_X(0) = \dfrac{1}{8} \\ \text{Si} & 1 \leq k < 2: & F_X(k) = f_X(0) + f_X(1) = \dfrac{4}{8} \\ \text{Si} & 2 \leq k < 3: & F_X(k) = f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) = \dfrac{7}{8} \\ \text{Si} & k \geq 3: & F_X(k) = f_X(0) + f_X(0) + f_X(0) + f_X(0) = 1 \end{array}$$

Por lo tanto

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 & si \quad k < 0 \\ \dfrac{1}{8} & si \quad 0 \leq k < 1 \\ \dfrac{4}{8} & si \quad 1 \leq k < 2 \\ \dfrac{7}{8} & si \quad 2 \leq k < 3 \\ 1 & si \quad k \geq 3 \end{cases}$$

Esta función de variable real tiene gráfica:



Teorema 39 ***(Características de la función de distribución acumulada)*** *Sea X una v.a.d y F_X es una función de distribución acumulada de probabilidad. Se cumple que*

1. $F_X(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$
2. F_X *es creciente*
3. $1 - F_X(x) = P(X > x)$
4. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
5. $f_X(x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1})$, *para todo* $x_n \in R_X$ *que no sea el mínimo de* R_X.
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

Prueba. *Se probará la 2 y la 6, las demás quedan de ejercicio. Para la 2, sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$ entonces*

$$(X \leq x) \subset (X \leq y) \Longrightarrow P(X \leq x) \leq P(X \leq y) \Longrightarrow F_X(x) \leq F_Y(y).$$

Por lo tanto, F_X es creciente. Para la 6, note que

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ x_i \leq x}} f_X(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} f_X(x_i) = 1 \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 91 ***(¿Qué sucede si el rango no es finito?)*** *Sea X una v.a.d. con función de probabilidad f_X definida por*

$$f_X(x) = \frac{1}{2^x}, \text{ con } x = 1, 2, 3, ...$$

1. *Verifique que f_x tiene las condiciones necesarias de una función de probabilidad.*

   Note que $R_X = \mathbb{N}^*$ por lo tanto

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2^x} \geq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{N}^* \\ \sum_{k \in R_X} f_X(k) &= \sum_{k \in R_X} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1 \end{aligned}$$

2. *Halle la función de distribución acumulada F_X*

   Por definición de distribución acumulada se tiene que

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < 1 \\ \sum_{k=1}^{n} f_X(k) & \text{si} \quad n \leq k < n+1, \text{ con } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

   donde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f_X(k) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 & si \quad k < 1 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & si \quad n \le k < n+1, \ con\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

3. *Determine* $P(\pi < X < 8)$.

   (a) *Utilizando* f_X :

$$\begin{aligned} P(\pi < X < 8) &= P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) \\ &= \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} = \frac{15}{128} \end{aligned}$$

   (b) *Utilizando* F_X :

$$\begin{aligned} P(\pi < X < 8) &= P(\pi < X \le 7) = F_X(7) - F_X(\pi) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{15}{128} \end{aligned}$$

El ejemplo anterior muestra la utilidad de la función de distribución acumulada en el cálculo de probabilidades.

Ejercicio 24 *Sea*

$$f_X(x) = \frac{5-x}{10}, \quad con\ x = 1, 2, 3, 4.$$

1. *Verifique que* f_x *es una función de probabilidad*
2. *Halle la función de distribución acumulada* F_X
3. *Calcule* $P\left(\sqrt{2} < x < \pi\right)$

Ejercicio 25 *Sea* X *una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es*

$$f(x) = k\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \qquad si\ x = 0, 1, 2, 3, ...$$

Determine el valor de k. *R/* $k = 6$

Teorema 40 (♣) *Sean* X, Y *variables aleatorias discretas tales que* $Y = g(X)$, *entonces la función de distribución de* Y *es*

$$f_Y(y) = \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ g(x_i) = y}} f_X(x_i)$$

Prueba. *Note que*

$$f_Y(y) = P(g(X) = y) = \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ g(x_i)=y}} P(X = x_i) = \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ g(x_i)=y}} f_X(x_i)$$

Ejemplo 92 (♣) *Sean X, Y variables aleatorias discretas tales que $Y = \max\{0, -X\}$. El teorema anterior permite determinar f_Y en términos de f_X. Note que*

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ g(x_i)=y}} f_X(x_i) = \sum_{\substack{x_i \in R_X \\ \max\{0,-x_i\}=y}} f_X(x_i) \\ &= \begin{cases} f_X(-y) & si \quad y > 0 \\ \sum\limits_{\substack{x_i \in R_X \\ x_i \geq 0}} f_X(x_i) & si \quad y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 Parámetros de distribuciones de *v.a.d.*

1.2.1 Esperanza

Definición 26 *(**Esperanza**) La esperanza o media es el promedio ponderado que cuantifica el valor esperado de una variable aleatoria X. Si X es una v.a.d. con función de probabilidad f_X tal que $\sum\limits_{x_i \in R_X} |x_i| f_X(x_i)$ converge. Se define la esperanza de x por:*

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x_i \in R_X} x_i f_X(x_i),$$

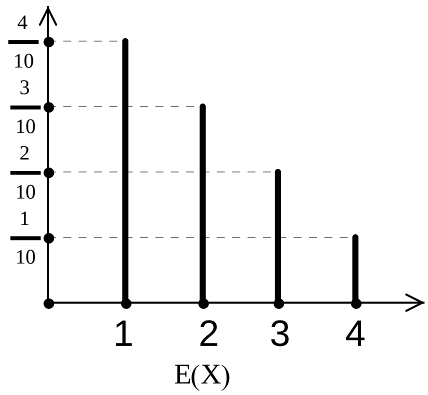
Ejemplo 93 *Sea X una v.a.d. cuya función de distribución está dada por*

$$f_X(x) = \frac{5-x}{10}, \text{ con } x = 1, 2, 3, 4.$$

1. *Determine $E(X), E(3X+2)$*

k	$f_X(x)$	$kf_X(x)$	$3k+2$	$(3k+2)f_X(x)$
1	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$	*5*	$\frac{20}{10}$
2	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	*8*	$\frac{24}{10}$
3	$\frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}$	*11*	$\frac{22}{10}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	*14*	$\frac{14}{10}$
Total:	1	$E(X) = 2$		$E(3X+2) = 8$

2. Realice el histograma de X y ubique el valor $E(X)$.

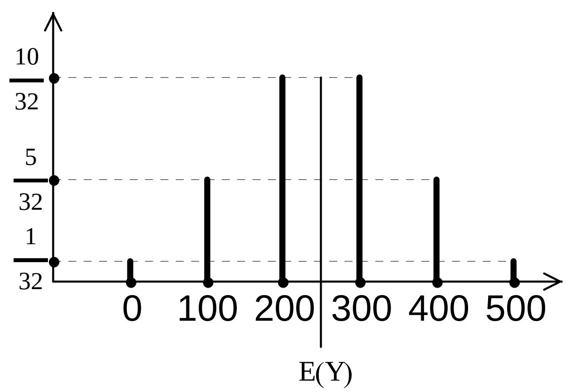


Ejemplo 94 *El juego ESCUDOS consiste en lanzar una moneda 5 veces y observar el números de escudos obtenidos, por cada escudo obtenido el jugador recibe* 100 *colones. Sea Y el dinero obtenido al jugar ESCUDOS. Note que*

$$R_Y = \{0, 100, 200, 300, 400, 500\}$$

La función de distribución de Y y su representación gráfica (ejercicio) es

$$f_X(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{32} & si \quad k = 0 \quad \vee \quad k = 500 \\ \dfrac{5}{32} & si \quad k = 100 \quad \vee \quad k = 400 \\ \dfrac{10}{32} & si \quad k = 200 \quad \vee \quad k = 300 \end{cases}$$



Note que el valor esperado de Y es

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{32} + 100 \cdot \frac{5}{32} + 200 \cdot \frac{10}{32} + 300 \cdot \frac{10}{32} + 400 \cdot \frac{5}{32} + 500 \cdot \frac{1}{32} = 250$$

Este valor esperado tiene una posición central en la distribución e indica que, si se juega varias veces el juego ESCUDOS, en promedio por cada juego se recibirán 250 *colones. Es decir, al jugar 20 veces ESCUDOS, en algunos juegos se recibirá menos de 250 colones y otros más de este monto, pero si se suma lo que se recibe en cada juego y se divide por 20, se espera que el valor obtenido será cercano a 250 colones.*

Ejemplo 95 (♣) *Considere la v.a.d X tal que*

$$f_X(x) = \frac{4}{(x-1)x(x+1)}, \text{ para } x = 2,3,4,...$$

Note que

$$E(X) = \sum_{x=2}^{\infty} x f_X(x) = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{4}{(x-1)(x+1)}$$

Dado que

$$\frac{4}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x}\right) + \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}\right)$$

La serie anterior es la suma de dos series telescópicas:

$$E(X) = \sum_{x=2}^{\infty}\left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x}\right) + \sum_{x=2}^{\infty}\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}\right) = \left(\frac{2}{2-1} - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\right) + \left(\frac{2}{2} - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}\right) = 3.$$

Ejercicio 26 *Una persona paga 200 colones por jugar el juego PARES. Este juego consiste en lanzar tres veces un dado, por cada par obtenido gana 200 colones y por cada impar obtenido debe pagar 100 colones. Determine la ganancia esperada del juego e interprete este valor. ¿Es justo el juego?* *R/* $E(G) = -50$

Ejercicio 27 (♣) *Considere la v.a.d X tal que*

$$f_X(x) = \frac{1}{x(x+1)}, \text{ para } x = 1,2,3,...$$

Determine, si existe, la esperanza de X. *R/ No existe*

Teorema 41 *Sea X es una v.a.d. con función de probabilidad f_X y g una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $\sum_{x_i \in R_X} |g(x_i)| f_X(x_i)$ converge. La esperanza de $Y = g(X)$ es dada por*

$$E(Y) = \mu_{g(X)} = \sum_{x_i \in R_X} g(x_i) f_X(x_i).$$

Prueba. *Note que*

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y\in R_Y} y f_Y(y) = \sum_{y\in R_Y} y \sum_{\substack{x_i\in R_X \\ g(x_i)=y}} f_X(x_i) = \sum_{y\in R_Y} \sum_{\substack{x_i\in R_X \\ g(x_i)=y}} y f_X(x_i) = \\ &= \sum_{y\in R_Y} \sum_{\substack{x_i\in R_X \\ g(x_i)=y}} g(x_i) f_X(x_i) = \sum_{x_i\in R_X} g(x_i) f_X(x_i). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 42 *Sea X una v.a.d. con rango finito ($|R_X| = n$) y función de distribución constante, entonces*

$$E(X) = \frac{\sum\limits_{x_i \in R_X} x_i}{n}$$

NOTA: Si la función de distribución es constante, las eventualidades son equiprobables y la esperanza (promedio ponderado) se convierte en el promedio simple.

Prueba. *Ejercicio.* ■

Teorema 43 ***(Propiedades de la Esperanza)*** *Sean c una constante y sea X una v.a.d. tal que $E(X)$ existe. Se tiene que:*

1. $E(c) = c$
2. $E(X + c) = E(X) + c$
3. $E(cX) = cE(X)$
4. *Si*$E(g(X)), E(h(X))$ *existen entonces* $E(g(X) + h(X)) = E(g(X)) + E(h(X))$.

Prueba. *Se probará la 1 y la 4, las demás quedan de ejercicio. Para 1 note que*

$$E(c) = \sum_{x_i \in R_X} c f_X(x_i) = c \sum_{x_i \in R_X} f_X(x_i) = c \cdot 1 = 0.$$

Por otro lado, la $4:$

$$\begin{aligned} E(g(X) + h(X)) &= \sum_{x \in R_X} (g(x) + h(x)) f_X(x) = \sum_{x \in R_X} g(x) f_X(x) + \sum_{x \in R_X} h(x) f_X(x) \\ &= E(g(X)) + E(h(X)). \quad ■ \end{aligned}$$

Ejemplo 96 *Considere el juego ESCUDOS descrito en el ejemplo* (94). *Suponga que para jugar se cobran 300 colones. Sea Y el dinero obtenido al jugar PARES y G la ganancia obtenida, entonces $G = Y - 300$ y entonces la ganancia esperada es*

$$E(G) = E(Y - 300) = E(Y) - 300 = 250 - 300 = -50.$$

Así, el jugador perderá en promedio 50 colones y por lo tanto es un juego injusto para el jugador.

Teorema 44 (♣) *Sea X una v.a.d. tal que $X \geq 0$ y $E(X)$ existe. Entonces*

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} P(X \geq x)$$

Prueba. *Note que*

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} f_X(x) \sum_{y=1}^{x} 1 = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{x} f_X(x)$$

Como los términos no son negativos se puede intercambiar el orden de la suma:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} P(X \geq x). \qquad \blacksquare$$

1.2.2 Varianza

Definición 27 *(**Varianza**) Si X es una v.a.d, tal que $E\left(X^2\right)$ converge y $E(x) = \mu_X$. Se define la varianza de x por:*

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2\right],$$

y en general

$$Var(g(X)) = \sigma_{g(X)}^2 = E\left[\left(g(X) - \mu_{g(X)}\right)^2\right].$$

La varianza indica que tanto varían los valores de la variable con respecto a su esperanza, está nos permite medir la variabilidad de la distribución. La varianza tiene las unidades de X al cuadrado.

Definición 28 *Sea X una v.a.d. Se define la desviación estándar de X como*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Ejemplo 97 *Considere las variables aleatorias:*

$$\begin{aligned} X &: \ \#\ \text{de veces que un estudiante del grupo A llega tarde a clases.} \\ Y &: \ \#\ \text{de veces que un estudiante del grupo B llega tarde a clases.} \end{aligned}$$

Ambas variables se consideran por semana. Suponga que las funciones de distribución de probabilidad de estas variables son:

x	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	0.15	0.15	0.5	0.15	0.05
$f_Y(x)$	0.25	0.2	0.2	0.2	0.15

El director de la institución está preocupado por la cantidad de llegadas tardías en ambos grupos. Se desea analizar estas faltas en ambos grupos. Note que

$$\begin{aligned} E(X) &= 0.15 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.15 + 4 \cdot 0.05 = 1.8 \\ E(Y) &= 0.2 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.15 = 1.8 \end{aligned}$$

Por lo tanto, ambas variables tienen el mismo valor esperado. Esto quiere decir que tanto en A como B, se espera que el número de tardía por estudiante en una semana es de 1.8. Sin embargo, la espera nos da poca información de las variables, particularmente note que la probabilidad de tener 0 *llegadas tardía no influye directamente sobre el cálculo de la esperanza. Ahora determinemos la varianza de las variables:*

x	0	1	2	3	4	*Total*
$f_X(x)$	0.15	0.15	0.5	0.15	0.05	1
$(x-1.8)^2$	3.24	0.64	0.04	1.44	4.84	
$(x-1.8)^2 f_X(x)$	0.486	0.096	0.02	0.216	0.242	$1.06 = Var(X)$

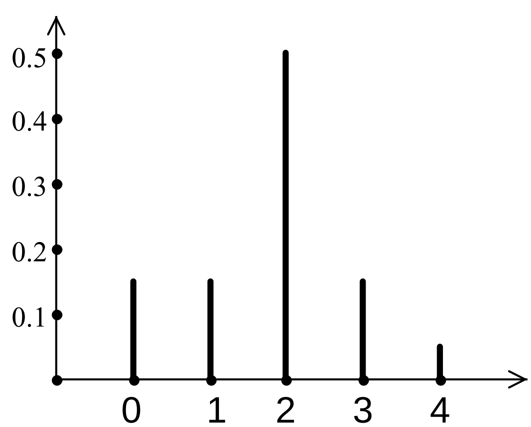
y

$$\begin{gathered} Var(Y) = (0-1.8)^2\, 0.25 + (1-1.8)^2\, 0.2 + (2-1.8)^2\, 0.2 \\ + (3-1.8)^2\, 0.2 + (4-1.8)^2\, 0.15 = 1.96 \end{gathered}$$

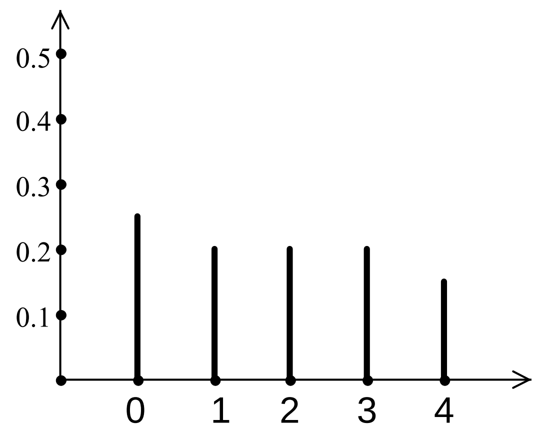
por lo tanto

$$\sigma_X = \sqrt{1.06} \approx 1.03 \quad y \quad \sigma_y = \sqrt{1.96} \approx 1.4$$

Esto indica que hay mayor variabilidad en las tardías del grupo B, esto se puede aprecias en los histogramas:



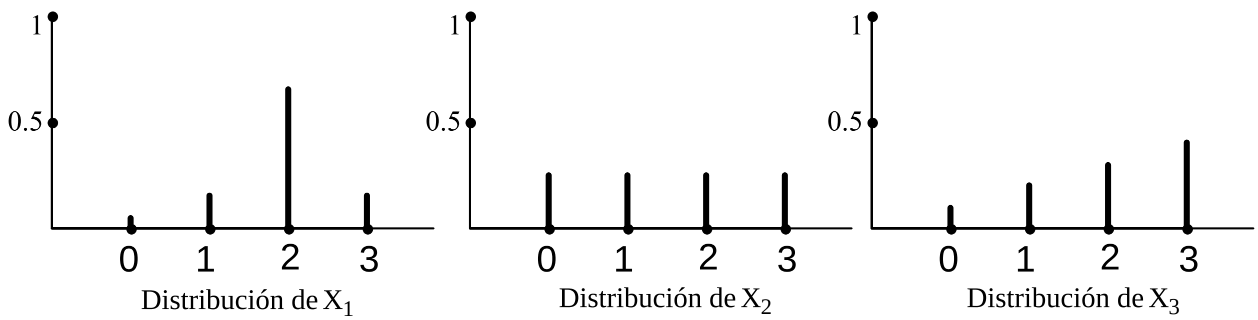
Distribución de X



Distribución de Y

Note que la distribución de Y tiende a ser más constante, esto es un indicativo de mayor variabilidad.

Ejercicio 28 *Considere las variables aleatorias X_1, X_2 y X_3 que indican el número de trabajadores que faltan por día a la empresa A, B y C respectivamente, y sus distribuciones están representadas por*



Ordene de mayor a menor las esperanzas de las variables y también sus varianzas.

Teorema 45 *Sea X una v.a.d. con rango finito ($|R_X| = n$) y función de distribución constante, entonces*

$$Var(X) = \frac{\sum_{x_i \in R_X} (x_i - \mu_X)^2}{n}$$

Prueba. *Ejercicio.* ■

Ejercicio 29 *Sea X una v.a.d. cuya función de distribución está dada por*

$$f_X(x) = \frac{5-x}{10}, \text{ con } x = 1, 2, 3, 4.$$

Determine $E(X^2), E(X^2) - \mu_X^2$, $Var(X)$

Teorema 46 *(**Caracterización de la varianza**) Sea X una v.a.d. Se cumple que*

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2.$$

Prueba. *Note que*

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[(X-\mu_X)^2\right] \\ &= E\left(X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2\right) && \text{(fórmula notable)} \\ &= E\left(X^2\right) - 2\mu_X E(X) + E\left(\mu_X^2\right) && \text{(propiedades de la esperanza)} \\ &= E\left(X^2\right) - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 && \text{(propiedades de la esperanza)} \\ &= E\left(X^2\right) - \mu_X^2 \end{aligned}$$

■

Teorema 47 ***(Propiedades de la Varianza)*** *Sea c una constante, sean X, Y variables aleatorias discretas. Se tiene que:*

1. $Var(c) = 0$
2. $Var(X + c) = Var(X)$
3. $Var(cX) = c^2 Var(X)$
4. *Si X y Y son variables independientes* $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Prueba. *Se probará la 1 y la 3. La 2 queda de ejercicio. La 4 solo se enuncia, se demostración requiere del estudio del concepto de distribución conjunta para X y Y. Para la 1 note que*

$$\begin{aligned} Var(c) &= E\left[(c-\mu_c)^2\right] && \text{(definición de varianza)} \\ &= E\left[(c-c)^2\right] && \text{(Esperanza de una constante)} \\ &= E(0) \\ &= 0 && \text{(Esperanza de una constante)} \end{aligned}$$

Para la 3, se tiene que

$$\begin{aligned} Var(cX) &= E\left[(cX-\mu_{cX})^2\right] && \text{(definición de varianza)} \\ &= E\left[(cX-c\mu_X)^2\right] && \text{(propiedad de la esperanza)} \\ &= E\left[c^2(X-\mu_X)^2\right] \\ &= c^2E\left[(X-\mu_X)^2\right] && \text{(propiedad de la esperanza)} \\ &= c^2Var(X) && \text{(definición de varianza)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.3 (♣) Distribución condicional

Definición 29 *Sea X una v.a.d. con espacio muestral Ω, sea P una probabilidad sobre Ω. Considere el evento no nulo $B \subseteq \Omega$.*

1. *La función $f_{X|B} : R_X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f_{X|B}(k) = P(X = k|B)$$

es llamada función de probabilidad para X condicionada a B.

2. Se define la esperanza de X dado B por

$$E(X|B) = \sum_{x_i \in R_X} x_i f_X(x_i|B)$$

Teorema 48 *Sea X una v.a.d con espacio muestral Ω tal que $E(X)$ existe. Considere el evento $B \subseteq \Omega$ tal que $P(B)P(\overline{B}) > 0$. Se tiene que*

$$E(X) = E(X|B)P(B) + E(X|\overline{B})P(\overline{B})$$

Prueba. *Ejercicio.* ■

Teorema 49 *Sea X una v.a.d con espacio muestral Ω tal que $E(X)$ existe. Sean $B_1, B_2, ...$ una sucesión de eventos no nulos que forman una partición de Ω Se tiene que*

$$E(X) = \sum_i E(X|B_i)P(B_i).$$

Prueba. *Ejercicio.* ■

1.4 Función Generadora de Momentos

Definición 30 *Sea X una v.a.d, se define el momento de orden k como $E(X^k)$.*

Note que con el momento de orden 1 y el momento de orden 2 de una *vad* X se puede hallar su esperanza y varianza ya que

$$E(X) = E(X^1) \quad y \quad Var(X) = E(X^2) - \left[E(X^1)\right]^2$$

Se quiere hallar una función que permita determinar los momentos de X, particularmente los momentos de orden 1 y 2.

Definición 31 *(**Función Generadora de Momentos**)Sea X una v.a.d., se define la Función Generadora de Momentos para X por*

$$m_X(t) = E(e^{Xt})$$

Teorema 50 *Sea X una v.a.d. cuya función generadora existe, se cumple que*

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k).$$

Prueba. *Recuerde que por la serie exponencial* $e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^n}{n!}$ *entonces*

$$\begin{aligned}
m_X(t) &= E\left(e^{Xt}\right) = \sum_{x \in R_X} e^{xt} f_X(x) && \textit{(definición de } m_X \textit{ y esperanza)} \\
&= \sum_{x \in R_X} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^n}{n!} \right) f_X(x) && \textit{(serie exponencial)} \\
&= \sum_{x \in R_X} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^n}{n!} f_X(x) && \textit{(distributividad)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x \in R_X} \frac{x^n t^n}{n!} f_X(x) && \textit{(conmutatividad)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{x \in R_X} x^n f_X(x) && \textit{(distributividad)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E\left(X^k\right) && \textit{(definición de esperanza)} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

El teorema siguiente justifica el nombre de la función m_X.

Teorema 51 *Sea* X *una v.a.d. La enésima derivada de* m_X *evaluada en* 0 *es igual al momento de orden* n *es decir*

$$m_X^{(n)}(0) = E(X^n).$$

Prueba. *Por el teorema anterior se tiene que* $m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E\left(X^k\right)$ *derivemos varias veces esta función (estas derivadas son respecto a* t *que es la variable de la función):*

$$m_X(t) = E(0) + tE(X) + \frac{t^2}{2!} E\left(X^2\right) + \frac{t^3}{3!} E\left(X^3\right) + \frac{t^4}{4!} E\left(X^4\right) + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E\left(X^k\right)$$

$$m_X'(t) = E(X) + tE\left(X^2\right) + \frac{t^2}{2!} E\left(X^3\right) + \frac{t^3}{3!} E\left(X^4\right) + \frac{t^4}{4!} E\left(X^5\right) + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E\left(X^{k+1}\right)$$

$$m_X''(t) = E\left(X^2\right) + tE\left(X^3\right) + \frac{t^2}{2!} E\left(X^4\right) + \frac{t^3}{3!} E\left(X^5\right) + \frac{t^4}{4!} E\left(X^6\right) + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E\left(X^{k+2}\right)$$

$$m_X'''(t) = E\left(X^3\right) + tE\left(X^4\right) + \frac{t^2}{2!} E\left(X^5\right) + \frac{t^3}{3!} E\left(X^6\right) + \frac{t^4}{4!} E\left(X^7\right) + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E\left(X^{k+3}\right)$$

Así, en general la enésima derivada de la función m_X *es*

$$m_X^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E\left(X^{k+n}\right) = E(X^n) + tE\left(X^{n+1}\right) + \frac{t^2}{2!} E\left(X^{n+2}\right) + ...$$

Evaluando en $t=0$ se obtiene que

$$m_X^{(n)}(0) = E(x^n). \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 98 *Considere la variable aleatoria X que indica el número de llamadas que entran a una central de radio por minuto. Suponga que*

$$m_X(t) = e^{3\left(e^t-1\right)}$$

Determinemos el número promedio de llamadas que ingresan por minuto a la central de radio y la varianza de X. Note que

$$\begin{aligned} m_X'(t) &= e^{3\left(e^t-1\right)} \cdot 3e^t = 3e^{3e^t+t-3}. \\ m_X''(t) &= 3e^{3e^t+t-3} \cdot \left(3e^+ + 1\right) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E(X) = m_X'(0) = 3 \quad y \quad E\left(X^2\right) = m_X''(0) = 12$$

Así, ingresan en promedio 3 llamadas por minuto. Además

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = 12 - 3^2 = 3.$$

Ejercicio 30 *Sea Y una v.a.d. donde su función generadora de momentos está dada por*

$$m_Y(t) = \frac{e^t}{2-e^t}.$$

Determine la esperanza y varianza de Y. $R/\quad E(X) = 2, Var(X) = 2$

1.5 Ejercicios

1. Sea Y una v.a.d. con rango $R_y = \{1,2,3,4,5\}$

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{y} \left(kp + \frac{1}{20}\right)$$

con p constante.

(a) Determine el valor de p de manera que $f_Y(y)$ sea una función de distribución de probabilidad $R/\quad \frac{1}{140}$

(b) Halle el valor de $P(Y \text{ es par} \mid Y \leq 2)$ $R/\quad \frac{145}{194}$

2. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = k\left(\frac{2}{5}\right)^{4x+2} \qquad si\ x = 0, 1, 2, 3, ...$$

Determine el valor de k. $R/ \quad k = \frac{609}{100}$

3. Sean X, Y dos variables aleatorias discretas tales que:

$$Y = 3X + 5, E(Y) = 14, E\left(Y^2\right) = 250$$

Determine $E(X), Var(X)$. $R/ \quad E(x) = 3, Var(X) = 6$

4. Un vendedor de automóviles recibe un salario base semanalmente de 50 000 colones, y una cantidad X en miles de colones, que corresponde a una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{kx+1}{3} & si \quad x = 1, 2, ..5 \\ 0 & en \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

con k constante

   (a) Determine el valor de k $R/ \quad k = -\frac{2}{15}$
   (b) Halle la función de distribución acumulada de X
   (c) Determine el salario esperado por el vendedor. $R/ \quad 52556$

5. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = k\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+3} \qquad si\ x = 0, 1, 2, 3, ...$$

Determine el valor de k. $R/ \quad k = 120$

6. Sea X una $v.a.d.$ con rango $R = \{2, 4, 6, 8\}$ y función de distribución acumulada

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 & si & k < 2 \\ 0.2 & si & 2 \leq k < 4 \\ 0.6 & si & 4 \leq k < 6 \\ 0.8 & si & 6 \leq k < 8 \\ 1 & si & k > 8 \end{cases}$$

   (a) Determine la función de distribución de probabilidad de X.

(b) Determine $E(x)$ y $Var(x)$. $R/ \quad E(x) = 4.8, Var(x) = 4.16$

7. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es
$$f(x) = k\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \quad si\ x = 0, 1, 2, 3, ...$$
Determine el valor de k. $R/ \quad k = 6$

8. Sea X una $v.a.d.$ Pruebe que $(E(X))^2 \leq (E(|X|))^2 \leq E(X^2)$

9. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es
$$f(x) = \frac{k}{x^2} \quad si\ x = 1, 2, 3, ...$$
Determine el valor de k. ¿Existe $E(X)$?

10. (♣) Sean X, Y variables aleatorias discretas tales que $Y = g(X)$. Para cada uno de los siguientes casos determine f_Y en términos de f_X.

(a) $g(X) = -2X$ $R/ \quad f_Y(y) = f_X\left(\frac{-y}{2}\right)$

(b) $g(X) = \max\{0, X\}$ $R/ \quad f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) & si \quad y > 0 \\ \sum\limits_{\substack{x_i \in R_X \\ x_i \leq 0}} f_X(\,x_i) & si \quad y = 0 \end{cases}$

(c) $g(X) = |X| = \max\{0, X\} + \max\{0, -X\}$ $R/ \quad f_Y(y) =$
$\begin{cases} f_X(y) + f_X(-y) & si \quad y \neq 0 \\ f_X(0) & si \quad y = 0 \end{cases}$

(d) $g(X) = 6 \cdot sgn(X)$ donde $sgn(X) = \begin{cases} 1 & si \quad X \geq 0 \\ -1 & si \quad X = 0 \end{cases}$. $R/ \quad f_Y(y) =$
$\begin{cases} \sum\limits_{\substack{x_i \in R_X \\ x_i > 0}} f_X(\,x_i) & si \quad y = -6 \\ f_X(0) & si \quad y = 0 \\ \sum\limits_{\substack{x_i \in R_X \\ x_i < 0}} f_X(\,x_i) & si \quad y = 6 \end{cases}$

11. (♣) Sea X una $v.a.d.$ con distribución constante y rango $R_x = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sea B el evento $a \leq X \leq b$ con $1 \leq a < b \leq n$. Determine $f_{X|B}(x)$. $R/ \quad f_{X|B}(y) =$
$\begin{cases} \dfrac{1}{b - a + +1} & si \quad a \leq x \leq b \\ f_X(0) & en \quad \text{otro caso} \end{cases}$

2 Distribuciones de variables discretas importantes

2.1 Distribuciones modeladas utilizando urnas

2.1.1 Modelo de urnas

Suponga que se tiene una urna con N bolas distintas: b blancas y r rojas, con $N = b + r$. Analizaremos el proceso de extracción de bolas de la urna

Primera extracción

Se saca una bola de la urna, considere el evento A: la bola extraída es blanca. Si la bola sacada es blanca se dice que se obtuvo un éxito y si la bola es roja se dice que se obtuvo un fracaso. Así la probabilidad de éxito y de fracaso son respectivamente:

$$P(A) = \frac{b}{N} = p, \qquad P\left(\overline{A}\right) = \frac{r}{N} = q.$$

Note que $p + q = 1 \Longrightarrow q = 1 - p$.

Extracciones siguientes

Si se continúan sacando bolas de la urna, las extracciones se pueden realizar de dos formas:

1. Extracciones con reposición. En éstas se devuelve la bola extraída a la urna antes de la siguiente extracción. La probabilidad de éxito y de fracaso son invariantes.

2. Extracciones sin reposición. En éstas la bola extraída no se introduce en la urna para hacer la siguiente extracción. La probabilidad de éxito y de fracaso son variantes.

Definición 32 *(Prueba de Bernoulli) Una prueba de Bernoulli es el experimento asociado a la extracción de la bola de la urna.*

Definición 33 *Si se realizan varias pruebas de Bernoulli, estas pueden ser*

1. *independientes si se realizan las extracciones con reposición.*

2. *dependientes si se realizan las extracciones sin reposición.*

Ejemplo 99 *Se realizan dos pruebas de Bernoulli independientes. Suponga que la probabilidad de obtener éxito es p. El espacio muestral es*

$$\Omega = \{EE, FF, EF, FE\}$$

donde E significa éxito y F fracaso, así la probabilidad de obtener un éxito es

$$P(\{EF, FE\}) = P(EF) + P(FE)$$

dado que las pruebas son independientes entonces

$$P(\{EF, FE\}) = P(E)P(F) + P(F)P(E) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

Ejemplo 100 *Se realizan tres pruebas de Bernoulli dependientes. Suponga que la probabilidad de obtener éxito inicialmente es p y en cada prueba ésta disminuye en un factor de $\frac{1}{5}$. La probabilidad de obtener 2 éxitos es*

$$\begin{aligned} P(\{EEF, EFE, FEE\}) &= P(EEF) + P(EFE) + P(FEE) \\ &= p\left(\frac{p}{5}\right)\left(1-\frac{p}{25}\right) + p\left(1-\frac{p}{5}\right)\left(\frac{p}{25}\right) + (1-p)\left(\frac{p}{5}\right)\left(\frac{p}{25}\right) \\ &= \frac{31}{125}p^2 - \frac{3}{125}p^3 \end{aligned}$$

2.1.2 Distribución Binomial

Teorema 52 *Suponga que:*

1. *Se realizan n pruebas de Bernoulli independientes*
2. *p es la probabilidad de éxito*
3. *Se define la v.a.d. $X : \#$ de éxitos obtenidos en las n extracciones.*

   Entonces la función de distribución de X esta dada por

$$f_X(k) = P(X = k) = C(n,k)\, p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{con } k = 0, 1, 2, .., n.$$

   Se dice que X sigue una distribución binomial con parámetros n y p, y se escribe

$$X \sim B(n,p).$$

Prueba. *Denotemos con E : éxito y con F : fracaso. Si $X = k$ significa que en n pruebas se obtuvieron k éxitos y $(n-k)$ fracaso, cada resultado está formado por*

$$\underbrace{E, ...E}_{k}, \underbrace{F, ..., F}_{n-k}$$

Dado que las pruebas son independientes, cada uno de estos resultados tiene la misma probabilidad ésta es

$$\underbrace{P(E), ...P(E)}_{k}, \underbrace{P(F), ..., P(F)}_{n-k} = p^k (1-p)^{n-k}$$

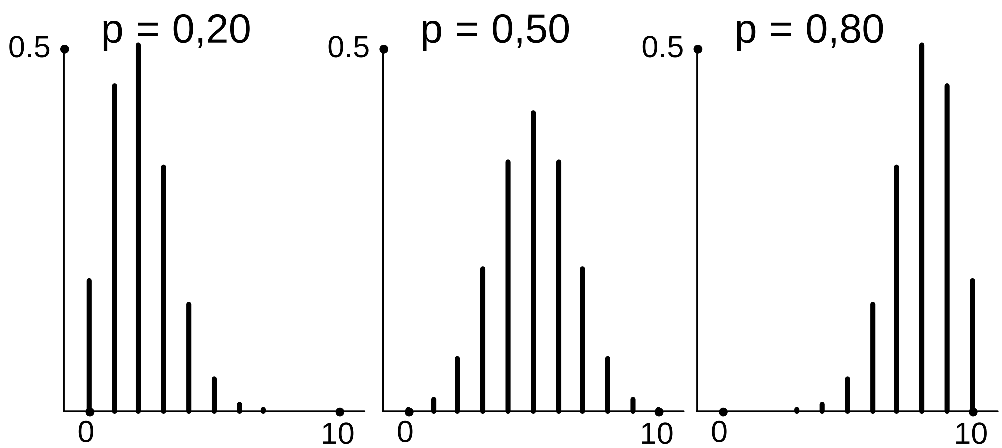
¿Y cuántos resultados hay? Hay tantos como anagramas de $E...EF...F$, estos son $C(n,k)$. Así

$$f_X(k) = P(X = k) = C(n,k)\, p^k (1-p)^{n-k}.$$

Note que f_X cumple las condiciones mínimas para ser función de probabilidad , pues $f_X(k) \geq 0$ y además por el Binomio de Newton (por eso se le llama distribución binomial):

$$\sum_{k=0}^{n} f_X(k) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1 \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 101 *Seguidamente se presentan las representaciones gráficas de tres distribuciones binomiales para $n = 10$:*



En general si $p = 0,5$ la distribución es simétrica con respecto a su media. Si $p < 0.5$ es asimétrica y la probabilidad es mayor a la izquierda. Finalmente, si $p > 0.5$ es asimétrica y la probabilidad es mayor a la derecha.

No existe una función de distribución de probabilidad acumulada explícitamente para la Binomial, sin embargo se utilizan tablas para hallar su valor para ciertos valores de sus parámetros n y p. Así, si $X \sim B(n,p)$ se denota la función de distribución de probabilidad acumulada por

$$F_X(k) = B(k; n, p),$$

algunos de sus valores se hallan por medio de las tablas adjuntas que son de la forma:

$n =$ ____

$k \diagdown p$			p
			$\vdots$
k	$\ldots$	$\ldots$	$B(k;n,p)$

Ejemplo 102 *Si* $X \sim B(16, 0.7)$ *entonces*

$$\begin{aligned} P(X \geq 12) &= 1 - P(X < 12) = 1 - P(X \leq 11) \\ &= 1 - B(11; 16, 0.7) = 1 - 0.5501 = 0.4499 \end{aligned}$$

Ejemplo 103 *Un vendedor ambulante de enciclopedias de matemáticas MAR UNO ofrece la enciclopedia a 20 personas por día y la probabilidad de que una persona la adquiera es de* 0.2.

1. *¿Cuál es la probabilidad de que un vendedor venda más de 6 enciclopedias en un día?*

$$\begin{gathered} X: \text{ número de enciclopedias vendidas por día} \\ X \sim B(20, 0.2) \\ P(X > 6) = 1 - B(6; 20, 0.2) = 1 - 0.9133 = 0.0867 \end{gathered}$$

   Así, la probabilidad de que un vendedor venda más de 6 enciclopedias en un día es de aproximadamente el 8.67%.

2. *Para ser vendedor distinguido de la semana (7 días), el vendedor debe haber vendido en al menos 5 días de la semana más de 6 enciclopedias en cada uno de estos días. ¿Cuál es la probabilidad de que un vendedor sea distinguido?*

$$\begin{gathered} Y: \text{ número de días en los que se vende más de 6 enciclopedias} \\ \text{Note que un día es exitoso si vende más de 6 enciclopedias, la} \\ \text{probabilidad de que un día sea exitoso, por (1) es } 0.0867. \\ Y \text{ indica el número de días exitosos de } n = 7, \text{ por lo tanto:} \\ Y \sim B(7, 0.0867) \\ P(Y \geq 5) = \sum_{k=5}^{7} C(7, k)(0.0867)^k (0.9133)^{7-k} = 8.85629 \times 10^{-5} \end{gathered}$$

   Note que aquí se determinó el valor de la probabilidad sin utilizar las tablas ya que $p = 0.0867$ *no viene en la tabla y dado que son pocos valores de* Y *mayores igual a* 5, *se prefiere hallar la probabilidad con la fórmula en lugar de redondear* p.

Ejercicio 31 *Se lanza 10 veces una moneda y sea* X : # *de escudos obtenidos. Determine*

1. *La función de distribución de* X.
2. *La probabilidad de obtener* 4 *escudos.* $R/ \ \frac{105}{512}$
3. *La probabilidad de obtener al menos* 2 *escudos.* $R/ \ \frac{1013}{1024}$

2.1.3 Distribución Geométrica

Teorema 53 *Suponga que:*

1. *Se realizan pruebas de Bernoulli independientes*
2. *p es la probabilidad de éxito*
3. *Se define la v.a.d. Y : # de pruebas realizadas antes de obtener el primer éxito.*

   Entonces la función de distribución de Y está dada por

$$f_Y(k) = P(Y = k) = (1-p)^k p, \quad \text{con } k = 0, 1, 2, ...$$

Se dice que Y sigue una distribución geométrica con parámetro p, y se escribe

$$Y \sim G(p).$$

Prueba. *Ejercicio.* ■

Teorema 54 *Si $Y \sim G(p)$ entonces*

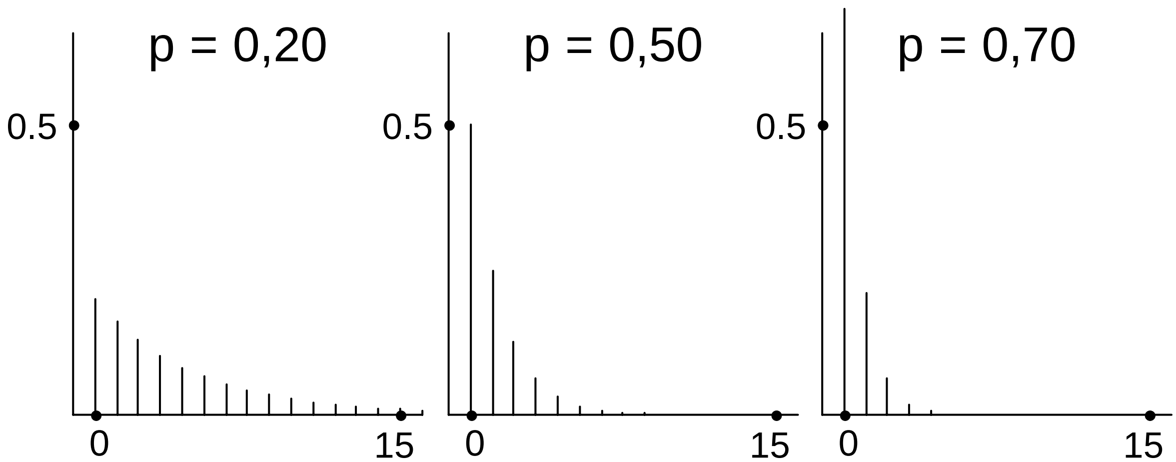
$$F_Y(k) = 1 - q^{k+1}, \text{ donde } q = 1-p.$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Prueba. *Si $k \in \mathbb{N}$ entonces*

$$\begin{aligned} F_Y(k) &= \sum_{i=0}^{k} f_Y(i) = \sum_{i=0}^{k} (1-p)^i p = p \sum_{i=0}^{k} (1-p)^i \\ &= p \cdot \frac{1-(1-p)^{k+1}}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^{k+1} = 1 - q^{k+1}. \end{aligned}$$ ■

Ejemplo 104 *Seguidamente se presentan las representaciones gráficas de tres distribuciones* *geométricas:*



En general, la distribución geométrica es muy asimétrica, la probabilidad se concentra a la izquierda.

Ejemplo 105 *Una tri-jugada para un dado consiste en lanzar un dado hasta obtener un múltiplo de tres o detenerse: se gana el juego si se obtiene un múltiplo de tres antes del tercer lanzamiento, en caso contrario se pierde. Don Edgar realiza 10 tri-jugadas con un dado, ¿Cuál es la probabilidad de que gane por lo menos 8 tri-jugadas?*

Note que primero es necesario hallar la probabilidad de ganar una tri-jugada, para ello se define

$$X : \# \text{ de lanzamientos antes de obtener un múltiplo de 3}$$

Si se interpreta el éxito como obtener un múltiplo de 3 *en un dado, entonces la probabilidad de éxito es* $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ *y* X *es el número de lanzamientos ("pruebas") antes de obtener un éxito, así*

$$X \sim G\left(\frac{1}{3}\right)$$

La probabilidad de ganar una tri-jugada es

$$p = P(X \leq 3) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81}$$

Ahora, para determinar la probabilidad de ganar por lo menos 8 tri-jugadas, se define la variable

$$Y : \# \text{ de tri-jugadas ganadas de 10}$$

Note que $Y \sim B(10,p) = B\left(10, \frac{65}{81}\right)$ *por lo tanto la probabilidad de que Don Edgar gane por lo menos 8 tri-jugadas es*

$$\begin{aligned} P(Y \geq 8) &= \sum_{k=8}^{10} C(10,k)\, 0.802\,469^k \,(1-0.802\,469\,)^{10-k} \\ &= 0.301\,932 + 0.272\,577 + 0.110\,734 = 0.685\,243 \end{aligned}$$

Ejercicio 32 *Se lanza una moneda varias veces hasta obtener un escudo. ¿Cuál es la probabilidad de que hasta en el sexto lanzamiento se obtenga escudo?* *R/* $\frac{1}{64}$

2.1.4 Distribución Hipergeométrica

Ejercicio 33 *Se tienes dos canastas con bolas blancas y rojas:*

Canasta	*Bolas blancas*	*Bolas rojas*
1	*6*	*4*
2	*12*	*10*

De cada canasta se sacan al azar 9 bolas sin reposición, considere las variables

$$X_i: \text{ número de bolas blancas extraídas de la canasta } i$$

para $i = 1, 2$. *Determine el rango de las variables* X_1 *y* X_2.

Ejemplo 106 *Suponga que de una urna que tiene* b *bolas blancas y* r *bolas rojas se extraen al azar* n *bolas sin reposición. Sea* X *: el número de bolas blancas extraídas de la urna. ¿Cuál es el valor mínimo y máximo de* X*? Para ello observe algunos casos*

b (bolas blancas)	*6*	*6*	*6*	*6*	*6*
r (bolas rojas)	*4*	*4*	*4*	*4*	*4*
n (bolas extraídas)	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Valor mínimo de X	*0*	*0*	*1*	*2*	*3*
Valor máximo de X	*3*	*4*	*5*	*6*	*6*

Note que valor mínimo de bolas blancas extraídas depende del número de rojas en la urna con respecto al total de bolas extraídas, así

$$\min X = \begin{cases} 0 & si \quad n \leq r \\ n-r & si \quad n > r \end{cases} = \begin{cases} 0 & si \quad n-r \leq 0 \\ n-r & si \quad n-r > 0 \end{cases} = \max\{0, n-r\}.$$

Similarmente, el valor máximo de X *es*

$$\max X = \begin{cases} b & si \quad n \geq b \\ n & si \quad n < b \end{cases} = \min\{n, b\}.$$

Teorema 55 *Suponga que:*

1. *Se realizan n pruebas de Bernoulli dependientes*
2. *Hay b éxitos y r fracasos ($b + r = N$, note que $n \leq N$)*
3. *Se define la v.a.d. $Z : \#$ de de éxitos obtenidos en las n extracciones.*

   Entonces la función de distribución de Z está dada por

$$\begin{aligned} f_Z(k) &= P(Z = k) = \frac{C(b,k)\,C(N-b,n-k)}{C(N,n)}, \\ \textit{con } k &= j = \max\{0, n-r\},, j+1, j+2, ..., \min\{n,b\}. \end{aligned}$$

Se dice que Z sigue una distribución hipergeométrica con parámetros n, N y b, y se escribe

$$Z \sim H(n, N, b).$$

Prueba. *El total de maneras de extraer n bolas de una urna de N es*

$$C(N, n).$$

De estás aquellas que cumple que $Z = k$ son aquellas en las que se extraen k éxitos y $n - k$ fracasos, como en la urna hay b éxitos y r fracasos, entonces las maneras de extraen n bolas que cumplen que $Z = k$ son

$$C(b,k)\,C(N-b,n-k).$$

Por lo tanto,

$$f_Z(k) = P(Z = k) = \frac{C(b,k)\,C(N-b,n-k)}{C(N,n)}.$$

Note que f_Z cumple las condiciones mínimas para ser función de probabilidad , pues $f_Z(k) \geq 0$ y además :

$$\sum_{k=\max\{0,n-r\}}^{\min\{n,b\}} f_Z(k) = \frac{1}{C(N,n)} \sum_{k=\max\{0,n-r\}}^{\min\{n,b\}} C(b,k)\,C(N-b,n-k)$$

Para que esta suma sea 1 se debe probar que

$$\sum_{k=\max\{0,n-r\}}^{\min\{9,b\}} C(b,k)\,C(N-b,n-k) = C(N,n).$$

Lo cual es una consecuencia del principio de la suma de conteo, ya que para determinar el número de maneras de tomar n bolas N (hay b blancas y r rojas), éstas se pueden clasificar en casos sobre el número de bolas blancas que se toman: los casos van desde el valor mínimo de blancas ($\max\{0, n-r\}$) hasta su valor máximo ($\min\{n, b\}$). ■

Ejemplo 107 *En la pulpería La MINITA se juega el juego TAPAS. Este juego consiste en 10 tapas de las cuales* 3 *están marcadas con una equis, el jugador toma 5 tapas al azar, si obtiene al menos dos tapas con una equis, gana el juego. El costo del juego es de 1000 colones y si gana se obtienen 2000 colones. Si don Juan juega 14 veces el juego TAPAS ¿Cuál es la probabilidad de que recupere por lo menos lo gastado?*

Primero se determine la probabilidad de ganar el juego.

$$X : \#\ \textit{de tapas con equis de las 5 tomadas en el juego}$$
$$\textit{Note que } X \sim H(5, 10, 3)$$
$$\textit{La probabilidad de ganar un juego es:}$$
$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{C(3,2)\,C(7,3) + C(3,3)\,C(7,2)}{C(10,5)} = \tfrac{1}{2}$$

Ahora, considere la variable

$$Y : \#\ \textit{de juegos ganados de 14 juegos de TAPAS}$$
$$Y \sim B(14, 0.5)$$

Al jugar 14 juegos se gasto 14000 colones, para recuperar por lo menos lo gastado se debe ganar al menos 7 juegos. Así, la probabilidad de que recupere por lo menos lo gastado es

$$P(Y \geq 7) = 1 - F_Y(6) = 1 - 0.3953 = 0.6047.$$

Ejercicio 34 *Se tiene un lote de 20 computadoras, de ellas* 7 *son defectuosas. Una persona se lleva* 10 *de esas computadoras. Cuál es la probabilidad de que*

1. *2 le salgan defectuosas.* $R/\ \frac{189}{1292}$

2. *al menos* 1 *le salga defectuosa.* $R/\ \frac{645}{646}$

2.2 Distribución de Poisson

Esta distribución se utiliza para describir la variable W definida por el número de resultados que se obtiene en una unidad o intervalo, para experimentos que cumplan los siguientes requisitos:

1. Se necesita fijar una unidad. Así la variable W será el número de resultados por unidad. Por ejemplo, la unidad puede ser de tiempo (un minuto) o de longitud (un metro).

2. Se debe establecer el número promedio de resultados por unidad, esta se denota por λ.

3. Debe existir otra unidad muy pequeña de longitud h que cumpla las siguientes condiciones:

(a) La probabilidad de obtener un resultado en esa unidad es muy pequeña y constante. Esta es $\lambda h + o(h)$ donde $o(h)$ cumple que $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$

(b) La probabilidad de obtener dos o más resultados en esa unidad es casi cero, es $o(h)$

(c) Varias de esas unidades deben ser estadísticamente independientes.

Bajo esas condiciones, se obtiene la fórmula de la Distribución de Poisson, dada en el siguiente teorema.

Teorema 56 *Bajo las condiciones anteriores, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria W, definida como el número de resultados por unidad, está dada por*

$$f_W(k) = P(W = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ con } k = 0, 1, 2, ...$$

donde λ es el número promedio de resultados por unidad. Se dice que X sigue una distribución de Poisson con parámetro λ, y se escribe

$$W \sim P(\lambda).$$

Prueba. (♣) *Sea $W(t)$ el número de resultados en t unidades, la cual tiene n subintervalos de tamaño $h = \frac{t}{n}$. Note que*

$$P(W(t) = k) = \underbrace{P\begin{pmatrix}\text{Hay } k \text{ subintervalos de } n \text{ de} \\ \text{tamaño } h \text{ que contienen exacta-} \\ \text{mente un resultado y } n-k \text{ con } 0\end{pmatrix}}_{P(A)} + \underbrace{P\begin{pmatrix}W = k \text{ y hay al menos un} \\ \text{subintervalo de } n \text{ de tamaño} \\ h \text{ que contiene 2 o más resultados}\end{pmatrix}}_{P(B)}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} P(B) &\leq P\begin{pmatrix}\text{al menos un subintervalo de tamaño} \\ h \text{ que contiene 2 o más resultados}\end{pmatrix} = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \begin{matrix}\text{el subintervalo } i \text{ de tamaño} \\ h \text{ contiene 2 o más resultados}\end{matrix}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} P\begin{pmatrix}\text{el subintervalo } i \text{ de tamaño} \\ h \text{ contiene 2 o más resultados}\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} o\left(\frac{t}{n}\right) = n \cdot o\left(\frac{t}{n}\right) = t\frac{o(h)}{h} \end{aligned}$$

Note que para t fijo, si $n \to \infty$, entonces $h = \frac{t}{n} \to 0$ y por lo tanto $\frac{o(h)}{h} \to 0$. Así

$$\text{Si } n \to \infty \text{ entonces } P(B) \to 0$$

Por otro lado, la probabilidad de que no se tengan resultados en un subintervalo de longitud h es $1 - \lambda h - o(h)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
P(A) &= C(n,k)\left(\lambda\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^k \left(1 - \lambda\frac{t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{\left(\lambda t + t\dfrac{o\left(\dfrac{t}{n}\right)}{t/n}\right)^k}{n^k}\frac{\left(1 - \lambda\frac{t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n}{\left(1 - \lambda\frac{t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^k} \\
&= 1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{\left(\lambda t + t\frac{o(h)}{h}\right)^k}{k!}\frac{\left(1 - \lambda\frac{t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n}{\left(1 - \lambda\frac{t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^k}
\end{aligned}$$

Recuerde que cuando $n \to \infty$:

$$\left(1 - \lambda\frac{t}{n} - o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{\lambda t + t\dfrac{o\left(\dfrac{t}{n}\right)}{t/n}}{n}\right)^n \to e^{-\lambda t}$$

Por lo tanto, si $n \to \infty$:

$$P(A) \to \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

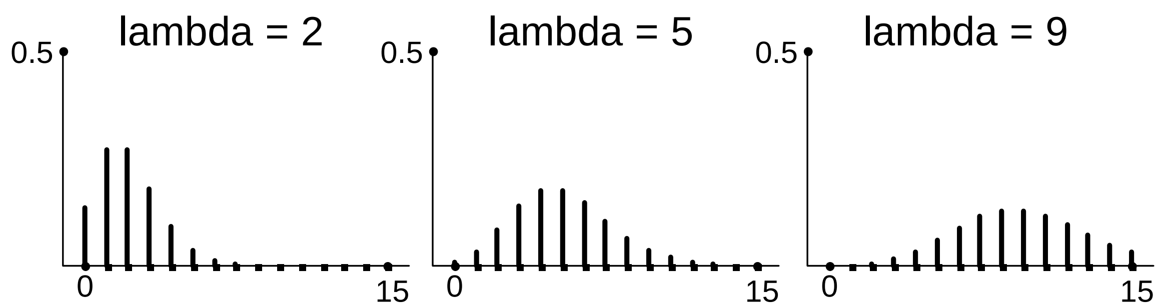
y por lo tanto, se tiene que

$$P(W(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \text{ para } k = 0, 1, 2, .. \qquad \blacksquare$$

No existe una función de distribución de probabilidad acumulada explícitamente para la Poisson, sin embargo se adjunta una tabla que brinda el valor de esta función para ciertos valores λ la cuál es de la forma:

$k \diagdown \lambda$			λ
			$\vdots$
k	$\ldots$	$\ldots$	$F_W(k)$

Ejemplo 108 *Seguidamente se presentan las representaciones gráficas de tres distribuciones de Poisson:*



Ejemplo 109 *El país C, está por hacer un referéndum para la aprobación del Tratado de Libre Comercio (TLC) con el país E y se ha abierto la oficina CONOZCA DEL TLC ANTES DE VOTAR. Se ha determinado que el número de personas que acuden a la oficina por hora sigue una distribución de Poisson con media* 2 *personas. Una hora es laboriosa si acuden al menos 4 personas a la oficina.*

1. *¿Cuál es la probabilidad de recibir más de 15 personas en* 6 *horas?*

$$X : \# \text{ de personas que acuden a la oficina en 6 horas}$$

Dado en una hora acuden en promedio 2 *personas a la oficina, entonces en* 6 *horas acuden en promedio 12 personas. Entonces* $X \sim P(12)$ *y la probabilidad de recibir más de 15 personas en* 6 *horas es*

$$P(X > 15) = 1 - F_X(15) = 1 - 0.8444 = 0.1556$$

2. *Si el viernes, la oficina abre a las 8:00am, ¿Cuál es la probabilidad de que la hora* 4*pm a* 5*pm sea la primer hora laboriosa del día?* (5 *puntos*)

$$Y : \# \text{ de personas que acuden a la oficina en una hora}$$

Note que $Y \sim P(2)$, *por lo tanto la probabilidad de que una hora sea laboriosa es*

$$P(Y \geq 4) = 1 - F_Y(3) = 1 - 0.8571 = 0.1429$$

Considere la variable

$$Z : \# \text{ de horas antes de de obtener una hora laboriosa}$$

Note que $Z \sim G(0.1429)$, *por lo tanto la probabilidad de que la hora* 4*pm a* 5*pm sea la primer hora laboriosa del día es*

$$P(Z = 8) = (1 - 0.1429)^8 (0.1429) = 0.0416183$$

Ejercicio 35 *Suponga que los clientes de un cajero llegan a este servicio de acuerdo a una distribución de Poisson y se ha medido que en promedio llegan* 3 *clientes cada media hora. Determine la probabilidad de que en media hora cualquiera:*

1. *se presenten exactamente* 4 *clientes.* $R/\quad 0.168$

2. *lleguen más de* 4 *clientes* $R/\quad 0.1847$

2.3 Parámetros de las Distribuciones discretas estudiadas

Teorema 57 *Si $X \sim B(n,p)$ entonces $E(X) = np$ y $Var(X) = np(1-p)$.*

Prueba. *Recuerde que $f_X(k) = C(n,k)\,p^k(1-p)^{n-k}$, con $k = 0,1,2,..,n$. entonces*

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kf_X(k) = \sum_{k=0}^{n} kC(n,k)\,p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} kC(n,k)\,p^k(1-p)^{n-k}.$$

La suma obtenida no es fácil de obtener, ya que el factor k en cada sumando impide utilizar el binomio de Newton. Sin embargo, esta suma se puede ver como la derivada de otra que tenía con factor de cada sumando una potencia con exponente k. Así, considere la función

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)(pz)^k(1-p)^{n-k} = (pz+1-p)^n$$

al derivar esta función se obtiene que

$$\begin{aligned} g'(z) &= \sum_{k=1}^{n}\left(C(n,k)\,k\,(pz)^{k-1}\cdot p\,(1-p)^{n-k}\right) = n\,(pz+1-p)^{n-1}\cdot p \\ &\Longrightarrow\ g'(z) = \sum_{k=1}^{n}\left(kC(n,k)(pz)^{k-1}\,p\,(1-p)^{n-k}\right) = np\,(pz+1-p)^{n-1} \end{aligned}$$

Evaluando esta derivada en $z=1$:

$$g'(1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} kC(n,k)\,p^k(1-p)^{n-k}}_{E(X)} = np\,(p+1-p)^{n-1} = np$$

Por lo tanto $E(X) = np$. Por otro lado la segunda derivada de g es

$$g''(z) = \sum_{k=1}^{n}\left(kC(n,k)(k-1)(pz)^{k-2}\,p^2(1-p)^{n-k}\right) = np\,(n-1)(pz+1-p)^{n-2}\,p$$

Evaluando en $z=1$:

$$g''(z) = \sum_{k=1}^{n}\left(k(k-1)\,C(n,k)\,p^k(1-p)^{n-k}\right) = np^2(n-1).$$

entonces

$$g''(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2C(n,k)\,p^k(1-p)^{n-k}}_{E(X^2)} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} kC(n,k)\,p^k(1-p)^{n-k}}_{E(X)} = np^2(n-1)$$

Por lo tanto

$$E\left(X^2\right) = E\left(X\right) + np^2\left(n-1\right) = np + np^2\left(n-1\right)$$

y finalmente

$$\begin{aligned} Var\left(X\right) &= E\left(X^2\right) - \mu_X^2 = np + np^2\left(n-1\right) - \left(np\right)^2 \\ &= np - np^2 = np\left(1-p\right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 110 *Un vendedor ambulante de enciclopedias de matemáticas MAR UNO recibe un salario base de 10 000 colones diarios, además recibe* 3000 *colones por cada enciclopedia que venda en el día. Si cada vendedor ofrece la enciclopedia a 20 personas por día y la probabilidad de que una persona la adquiera es de* 0.2*. Determine el salario promedio diario de un vendedor. ¿Cuál es la desviación estándar de este salario?*

Considere las variables

$$\begin{array}{ll} X: & \text{número de enciclopedias vendidas por día} \\ Z: & \text{salario diario de un vendedor} \end{array}$$

Note que

$$X \sim B\left(20, 0.2\right) \quad y \quad Z = 10000 + 3000X$$

entonces

$$E\left(Z\right) = 10000 + 3000E\left(X\right) = 10000 + 3000 \cdot 20 \cdot 0.2 = 22000.$$

$$Var\left(Z\right) = 3000^2 Var\left(X\right) = 3000^2 20 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 2.88 \times 10^7$$
$$\sigma_x = \sqrt{2.88 \times 10^7} = 5366.56$$

EL vendedor tiene un salario diario promedio de 22000 *con una desviación estándar de aproximadamente* 5366.56.

Teorema 58 *Si* $Y \sim G\left(p\right)$ *entonces* $E\left(Y\right) = \dfrac{1-p}{p}$ *y* $Var\left(Y\right) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Prueba. *Ejercicio.* $\blacksquare$

Teorema 59 *Si* $Z \sim H\left(n, N, b\right)$ *entonces* $E\left(Z\right) = \dfrac{bn}{N}$ *y* $Var\left(Z\right) = \dfrac{N-n}{N-1}\left(1 - \dfrac{b}{N}\right)\dfrac{bn}{N}$.

Teorema 60 *Si* $W \sim P\left(\lambda\right)$ *entonces*

$$E\left(W\right) = Var\left(W\right) = \lambda \quad y \quad m_W\left(t\right) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$$

Prueba. *Recuerde que* $f_W(k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, *con* $k = 0, 1, 2, ..$ *entonces*

$$m_W(t) = E\left(e^{Wt}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} f_W(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(e^t \lambda\right)^k}{k!}$$

La serie obtenida es la serie exponencial, por lo tanto

$$m_W(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}.$$

La derivada de esta función es $m_W'(t) = e^{\lambda\left(e^t-1\right)}\lambda$, *por lo tanto*

$$E(W) = m_W'(0) = \lambda.$$

Se deja de ejercicio demostrar que $Var(W) = \lambda$. ■

Seguidamente se presenta un resumen de las características de las distribuciones estudias.

Distribución	Binomial	Geométrica
Variable	X : # de éxitos obtenidos en las n extracciones con reposición. $X \sim B(n,p)$	Y : # de pruebas con reposición realizadas antes de obtener el primer éxito $Y \sim G(p)$
Función de distribución	$f_X(k) = C(n,k)\, p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, 2, .., n.$	$f_Y(k) = (1-p)^k p,$ $k = 0, 1, 2, ...$
Función acumulada	Tabla: $F_X(k) = B(k; n, p)$	$F_Y(k) = 1 - q^{k+1}$
Esperanza	np	$\dfrac{1-p}{p}$
Varianza	$np(1-p) = npq$	$\dfrac{1-p}{p^2}$

Distribución	Hipergeométrica	Poisson
Variable	Z : # de éxitos obtenidos en las n extracciones sin reposición. $Z \sim H(n, N, b)$	W : # de resultados obtenidos por unidad $W \sim P(\lambda)$
Función de distribución	$f_Z(k) = \dfrac{C(b,k)\, C(N-b, n-k)}{C(N,n)},$ $k = \max\{0, n-r\}, ..., \min\{n, b\}.$	$f_W(k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$ $k = 0, 1, 2, ...$
Función acumulada		$Tabla : F_w(k) = P(k; \lambda)$
Esperanza	$\dfrac{bn}{N}$	λ
Varianza	$\dfrac{N-n}{N-1}\left(1 - \dfrac{b}{N}\right)\dfrac{bn}{N}$	λ
Generadora		$e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$

2.4 Relación entre las distribuciones discretas estudiadas

2.4.1 Hipergeométrica y Binomial

Suponga que

$$X \sim H(n, N, b).$$

Si n, el número de extracciones, es pequeño al compararlo con el tamaño de la población N, entonces la probabilidad de obtener un éxito en cada extracción varía muy poco con respecto a la probabilidad de éxito inicial $\frac{b}{N}$, así los cálculos de probabilidad de X se pueden aproximar utilizando la distribución binomial con $p = \frac{b}{N}$:

$$X \underset{\text{aprox}}{\sim} B(n, p).$$

Ejemplo 111 *En un Bingo que se realizó para pintar y hacerle mejoras al colegio de una determina ciudad se vendieron* 2500 *cartones. Entre los cartones vendidos serán premiados al finalizar el evento, 300 cartones con un par de entradas al cine. Si la familia de Don Juan tiene 7 cartones, ¿cuál es la probabilidad de que don Juan se gane al menos* 4 *entradas al cine?*

$$X : \#\ \textit{de pares de entradas que se gana don Juan}$$
$$\textit{Note que } X \sim H(7, 2500, 300)$$

Así la probabilidad de que don Juan gane al menos 4 entradas al cine es exactamente

$$P(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{C(300,0)\, C(2200,7)}{C(2500,7)} + \frac{C(300,1)\, C(2200,6)}{C(2500,7)} \right)$$

Sin embargo, el valor $C(2500,7)$ es muy grande para una calculadora. Dado que $n = 7$ es pequeño con respecto a $N = 2500$ entonces

$$X \underset{aprox}{\sim} B\left(7, \frac{3}{25}\right)$$

Así

$$P(X \geq 2) \approx 1 - \left(C(7,0) \left(\frac{3}{25}\right)^0 \left(\frac{22}{25}\right)^7 + C(7,1) \left(\frac{3}{25}\right)^1 \left(\frac{22}{25}\right)^6 \right) \approx 0.201\,225$$

Utilizando una computadora, el valor de $P(X \geq 2)$ con la distribución original (Hipergoemétrica) es 0.201 076. *Note que la aproximación dada por la binomial es muy buena.*

Ejercicio 36 *En un lote de* 5000 *procesadores, se sabe que* 1000 *son defectuosos. Si una persona escoge al azar* 10 *procesadores, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 estén defectuosos?* *R/* 0.2013

2.4.2 Binomial y Poisson

Teorema 61 *Suponga que* $X \sim B(n,p)$ *y* $Y \sim P(\lambda)$ *con* $\lambda = np$. *Cuando* $n \to \infty$, $p \to 0$ *y* λ *permanece constante entonces*

$$f_X(k) \to f_Y(k).$$

Prueba. *Note que*

$$\begin{aligned} f_X(k) &= C(n,k)\,p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

Por lo tanto cuando $n \to \infty$:

$$f_X(k) \to 1(1-0)\cdots(1-0)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(1-0)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \blacksquare$$

Suponga que

$$X \sim B(n,p)$$

donde n es muy grande y p muy pequeño. En este caso, por el teorema anterior, los cálculos de probabilidad de X se pueden aproximar utilizando la distribución de Poisson con $\lambda = np$:

$$X \underset{\text{aprox}}{\sim} P(\lambda).$$

Ejemplo 112 *En el país C se ha estimado que la probabilidad de que un adulto de* 20 *a* 30 *año padezca cáncer gástrico es de* 0.7%. *Se eligen* 2000 *adultos en el rango de edad indicado, ¿cuál es la probabilidad de tener por lo menos* 10 *adultos con cáncer?*

$$X : \#\ \textit{de adultos con cáncer gástrico de los } 2000$$
$$\textit{Note que } X \sim B(2000, 0.007)$$

Así la probabilidad la probabilidad de tener por lo menos 10 *adultos con cáncer es exactamente*

$$P(X \geq 10) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{9} C(2000,k)(0.007)^k(0.993)^{200-k}\right)$$

Sin embargo, este valor es muy difícil de calcular hasta para la computadora. Dado que $n = 2000$ *es grande,* $p = 0.007$ *es pequeño y* $np = 14$ *entonces*

$$X \underset{aprox}{\sim} P(14)$$

Así, utilizando la tabla de la distribución de Poisson:

$$P(X \geq 10) \approx 1 - 0.1094 = 0.890\,6.$$

Ejercicio 37 *En una fábrica de botellas se ha podido determinar que la probabilidad de que una botella sea defectuosa es de* 0.1%. *Si hoy se fabricaron* 8000 *botellas, ¿cuál es la probabilidad de tener a lo sumo* 9 *botellas defectuosas?* $R/$ 0.7166

2.5 Ejercicios

1. En un concurso de TV, un participante ha ganado \$1000, y además, puede ganar \$100 por cada vez que acierta uno de los cinco números del 1 al 20 que el conductor del programa anota a escondidas. El participante, tiene 6 turnos. Sin embargo en cada turno, el conductor elige al azar los cinco números del 1 al 20 y el participante solo puede escoger un número (del 1 al 20). Sea X el numero de aciertos que obtuvo el participante.

   (a) Calcule la probabilidad de que el participante tenga al menos 4 aciertos. $R/$ 0.0376

   (b) Determine la probabilidad de que el participante acierte por primera vez en el cuarto turno. $R/$ 0.105 47

   (c) Sea G la v.a.d que indica la cantidad de dinero en dólares recibido por el participante al final del concurso. Exprese G como función de X y determine $E(G), Var(G)$ $R/$ $E(G) = 1150, Var(G) = 11250$

2. Se sabe que el 15% de las computadoras almacenadas en una bodega de la Compañía Super Computer, son defectuosas. El día lunes, un camión distribuidor toma al azar 20 computadoras de la bodega y las deja en la tienda de ventas. Suponga que el número de computadoras defectuosas que transporto el camión es su valor esperado. Si se vendieron 10 computadoras de las 20 dadas por el distribuidor:

   (a) Determine la probabilidad de que a lo sumo 2 defectuosas se vendieron. $R/$ $\frac{17}{19}$

   (b) Si X es una $v.a.d$ igual al número de computadoras defectuosas vendidas, determine: el rango de X, $E(X)$, $Var(X)$. $R/$ $E(X) = 1.5, Var(X) = \frac{51}{76}$

3. El número de estudiantes que llega a consulta de Probabilidad en una semana, sigue la distribución de Poisson, con un promedio de 2 estudiantes por semana.

   (a) Determine la probabilidad de que lleguen más de 5 estudiantes a consulta de probabilidad en una semana. $R/$ 0.016 6

(b) Determine la probabilidad de que lleguen menos de 10 estudiantes a consulta de probabilidad en tres semana. *R/* 0.9161

(c) Si X es el número de estudiantes que llegan a consulta en una semana, y $Y = aX + b$, con $E(Y) = 10, E(Y^2) = 118$. Determine el valor de a y b. *R/* $a = 3 \Longrightarrow b = 4, a = -3 \Longrightarrow b = 16$

4. Don Juan ha adquirido el calendario CIEMAC 2007 (Este calendario plantea un problema matemático por día, excepto los domingos). Debido a las ocupaciones de don Juan, él no puede resolver los problemas diariamente, pero cada 4 domingos, elige 10 problemas al azar correspondientes a esas 4 semanas y los intenta resolver. La probabilidad de que don Juan resuelva un problema escogido es de 60%.Si este domingo eligió los problemas a resolver, determine la probabilidad de que

   (a) elija a lo sumo un problema del Viernes. *R/* 0.436 76

   (b) pueda resolver por lo menos 3. *R/* 0.9877

5. El número de errores encontrados por un profesor en una determinada tarea programada, sigue una distribución de Poisson con un promedio de 5 errores en cada tarea. El profesor estima que el 35% de las tareas con más errores deben calificarse como deficientes.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el profesor encuentre más de 18 errores en 3 tareas? *R/* 0.1805

   (b) Determine el mínimo de errores que debe tener una tarea para que sea calificada de deficiente. *R/* 6

6. Sea W el número de resultados por unidad, tal que $W \sim P(\lambda)$. Sea t : la distancia entre dos resultados sucesivos de Poisson. Pruebe que la probabilidad de que en k unidades no se presenten resultados es $P(t > k) = e^{-\lambda k}$.

3 Otras distribuciones

Las distribuciones estudiadas y la obtención de sus parámetros, aparte de ser importantes para ciertas aplicaciones, nos sirve de ejemplo para la determinación de otras distribuciones y sus parámetros.

Ejemplo 113 *Se lanza un dado tres veces y cada vez que se lanza, si el resultado es par, se borra esa cara y se pone un número impar. Sea X el número de lanzamientos en los cuales se obtuvo un resultado par. Veamos un caso particular de X :*

#	# del dado	Resultado	Acción
1	$\{1,2,3,4,5,6\}$	4	Se cambia el 4 por 5
2	$\{1,2,3,5,5,6\}$	3	Se mantiene el dado
3	$\{1,2,3,5,5,6\}$	6	Se cambia el 6 por un 3

Aquí se puede observar que dependiendo del resultado de un lanzamiento, la probabilidad de obtener par en el siguiente lanzamiento puede variar o no, esto hace que se descarten los modelos estudiados. Note que si $X=0$ entonces todos los resultados fueron impares y por la regla del producto

$$P(X=0)=P(\{III\})=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

Si $X=1$ entonces se obtuvo solamente un lanzamiento par y

$$P(X=1)=P(\{PII,IIP,IPI\})=\frac{1}{2}\frac{4}{6}\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{37}{72}.$$

De manera similar se obtiene $P(X=2)$ y $P(X=3)$. Así, la función de distribución de X es

$$f_X(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{8} & si \quad k=0\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{4}{6}\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}=\dfrac{37}{72} & si \quad k=1\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{6}\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}\dfrac{4}{6}\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3} & si \quad k=2\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{6}\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36} & si \quad k=3\end{cases}$$

Ejemplo 114 *El número de llamadas que ingresan al 800-María para apoyar a nuestra representante en el programa IDOLO DEL MUNDO sigue una distribución de Poisson con un promedio de 3 llamadas por segundo. Suponga que la línea se activa a las 7:00 pm del miércoles. Una empresa decide apoyar a María y donar 1000 colones por cada segundo que ingresen más de 5 llamadas a partir de la activación de la línea, pero no donará más a partir* *del primer segundo en el que ingresen a lo sumo 5 llamadas. Sea Z : la cantidad donada por la empresa. Determine la función de distribución de Z (Suponga que la línea nunca se desactiva). Considere la variable*

$$X : \# \text{ de llamadas por segundo}$$

Note que $X \sim P(3)$ y además

$$P(X \leq 5) = 0.9161$$

Esta es la probabilidad de que en un segundo se donen 1000. *Sea W : # de segundos antes de obtener un segundo con a lo sumo 5 llamadas. Note que W es el número de segundos en los que hay donación y que $W \sim G(0.9161)$ entonces*

$$P(W = k) = 0.0838^k 0.9161, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Finalmente $Z = 1000W$ por lo tanto

$$\begin{aligned} f_Z(k) &= P(Z = k) = P(1000W = k) = P\left(W = \frac{k}{1000}\right) = 0.0838^{k/1000} 0.9161 \\ k &= 0, 1000, 2000, 3000, ... \end{aligned}$$

Ejemplo 115 *Un experimento se repite varias veces hasta obtener un éxito y un fracaso consecutivos. Cada vez que se repite la probabilidad de fracaso disminuye en un factor de $\frac{1}{3}$ con una probabilidad de fracaso inicial de $\frac{1}{3}$ (La segunda vez que se repite el experimento la probabilidad de fracaso es de $\frac{1}{9}$, la tercera vez la probabilidad es de $\frac{1}{27}, ...$) Sea X el número de veces que se realiza el experimento. Note que el rango de X es*

$$R_X = \{2, 3, 4, ...\}$$

ya que se requieren mínimo 2 ensayos del experimento para obtener éxito y un fracaso consecutivos. Denotando con E el éxito y con F el fracaso, note que el evento $X = k$ indica que ocurren $k - 1$ fracasos y luego un éxito, ó $k - 1$ éxitos y luego un fracaso. Así

$$\begin{aligned} f_X(k) &= P(X = k) = P\left(\underbrace{FF...F}_{k-1}E\right) + P\left(\underbrace{EE...E}_{k-1}F\right) \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{3^2}\frac{1}{3^3}\cdots\frac{1}{3^{k-1}}\left(1 - \frac{1}{3^k}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{3^{k-1}}\right)\frac{1}{3^k} \end{aligned}$$

Ejemplo 116 *La mamá de Sara, Anthony y Yahaira les regala 5 juegos de mesa distintos, los cuales los distribuye al azar con al menos 2 para Sara. El papá tiene nueve sobres, de los cuales 7 están marcados, y le da al azar tres sobres a cada uno de sus hijos. Por cada sobre marcado que tengan recibirán un premio. Sea Z la variable aleatoria discreta que indica el número de regalos que recibe Sara, se quiere determinar la función de distribución de Z, para ello considere las variables*

$$\begin{array}{l} X: \text{el número de regalos que recibe Sara de parte de la mamá} \\ Y: \text{el número de regalos que recibe Sara de parte de la papá} \end{array}$$

El total de maneras de distribuir los juegos de mesa con al menos dos para Sara es, realizando el conteo por complemento, $3^5 - 2^5 - C(5,1)\,2^4 = 131$. Y las maneras de que se le dén $j > 2$ juegos a Sara es $C(5,j) \cdot 2^{5-j}$, por lo tanto

$$P(X = j) = \frac{C(5,j) \cdot 2^{5-j}}{131}$$

Además note que $Y \sim H(3,9,7)$ por lo tanto

$$P(Y = j) = \frac{C(7,j)\,C(2,3-j)}{C(9,3)}.$$

Note que $Z = X + Y$, X y Y son independientes y el rango de Z es $R_Z = \{3,4,5,6,7,8\}$. La función de distribución de Z se puede hallar explícitamente para cada valor del rango, por ejemplo

$$\begin{aligned} P(Z = 4) &= P((X = 2 \cap Y = 2) \cup (X = 3 \cap Y = 1)) \\ &= P(X = 2)\,P(Y = 2) + P(X = 3)\,P(Y = 1) \\ &= \frac{C(5,2) \cdot 2^3}{131}\frac{C(7,2)\,C(2,1)}{C(9,3)} + \frac{C(5,3) \cdot 2^{5-3}}{131}\frac{7}{C(9,3)} = \frac{130}{393} \end{aligned}$$

De manera similar se obtiene que

$$f_z(k) = \begin{cases} \frac{20}{393} & si \quad k = 3 \\ \frac{130}{393} & si \quad k = 4 \\ \frac{325}{786} & si \quad k = 5 \\ \frac{87}{524} & si \quad k = 6 \\ \frac{14}{393} & si \quad k = 7 \\ \frac{5}{1572} & si \quad k = 8 \end{cases}$$

Otro manera de hallar la función de distribución de Z es indican su fórmula

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{j=\max(2,k-3)}^{\min(5,k-1)} \left(P(X=j)\,P(Y=k-j)\right) \\
&= \sum_{j=\max(2,k-3)}^{\min(5,k-1)} \left(\frac{C(5,j)\cdot 2^{5-j}}{131}\cdot\frac{C(7,k-j)\,C(2,3-k+j)}{C(9,3)}\right)
\end{aligned}
$$

con $k=3,4,5,6,7,8$.

Ejercicio 38 *La compañía aérea VIAJE SEGURO desea asegurar uno de sus avión por \$50000. La compañía aseguradora estima que una pérdida total de la aeronave puede ocurrir con una probabilidad de* 0.002, *un* 50% *de pérdida con una probabilidad de* 0.01 *y un* 25% *de pérdida con una probabilidad de* 0.1, *ignorando todas las demás pérdidas parciales. ¿Cuánto se esperaría que cobre la aseguradora para tener una utilidad promedio de* \$500?

Ejercicio 39 *Un experimento se repite hasta obtener un éxito. Cada vez que se repite la probabilidad de fracaso disminuye en un factor q, es decir si en el intento n la probabilidad de fracaso es R en el intento $n+1$ la probabilidad de fracaso es qR. Si la variable aleatoria X es el total de intentos que deben hacerse y la probabilidad de fracaso inicial es q, determine:*

1. *El rango de X*
2. *La Función de distribución de probabilidad para X.*
3. *La Función de distribución de probabilidad acumulada.*

3.1 Ejercicios

1. Suponga que se realizan extracciones de una urna. Si las extracciones se realizan sin reposición asuma que la urna contiene b éxitos y r fracasos. Si las extracciones se realizan con reposición, la probabilidad de éxito es p y de fracaso es q. Determine el rango y la función de distribución de probabilidad de cada una de las siguientes variables:

   (a) X : # de extracciones hasta obtener un éxito, las extracciones se realizan sin reposición

   (b) Y : # de extracciones hasta obtener dos éxitos, las extracciones se realizan con reposición

   (c) Z : # de extracciones hasta obtener dos éxitos o dos fracasos consecutivos, las extracciones se realizan con reposición

   (d) W : # de extracciones hasta obtener un éxito y fracaso consecutivos, las extracciones se realizan con reposición

2. Un experimento se repite hasta que se obtengan 10 éxitos o 10 fracasos. Si la variable aleatoria X es el total de intentos que deben hacerse y la probabilidad de éxito es p y la de fracaso es q. Determine:

   (a) El rango de X

   (b) La Función de distribución de probabilidad para X.

3. El juego IMPAR DADO consisten en lanzar varias veces un dado hasta obtener un número impar. Sin embargo, cada vez que se lanza, si el resultado es par, se borra esa cara y se pone un número impar. El juego se gana si el número de lanzamientos totales que se realizaron es un número impar

   (a) Determine la probabilidad de ganar el juego. $R/\ \frac{23}{36}$

   (b) Si Don Juan juega 10 veces este juego, ¿Cuál es la probabilidad de que gane al menos 2 juegos? $R/\ 0.999\,295$

4. La mamá de Sara, Anthony y Yahaira les regala varios juegos de mesa distintos, los cuales los distribuye de la siguiente manera: lanza un dado, si el resultado es de 1 a 4 les regala un juego de mesa a cada uno y si el resultado es 5 o 6 les regala dos juegos de mesa a cada uno. El papá tiene nueve sobres, de los cuales 7 están marcados, y le da al azar tres sobres a cada uno de sus hijos. Por cada sobre marcado que tengan recibirán un premio. Sea X la variable aleatoria discreta que indica el número de regalos que recibe Sara, determine la función de distribución de X.

$$R/ \quad f_X(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{18} & si \quad k = 2 \\ \dfrac{13}{36} & si \quad k = 3 \\ \dfrac{4}{9} & si \quad k = 4 \\ \dfrac{5}{36} & si \quad k = 5 \end{cases}$$

5. Se tienen dos urnas con las siguientes bolas:

	Bolas rojas	**Bolas negras**
Urna 1:	9	1
Urna 2:	2	3

De cada urna se extraen al azar sin reposición 4 bolas. Sea X la v.a.d. igual al número de bolas rojas extraídas

(a) Determine el rango de la variable X.

(b) Determine la función de distribución de probabilidad de X y compruebe que efectivamente es una distribución de probabilidad

$$R/ \quad f_X(k) = \begin{cases} \frac{4}{25} & si \quad k=4 \\ \frac{12}{25} & si \quad k=5 \\ \dfrac{9}{25} & si \quad k=6 \end{cases}$$

(c) Determine la distribución acumulada de X

4 Ejercicios Finales

1. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{2k}{9} & si \quad x=-1 \\ \dfrac{k}{9}+\dfrac{1}{81} & si \quad x=0 \\ k^3-\dfrac{1}{81} & si \quad x=1 \end{cases}$$

Determine el valor de k. $R/ \quad k=\dfrac{1}{3}$

2. Se van a distribuir cinco bolillas en tres celdas. Sea X: total de bolillas en la primera celda.

   (a) Si las bolillas son indistinguibles, determine la función de distribución de X.$R/ \quad h(x)=\frac{C(6-x,5-x)}{C(7,5)}$

   (b) Si las bolillas son distinguibles, determine la función de distribución de X.$R/ \quad g(x)=\frac{C(5,x)2^{5-x}}{3^5}$

3. Todas las semanas Don Juan participa en una rifa comprando 10 números de 100. De estos 100 números hay 5 premiados.

   (a) ¿Cual es la probabilidad de que en una semana, Don Juan gane al menos un premio?
   $R/ \quad 0.416\,25$

   (b) Determine la probabilidad de que en 7 semanas, a lo sumo en 2 de estas obtenga don Juan al menos un premio? $R/ \quad 0.385\,03$

   (c) En un año (52 semanas), ¿ en cuántas semanas se esperaría que don Juan gane al menos un premio? $R/ \quad 21.\,645$

4. El número de personas que llaman por hora a la Radio Mundialista para participar en la rifa de viajes al mundial sigue una distribución de Poisson con un promedio de 6 llamadas por hora.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de 13 llamadas en 2 horas? $R/ \quad 0.3185$

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que no se reciba llamadas en un período de 30 min?$R/ \quad 4.\,978\,7\times10^{-2}$

(c) La Radio Mundialista ha definido la hora TATA del día como la primera hora de las 7 a.m. a las 9 p.m., en la cual se obtengan más de 10 llamadas. ¿Determine la probabilidad de que para mañana, la hora TATA sea de 5 p.m. a 6 p.m.? $R/ \quad 2.\,756\,4 \times 10^{-2}$

5. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} k\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x+1} & si \quad x = 1,2,3.. \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

con k constante. Determine el valor de k

6. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+3} & si \quad x = 1,2,3... \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

con k constante. Determine el valor de k $R/ \quad 216$

7. Un canal de televisión, realizará un debate cada semana con miras a las próximas elecciones. Cada debate será realizado en un gimnasio, y se recogerá un millón de colones en entradas por debate que será utilizado para reparar el Hospital C. Se invitaron a ocho candidatos y la probabilidad de que un candidato asista a cada debate es de 0.4.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la próxima semana asistan al menos 6 candidatos? $R/ \quad 0.049\,8$

   (b) Hallar el número mínimo de podios que se deberían poner en el escenario, tal que la probabilidad de que los candidatos que lleguen tengan lugar, sea superior al 90%. $R/ \quad 5$

   (c) En cada debate, la televisora se compromete a donar 50 mil colones por cada candidato que asista. Determine la cantidad esperada de dinero que será recaudada para reparar el Hospital C, por debate, incluyendo entradas y la donación del canal. $R/ \quad 1.16 \times 10^6$

8. El número de personas que son asaltadas en el centro de San José sigue la distribución de Poisson, con un promedio de 3 personas por hora.

   (a) Determine la probabilidad de que mañana menos de 2 personas sean víctimas de los delincuentes, en el centro de San José. $R/ \quad 3.\,927\,54 \times 10^{-30}$

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que se presenten más de 12 asaltos en tres horas? $R/\quad 0.124\,2$

9. Una persona participa en dos sorteos, uno de ellos rifa tres viajes a Nicaragua y el otro cuatro casas en Cartago. La probabilidad de que gane un viaje a Nicaragua es de 0.01 y la probabilidad de ganar una casa es de 0.015. Determine la distribución de probabilidad del total de premios que gana esa persona.

10. Una persona participa en un sorteo que rifa tres viajes a Nicaragua y en un concurso que le brinda la oportunidad de obtener hasta cuatro casas en Cartago. La probabilidad de que gane un viaje a Nicaragua es de 0.01. En el concurso se tiene 7 cartas de las cuales hay cuatro marcadas con la palabra "CASA", la persona debe elegir al azar 4 cartas de las 7, el número de casas que obtiene es igual al número de cartas con la palabra "CASA" escogida. Determine la distribución de probabilidad del total de premios que gana esa persona.

11. Un tazón contiene 5 fichas que no se pueden distinguir una de otra. Tres fichas están marcadas por \$2 y las restantes por \$4. Un jugador saca del tazón 2 fichas al azar sin reemplazo y se le paga una cantidad igual a la suma de los valores indicados en las dos fichas escogidas. Si el costo por jugar es de \$5, 6, ¿es justo el juego?

12. Varias localidades de una determinada ciudad sufre de constantes apagones debido a la falta electricidad. La empresa proveedora de electricidad ha puesto a disposición del cliente el número 800-APAGON donde el cliente puede averiguar el rango de horas en las que se va la luz en su localidad para el día siguiente. El número de llamadas que se reciben sigue una distribución de Poisson con un promedio de 4 llamadas por minuto. Un minuto es calificado por la empresa como cuantioso si se reciben más de 7 llamadas.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de 10 llamadas en 2 minutos? $R/\quad 0.184\,1$

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que no se reciba llamadas en un período de 3 min? $R/\quad 6.144\,2 \times 10^{-6}$

    (c) Determine la probabilidad de que para mañana, de las 4:30pm a las 4:45pm, se obtengan a lo sumo 2 minutos sean cuantiosos $R/\quad 0.961\,74$

13. En un concurso de TV un participante es ganador si al lanzar sucesivamente un dado cargado (la probabilidad de sacar par es $\frac{2}{3}$ de la probabilidad de sacar impar) hasta después del tercer lanzamiento obtiene un resultado par. De diez participantes, determine la probabilidad de que al menos 3 sea ganadores. $R/\quad 0.370\,88$

14. Se tienen dos urnas con las siguientes bolas:

	Bolas rojas	**Bolas negras**
Urna 1:	9	4
Urna 2:	3	2

De cada urna se extraen bolas alternadamente, iniciando en la urna 1. De la urna 1 se extraen con reposición y de la urna 2 sin reposición Sea X la v.a.d. igual al número extracciones que se debe realizar hasta obtener una bola roja.

(a) Determine el rango de la variable X. $R/\quad R_X = \{1, 2, ..., 6\}$

(b) Determine la función de distribución de probabilidad de X.

$$R/\quad f_X(k) = \begin{cases} \frac{9}{13} & si \quad k = 1 \\ \frac{12}{65} & si \quad k = 2 \\ \frac{72}{845} & si \quad k = 3 \\ \frac{24}{845} & si \quad k = 4 \\ \frac{72}{10\,985} & si \quad k = 5 \\ \frac{32}{10\,985} & si \quad k = 6 \end{cases}$$

15. Para el próximo referendum en el país C, una televisora habilito el teléfono 800-Vote en el cual las personas llaman para aclarar sus dudas con respecto al referendum. El número de llamadas que ingresan al 800-Vote sigue una distribución de Poisson con media 6 llamadas por minuto. Se dice que un minuto es especial si la probabilidad de obtener un número de llamadas mayor a las recibidas en ese minuto es menor a 0.3

(a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de 20 llamadas en 3 minutos? $R/\quad 0.2693$

(b) Determine el número mínimo de llamadas que debe ingresar en un minuto para que este minuto sea especial. $R/\quad 7$

16. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} k\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} & si \quad x = 1, 2, 3... \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

con k constante. Determine el valor de k $R/\quad k = \dfrac{26}{3}$

17. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f(x) = \frac{24}{25}\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \qquad si\ x = 0, 1, 2, 3, ...$$

   (a) Determine $F_X(k)$, para $k \in \mathbb{N}$. $R/ \quad F_X(k) = 1 - \left(\frac{1}{25}\right)^{k+1}$.

   (b) Sea $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, determine en términos de k el valor de $P(X \geq k)$. $R/ \quad P(X \geq k) = \left(\frac{1}{25}\right)^{k}$.

   (c) Halle la $E(X)$. (Sugerencia: si $0 < p < 1$ entonces $\sum_{x=0}^{k} xp^x = \frac{p}{(1-p)^2}$) $R/ \quad E(X) = \frac{1}{24}$

18. Sea X una variable aleatoria discreta con valor esperado μ_x tal que $Var(X)$ y $E\left((X - 3\mu_x)^2\right)$ existen. Pruebe que $E\left((X - 3\mu_x)^2\right) = Var(X) + 4\mu_X^2$.

19. El comité cívico de cierto pueblito, sortearán el próximo domingo 20 almuerzos, uno por rifa, de la siguiente forma: cada rifa consta de 100 números del 1 al 100, los cuales se venden a 100 colones cada uno, una vez vendidos todos los números se elige el número al azar del uno al 100 y el que lo tenga se gana un almuerzo y 1000 colones. Suponga que don Juan en cada rifa comprará 5 números.

   (a) ¿Cuál es aproximadamente la probabilidad de que don Juan se gane al menos 3 almuerzos? $R/ \quad 0.07548$

   (b) Al finalizar las rifas, ¿cuánto dinero se espera que dé don Juan al comité cívico? $R/ \quad 9000$

20. Una urna contiene 2 bolas blancas y 4 bolas negras. Suponga que se realizan extracciones de la urna sin reposición y se define la variable aleatoria X como el número de extracciones hasta obtener una bola blanca y una bola negra consecutivas (no importa el orden). Determine el rango y la función de distribución de probabilidad de X. (7 puntos)

$$\begin{aligned} R/ \quad R_x &= \{2, 3, 4, 5\} \\ f_x(k) &= \begin{cases} \frac{8}{15} & si \quad k = 2 \\ \frac{4}{15} & si \quad k = 3 \\ \frac{2}{15} & si \quad k = 4 \\ \frac{1}{15} & si \quad k = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

21. En la pulpería LA MINITA hay 15 litros de leche, de los cuales sólo 8 son frescos.

    (a) Si el primer cliente compra 5 litros, calcule la probabilidad de que escoja 3 litros frescos. $R/\quad 0.391\,61$

    (b) Si cada cliente que llega al almacén compra un litro de leche, ¿Cuál es la probabilidad de que el cuarto cliente sea el primero en comprar un litro de leche fresca? $R/\quad 5.128\,2\times 10^{-2}$

    (c) Una prueba de control de calidad de la empresa abastecedora consiste en llegar a los almacenes y sobre toda la existencia de leche elegir al azar un litro y verificar la fecha para ver si es fresco, lo devuelve y elige otro, pudiendo ser el mismo. Si se requieren más de 8 elecciones antes de haber obtenido dos litros frescos el almacén recibe una amonestación. Determine la probabilidad de que Don Tito reciba esta amonestación. Sea X el # de elecciones antes de obtener 2 litros frescos $R/\quad 0.011\,85$

22. En un caja hay 4 bolitas verdes y 5 azules, un ejercicio aleatorio consiste en extraer 6 bolitas, si la muestra trae más de 3 bolitas azules el experimento concluye, caso contrario se reintegran las bolitas a la caja y se continúa el ejercicio hasta que la muestra tenga más de tres bolitas azules. Determine la distribución de probabilidad para el total de bolitas que se extraen de la caja antes de concluir el experimento.
    $R/$ Sea Z : # de bolas extraídas, entonces $f_z(j)=\left(1-\frac{17}{42}\right)^{j/6}\frac{17}{42}\quad j=0,6,12,18,...$

23. Para el próximo referéndum en el país C, una televisora habilito el teléfono 800-Vote en el cual las personas llaman para aclarar sus dudas con respecto al referéndum. El número de llamadas que ingresan al 800-Vote sigue una distribución de Poisson con media 6 llamadas por minuto. Se dice que un minuto es especial si la probabilidad de obtener un número de llamadas mayor a las recibidas en ese minuto es menor a 0.3

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de 20 llamadas en 3 minutos? $R/\quad 0.2693$

    (b) Determine el número mínimo de llamadas que debe ingresar en un minuto para que este minuto sea especial. $R/\quad 7$

24. En una sala hay 4 hombres y 3 mujeres. Se eligen personas hasta completar una pareja. Sea X la variable aleatoria que corresponde con el total de personas que se eligen.

Determine la función de distribución de X.

$$R/ \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{7} & is \quad X = 2 \\ \frac{2}{7} & is \quad X = 3 \\ \frac{4}{35} & is \quad X = 4 \\ \frac{1}{35} & is \quad X = 5 \end{cases}$$

25. Tres jugadores, A, B y C, juegan un torneo de la manera siguiente: la primera partida la juegan A y B; en la siguiente, el jugador C reemplaza al perdedor, y así sucesivamente. Será vencedor del torneo quien gane dos partidas consecutivas. Suponga que para cada jugador la probabilidad de ganar es 1/2. Sea X la variable aleatoria el número de partidas jugadas hasta que haya un vencedor.

    (a) Determine el rango de X $\quad R/ \quad R_x = \{2, 3, 4, 5, ...\}$

    (b) Deduzca la función de distribución de X. $\quad R/ \quad f_X(k) = \dfrac{1}{2^{k-1}}$

26. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} 31\left(\dfrac{1}{2}\right)^{kx} & si \quad x = 1, 2, 3... \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

    con k constante positiva. Determine el valor de k $\quad R/ \quad k = 5$

27. En el país C con la nueva ley de tránsito el número de infracciones ha disminuido. Se estima que actualmente la probabilidad por día de cometer al menos una infracción es de 20%. Un conductor se considera imprudente si en diez días, en por lo menos 4 días comete en cada uno al menos una infracción.

    (a) Determine la probabilidad de que un conductor sea imprudente. $\quad R/ \quad 0.1209$

    (b) Si se toma un conductor al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que entre el 15 y 18 de mayo se encuentre el primer día del mes en que comete al menos una infracción? $\quad 0.026$

28. Suponga que inicialmente en la urna hay b bolas blancas y n bolas negras, con $b < n$. Se realizan extracciones de la urna sin reposición y se define la variable aleatoria X como el número de extracciones hasta obtener una bola blanca y una bola negra consecutivas

(no importa el orden).Determine el rango y la función de distribución de probabilidad de X. (No simplifique). $R/$

$$\begin{aligned}
R_x &= \{2,3,4,...,n,n+1\} \\
\text{Si} \quad k &\leq b+1: \\
f_x(k) &= \frac{b}{n+b}\frac{b-1}{n+b-1}\frac{b-2}{n+b-2}\cdots\frac{b-(k-2)}{n+b-(k-2)}\frac{n}{n+b-(k-2)} \\
&\quad +\frac{n}{n+b}\frac{n-1}{n+b-1}\frac{n-2}{n+b-2}\cdots\frac{n-(k-2)}{n+b-(k-2)}\frac{b}{n+b-(k-2)} \\
\text{Si} \quad k &> b+1 \\
f_x(k) &= \frac{n}{n+b}\frac{n-1}{n+b-1}\frac{n-2}{n+b-2}\cdots\frac{n-(k-2)}{n+b-(k-2)}\frac{b}{n+b-(k-2)}
\end{aligned}$$

29. En el programa SÁBADO PEQUEÑO, el finalista debe jugar el siguiente concurso: se tiene inicialmente una canasta con 12 bolas (9 en blancas y 3 negras), el finalista en cada turno tomará al azar tres bolas, se anotará el color de estas y se devolverán a la canasta. De un turno a otro se retiran dos bolas blancas de la canasta, y en total son 3 turnos.

    (a) Sea X el número de turnos en los cuales salió al menos una bola negra, determine la función de distribución de X. (6 puntos)

$$R/ \quad f_X(k) = \begin{cases} \frac{7}{352} & si \quad k=0 \\ \frac{227}{1320} & si \quad k=1 \\ \frac{1105}{2464} & si \quad k=2 \\ \frac{6647}{18\,480} & si \quad k=3 \end{cases}$$

    (b) Si el número de turnos en los cuales salió al menos una bola negra es menor a 2, el finalista se gana un automóvil del año, ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo finalista se lleve el automóvil? $R/ \ \frac{1013}{5280}$

30. Suponga que $X \sim G(p)$, pruebe que $P(X = n+k | X > n) = f_x(k-1)$

31. Sea X : # de pruebas de Bernoulli independientes que se deben realizar hasta obtener k éxitos con probabilidad de éxito p..

    (a) Determine la función de distribución de X.
    (b) Sea $Y \sim B(n,p)$. Pruebe que $P(X > n) = P(Y < r)$

32. Se tiene una urna con $2n$ bolas, las cuales están enumeradas: 2 con el número 1, 2 con el número 2,...,2 con el número n. Las bolas son retiradas sucesivamente, de 2 en 2 a la vez, sin reemplazo. Sea X : la primer extracción en la cual se obtienen 2 bolas con igual número. Sea M_k : el número de pares retirados en k selecciones, para $k = 1, 2, .., n$

    (a) Argumente que si n es grande, M_k puede ser considerado con el número de sucesos en k pruebas independientes, aproximadamente.

    (b) Si n es grande, determine aproximadamente $P(M_k = 0)$ $\quad R/ \quad \left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right)^k$

    (c) Determine $P(X > \alpha n)$, con $0 < \alpha < 1$ y pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} P(X > \alpha n) \approx e^{-\alpha|2}$.

Capítulo IV

Variables Aleatorias Continuas

Se define el concepto de variable aleatoria continua, su función de probabilidad, su función acumulada, esperanza, varianza y función generadora de momentos.. Se estudian los principales tipos de variables aleatorias continuas: uniforme, exponencial, normal y gamma. Se le recomienda al lector repasar derivación (Apéndice D) e integración (Apéndice E).

1 Teoría y definiciones

1.1 Función de densidad y distribución acumulada

Definición 34 ***Variable aleatoria continua*** *(v.a.c.) Se dice que X es una v.a.c. si y solo si existe una función f_X definida en $\mathbb{R}$ tal que para cualquier $B \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que*

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx.$$

La función f_X es llamada la ***función de densidad de probabilidad*** *de X. En particular si $B = [a,b]$ entonces*

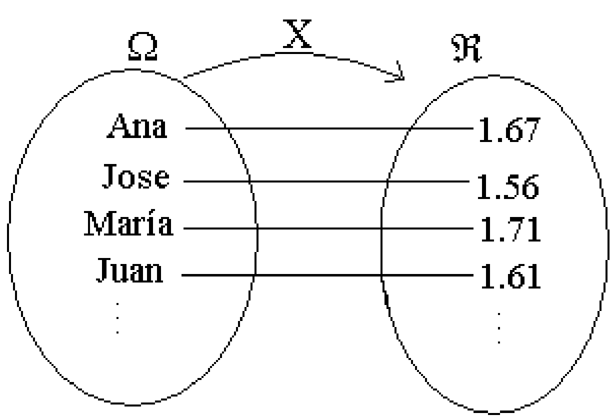
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx.$$

La función de densidad de probabilidad se le llama también: función de distribución de probabilidad, ley de probabilidad, función de densidad.

Ejemplo 117 *Sea Y la estatura en metros de los estudiantes del ITCR en el año 2007. En este caso,*

$$\Omega = \{x \mid x \text{ es un estudiante del ITCR en el año 2007}\}$$

Note que Y es un variable aleatoria continua:



Teorema 62 ***(Características de la función de densidad)*** *Sea X una v.a.c. con función de densidad f_X. Se cumple que:*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\,dy = 1$

2. *Si* f_x *es continua entonces* $f_X(y) \geq 0$, *para todo* $y \in \mathbb{R}$

Prueba (♣) *Note que*

$$1 = P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f_X(y)\, dy$$

Por otro lado, si existe un $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $f_X(a) < 0$ *entonces como* f_x *es continua (hipótesis) existe un vecindario de* $a : V_a$ *tal que*

$$f_X(x) < 0, \text{ para todo } x \in V_a$$

por lo tanto $\int_{V_a} f_X(x)\, dx < 0$ *pero* $\int_{V_a} f_X(x)\, dx = P(x \in V_a) \geq 0$.

Lo cual es una contradicción. ■

Observación: Note que, de acuerdo a las características de f_X, si f_X es continua el área bajo la curva debe ser 1.

Definición 35 ***(Función de distribución acumulada de probabilidad de una v.a.c.)*** *Sea* X *una v.a.c. y* f_X *una ley de probabilidad para* X, *se dice que* $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función de distribución acumulada de probabilidad, o de masa, para* X *si y solo si*

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \int_{-\infty}^{k} f_X(y)\, dy$$

Teorema 63 ***(Características de la función de distribución acumulada)*** *Sea* X *una v.a.c y* F_X *es una función de distribución acumulada de probabilidad. Se cumple que*

1. $F_X(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$
2. F_X *es creciente*
3. $\lim\limits_{h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x)$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

Prueba (♣) *La 1, 2 y 5 se dejan de ejercicio.*

3. *Sea h_n una secesión convergente a cero. Note que*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} F_X(x+h) &= \lim_{n\to+\infty} F_X(x+h_n) = \lim_{n\to+\infty} P(X \leq x+h_n) \\ &= P\left(\lim_{n\to+\infty}(X \leq x+h_n)\right) = P(X \leq x) = F_X(x)\end{aligned}$$

4. *Se tiene que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} F_X(x) &= \lim_{n\to+\infty} F_X(x+n) = \lim_{n\to+\infty} P(X < x+n) \\ &= P\left(\lim_{n\to+\infty}(X < x+n)\right) = P(\Omega) = 1 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 64 *Sea X una variable aleatoria continua, se tiene que*

1. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
2. $P(X = a) = 0$
3. *Se cumple*

$$\begin{aligned}P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) \\ &= \int_a^b f_X(y)\,dy = F_X(b) - F_X(a).\end{aligned}$$

Prueba *Se demostrará* (1) *y* (2). *Para* (1)

$$\begin{aligned}F_X(b) &= P(X \leq b) = P\left((X \leq a)\bigcup(a < X \leq b)\right) \\ &= P(X \leq a) + P(a < X \leq b) \\ &= F_X(a) + P(a < X \leq b)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Por otro lado, note que

$$\begin{aligned}P(X = a) &= P\left(\lim_{n\to+\infty}\left(a - \frac{1}{n} < X \leq a\right)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} P\left(a - \frac{1}{n} < X \leq a\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(F_X(a) - F_X\left(a - \frac{1}{n}\right)\right) \quad \textit{(por parte 1 del teorema)} \\ &= F_X(a) - \lim_{n\to+\infty} F_X\left(a - \frac{1}{n}\right) \\ &= F_X(a) - \lim_{h\to 0} F_X(a+h) \\ &= F_X(a) - F_X(a) = 0 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejemplo 118 *Sea X es una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{9} & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{k}{6}x - 1 & si \quad 2 < x \leq 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

1. *Determine el valor de k.*

   Necesariamente se debe cumplir que

   $$1)\ f_X(x) \geq 0 \quad y \quad 2)\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

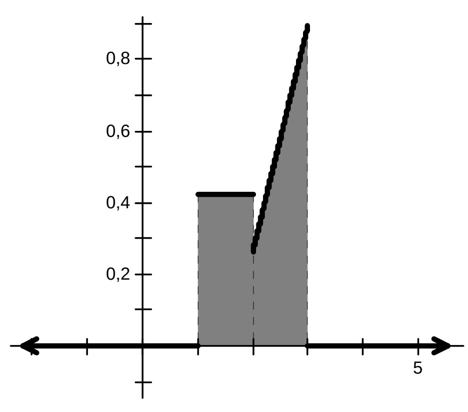
   De (1) se obtiene que $\dfrac{k}{9} \geq 0$ de donde k debe ser no negativo. De (2) :

   $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{1} f_X(x)\,dx + \int_{1}^{2} f_X(x)\,dx + \int_{2}^{3} f_X(x)\,dx + \int_{3}^{\infty} f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} \frac{k}{9}dx + \int_{2}^{3} \left(\frac{k}{6}x - 1\right) dx + \int_{3}^{\infty} 0dx \\ &= \frac{k}{9}\int_{1}^{2} dx + \left.\left(\frac{k}{12}x^2 - x\right)\right|_{2}^{3} \\ &= \frac{k}{9} + \left(\frac{3}{4}k - 3\right) - \left(\frac{k}{3} - 2\right) \\ &= \tfrac{19}{36}k - 1 \end{aligned}$$

   Por lo tanto $\frac{19}{36}k - 1 = 1$, de donde $k = \dfrac{72}{19}$, este valor satisface la primera condición.

2. *Grafique la función. Sustituyendo el valor de k se tiene que*

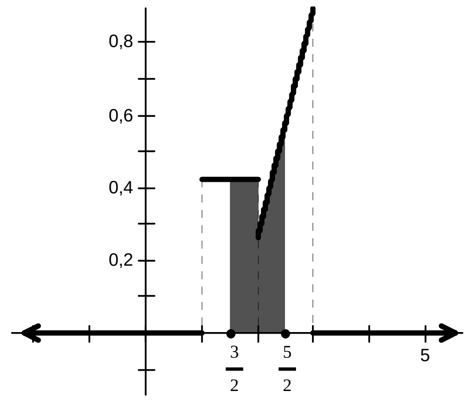
   $$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{19} & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{12}{19}x - 1 & si \quad 2 < x \leq 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

   Note que el área bajo la curva de 1.

3. *Determine e interprete gráficamente el valor de* $P\left(\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2}\right)$.

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2}\right) &= \int_{3/2}^{5/2} f_X(x)\,dx \\
&= \int_{3/2}^{2} \frac{8}{19}dx + \int_{2}^{5/2}\left(\frac{12}{19}x - 1\right)dx \\
&= \frac{4}{19} + \left(\frac{6}{19}x^2 - x\right)\Big|_2^{5/2} \\
&= \frac{8}{19}
\end{aligned}
$$



El valor de esta probabilidad es el área de la región bajo la curva dada por f_X *limitada por* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{3}{2}$.

4. *Halle* F_X.

Por definición

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)\,dx$$

Si $1 < y \leq 2$ *entonces*

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{y} \frac{8}{19}dx = \frac{8}{19}y - \frac{8}{19}$$

Y si $2 < y \leq 3$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
F_X(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_X(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} \frac{8}{19}dx + \int_{2}^{y}\left(\frac{12}{19}x - 1\right)dx \\
&= \frac{8}{19} + \left(\frac{6}{19}x^2 - x\right)\Big|_2^{y} \\
&= \frac{6}{19}y^2 - y + \frac{22}{19}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la función de distribución acumula es

$$F_X(y) = \begin{cases} 0 & si \quad y \leq 2 \\ \dfrac{8}{19}y - \dfrac{8}{19} & si \quad 1 < y \leq 2 \\ \dfrac{6}{19}y^2 - y + \dfrac{22}{19} & si \quad 2 \leq y \leq 3 \\ 1 & si \quad y > 3 \end{cases}$$

5. *Utilice F_x para calcular $P\left(\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2}\right)$*

$$P\left(\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2}\right) = F_X\left(\frac{5}{2}\right) - F_X\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{19}.$$

Ejercicio 40 *Sea X una v.a.c tal que*

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}.$$

1. *Determine el valor de k.* R/ $\frac{1}{2}$
2. *Halle la función de distribución acumulada F_X.* R/ $F_X(y) = \begin{cases} 0 & si \quad y < 0 \\ \dfrac{y^2}{4} & si \quad 0 < y \leq 2 \\ 1 & si \quad y > 2 \end{cases}$
3. *Calcule $P\left(\sqrt{2} < x < \pi\right)$* R/ $\frac{1}{2}$

Teorema 65 (♣) *Sea X una variable aleatoria continua, si F'_X existe excepto en un número finito de puntos, entonces*

$$f_X(k) = \begin{cases} F'_X(k) & si \quad F'_X(k) \text{ existe} \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Prueba. *Se debe al Teorema Fundamental del Cálculo.* ■

Ejemplo 119 (♣) *Sea X una v.a.c. tal que*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

Determine f_X R/ $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad a < x < b \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

Teorema 66 (♣) *Sean* X, Y *variables aleatorias continuas tales que* $Y = g(X)$, *entonces la función de distribución acumulada de* Y *es*

$$F_Y(k) = \int_C f_X(y)\,dy$$

donde $C = \{x \in \mathbb{R} | g(x) \leq k\}$

Prueba. *Note que*

$$F_Y(k) = P(Y \leq k) = P(g(X) \leq k) = P(X \in C) = \int_C f_X(y)\,dy \quad \blacksquare$$

Ejemplo 120 (♣) *Sea* X *una v.a.c. tal que*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}.$$

Sea $Y = -\dfrac{\ln X}{\lambda}$ *donde* $\lambda > 0$. *Determine* F_Y. R/ $F_Y(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{e^{-\lambda x}}{2} & si \quad x > \dfrac{-\ln 2}{\lambda} \\ 0 & si \quad x \leq \dfrac{-\ln 2}{\lambda} \end{cases}$

1.2 Esperanza y varianza de distribuciones de *v.a.c.*

Definición 36 *(**Esperanza**) La esperanza o media es el promedio ponderado que cuantifica el valor esperado de una variable aleatoria X. Si X es una v.a.c. con función de probabilidad* f_X *y* $\int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f_X(y)\,dy$ *converge, se define la esperanza de X por:*

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y)\,dy,$$

Ejemplo 121 *Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad*

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x+3} & si \quad x \geq 1 \\ 0 & sino \end{cases}$$

Determine $E(X)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y)\,dy = \int_{-\infty}^{1} y(0)\,dy + \int_{1}^{\infty} y\left(3e^{-3y+3}\right)dy = \int_{1}^{\infty} 3ye^{-3y+3}dy$$

Realizando el cambio de variable $z = -3y + 3$ *se tiene que* $dz = -3dy$ *y* $3y = 3 - z$ *, así*

$$E(X) = \frac{-1}{3}\int_0^{-\infty} (3-z)\, e^z dz = -\int_0^{-\infty} e^z dz + \frac{1}{3}\int_0^{-\infty} z e^z dz$$

Realizando por partes la $\int z e^z dz$ *con* $\left\{ \begin{array}{c} u = z \Longrightarrow du = dz \\ dv = e^z dz \Longrightarrow v = e^z \end{array} \right.$ *, se tiene que*

$$\int z e^z dz = z e^z - \int e^z dz = z e^z - e^z.$$

Entonces

$$E(X) = -\left. e^z \right|_0^{-\infty} + \frac{1}{3}\left. (z e^z - e^z) \right|_0^{-\infty}$$

dado que

$$\lim_{z \to -\infty} e^z = 0 \text{ y } \lim_{z \to -\infty} z e^z = \lim_{z \to -\infty} \frac{z}{e^{-z}} \overset{L'H}{=} \lim_{z \to -\infty} \frac{1}{-e^{-z}} = 0$$

se obtiene que

$$E(X) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Teorema 67 (♣) *Sea* X *una v.a.c. Se tiene que*

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X > y)\, dy - \int_0^{\infty} P(X < -y)\, dy$$

Prueba. *Note que*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P(X < -y)\, dy &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{-y} f_X(x)\, dx dy = \int_{-\infty}^{0} \int_0^{-x} f_X(x)\, dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_X(x) \int_0^{-x} dy dx = -\int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\, dx \end{aligned}$$

Similarmente $\int_0^{\infty} P(X > y)\, dy = \int_0^{\infty} x f_X(x)\, dx$, *por lo tanto*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P(X > y)\, dy - \int_0^{\infty} P(X < -y)\, dy &= \int_0^{\infty} x f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{0} x f_X(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y)\, dy = E(x) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 68 *Sea* X *una v.a.c. y sea* $Y = g(X)$ *se tiene que*

$$E(g(X)) = \mu_{g(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f_X(y)\, dy.$$

Prueba. (♣) *Sugerencia: utilice el teorema anterior.* ■

Ejercicio 41 *Sea X una v.a.c. tal que*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

1. *Determine $E(X)$* — *R/* $E(X) = \dfrac{1}{2}$
2. (♣) *Sea $Y = e^X$, Determine $E(Y)$* — *R/* $E(Y) = e - 1$

Teorema 69 *(**Propiedades de la Esperanza**) Sea c una constante, sean X, Y variables aleatorias continuas tales que las esperanzas involucradas existen. Se tiene que:*

1. $E(c) = c$
2. $E(X + c) = E(X) + c$
3. $E(cX) = cE(X)$
4. $E(g(X) + h(X)) = E(g(X)) + E(h(X))$
5. $E(c \cdot g(x)) = c \cdot E(g(X))$
6. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ *(Luego se demostrará)*

Prueba. *Se probará la* (4), *las demás quedan de ejercicio. Note que*

$$\begin{aligned} E(g(X) + h(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) + h(x)) f_X(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) f_X(y) + h(x) f_X(y)]\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(y)\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(y)\, dy \\ &= E(g(X)) + E(h(X)) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Definición 37 *(**Varianza**) La varianza indique que tanto varían los valores de la variable con respecto a su esperanza. Si X es una v.a.c, se define la varianza de x por:*

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2\right],$$

y en general

$$Var(g(X)) = \sigma_{g(X)}^2 = E\left[\left(g(X) - \mu_{g(X)}\right)^2\right].$$

si las esperanzas involucradas existen.

Definición 38 *Sea X una v.a.c. Se define la desviación estándar de X como*

$$\sigma_X = \sqrt{Var\,(X)}$$

Teorema 70 *(**Caracterización de la varianza**) Sea X una v.a.c. Se cumple que*

$$Var\,(X) = E\left(X^2\right) - (E\,(X))^2 = E\left(X^2\right) - \mu_X^2.$$

Prueba. *Ejercicio. Sugerencia: similar a la prueba realizada en variables aleatorias discretas.* ■

Teorema 71 *(**Propiedades de la Varianza**) Sea c una constante, sean X, Y variables aleatorias continuas tales que su varianza existe. Se tiene que:*

1. $Var\,(c) = 0$
2. $Var\,(X + c) = Var\,(X)$
3. $Var\,(cX) = c^2 Var\,(X)$
4. *Si X y Y son variables independientes $Var\,(X + Y) = Var\,(X) + Var\,(Y)$. (Luego se demostrará)*

Prueba. *Ejercicio. Sugerencia: similar a las pruebas realizadas en variables aleatorias discretas.* ■

Ejemplo 122 *Sea X una v.a.c tal que*

$$f_X\,(x) = \begin{cases} 3x^2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}.$$

Note que

$$E\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X\,(x)\,dx = \int_0^1 \left(x \cdot 3x^2\right) dx = 3\int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{4}\,x^4\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

y además

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X\,(x)\,dx = 3\int_0^1 x^5 dx = \frac{3}{5}\,x^5\Big|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

Por lo tanto,

$$Var\,(X) = E\left(X^2\right) - \mu_X^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}.$$

Ejercicio 42 *Sea X una v.a.c tal que*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}.$$

1. *Determine $E(X)$.* R/ $\frac{4}{3}$
2. *Determine $E(X^2)$.* R/ 2
3. *Halle σ_x.* R/ $\sqrt{\frac{2}{9}}$

1.3 Función Generadora de Momentos

Definición 39 *Sea X una v.a.c, se define el momento de orden k como $E(x^k)$*

Definición 40 ***(Función Generadora de Momentos)****Sea X una v.a.c., se define la Función Genradora de Momentos para X por*

$$m_X(t) = E\left(e^{Xt}\right)$$

Teorema 72 *Sea X una v.a.c., se cumple que*

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E\left(x^k\right).$$

Prueba. *Igual a la prueba realizada en variables aleatorias discretas.* ■

Teorema 73 *Sea X una v.a.c. La enésima derivada de m_X evaluada en 0 es igual al momento de orden n es decir*

$$m_X^{(n)}(0) = E(x^n).$$

Prueba. *Igual a la prueba realizada en variables aleatorias discretas.* ■

Ejemplo 123 *Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad*

$$f(x) = \begin{cases} ke^{2x} & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sino \end{cases}$$

Donde k es una constante apropiada (no es necesario averiguarla).

1. *Determine la función generadora de momentos de X.*

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E\left(e^{Xt}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f_X(x)\,dx = k\int_0^1 e^{(t+2)x}dx \\ &= k\left.\frac{e^{x(t+2)}}{t+2}\right|_0^1 = k\left(\frac{e^{t+2}-1}{t+2}\right). \end{aligned}$$

2. *Utilice* (1) *para determinar* $E(X)$ *en términos de* k.

La derivada de la generadora de momentos es

$$m_X'(t) = k\frac{e^{t+2}(t+2)-\left(e^{t+2}-1\right)}{(t+2)^2}, \quad \textit{por lo tanto}$$

$$E(X) = m_X'(0) = \tfrac{1}{4}k\left(e^2+1\right)$$

Ejercicio 43 *Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad*

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x+6} & si \quad x>2 \\ 0 & sino \end{cases}$$

1. *Determine la función generadora de momentos de X. R/* $\quad m_x(t) = \dfrac{-3e^{2t}}{t-3} \quad si \quad t<3$

2. *Utilice* (1) *para determinar* $E(X)$ *y* $Var(X)$. $\qquad$ *R/* $\quad E(X) = \frac{7}{3}, \quad Var(X) = \frac{1}{9}.$

1.4 (♣) Distribución condicional

Definición 41 *Sea X una v.a.c. con espacio muestral* Ω, *sea P una probabilidad sobre* Ω. *Considere el evento no nulo* $B \subseteq \Omega$.

1. *La función* $F_{X|B} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$F_{X|B}(k) = P(X \le k|B) = \frac{P((X\le k)\cap B)}{P(B)}$$

es llamada función de distribución acumulada de probabilidad para X condicionada a B.

2. *si* $F_{X|B}'$ *existe excepto en un número finito de puntos, entonces se define la función de densidad de probabilidad para* $X : f_{X|B} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$f_{X|B}(k) = \begin{cases} F_{X|B}'(k) & si \quad F_{X|B}'(k) \; existe \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

3. *Se define la esperanza de X dado B por*

$$E(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X|B}(y)\,dy$$

Ejemplo 124 *Sea X una v.a.c. tal que*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}.$$

y considere el evento $B : X$ esta en $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

1. *Determine $F_{X|B}$* R/ $F_{X|B}(x) = \begin{cases} 4x - 2 & si \quad \frac{1}{2} < x \le \frac{3}{4} \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$

2. *Determine $E(X|B)$* R/ $E(X|B) = \frac{5}{8}$

1.5 Ejercicios

1. Una empresa tiene costos fijos mensuales de 1500000 colones. Sus costos variables en millones de colones es una v.a.c X con distribución de probabilidad $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ -x+2 & 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.
   (a) Compruebe que la función es una distribución de probabilidad.
   (b) Grafíque $f(x)$
   (c) Determine $F_X(x)$
   (d) Determine el costo total mensual esperado. R/ 2500000

2. ¿Existe un valor de k de manera que la función siguiente sea una función de distribución de probabilidad de una v.a.c X.? R/ *NO*

$$f(x) = \begin{cases} 3x & 0 \le x \le 1 \\ kx^2 - k & 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & si \quad x > 4 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

(a) Determine la función generadora de momentos de X.$R/ \quad m_x(t) = k\left(-\frac{e^{4t-4}}{t-1}\right)$, si $t < 1$

(b) Utilice (a) para determinar $E(X)$. $R/ \quad E(X) = 5ke^{-4}$

4. Sea X una variable aleatoria continua que indica los ingresos semanales en millones de colones de una determinada empresa. La función de distribución de probabilidad de X es
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{7} & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & en \quad \text{otro caso} \end{cases}$$
Si debido a los gastos de la empresa se ha determinado que la ganancia semanal G es $\dfrac{2}{3}$ de los ingresos semanales menos 200000 colones. Determine la ganancia semanal esperada y la varianza de la ganancia. $R/ \quad E(G) = 0.871\,43, \quad Var(G) = 0.03299.$

5. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad
$$f(x) = \begin{cases} ke^{-2x} & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{1}{8} & si \quad 3 < x \leq 5 \end{cases}$$
Determine el valor de k. $R/ \quad k \approx 11.290\,4$

6. Si X es una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{18} & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ kx - 1 & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$
Determine el valor de k. $R/ \quad k = \frac{18}{23}$

7. ($\clubsuit$) Sea X una *v.a.c.* tal que
$$F_X(x) = \begin{cases} pe^{\lambda x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - (1-p)\,e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$
donde $0 < p < 1$ y $\lambda > 0$. Determine f_X $R/ \quad f_X(k) = \begin{cases} \lambda pe^{\lambda x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \lambda(1-p)\,e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

8. Sean a y b constantes. Considere las variables aleatorias X, Y tales que $Y = aX + b$. Pruebe que
$$m_Y(t) = e^{bt} \cdot m_X(at).$$

9. (♣) Sea X una *v.a.c.* y considere el evento $B : X$ está contenido en $]a, b]$.

   (a) Demuestre que $F_{X|B}(x) = \begin{cases} \dfrac{F_X(x) - F_X(a)}{F_X(b) - F_X(a)} & si \quad a < x \leq b \\ 1 & si \quad x > b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

   (b) Determine $f_{X|B}$ $\qquad R/ \quad f_{X|B}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{F_X(b) - F_X(a)} & \text{si} \quad a < x \leq b \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso} \end{cases}$

   (c) Pruebe que $E(X|B) = a + \int_a^b \dfrac{F_X(b) - F_X(x)}{F_X(b) - F_X(a)} dx$.

2 Distribuciones continuas importantes

2.1 Distribución uniforme continua

Se dice que una *v.a.c* X sigue una distribución uniforme en $[a,b]$ si su función de distribución es constante en este intervalo y cero fuera del intervalo él, es decir.

$$f_X(x) = \begin{cases} c & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

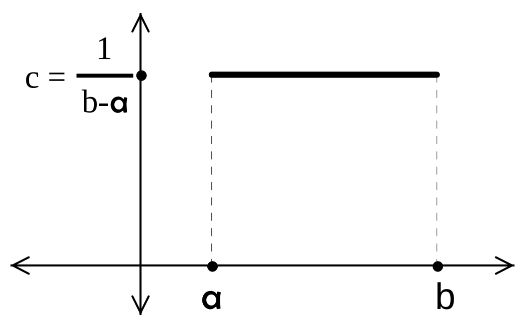
Dado que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a) = 1,$$

por lo tanto $c = \dfrac{1}{b-a}$.

Definición 42 *Sea X una v.a.c. Se dice que X sigue una distribución uniforme en $[a,b]$ si y solo si su función de probabilidad está dada por*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$



y se escribe

$$X \sim U[a,b]$$

Teorema 74 *Sea X una v.a.c. tal que $X \sim U[a,b]$, entonces:*

1. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$

2. $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$

3. $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

4. $m_X(t) = \dfrac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}.$

Prueba. *Ejercicio.* ■

Ejercicio 44 *Sea X una v.a.c. tal que $X \sim U[-5, 7]$. Determine $P(-1 < X < 3)$ R/* $\dfrac{1}{3}$

2.2 Distribución Exponencial

Definición 43 *Sea X una v.a.c. Se dice que X sigue una distribución exponencial si y solo si su función de probabilidad está dada por*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde λ es una constante positiva. Se escribe

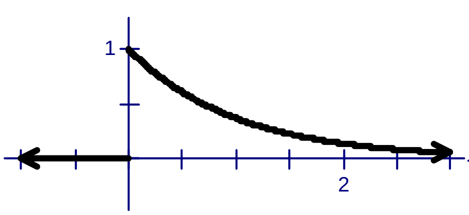
$$X \sim Exp(\lambda)$$

Ejemplo 125 *Note que f_X cumple las condiciones necesarias de una distribución de probabilidad, pues*

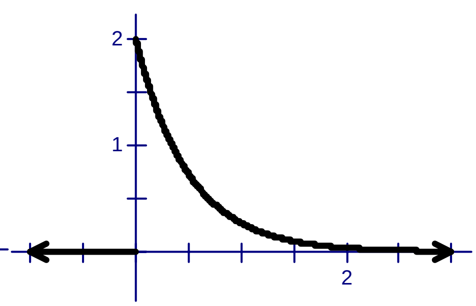
1) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 1 \quad (pues\ \lambda > 0)$

Seguidamente se presenta las gráficas de la distribución exponencial para ciertos valores de λ :



$\lambda = 1$



$\lambda = 2$

En general note que la distribución exponencial interseca al eje Y en $(0, \lambda)$. Además hay una mayor probabilidad de que la variable tome valores positivos cercanos a cero.

Teorema 75 *Sea X una v.a.c. tal que $X \sim E(\lambda)$, entonces:*

1. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

2. $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

3. $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

4. $m_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$ *si* $t \leq \lambda$

Prueba. *Se probará la (1) y (4), las demás quedan de ejercicio.*

1) *Note que*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dy = -e^{-\lambda x}\Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1.$$

4) *Se tiene que*

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E\left(e^{Xt}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f_X(x)\,dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{xt} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{x(t-\lambda)} dx \\ &= \lambda \left. \frac{e^{x(t-\lambda)}}{t-\lambda} \right|_0^{\infty} = \lambda \left(\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x(t-\lambda)}}{t-\lambda} - \frac{1}{t-\lambda} \right) \end{aligned}$$

Si $t > \lambda$ *entonces* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x(t-\lambda)}}{t-\lambda} = \infty$ *y* $m_X(t)$ *no existe. Si* $t \leq \lambda$ *entonces* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x(t-\lambda)}}{t-\lambda} = 0$ *y entonces*

$$m_X(t) = \lambda \left(0 - \frac{1}{t-\lambda} \right) = \frac{\lambda}{\lambda - t}. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 126 *Cada día, el tiempo que tarda Don Juan en encontrar la llave para salir de su casa al trabajo sigue una distribución exponencial con un promedio de 2 minutos.*

1. *Determine la probabilidad de que mañana don Juan tarde más de 3 minutos en encontrar la llave para salir de su casa al trabajo.*

t : *tiempo que tarda Don Juan en encontrar la llave, en min.*

Note que $t \sim Exp(\lambda)$. *Como* $E(t) = 2$ *entonces* $\lambda = 2$, *así la probabilidad de que mañana tarde más de 3 minutos en encontrar la llave es*

$$P(t > 3) = 1 - F_t(3) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right) \approx 0.223\,13$$

2. *En 10 días, ¿cuál es la probabilidad de que en al menos 8, Don Juan tarde más de 3 minutos en encontrar la llave para salir de su casa al trabajo?* (5 *puntos*)

X : # *de días en los cuales Don Juan tarde más de 3 min en hallar la llave.*
Note que $X \sim B(10, 0.223\,13)$, *entonces*

$$P(X \geq 8) = \sum_{k=8}^{10} C(10,k)(0.223\,13)^k (0.776\,87)^{10-k} \approx 0.0001778\,24$$

Ejercicio 45 *El tiempo que tarda una persona en localizar un libro en la Biblioteca M sigue una distribución exponencial con un promedio de 2 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que en la próxima búsqueda dure menos de 2 minutos y medio?* *R/* $1 - e^{-1.25}$

Teorema 76 *Sea* X *una v.a.d. que indica el número de resultados por unidad. Sea* Y *la distancia entre dos resultados sucesivos de* X. *Si* X *sigue una distribución de Poisson de parámetro* λ :

$$X \sim P(\lambda)$$

entonces Y *es una v.a.c. que sigue una distribución exponencial de parámetro* λ :

$$Y \sim Exp(\lambda)$$

Prueba. *Dado que*

$$F_Y(k) = P(Y \leq k) = 1 - P(Y > k)$$

. *Sea* X_k *el número de resultados en* k *unidades. Note que* $X_k \sim P(\lambda k)$, *así*

$$P(X_k = j) = \frac{(\lambda k)^j e^{-\lambda k}}{j!}.$$

El evento $Y > k$ *indica que la distancia entre dos resultados sucesivos es mayor a* k, *es decir que el número de resultados en* k *unidades es cero:* $X_k = 0$. *Por lo tanto,*

$$\begin{aligned} F_Y(k) &= P(Y \leq k) = 1 - P(Y > k) = 1 - P(X_k = 0) \\ &= 1 - \frac{(\lambda k)^0 e^{-\lambda k}}{0!} = 1 - e^{-\lambda k} \end{aligned}$$

Como F_y concuerda con la función de distribución acumulada de probabilidad de la exponencial de parámetro λ, entonces

$$Y \sim Exp(\lambda). \quad \blacksquare$$

Ejemplo 127 *El país C, está por hacer un referéndum para la aprobación Tratado de Libre Comercio (TLC) con el país E y se ha abierto la oficina CONOZCA DEL TLC ANTES DE VOTAR. Se ha determinado que el número de personas que acuden a la oficina por hora sigue una distribución de Poisson con media 2 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que no acudan personas a la oficina en 4 horas?*

Considere las variables

$$\begin{aligned} X &: \text{ \# de personas que acuden a la oficina por hora.} \\ Y &: \text{ tiempo en horas entre los momentos en que} \\ &\quad \text{acuden 2 personas sucesivas a la oficina} \end{aligned}$$

Como $X \sim P(2)$, por el teorema se tiene que $Y \sim Exp(2)$. Por lo tanto, la probabilidad de que no acudan personas a la oficina en 4 horas es

$$P(Y > 4) = 1 - F_Y(4) = 1 - \left(1 - e^{-2\cdot 4}\right) \approx 3.354\,63 \times 10^{-4}.$$

Otra manera de obtener lo solicitado es utilizando la variable

$$Z : \text{\# de personas que acuden a la oficina cada 4 horas.}$$

Como $Z \sim P(8)$, la probabilidad de que no acudan personas a la oficina en 4 horas es

$$P(Z = 0) = \frac{8^0 e^{-8}}{0!} \approx 3.354\,63 \times 10^{-4}.$$

Ejercicio 46 *Varias localidades de una determinada ciudad sufre de constantes apagones debido a la falta de electricidad. La empresa proveedora de electricidad ha puesto a disposición del cliente el número 800-APAGON donde el cliente puede averiguar el rango de horas en las que se va la luz en su localidad para el día siguiente. El número de llamadas que se reciben sigue una distribución de Poisson con un promedio de 4 llamadas por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que no se reciba llamadas en 3 min?* *R/* $6.144\,2 \times 10^{-6}$

2.3 Distribución Normal

2.3.1 Definición y propiedades

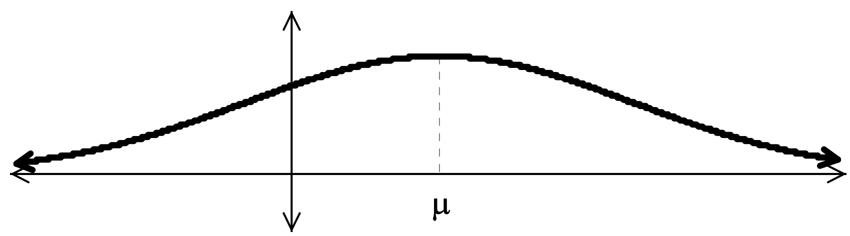
Definición 44 *Sea X una v.a.c. Se dice que X sigue una distribución normal si y solo si su función de probabilidad está dada por*

$$f_X(x) = \frac{e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

donde μ y σ son constantes. Se escribe

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

La distribución normal tiene dominio $\mathbb{R}$ (es decir $R_x = \mathbb{R}$) y su gráfica es simétrica con respecto a la recta $x = \mu$:



En particular si $Z \sim N(0,1)$, se dice que Z sigue una distribución normal estándar. En este caso note que

$$f_Z(x) = \frac{e^{\frac{-1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Esta función cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{\frac{-1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \right) dx = 1.$$

Teorema 77 *Sea X una v.a.c. tal que $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, entonces:*

1. *La gráfica de f_x es simétrica con respecto a $x = \mu$*

2. $m_X(t) = e^{\dfrac{t^2\sigma^2 + 2t\mu}{2}}$

3. $E(X) = \mu$

4. $Var(X) = \sigma^2$

Prueba. *Se probará la 1 y 2, las otras quedan de ejercicio.*

1. *Note que*

$$f_X(u-x) = \frac{e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{u-x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

y además

$$f_X(u+x) = \frac{e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{u+x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Por lo tanto $\forall x \in \mathbb{R} : f_X(u-x) = f_X(u-x)$ *y se obtiene el resultado.*

2. *Por definición*

$$m_X(t) = E\left(e^{Xt}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{xt} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \right) dx$$

Dado que los exponentes se suman, desarrollado y completando cuadrados se tiene que

$$\begin{aligned} xt + \frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 &= -\frac{-2xt\sigma^2 + x^2 - 2x\mu + \mu^2}{2\sigma^2} = -\frac{x^2 - 2x\left(t\sigma^2 + \mu\right) + \mu^2}{2\sigma^2} \\ &= \frac{\left(x - \left(t\sigma^2 + \mu\right)\right)^2 - \left(t\sigma^2 + \mu\right)^2 + \mu^2}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{x - \left(t\sigma^2 + \mu\right)}{\sigma}\right)^2 + \frac{t^2\sigma^2 + 2t\mu}{2} \end{aligned}$$

Así,

$$m_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\dfrac{t^2\sigma^2 + 2t\mu}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x - \left(t\sigma^2 + \mu\right)}{\sigma}\right)^2} \right) dx$$

Realizando la sustitución $z = \dfrac{x - (t\sigma^2 + \mu)}{\sigma}$ *entonces* $dz = \dfrac{dx}{\sigma}$ *y*

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{t^2\sigma^2 + 2t\mu}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\frac{-1}{2}z^2} \right) \sigma dz \\
&= e^{\frac{t^2\sigma^2 + 2t\mu}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\, dz}_{1}
\end{aligned}
$$

donde $Z \sim N(0,1)$, *por lo tanto*

$$
m_X(t) = e^{\frac{t^2\sigma^2 + 2t\mu}{2}}. \qquad \blacksquare
$$

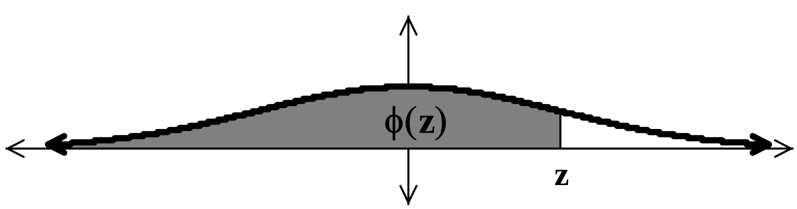
2.3.2 Distribución Normal Estándar

Definición 45 *Se dice que* Z *sigue una distribución normal estándar es una distribución normal con media cero y sus unidades son desviaciones estándares, es decir*

$$
Z \sim N(0,1)
$$

Notación 2 *Si* Z *sigue una distribución normal estándar, se denota su función acumulada de la distribución normal estándar por*

$$
F_Z(k) = P(Z \leq k) = \phi(k)
$$



Para determinar los valores aproximados de $\phi(k)$, para ciertos valores de k, se utilizan la tabla de la Normal Estándar adjunta:

k	centésimas de k		
			$\vdots$
Unidades y décimas de k	$\cdots$	$\cdots$	$\phi(k)$

Ejemplo 128 *Utilizando la tabla se tiene que*

1. $P(Z < 1.83) = \phi(1.83) = 0.9664.$
2. $P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$
3. $P(-1.25 < Z < 0.02) = \phi(0.02) - \phi(-1.25) = 0.508 - 0.1056 = 0.4024.$

Ejemplo 129 *Utilizando la tabla*

$$P(Z < -1.52) = 0.0643$$

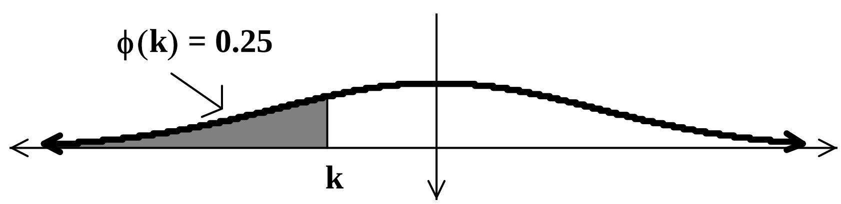
y por simetría se tiene que

$$P(Z > 1.52) = P(Z < -1.52) = 0.0643$$

Además

$$P(Z > -1.52) = 1 - P(Z \leq -1.52) = 1 - 0.0643 = 0.9357$$

Ejemplo 130 *Si* $P(Z \leq k) = 0.25$ *entonces* $\phi(k) = 0.25$. *Para determinar el valor aproximado de* k*, dado que el valor de la probabilidad acumulada hasta* k *es menor al* 50%, *se tiene que* k *es negativo:*



Buscado el valor de 0.25 en el centro de la tabla de los valores Z *negativo se tiene que*

$$\phi(-0.68) = 0.2483 < \phi(k) = 0.25 < 0.2514 = \phi(-0.67)$$

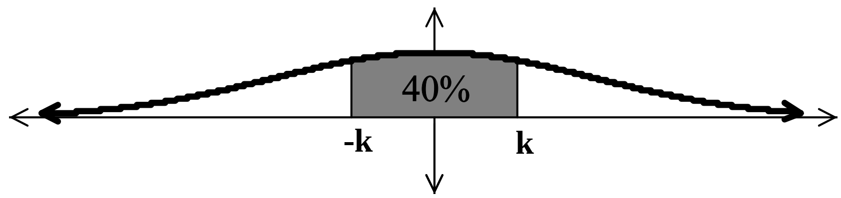
Como ϕ *es creciente, al igual que toda función de distribución acumulada, se tiene que*

$$-0.68 \leq k \leq -0.67.$$

Es decir $k \in [-0.68, -0.67]$. *Dado que* $\phi(k)$ *está más cercano a* $\phi(-0.67)$ *que a* $\phi(-0.68)$, *una buena aproximación de* k *es*

$$k \approx -0.67.$$

Ejemplo 131 *Si* $P(-k < Z < k) = 0.4$, *como la distribución de* Z *está centra en cero, se buscan los valores de* Z *que acotan el* 40% *del área bajo la curva normal estándar:*



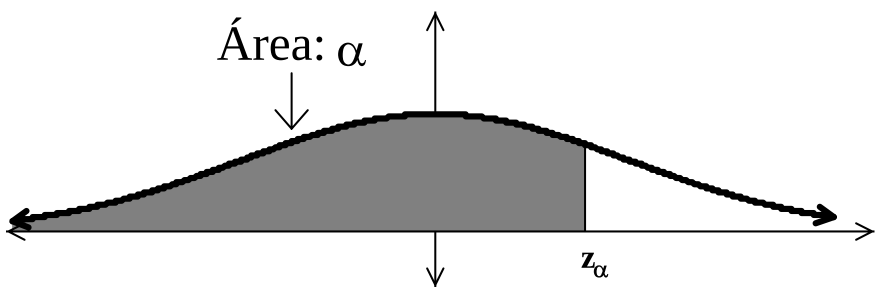
Así $\phi(k)$ *es la mitad del área bajo la curva más un* 20%, *es decir* $\phi(k) = 0.5 + 0.2 = 0.7$. *Utilizando la tabla se tiene que*

$$\phi(0.52) = 0.6985 < \phi(k) = 0.7 < 0.7019 = \phi(0.53)$$

Por lo tanto $k \approx 0.52$.

Definición 46 *Si* $Z \sim N(0,1)$ *entonces se define* ***el valor z:***

$$z_\alpha : \textit{valor de } Z \textit{ que acumula una área a la izquierda de } \alpha\%.$$



Es decir$P(Z \leq z_\alpha) = \alpha$.

Note que si α es menor a 0.5 entonces z_α es negativo y viceversa. De igual forma si α es mayor a 0.5 entonces z_α es positivo y viceversa.

Teorema 78 *Se tiene que* $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

Prueba. *Ejercicio.* ■

Ejemplo 132 *Utilizando directamente la tabla se tiene que*

$$z_{0.1} \approx -1.28, \quad z_{0.05} \approx -1.645, \quad z_{0.025} \approx -1.96$$

y por simétria se tiene que

$$z_{0.9} = -z_{0.1} \approx 1.28, \quad z_{0.95} = -z_{0.05} \approx 1.645, \quad z_{0.975} = -z_{0.025} \approx 1.96$$

Ejercicio 47 *Determine el área bajo la curva normal estándar*

1. *a la derecha de* $z = 1.52$ $R/$ 0.0643
2. *entre* 0 *y* 1.52 $R/$ 0.4357

Ejercicio 48 *¿Cuál es el valor de* Z *que acumula el* 75% *del área bajo la curva normal estándar de izquierda a derecha?* $R/$ 0.67

Ejercicio 49 *¿Qué valores de* Z *acotan el* 95% *central del área bajo la curva normal estándar?* $R/$ 1.96 *y* -1.96

2.3.3 Centrar y estándarizar la distribución normal

Teorema 79 *Sea* X *una v.a.c. tal que* $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ *y sea* $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ *entonces:*

1. $E(Z) = 0$
2. $Var(Z) = 1$
3. $Z \sim N(0,1)$

Prueba. *Basta probar* (3). *Note que*

$$F_Z(k) = P(Z \leq k) = P(X \leq k\sigma + \mu) = \int_{-\infty}^{k\sigma+\mu} \frac{e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx$$

Realizando el cambio de variable de integración: $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \Longrightarrow dz = \dfrac{dx}{\sigma}$:

$$F_Z(k) = \int_{-\infty}^{k} \frac{e^{\frac{-1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} dz = \phi(k)$$

dado que lo obtenido es la distribución acumulada de la normal estandar, se obtiene que $Z \sim N(0,1)$. ■

Ejemplo 133 *Un técnico de la empresa ECI señala que las llamadas telefónicas en cierta localidad tienen una distribución normal con media de 180 segundos y una desviación estándar de* 300 *segundos.*

1. *¿Cuál es la probabilidad de que una llamada en la localidad dure más de 7 minutos?*

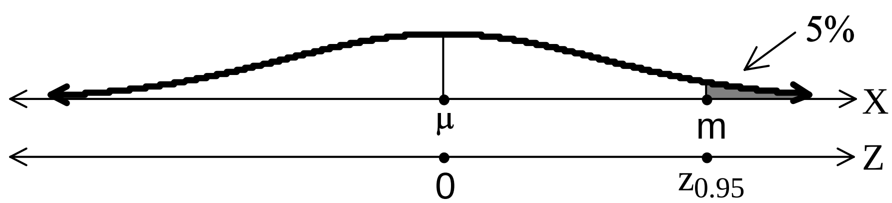
$$X: \text{ duración en segundos de una llamada de la localidad}$$
$$X \sim N\left(180, 300^2\right) \Longrightarrow Z = \frac{X-180}{300} \sim N(0,1).$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(X > 420) &= P\left(Z > \frac{420-180}{300}\right) = P(Z > 0.8) \\ &= 1 - \phi(0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119 \end{aligned}$$

La probabilidad de que una llamada en la localidad dure más de 7 *minutos es aproximadamente de* 21.19%.

2. *De las llamadas que se encuentran en el* 5% *de las más largas, ¿Cuál es la duración de la llamada más breve?*



Forma 1. *Sea m la duración de la llamada más breve de las 5% de llamadas más largas. Entonces*

$$P(X > m) = 0.05$$

Cambiando la variable a Z :

$$0.05 = P(X > m) = P\left(Z > \frac{m-180}{300}\right) = 1 - \phi\left(\frac{m-180}{300}\right)$$

Por lo tanto

$$\phi\left(\frac{m-180}{300}\right) = 0.95 \Longrightarrow \frac{m-180}{300} = z_{0.95} = -z_{0.05} = 1.645.$$

Despejando m se obtiene que $m = 673.5$ segundos.

Forma 2. *A partir de la gráfica se tiene que el valor $z_{0.95}$ de Z corresponde al valor m de X :*

$$z_{0.95} = \frac{m-180}{300}$$

Como $z_{0.95} = -z_{0.05} = 1.645$ entonces

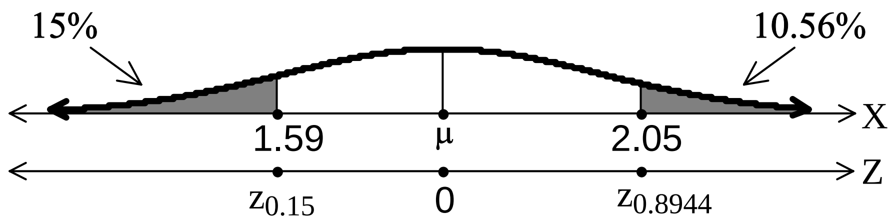
$$1.645 = \frac{m-180}{300} \Longrightarrow m = 673.5 \text{ segundos.}$$

Ejemplo 134 *El peso de una bolsa de frijoles marca SABORES sigue una distribución normal de media y varianza desconocidas. El* 10.56% *de las bolsas tienen un peso superior a 2,05 kg. Ante el reclamo sobre el poco peso de las bolsas, la Empresa SABORES decide adjuntar gratis una bolsita de azúcar SABORES junto a cada bolsa de frijoles que se encuentre en el 15% de las bolsas con menor peso. El peso máximo de una bolsa de frijoles, para que se le adjunte una bolsita de azúcar, es de* 1.59 *kg. Determine el promedio y desviación estándar de los pesos de las bolsas de frijoles SABORES.*

$$X: \text{ peso de una bolsa de frijoles SABORES (en kg)}$$

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Longrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Note que el complemento de 10.56% *es* 89.44%. *Así*



Por lo tanto

$$z_{0.15} = \frac{1.59-\mu}{\sigma} \quad y \quad z_{0.8944} = \frac{2.05-\mu}{\sigma}$$

Utilizando la tabla se tiene que $z_{0.15} = -1.04 \quad y \quad z_{0.8944} = 1.25$. *Así se obtiene el sistema*

$$\begin{cases} -1.04 = \dfrac{1.59-\mu}{\sigma} \\ 1.25 = \dfrac{2.05-\mu}{\sigma} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1.04\sigma + \mu = 1.59 \\ 1.25\sigma + \mu = 2.05 \end{cases}$$

La solución del sistema es

$$\sigma = 0.200\,873\,, \mu = 1.\,798\,91.$$

Ejercicio 50 *Los valores de coeficiente intelectual (CI) de los seres humanos están distribuidos de manera normal con una media igual a* 100 *y una desviación igual a* 10. *Si una persona es elegida al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su CI esté entre* 100 *y* 115*?* *R/* 0.4332

Ejercicio 51 *Una empresa a regalado entradas especiales al Parque de Diversiones a el 10% de los estudiantes del colegio C que obtengan mejor resultado en el examen de bachillerato de matemáticas. De acuerdo a su experiencia, una profesora estima que la media y desviación estándar del examen será de 72 y 13 respectivamente. Suponiendo que los resultados del examen se distribuyen normalmente, ¿cuál será la nota mínima necesaria para asistir a la actividad?* *R/* 88.64

Ejercicio 52 *En una finca, el peso de un saco de zanahoria sigue una distribución normal con un peso promedio y una varianza desconocidos. Si solo el 3% de los sacos pesan menos de 40 kg y el 5% mas de 48 kg, determine el valor de la media y la varianza.* $R/ \quad \mu = 44.267, \quad \sigma = 2.269\,5$

2.4 Distribución Gamma

Definición 47 *Se define la función Gamma por*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

Teorema 80 *Se tiene que*

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n) = (n-1)!$

Prueba. *Se probará la 2 y* 3. *La 1 queda de ejercicio.*

2. *Note que*

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}dx$$

Realizando esta integral por partes con $\left\{ \begin{array}{lcc} u = x^\alpha & \Longrightarrow & du = \alpha x^{\alpha-1}dx \\ dv = e^{-x}dx & \Longrightarrow & v = -e^{-x} \end{array} \right.$ *se tiene que*

$$\Gamma(\alpha+1) = -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

Dado que por L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$$

Entonces

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

3. *Por inducción. Para* $n = 1$, *utilizando el resultado 1 se tiene que*

$$\Gamma(1) = 1 = 0!$$

Supongamos que $\Gamma(n) = (n-1)!$, *entonces por el resultado* 2 *se tiene que*

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!. \qquad \blacksquare$$

Definición 48 *Sea X una v.a.c. Se dice que X sigue una distribución Gamma si y solo si su función de distribución de probabilidad está dada por*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

donde α y β son constantes. Se escribe

$$X \sim Gamma(\alpha, \beta)$$

Teorema 81 *Sea X una v.a.c. tal que $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, entonces:*

1. $m_X(t) = \dfrac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$ *si* $t < \dfrac{1}{\beta}$.

2. $E(X) = \alpha\beta$

3. $Var(X) = \alpha\beta^2$

Prueba. *Se probará la 1, las demás queda de ejercicio. Note que*

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E\left(e^{Xt}\right) = \int_0^\infty e^{xt} f_X(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{e^{xt} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dx \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{x(t-1/\beta)} dx \end{aligned}$$

Sea $u = -x\left(t - \dfrac{1}{\beta}\right)$ *entonces* $du = -\left(t - \dfrac{1}{\beta}\right) dx$ *y* $x = \dfrac{u\beta}{1-\beta t}$, *además dado que* $t < \dfrac{1}{\beta}$ *entonces los límites de integración se mantienen. Así*

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u\beta}{1-\beta t}\right)^{\alpha-1} e^{-u} \frac{\beta}{1-\beta t} du = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha) = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Si $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ para calcular valores de F_X se utiliza la tabla de la Gamma Incompleta que brinda ciertos valores de la función de distribución acumulada F_X. Para utilizar la tabla se debe considerar la notación:

$$F_X(k) = F\left(\frac{k}{\beta}, \alpha\right)$$

donde la tabla indica algunos de los valores de F :

$$\begin{array}{c|ccc} y\diagdown\alpha & & & \alpha \\ \hline & & & \vdots \\ y & \ldots & \ldots & F(y,\alpha) \\ & & & \end{array}$$

Ejemplo 135 *En cierta ciudad, el consumo diario de gasolina, en millones de litros, sigue una distribución gamma con media de* 6 *millones de litros y desviación estándar de* $\sqrt{12}$ *millones de litros. Científicos han determinado que si en un día se consumen más de* 8 *millones de litros en la ciudad, el día se considera altamente contaminante.*

1. *¿Cuál es la probabilidad de que el consumo gasolina diario exceda los 8 millones de litros?*

$$\begin{gathered} X : \text{consumo diario de gasolina} \\ \text{(en millones de litros)} \\ X \sim Gamma(\alpha, \beta) \\ E(X) = \alpha\beta = 6, Var(X) = \alpha\beta^2 = 12 \\ \Longrightarrow \beta = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{12}{6} = 2 \Longrightarrow \alpha = \frac{\alpha\beta}{\beta} = 3 \\ X \sim Gamma(3, 2) \end{gathered}$$

   Utilizando la tabla se tiene que

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - F(4, 3) = 1 - 0.762 = 0.238$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que el consumo gasolina diario exceda los 8 millones de litros es aproximadamente 23.8%.

2. *En una semana, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 días se consideren altamente contaminantes?*

$$\begin{gathered} Y : \#\ \text{de días altamente contaminantes de una semana} \\ \text{Note que } Y \sim B(7, 0.238) \end{gathered}$$

   Entonces

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - C(7,0)\, 0.238^0 0.762^7 - C(7,1)\, 0.238^1 0.762^6 \\ &= 0.524\,688 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que al menos 2 días se consideren altamente contaminantes es aproximadamente 52.5%.

Ejercicio 53 *Suponga que el tiempo de reacción para iniciar un frenado ante un posible choque, para cierta población, sigue una distribución Gamma con media* 0.5 *segundos y varianza* 0.1 *segundos*^{2}. *¿Cuál es la probabilidad de que la respuesta de frenado sea inferior a* 0.72 *segundos?* *R/* $F(3.6, 2.5)$

Teorema 82 *Si* $X \sim Gamma(1, \beta)$ *entonces* $X \sim Exp(\lambda)$ *donde* $\lambda = \dfrac{1}{\beta}$.

Prueba. *Ejercicio.* ■

2.5 Ejercicios

1. Sea X una v.a.c. tal que $X \sim U[a,b]$. Demuestre que $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

2. Sea X una v.a.c. tal que $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$. Sin utilizar la función generadora de momentos de la distribución gamma demuestre que $E(X) = \alpha\beta$, $Var(X) = \alpha\beta^2$.

3. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, determine aproximadamente
   (a) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$
   (b) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$

4. El número de correos electrónicos que recibe una persona por hora sigue una distribución de Poisson con una media de un correo .
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir 5 correo electrónicos en 2 horas?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que no se reciba un correo electrónico durante un período de dos horas?

5. Las calificaciones de las pruebas de admisión en la Universidad Bienestar Seguro tienen distribución normal con una desviación estándar estimada en 100 puntos. Por otro lado, la Universidad no admite alumnos con menos de 500 puntos de calificación. Si este año, el 39% de las personas que presentan el examen califican para entrar a la Universidad, determine la calificación promedio de este año. *R/* $\mu = 472$

6. Los pesos de las sandías maduras cultivadas en Cartago se distribuyen normalmente con una media desconocida y una desviación estándar de 2.8 libras. Si solo el 3% de las sandías pesan menos de 1.5 libras, determine el valor de la media. $R/$ 6.764

7. La estatura de los 900 niños de la Escuela Sonrisitas se distribuyen normalmente con media 135 cm y desviación estándar 10 cm. Si se sabe que solo 45 niños son considerados altos, determine la estatura mínima que debe tener un niño para ser considerado alto. $R/$ $151.45cm$

8. Cada día, el tiempo que tarda Don Juan en encontrar la llave para salir de su casa al trabajo sigue una distribución exponencial con un promedio de 2 minutos. Determine la probabilidad de que mañana don Juan tarde más de 3 minutos encontrar la llave para salir de su casa al trabajo. $R/$ 0.223 13

9. En cierta ciudad, el consumo diario de gaseosa (en miles de litros) sigue una distribución gamma con media igual a 6 mil litros y varianza 18 mil litros^2.

   (a) Determine la probabilidad de que en un día se consuman más de 9 mil litros en esta ciudad. $R/$ 0.199

   (b) Halle la probabilidad de que la semana entrante, iniciando lunes, se logre obtener por primera vez el viernes, un consumo diario de gaseosa superior a 9 mil litros en esta ciudad. $R/$ 0.081919

10. (♣) Sea X una $v.a.c.$ Se dice que X sigue una Distribución de Cauchy en (a,b) si y solo si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c(a,b)}{1+x^2} & a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $c(a,b)$ es una constante apropiada que depende de a y b. Se escribe

$$X \sim C(a,b)$$

Pruebe que

   (a) $C(-\infty,\infty) = \dfrac{1}{\pi}$

   (b) $C(-1,1) = C(0,\infty) = \dfrac{2}{\pi}$

3 Ejercicios Finales

1. La media del diámetro interior de una muestra de 200 lavadoras producidas por una máquina es 1,275 cm. y la desviación típica de 0,0125 cm. El propósito para el cual se han diseñado las lavadoras permite una tolerancia máxima en el diámetro de 1,26cm. a 1,29 cm., de otra forma las lavadoras se consideran defectuosas. Determinar el porcentaje de lavadoras defectuosas producidas por la máquina, suponiendo que los diámetros están distribuidos normalmente.

2. En una finca, el peso de un saco de zanahoria tiene un peso promedio y una varianza desconocidos. Si solo el 3% de los sacos pesan menos de 40 kg y el 5% más de 48 kg, determine el valor de la media y la varianza. $R/\quad u = 44.267$ y $\sigma = 2.2695$

3. Si X es una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{4} & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

   Determine el valor de k. $R/\quad k = \frac{18}{23}$

4. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{-5x+25} & si \quad x \geq 5 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

   (a) Determine la función generadora de momentos de X . $R/\quad m_x(t) = \dfrac{-5e^{5t}}{t-5}$, si $t < 5$

   (b) Utilice (a) para determinar $E(X)$. $R/\quad E(X) = \frac{26}{5}$

5. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

   (a) Determine la función generadora de momentos de X.$R/\quad m_x(t) = \dfrac{-2}{t-2}$, si $t < 2$

   (b) Utilice (a) para determinar $E(X)$ y $Var(X)$. $R/\quad E(X) = \dfrac{1}{2}, \quad Var(X) = \dfrac{1}{4}$

6. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{18} & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ x - 3 & si \quad 3 < x \leq k \end{cases}$$

Determine el valor de k. $R/ \quad k = \dfrac{13}{3}$

7. Juan recibe un salario mensual base de 150000 colones, además de un incentivo mensual, según las ventas que realice, dado por una *v.a.c.* X en miles de colones, cuya función generadora de momentos es

$$m_X(t) = \frac{1}{(1 - 30t)^2}$$

Determine el salario promedio mensual total que recibe Juan, y la desviación estándar de su salario mensual total. $R/ \quad E(S) = 1800, \sigma(S) = 30\sqrt{2}$

8. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{1}{6} & si \quad 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

con k constante (no es necesario averiguarla). Determine la función generadora de momentos de X. $R/ \quad m_x(t) = k\left(\frac{e^{3t-3}-1}{t-1}\right) + \frac{e^{5x}-e^{3t}}{6t}$

9. Una empresa tiene costos fijos mensuales de 1500000 colones. Sus costos variables en millones de colones es una v.a.c X con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ kx + 2 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine el valor de k. $R/ \quad k = -1$

10. Las entradas mensuales en millones de colones de la empresa TEC de producción software están dadas por una v.a.c. X, donde $R_x = [2, 3]$, y su función de distribución es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x - 2 & si \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & en \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa TEC, el próximo mes, tenga una entrada entre 2300000 y 2500000 colones? $R/ \quad 0.24$

(b) Determine la entrada mensual esperada por la empresa TEC. Además determine $Var(X)$.
. $R/ \quad E(X) = 2.6, \quad Var(X) = 7.3333 \times 10^{-2}$

(c) Si se ha estimado que los gastos mensuales de empresa TEC, en millones de colones esta dado por $Y = \dfrac{6(X-1)}{5}$, determine la esperanza y varianza de Y.$R/ \quad E(Y) = 1.92, Var(Y) = 0.1056$

11. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x+9} & si \quad x > 3 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

(a) Determine la función generadora de momentos de X. $R/ \quad m_x(t) = \dfrac{-3e^{3t}}{t-3} \quad si \quad t < 3$

(b) Utilice (a) para determinar $E(X)$ y $Var(X)$. $R/ \quad E(X) = \frac{10}{3}, Var(X) = \frac{1}{9}$

12. Sea X una v.a.c. con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{k}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine el valor de k. $R/ \quad k = \dfrac{3}{2}$

(b) Si $E(X) = \dfrac{121}{96}$, halle $Var(X)$ $R/ \quad Var(x) = \frac{191}{9216}$

13. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^4 e^{-2x}}{3} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Pruebe que si $t < 2$ entonces $m_x(t) = \dfrac{4 \cdot \Gamma(5)}{3(2-t)^5}$.

(b) Utilice (a) para determinar $E(X)$ y $Var(X)$ $R/ \quad E(X) = \frac{5}{2}, Var(X) = \frac{5}{4}$

14. Las capacidades en gigas de un disco duro fabricado por TECN, con capacidad nominal de 80 gigas, están distribuidos normalmente con una desviación estándar igual a 0.15 gigas. Determine la capacidad promedio de esta clase de discos, sabiendo que solo el 6% de estos tienen capacidades inferiores a la capacidad nominal. $R/\quad \mu = 80.233$

15. Sea X una variable aleatoria continua y considere la función $f(c) = E\left((X-c)^2\right)$. Determine el valor de c donde $f(c)$ alcanza su mínimo absoluto e interprete el resultado.

16. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

    (a) Determine la función generadora de momentos de X.$R/\quad m_x(t) = \dfrac{-3}{t-3}$, si $t < 3$

    (b) Utilice (a) para determinar $E(X)$ y $Var(X)$. $R/\quad E(X) = \frac{1}{3},\quad Var(X) = \dfrac{1}{9}$.

17. Un punto P es escogido aleatoriamente en el interior de un triángulo equilátero de lado 1. Sea X : la distancia perpendicular de P al lado de triángulo más cercano. Pruebe que

    (a) $P(X > k) = \left(1 - 2\sqrt{3}k\right)^2$

    (b) Determine F_X y f_X. $R/\quad f_X(x) = 4\sqrt{3}\left(1 - 2\sqrt{3}x\right)$

18. El tiempo que tarda don Víctor en dormirse, luego de acostarse, sigue una distribución Gamma con media 4 min y varianza 8 min^2.

    (a) Determine la probabilidad de que don Víctor dure menos de 6 minutos en dormirse, luego de acostarse. $R/\quad 0.801$

    (b) Halle la probabilidad de que la semana entrante, iniciando lunes, logre dormirse por primera vez el jueves en menos de 6 min, luego de acostarse.$R/\quad 6.3124 \times 10^{-3}$

19. De lunes a viernes, Mario llega a la oficina y enciende su computadora, la cuál la apaga al finalizar su trabajo del día. El tiempo que tarda la computadora en iniciarse sigue una distribución gamma con media 2 minutos y desviación estándar de 1 minuto.

(a) Determine la probabilidad de que el próximo lunes la computadora de Mario dure más de 4 minutos iniciándose. $R/ \quad 0.042$

(b) Determine la probabilidad de que a partir del lunes de la próxima semana, por primera el jueves, la computadora se reinicie en menos de 4 minutos. $R/ \quad 7.0976 \times 10^{-5}$

20. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 7e^{-7x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

(a) Determine la función generadora de momentos de X. $R/ \quad m_x(t) = \dfrac{-7}{t-7}$, si $t < 7$

(b) Utilice (a) para determinar $E(X)$ y $Var(X)$ $\qquad R/ \quad E(X) = \dfrac{1}{7} \quad Var(X) = \dfrac{1}{49}$

21. (♣) Dada la variable $Z \sim N(0,1)$ Sean $X = \sigma Z + \mu$ y $Y = Z^2$ con σ y μ contantes tal que $\sigma \neq 0$.

(a) Determine F_X $\qquad R/ \quad F_X(k) = \begin{cases} \phi\left(\dfrac{k-\mu}{\sigma}\right) & si \quad \sigma > 0 \\ 1 - \phi\left(\dfrac{k-\mu}{\sigma}\right) & si \quad \sigma < 0 \end{cases}$

(b) Determine F_Y $\qquad R/ \quad F_Y(k) = \phi\left(\sqrt{k}\right) - \phi\left(-\sqrt{k}\right)$

(c) Determine f_X $\qquad R/ \quad f_X(x) = \dfrac{e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\sigma^2\pi}}$

(d) Determine f_Y $\qquad R/ \quad f_Y(x) = \dfrac{e^{\frac{-x}{2}}}{\sqrt{2\pi x}}$

22. (♣) Sea X una *v.a.c.* no negativa tal que $E(X)$ existe. Pruebe que

$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\, dx$$

Sugerencia: Note que $\dfrac{d}{dx}(1 - F_X(x)) = -f_X(x)$, calcule $\int_0^y x f_x(x)\, dx$ por partes y asuma que $\lim_{y \to \infty} y(1 - F_X(y)) = 0$.

23. (♣) Sea $X \sim Exp\left(\lambda\right)$, pruebe que

    (a) $P\left(X > s + t | X > s\right) = e^{-\lambda t} = 1 - F_X\left(t\right)$

    (b) $E\left(X | X > s\right) = s + E\left(X\right)$

    (c) $E\left(X | X \leq s\right) = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{s}{e^{\lambda s} - 1}.$

    Sugerencia: Para b y c utilice el resultado del ejercicio (9) de la página (182).

24. (♣) Sea $Z \sim N\left(0,1\right)$. Se define la sucesión de funciones $H_n\left(x\right)$ por

$$\begin{cases} H_0\left(x\right) = 1 \\ H_n\left(x\right) f_Z\left(x\right) = \left(-1\right)^n \dfrac{d^n f_Z\left(x\right)}{dx^n} \end{cases}$$

    (a) Determine $H_1\left(x\right)$ $\quad$ R/ $\quad H_1\left(x\right) = x$

    (b) Pruebe que $H_{n+1}\left(x\right) = xH_n\left(x\right) - H_n'\left(x\right).$

    (c) Demuestre que H_n es un polinomio en x de grado n.

Capítulo V

(♣) Distribución de probabilidad conjunta

Se abordan los principales conceptos asociados a la distribución conjunta para variables aleatorias discretas y continuas.

1 Distribución conjunta para variables discretas

Definición 49 *Sean X, Y variables aleatorias discretas. Se dice que f es la* ***función de distribución conjunta de masa*** *de X y Y si y solo si*

$$f(x,y) = P(X = x \cap Y = y)$$

En general si $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias discretas, su ***función de distribución conjunta de masa*** *es*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap ... \cap X_n = x_n)$$

Teorema 83 *Si f es la* ***función de distribución conjunta de masa*** *de dos variables aleatorias discretas X y Y, entonces*

1. *$f(x,y) \geq 0$ para todo $x \in R_X$,y para todo $y \in R_Y$.*
2. $\sum\limits_{x \in R_X, y \in R_Y} f(x,y) = 1$
3. $P((X,Y) \in C) = \sum\limits_{(x,y) \in C} f(x,y)$.

Prueba *Ejercicio.* ■

Teorema 84 *Sean f es la* ***función de distribución conjunta de masa*** *de dos variables aleatorias discretas X y Y; y $Z = g(X,Y)$ entonces*

1. $f_Z(z) = \sum\limits_{g(x,y)=z} f(x,y)$.
2. *$f_X(x) = \sum\limits_{y \in R_y} f(x,y)$. Esta función es llamada* ***la función de distribución marginal de*** *X.*
3. *$f_Y(y) = \sum\limits_{x \in R_x} f(x,y)$. Esta función es llamada* ***la función de distribución marginal de*** *Y.*

Prueba *Se tiene que*

$$f_Z(z) = P(g(X,Y) = z) = \sum_{g(x,y)=z} P(X = x \cap Y = y) = \sum_{g(x,y)=z} f(x,y).$$

La 2 y 3 son casos particulares de g. ■

Ejemplo 136 *En una canasta se tienen* 5 *bolas blancas,* 6 *bolas rojas y* 7 *bolas verdes. Se seleccionan sin reposición* 3 *bolas de la canasta, y considere las variables* X : # *de bolas rojas extraidas y* Y : # *de bolas verdes extraídas. Determine*

1. *La función de distribución conjunta de masa de* X, Y.
$$R/\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{C(6,x)\,C(7,y)\,C(5,3-x-y)}{C(18,3)} & si \quad x+y\leq 3\\ 0 & en \quad otro\ caso\end{cases}$$

2. *La función de distribución marginal de* X.
$$R/\quad f_X(x)=\begin{cases}\frac{55}{204} & si \quad x=0\\ \frac{33}{68} & si \quad x=1\\ \frac{15}{68} & si \quad x=2\\ \frac{5}{204} & si \quad x=3\end{cases}$$

3. *La función de distribución marginal de* Y.
$$R/\quad f_Y(x)=\begin{cases}\frac{55}{272} & si \quad y=0\\ \frac{385}{816} & si \quad y=1\\ \frac{77}{272} & si \quad y=2\\ \frac{35}{816} & si \quad y=3\end{cases}$$

Definición 50 *Sean* X, Y *variables aleatorias discretas con función de distribución conjunta de masa* f. *Se dice que* X, Y *son independientes si y solo si para todo* $x \in R_X$,*y para todo* $y \in R_Y$:
$$f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)$$
En general, si $X_1, X_2, ..., X_n$ *son variables aleatorias discretas con función de distribución conjunta de masa* f, *estas variables son independientes si y solo si*
$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i).$$

Ejemplo 137 *En el ejemplo anterior, ¿*X *y* Y *son independientes?* *R/ No*

Teorema 85 *Sean* X, Y *variables independientes entonces*

1. $P(X\in A\cap Y\in B)=P(X\in A)\,P(Y\in B)$.
2. *Si* g *y* h *son funciones reales, entonces las variables* $g(X)$ *y* $h(Y)$ *son independientes.*

Prueba *Se tiene que*

$$\begin{aligned} P(X \in A \cap Y \in B) &= \sum_{x \in A, y \in B} f(x,y) = \sum_{x \in A, y \in B} f_X(x) f_Y(y) = \sum_{x \in A} f_X(x) \sum_{y \in B} f_Y(y) \\ &= P(X \in A) P(Y \in B). \end{aligned}$$

Para la parte (2) *,basta tomar* $A = \{x | g(x) = n\}$ *y* $B = \{y | h(y) = m\}$ *, utilizando* (1) *:*

$$\begin{aligned} P(g(X) = n \cap h(Y) = m) &= P(X \in A \cap Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B) \\ &= P(g(X) = n) P(h(Y) = m) \end{aligned}$$

Por lo tanto $g(X)$ *y* $h(Y)$ *son independientes.* ■

Teorema 86 *Sean* X, Y *variables aleatorias discretas con función de distribución conjunta de masa* f. *Sea* $Z = g(X,Y)$ *, se tiene que*

$$E(Z) = \sum_{x \in R_X, y \in R_Y} g(x,y) f(x,y)$$

Prueba *Note que*

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{z \in R_Z} z f_Z(z) = \sum_{z \in R_Z} z P(g(X,Y) = z) = \sum_{z \in R_Z} z \sum_{g(x,y)=z} f(x,y) \\ &= \sum_{z \in R_Z} \sum_{g(x,y)=z} z f(x,y) = \sum_{z \in R_Z} \sum_{g(x,y)=z} g(x,y) f(x,y) = \sum_{x \in R_X, y \in R_Y} g(x,y) f(x,y) \end{aligned}$$ ■

Teorema 87 *Sean* X, Y *variables aleatorias discretas y* $a, b \in \mathbb{R}$, *se tiene que*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Prueba *Ejercicio.* ■

Teorema 88 *Sean* X, Y *variables aleatorias discretas independientes, se tiene que*

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

Prueba *Ejercicio.* ■

Teorema 89 *Sean* X, Y *variables aleatorias discretas independientes y* $Z = X + Y$, *se tiene que*

$$f_Z(z) = \sum_{x \in R_X} f(x, z - x)$$

y si X, Y *son independientes*

$$f_Z(z) = \sum_{x \in R_X} f_x(x) f_Y(z - x)$$

Prueba *Note que*

$$f_Z(z) = P(X+Y=z) = \sum_{x+y=z} f(x,y) = \sum_{x \in R_X} f(x, z-x)$$

y si X, Y *son independientes el resultado se obtiene de que* $f(x, z-x) = f_x(x) f_Y(z-x)$. ■

Definición 51 *Sean* X, Y *variables aleatorias discretas, se define la covarianza de* X, Y *por*

$$Cov(X,Y) = E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))$$

Teorema 90 *Sean* X, Y *variables aleatorias discretas, se tiene que*

1. $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
2. $Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y)$, *con* a, b, c, d *constantes reales*
3. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
4. *Si* X, Y *son independientes entonces* $Cov(X,Y) = 0$
5. *Si* X, Y *son independientes entonces* $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Prueba *Ejercicio.* ■

2 Distribución conjunta para variables continuas

Definición 52 *Sean* X, Y *variables aleatorias. Se dice que* F *es la* ***función de distribución conjunta acumulada*** *de* X *y* Y *si y solo si*

$$F(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$$

y si $\dfrac{\partial F}{\partial x \partial y}$ *existe y no es negativa excepto en una colección finita de líneas de* $\mathbb{R}^2$, *se define la* ***función de distribución conjunta de densidad*** *de* X *y* Y *por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x \partial y}(x,y) & si \quad \dfrac{\partial F}{\partial x \partial y}(x,y) \;\; existe \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Teorema 91 *(**Propiedades de la distribución de densidad**) Si* f *es la función de distribución conjunta de densidad de* X *y* Y, *entonces*

1. $f(x,y) \geq 0$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

2. $P((X,Y)\in C)=\int\int_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dxdy,$ *con* $C\subseteq\mathbb{R}^2.$

3. $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv.$

4. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=1$

5. $P(X\in A\cap Y\in B)=\int_{y\in B}\int_{x\in A} f(x,y)\,dxdy$

Prueba *Ejercicio.* ■

Ejemplo 138 *Se elige un punto P al azar en el rectángulo $R=[0,a]\times[0,b]$ de un plano coordenado. Suponga que todos los puntos del rectángulo tienen igual probabilidad de ser seleccionados. Considere las variables X,Y tales que las coordenadas de P son (X,Y)*

1. *Determine la función de distribución conjunta acumulada de X y Y.* R/ $F(x,y)=$
$$\begin{cases} 1 & si \quad x\geq a, y\geq b\\ \dfrac{xy}{ab} & si \quad 0\leq x\leq a, 0\leq y\leq b\\ \dfrac{y}{b} & si \quad x\geq a, 0\leq y\leq b\\ \dfrac{x}{a} & si \quad 0\leq x\leq a, y\geq b\\ 0 & si \quad x<0, y<b\end{cases}$$

2. *Determine la función de distribución conjunta de densidad de X y Y.* R/ $F(x,y)=$
$$\begin{cases} \dfrac{1}{ab} & si \quad 0<x<a, 0<y<b\\ 0 & en \quad otro\ caso\end{cases}$$

Teorema 92 *(**Propiedades de la distribución acumulada**) Si F es la función de distribución conjunta acumulada de X y Y, entonces*

1. $F(x,y)\geq 0$ *para todo* $x,y\in\mathbb{R}.$

2. $F(x,y)$ *es creciente en x, y en y.*

3. $\lim\limits_{x,y\to\infty} F(x,y)=1$

4. $F_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\,dudy,$ *y* $F_Y(x)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)\,dxdv$

5. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy,$ *y* $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$

Prueba *La (1) es evidente. Para la (2) note que*

$$P(a < X \leq b \cap Y \leq d) = P(X \leq b \cap Y \leq d) - P(X \leq a \cap Y \leq d) = F(b,d) - F(a,d)$$

Como toda probabilidad es positiva entonces

$$F(a,d) \leq F(b,d) \quad \text{con } a < b$$

similarmente se obtiene que $F(x,y)$ es creciente en y. Para (3) note que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = \lim_{x,y\to\infty}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dxdy = \lim_{x,y\to\infty} F(x,y).$$

Además,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{y\to\infty} P(X \leq x \cap Y \leq y) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\,dudy$$

y por lo tanto,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

Los otros resultados se obtienen de manera similar. ■

Ejemplo 139 *Sean X, Y dos variables continuas con distribución conjunta de densidad*

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-x}e^{-6y} & si \quad x,y \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

Determine

1. $P(X > 2, Y < 2)$ R/ $e^{-2} - e^{-14}$
2. $P(X < Y)$ R/ $\frac{1}{7}$
3. F_Y R/ $1 - e^{-6y}$

Definición 53 *Sea F la función de distribución conjunta acumulada de las variables continuas X y Y. Estas variables son independientes si y solo si*

$$F(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Teorema 93 *Sean X, Y dos variables continuas independientes con función de distribución conjunta acumulada F y de densidad f. Sea $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in A \wedge y \in B\right\}$. Se tiene que*

1. *Si* $\dfrac{\partial F}{\partial x \partial y}$ *existe y no es negativa excepto en una colección finita de líneas de* $\mathbb{R}^2$: $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $P((X,Y) \in C) = \int_{x\in A} f_X(x)\,dx \int_{y\in B} f_Y(y)\,dy$

Prueba *Se tiene que*

$$\frac{\partial F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x \partial y}(F_X(x) F_Y(y)) = \frac{\partial}{\partial x}(F_X(x) f_Y(y)) = f_X(x) f_Y(y)$$

y además

$$\begin{aligned} P((X,Y) \in C) &= \int\int_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dxdy = \int_{x\in A}\int_{y\in B} f_X(x) f_Y(y)\,dxdy \\ &= \int_{x\in A} f_Y(y)\left(\int_{y\in B} f_X(x)\,dx\right) dy = \int_{x\in A} f_X(x)\,dx \int_{y\in B} f_Y(y)\,dy. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 94 *Sean X, Y dos variables continuas independientes con función de distribución conjunta de densidad f. Si $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ entonces X, Y son independientes*

Prueba *Note que*

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(u) f_Y(v)\,dudv \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv = F_X(x) F_Y(y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 95 *Sean X, Y dos variables continuas con función de distribución conjunta de densidad f. Sea $Z = X + Y$, se tiene que*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx$$

y si X, Y son independientes entonces

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

Prueba *Note que*

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \le z) = \int\int_{\{(x,y)|x+y\le z\}} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dydx \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ u=y+x}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z} f(x, u-x)\,dudx \end{aligned}$$

por lo tanto $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\, dx$. *Se deja de ejercicio la segunda parte.* ■

Teorema 96 *Sean* X, Y *dos variables continuas independientes con función de distribución conjunta de densidad* f. *Sea* $Z = g(X, Y)$. *Si*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|\, f(x, y)\, dxdy \text{ converge}$$

entonces

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, f(x, y)\, dxdy$$

Prueba *Se omite la prueba.* ■

Definición 54 *Sean* X, Y *variables aleatorias continuas, se define la covarianza de* X, Y *por*

$$Cov(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))$$

Teorema 97 *Sean* X, Y *variables aleatorias continuas, se tiene que*

1. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
2. *Si* X, Y *son independientes, entonces* $E(XY) = E(X)E(Y)$
3. $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
4. $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)$, *con* a, b, c, d *constantes reales*
5. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
6. *Si* X, Y *son independientes entonces* $Cov(X, Y) = 0$
7. *Si* X, Y *son independientes entonces* $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Prueba *Ejercicio.* ■

Teorema 98 *Sean* X, Y *dos variables continuas independientes tales* $X \sim N(0, 1)$ *y* $Y \sim N(0, \sigma^2)$. *Sean* $Z = X + Y, W = kY, M = Y + k$, *con* $a, b, k \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$Z \sim N(0, \sigma^2 + 1), \quad W \sim N(0, k^2\sigma^2), \quad M \sim N(k, \sigma^2)$$

Prueba *Se tiene que*

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(z-x)^2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= \frac{e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\left(\sigma^2x^2-2xz+x^2\right)} dx = \frac{e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1\left(\sigma^2+1\right)}{2}\left(x^2-\frac{2xz}{\sigma^2+1}\right)} dx \\
&= \frac{e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\left(\sigma^2+1\right)}{2}\left(x^2-\frac{2xz}{\sigma^2+1}+\frac{z^2}{\left(\sigma^2+1\right)^2}-\frac{z^2}{\left(\sigma^2+1\right)^2}\right)} dx \\
&= \frac{e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{z^2}{2\left(\sigma^2+1\right)}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\left(\sigma^2+1\right)}{2}\left(x-\frac{z}{\sigma^2+1}\right)^2} dx
\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $u = x - \dfrac{z}{\sigma^2+1}$, *se obtiene que*

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{z^2}{2\left(\sigma^2+1\right)}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-1\left(\sigma^2+1\right)}{2}u^2} du = \frac{e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{z^2}{2\left(\sigma^2+1\right)}}}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\sigma^2+1}{2}}} \\
&= \frac{e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)^2}}{\sqrt{\sigma^2+1}\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $Z \sim N\left(0, \sigma^2+1\right)$. *Las demás se dejan de ejercicio.* ■

Teorema 99 *Sean* X, Y *dos variables continuas independientes tales* $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ *y* $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$. *Sea* $W = aX + bY$, *entonces*

$$W \sim N\left(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2\right)$$

Prueba *Ejercicio. Sugerencia note que*

$$W = a^2\sigma_1^2\left(\frac{aX - a\mu_1}{a^2\sigma_1^2} + \frac{bY - b\mu_2}{a^2\sigma_1^2}\right) + a\mu_1 + b\mu_2. \qquad ■$$

3 Ejercicios

1. Sea X, Y variables aleatorias continuas con función de distribución acumulada F. Pruebe que
$$P(X > a \cap Y > b) = 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a,b)$$

2. Sean X, Y variables aleatorias discretas con función de distribución conjunta de masa:

$$f(x,y) = kC(x+y-1,x)\,\lambda^x \mu^y, \quad \text{con } x \geq 0, y \geq 1$$

donde λ, μ son constantes tales que $1 > 1-\lambda > \mu > 0$.

   (a) Determine el valor de k. (Sugerencia: pruebe que $(1-x)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} C(n+i-1,i)\,x^i$)
   $R/ \quad k = \dfrac{1-\lambda-\mu}{\mu}$.

   (b) Determine f_X $\qquad R/ \quad f_X(x) = \dfrac{(1-\lambda-\mu)\,\lambda^x}{(1-\mu)^{x+1}}$

   (c) Determine f_Y $\qquad R/ \quad f_Y(y) = \dfrac{(1-\lambda-\mu)\,\mu^{y-1}}{(1-\mu)^y}$

   (d) ¿Son X, Y independientes?

3. Considere las variables independientes $X \sim G(p_1)$ y $Y \sim G(p_2)$. Sea $Z = \min\{X,Y\}$.

   (a) Halle $P(Z > n)$, con $n = 0,1,2,3,..$ $\qquad R/ \quad P(Z > n) = ((1-p_1)(1-p_2))^{n+1}$
   (b) Determine f_Z $\qquad R/ \quad f_Z(k) = (p_1 + p_2 - p_1 p_2)((1-p_1)(1-p_2))^n$
   (c) Sea $p_1 = p_2 = p$ y $W = X + Y$. Determine f_W $\quad R/ \quad f_W(w) = (w+1)\,p^2(1-p)^w$

4. Sean X, Y dos variables continuas con distribución conjunta de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy & si \quad 0 < y < x < 1 \\ 0 & en \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

   (a) Determine el valor de k $\qquad R/ \quad k = 8$
   (b) Halle $P(X+Y > 1)$ $\qquad R/ \quad \dfrac{5}{6}$
   (c) ¿Cual es la probabilidad de formar un triángulo de lados $X, Y, 1-X$? $\qquad R/ \quad \frac{32}{81}$

5. Sean X, Y dos variables continuas, se dice que X *y* Y siguen una distribución conjunta uniforme en $C \subseteq \mathbb{R}^2$ si su función de densidad es

$$f(x,y) = \begin{cases} k & si \quad (x,y) \in C \\ 0 & en \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

donde el área de C no es nula.

   (a) Determine el valor de k $\qquad R/ \quad k = \dfrac{1}{|C|}$

(b) Sea C el disco centrado en el origen de radio 1.

i. ¿Son X y Y independientes? R/ *No*

ii. Determine f_X R/ $f_X(x) = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$

iii. Sean $a < 1$ y D la distancia desde el origen al punto (X, Y). ¿Cuál es la probabilidad de que $D \leq a$? R/ a^2

iv. Pruebe que $f_D(a) = 2a$ y determine $E(D)$ R/ $\dfrac{2}{3}$

6. (**El problema de la aguja de Buffon**) Se tiene una tabla marcada por infinitas líneas paralelas donde la distancia entre dos líneas consecutivas es a. Una aguja de largo L, con $L \leq a$, es lanzada al azar a la tabla. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja toque una de las líneas paralelas? Para responder al problema, considere los siguientes subproblemas.

(a) Sean C : el punto medio de la aguja, X : la distancia de C a la recta paralela más cercana y θ : el ángulo no obtuso formado por la aguja y la proyección perpenicular de C a la recta paralela más cercana. Determine el rango de las variables X y θ.

(b) Pruebe que la aguja interseca a una línea paralela si y solo si $X < \dfrac{L}{2}\cos\theta$

(c) ¿Son X y θ independientes?

(d) Determine las funciones de distribución de densidad de X y de θ.

(e) Pruebe que distribución conjunta de densidad de X y Y es $f(x, y) = \dfrac{4}{\pi a}$.

(f) ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja toque una de las líneas paralelas? R/ $\dfrac{2L}{\pi a}$

7. El número de personas que asisten a la Oficina del Consumidor sigue una distribución de Poisson con un promedio de 6 personas por día. Se sabe que la probabilidad de que la persona, que acude a esta oficina, sea mujer es p. Sean X : el número de mujeres que asisten a la Oficina del Consumidor por día, y Y : el número de hombres que asisten a la Oficina del Consumidor por día.

(a) Pruebe que $P(X = i \cap Y = j) = P((X = i \cap Y = j)|\, X + Y = i + j)\, P(X + Y = i + j)$.

(b) Pruebe que $P((X = i \cap Y = j)|\, X + Y = i + j) = C(i + j, i)\, p^i (1 - p)^j$

(c) Determine la distribución conjunta de densidad de X y Y R/ $f(x, y) = \dfrac{e^{-6}(6p)^x (6 - 6p)^y}{x!y!}$

(d) Pruebe que $X \sim P(6p)$ y $Y \sim P(6 - 6p)$

(e) ¿Son X y Y independientes? $R/$ Si

8. Sean X, Y dos variables discretas independientes tales que

$$X \sim P(\lambda_1), \quad Y \sim P(\lambda_2)$$

Pruebe que $Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

9. Sean X, Y dos variables discretas independientes tales que

$$X \sim B(n, p), \quad Y \sim B(m, p)$$

Sea $Z = X + Y$. Pruebe que $Z \sim B(n + m, p)$.

10. Sean X, Y dos variables continuas independientes tales que

$$X \sim Gamma(\alpha, \beta), \quad Y \sim Gamma(\theta, \beta)$$

Pruebe que $Z = X+Y \sim Gamma(\alpha + \theta, \beta)$. Sugerencia: asuma que $\int_0^1 (v)^{\alpha-1} (1-v)^{\theta-1} dv = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\theta)}{\Gamma(\alpha+\theta)}$.

11. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes tales que para cada $i : X_i \sim Exp(\lambda)$. Sea $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$. Pruebe que

$$S_n \sim Gamma(n, \lambda)$$

12. Sean $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ variables aleatorias independientes que siguen una distribución normal , con

$$E(X_i) = \mu_i \quad y \quad Var(X_i) = \sigma_i^2, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, ..., n$$

Considere las variables aleatorias suma y promedio respectivamente:

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n \quad y \quad \overline{X} = \frac{S_n}{n}$$

Pruebe que

$$S_n \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right), \quad \overline{X} \sim N\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n \mu_i}{n}, \frac{\sum\limits_{i=1}^n \sigma_i^2}{n^2}\right).$$

Capítulo VI

Aproximaciones: Teorema del Límite Central y Ley de los Grandes Números

Se estudia el teorema del Límite Central, sus derivados y aplicación en la Estadística Inferencial. Se aborda La ley de los Grandes Números y la Desigualdad de Chevychev. Se define los conceptos básicos de Estadística Inferencial .

1 Teorema del Límite Central y Ley de los Grandes Números

Dos de los resultados más importantes en probabilidad son: la Ley de los Grandes Números y el Teorema del Límite Central.

Dado un evento ligado a un fenómeno aleatorio, la ley de los Grandes Números establece que la frecuencia relativa de un evento, cuando el fenómeno ocurre un número suficiente de veces, se aproxima a la probabilidad teórica del evento.

Por otro lado, el Teorema del Límite Central establece, bajo ciertas condiciones, que la suma y el promedio de variables aleatorias que siguen una misma distribución, son variables aleatorias que se comportan aproximadamente a una distribución normal. Esto evidencia sin duda la importancia de la distribución normal. Además, este resultado permite justificar la aproximación de la distribución binomial utilizando la distribución normal.

Seguidamente, se justifican formalmente estos resultados y se ejemplifican algunas aplicaciones.

1.1 Desigualdades de Chevychev y Markov

Teorema 100 ***(Desigualdad de Markov)*** *Si X es una variable aleatoria para la cual $P(X<0)=0$ y $E(X)$ existe, entonces para todo $t>0$ se cumple*

$$P(X\geq t)\leq \frac{E(X)}{t}$$

Prueba *Suponga que X es una v.a.d. entonces*

$$E(X)=\sum_{x\in R_X} xf_X(x)=\sum_{\substack{x\in R_X\\ x<t}} xf_X(x)+\sum_{\substack{x\in R_X\\ x\geq t}} xf_X(x)$$

Note que el primer sumado es positivo, ya que si $x<0$ entonces $f_X(x)=0$ pues $P(X<0)=0$. Por lo tanto, al eliminar este sumando se tiene que

$$E(X)\geq \sum_{\substack{x\in R_X\\ x\geq t}} xf_X(x)\geq \sum_{\substack{x\in R_X\\ x\geq t}} tf_X(x)=t\sum_{\substack{x\in R_X\\ x\geq t}} f_X(x)=tP(X\geq t)$$

Así $E(X)\geq tP(X\geq t)$. De manera similar se obtiene el resultado si X es v.a.c. ■

Ejemplo 140 *Sea X una variable aleatoria tal que $X\sim N(5,4)$. Entonces*

$$P(X\geq 6)=P(Z\geq 0.25)=1-0.5987=0.4013$$

Poo otro lado $\dfrac{E(X)}{6}=\dfrac{5}{6}=0.8\overline{3}$. *Note que* $P(X\geq 6)\leq \dfrac{E(X)}{6}$.

Teorema 101 ***(Desigualdad de Chevychev)*** *Sea X es una variable aleatoria con $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$. Para $t > 0$ se cumple que*

$$P(|X-\mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

Prueba *Sea $Y = (X-\mu)^2$, note que por la Desigualdad de Markov:*

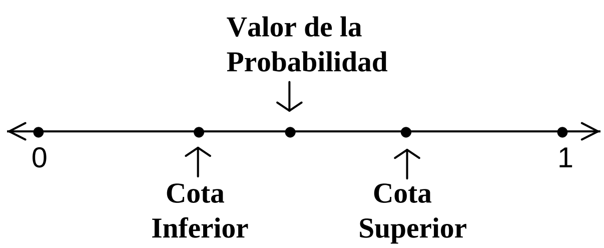
$$P(|X-\mu| \geq t) = P\left(Y \geq t^2\right) \leq \frac{E(Y)}{t^2} = \frac{Var(X)}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}. \qquad \blacksquare$$

Corolario 1 *Sea X es una variable aleatoria con $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$. Para $k > 0$ se cumple que*

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Prueba. *Ejercicio.* $\blacksquare$

Note que la Desigualdad de Chevychev nos permite obtener una cota superior para ciertas probabilidades, mientras el colorario nos brinda una cota inferior para otras probabilidades. Una cota a una probabilidad, si esta entre 0 y 1, puede dar una buena estimación de ésta:



Ejemplo 141 *Sea X es una variable aleatoria con $E(X) = 8$ y $Var(X) = 9$. Encuentre*

1. *Una cota inferior para $P(-4 < x < 20)$.*

   Dado que $\mu = 8$ y $\sigma = 3$, entonces

   $$\mu - k\sigma = -4 \Longrightarrow k = 4$$

   Con este valor de k se tiene que $\mu + k\sigma = 20$, por el corolario (1) anterior se tiene que

   $$P(-4 < x < 20) = P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{15}{16} \approx 0.9375$$

   Note que el corolario brinda una buena cota de la probabilidad, ya que permite indicar que ésta es mayor a un 93%.

2. *Una cota superior para* $P(|X-8| \geq 6)$.

   Por el teorema (101) *se tiene que*

$$P(|X-8| \geq 6) = P(|X-\mu| \geq 6) \leq \frac{\sigma^2}{6^2} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

   El teorema permite concluir que la probabilidad $P(|X-8| \geq 6)$ *es a lo sumo un* 25%.

Ejemplo 142 *Sea* Y *es una v.a.c tal que su distribución es simétrica con respecto a su media. Si* $E(Y) = 15$ *y* $Var(Y) = 9$, *halle una cota inferior para la* $P(7 \leq y \leq 25)$.

Note que $\mu = 15$ *y* $\sigma = 3$. *En este caso no se puede aplicar el corolario* (1) *directamente ya que*

$$\mu - k_1\sigma = 7 \Longrightarrow k_1 = \frac{8}{3} \quad y \quad \mu + k_2\sigma = 25 \Longrightarrow k_2 = \frac{10}{3}$$

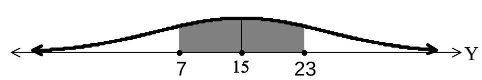
y $k_1 \neq k_2$. *Sin embargo la simetría de la distribución nos permite acotar esta probabilidad.*

1. *Utilizando* k_1. *Por el corolario* (1) *se tiene que*

$$P(\mu - k_1\sigma < Y < \mu + k_1\sigma) = P(7 < Y < 23) \geq 1 - \frac{1}{k_1^2} = \frac{55}{64}.$$

   Por simetría y dado que Y *es una v.a.c se tiene que*

$$P(7 < Y < 23) = 2P(7 < Y < 15)$$



   Por lo tanto,

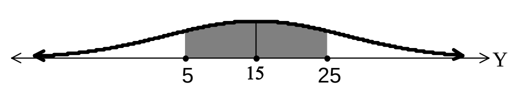
$$P(7 < Y < 15) \geq \frac{55}{128}. \qquad (*)$$

2. *Utilizando* k_2. *Por el corolario* (1) *se tiene que*

$$P(\mu - k_2\sigma < Y < \mu + k_2\sigma) = P(5 < Y < 25) \geq 1 - \frac{1}{k_2^2} = \frac{91}{100}.$$

   Por simetría y dado que Y *es una v.a.c se tiene que*

$$P(5 < Y < 25) = 2P(15 < Y < 25)$$



   Por lo tanto,

$$P(15 < Y < 25) \geq \frac{91}{200}. \qquad (**)$$

De $(*)$ *y* $(**)$ *se obtiene que*

$$\begin{aligned} P(7 \le y \le 25) &= P(7 < Y < 15) + P(15 < Y < 25) \\ &\geq \frac{55}{128} + \frac{91}{200} = \frac{2831}{3200} \approx 0.884\,688 \end{aligned}$$

Así $P(7 \le y \le 25)$ *esta acotada inferiormente por un* 88.47% *aproximadamente.*

Ejercicio 54 *Suponga que* $X \sim N(20, 25)$.

1. *Determine* $P(5 < X < 35)$. *R/* $0.997\,4$

2. *Halle la aproximación a* $P(5 < X < 35)$ *dada por Chevychev.* *R/* $\frac{8}{9}$

1.2 La ley de los grandes números

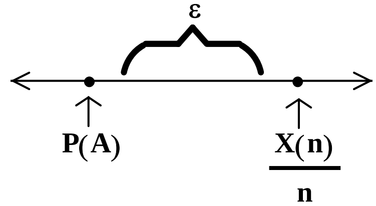
Dado un experimento, sea Ω el espacio muestral y A un evento. Si el experimento se repite n veces, se define $X(n)$ como el número de veces que ocurre A de las n. La Ley de los grandes números, establece que para n grande, se cumple que:

$$P(A) \approx \frac{X(n)}{n}$$

Teorema 102 ***(Ley de los Grandes Números)****Dado un experimento, sea* A *un evento y* $X(n)$ *el número de veces que ocurre* A *en* n *de estos experimentos, entonces para todo* $\varepsilon > 0$ *se tiene que*

$$P\left(\left|\frac{X(n)}{n} - P(A)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

para n *suficientemente grande. Es decir, existe un* n *a partir del cual la probabilidad de que la diferencia entre* $\dfrac{X(n)}{n}$ *y* $P(A)$ *sea mayor a* ε :



es cero.

Prueba *Sea $P(A) = p$, note que*

$$X(n) \sim B(n,p)$$

Sea $Y = \dfrac{X(n)}{n}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E\left(\frac{X(n)}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X(n)) = \frac{np}{n} = p = P(A) \\ \sigma_Y^2 &= Var\left(\frac{X(n)}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X(n)) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}$$

Para cada $\varepsilon > 0$, por la Desigualdad de Chevychev, se tiene que

$$P\left(\left|\frac{X(n)}{n} - P(A)\right| \geq \varepsilon\right) = P(|Y - \mu_Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_Y^2}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Así para n suficientemente grande

$$0 \leq P\left(\left|\frac{X(n)}{n} - P(A)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \quad \xrightarrow{n \to \infty} \quad 0. \qquad \blacksquare$$

Esta ley se generaliza en el siguiente teorema.

Teorema 103 ***(Ley de los Grandes Números 2)*** *Sean $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes que siguen una misma distribución, tales que*

$$E(X_i) = \mu \quad y \quad Var(X_i) = \sigma^2, \quad para\ i = 1, 2, 3, ..., n$$

Se tiene que

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

para n suficientemente grande.

Prueba *Ejercicio. Sugerencia aplique Desigualdad de Chevychev a la variable*

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 143 *Al lanzar un dado 2000 veces se obtuvo que en 970 veces salió par. Por la Ley de los Grandes números se tiene que, para ese dado, la probabilidad de que salga un número par es*

$$p \approx \frac{970}{2000} \approx 0.485.$$

Este valor es muy cercano al valor teórico de 0.5 si el dado es legal.

1.3 Suma y promedio de variables que siguen una distribución normal

Teorema 104 ***(La suma y promedio de normales es normal)*** *Sean $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes que siguen una distribución normal, tales que*

$$E(X_i) = \mu_i \quad y \quad Var(X_i) = \sigma_i^2, \quad para\ i = 1, 2, 3, ..., n$$

Considere las variables aleatorias suma y promedio respectivamente:

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n \quad y \quad \overline{X} = \frac{S_n}{n}$$

Se tiene que:

1. *Las esperanzas de S_n y $\overline{X}$ son respectivamente:*
$$\mu_{S_n} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + ... + \mu_n, \quad y \quad \mu_{\overline{X}} = \frac{\mu_{S_n}}{n}$$
2. *Las varianzas de S_n y $\overline{X}$ son respectivamente:*
$$\sigma_{S_n}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + ... + \sigma_n^2, \quad y \quad \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma_{S_n}^2}{n^2}$$
3. *S_n y $\overline{X}$ siguen una distribución normal:*
$$S_n \sim N\left(\mu_{S_n}, \sigma_{S_n}^2\right), \quad \overline{X} \sim N\left(\mu_{\overline{X}}, \sigma_{\overline{X}}^2\right).$$

Prueba *Recuerde que si $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ y $W = aX + bY$, entonces*

$$W \sim N\left(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2\right)$$

La prueba de este teorema es por inducción sobre n utilizando este recordatorio y se deja de ejercicio. ■

Corolario 2 ***(La suma y promedio de normales es normal)*** *Sean $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes que siguen una misma distribución normal, tales que*

$$E(X_i) = \mu \quad y \quad Var(X_i) = \sigma^2, \quad para\ i = 1, 2, 3, ..., n$$

Considere las variables aleatorias suma y promedio respectivamente:

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n \quad y \quad \overline{X} = \frac{S_n}{n}$$

Se tiene que:

$$S_n \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right), \quad \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Prueba. *Ejercicio.* ■

Ejemplo 144 *Un técnico de la empresa ECI señala que las llamadas telefónicas en cierta localidad tienen una distribución normal con media de 180 segundos y una desviación estándar de* 300 *segundos.*

1. *En diez llamadas, ¿Cuál es la probabilidad de que su duración promedio sea menor a* 160 *segundos?*

   Considere la variable

   $$X: \text{ duración de una llamada de la localidad}$$

   Se tiene que $X \sim N\left(180, 300^2\right)$. *Por el Teorema (Promedio de normales es normal) se tiene que* $\overline{X}$, *la duración promedio de diez llamadas, cumple que*

   $$\overline{X} \sim N\left(180, \frac{300^2}{10}\right)$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que la duración promedio de las diez llamadas sea menor a 160 *segundos es*

   $$P\left(\overline{X} < 160\right) = P\left(Z < \frac{160-180}{300/\sqrt{10}}\right) = \phi\left(\frac{160-180}{300/\sqrt{10}}\right) = \phi\left(-0.210\,819\right) = 0.4168$$

2. *En diez llamadas, ¿Cuál es la probabilidad de que su duración total sea mayor a* 31 *minutos?*

   Como $X \sim N\left(180, 300^2\right)$, *por el Teorema (Suma de normales es normal) se tiene que* S_{10}, *la duración total de diez llamadas, cumple que*

   $$S_{10} \sim N\left(1800, 300^2 \cdot 10\right)$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que la duración total de las diez llamadas sea mayor a 31 *minutos* (1860 *segundos*) *es*

   $$\begin{aligned} P\left(S_{10} > 1860\right) &= 1 - \phi\left(\frac{1860-1800}{300\sqrt{10}}\right) \\ &= 1 - \phi\left(0.06324\,56\right) = 1 - 0.5239 = 0.4761 \end{aligned}$$

Ejemplo 145 *Una empresa se dedica a la producción de cierto tipo de aguacates. El peso de estos aguacates sigue una distribución normal con un peso promedio de 350 gramos y una desviación estándar de 100 gramos. Los aguacates son recogidos en baldes, los cuales tiene indicado que no resisten un peso superior a 10 kilogramos. Suponga que en los baldes la limitación es de peso y no de espacio.*

1. *¿Cuántos aguacates máximo se deben empacar por balde, de manera que estos resistan el peso, en por lo menos el 95% de los casos?*

Considere la variable

$$X: \text{ peso en kg de un aguacate de un tipo dado.}$$

Suponga que en el balde se empacan n aguacates. Como $X \sim N\left(0.35, 0.1^2\right)$, por el Teorema (Suma de normales es normal) se tiene que S_n, el peso de los aguacates en el balde, cumple que

$$S_n \sim N\left(0.35n, 0.1^2 n\right)$$

Dado que el balde resiste un peso de 10 kg entonces

$$P(S_n < 10) \geq 0.95 \quad \Longrightarrow \quad \phi\left(\frac{10 - 0.35n}{0.1\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \approx \phi(1.645)$$

Como ϕ es creciente

$$\underbrace{10 - 0.35n}_{positivo} \geq 0.164\,5\sqrt{n} \Longrightarrow \begin{array}{c} \vdots \\ \Longrightarrow n < 26.\,167\,2 \\ R/ \quad n = 26 \end{array}$$

Para resolver está se puede elevar al cuadrado, con la restricción de que $10 - 0.35n$ es positivo pues es mayor igual a $0.164\,5\sqrt{n}$. Así

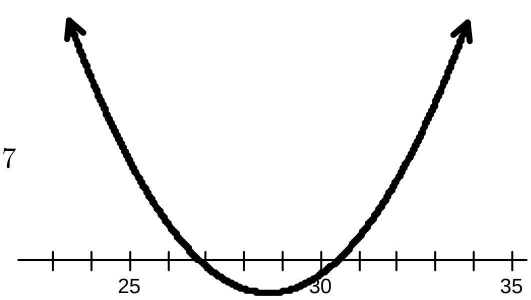
$$\begin{aligned} & (10 - 0.35n)^2 \geq (0.164\,5)^2\, n \\ \Longrightarrow \quad & 0.122\,5n^2 - 7.0n + 100 \geq 0.02.706\,03n \\ \Longrightarrow \quad & 0.122\,5n^2 - 7.0n + 100 - 0.02.706\,03n \\ \Longrightarrow \quad & 0.122\,5n^2 - 7.\,014\,12n + 100 \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto se buscan los valores de n que cumplen

$$0.122\,5n^2 - 7.\,014\,12n + 100 \geq 0 \quad y \quad 10 - 0.35n \geq 0$$

Note que la función cuadrática $f(n) = 0.122\,5n^2 - 7.\,014\,12n + 100$ es cóncava hacia arriba y las intersecciones con el eje X son

$$n_1 = 26.\,813\,4, \quad n_2 = 30.\,444\,7$$



Dado que se quiere que $f(n) \geq 0$, es decir que f este sobre o en el eje X, entonces la solución de esta inecuación en $\mathbb{R}$ es

$$S =]-\infty, 26.8134] \cup [30.4447, +\infty[\quad (*)$$

Pero además

$$10 - 0.35n \geq 0 \Longrightarrow n \in]-\infty, 28.571\,4]\,. \quad (**)$$

De $(*)$ *y* $(**)$ *se tiene que n debe satisfacer que*

$$n \leq 26.8134$$

Por lo tanto, el máximo valor de n es 26.

2. *Si en cada balde se recogen 25 aguacates, ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de los aguacates en un balde sea superior a 400 gramos?*

   Como $X \sim N\left(0.35, 0.1^2\right)$, por el Teorema (Promedio de normales es normal) se tiene que $\overline{X}$, el peso promedio de los aguacates en el balde, cumple que

$$\overline{X} \sim N\left(0.35, \frac{0.1^2}{25}\right)$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que el peso medio de los aguacates en un balde sea superior a 400 gramos es

$$P\left(\overline{X} > 0.4\right) = 1 - \phi\left(\frac{0.4 - 0.35}{0.1/\sqrt{25}}\right) = 1 - \phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

Ejercicio 55 *Los pesos de las bolsas de arroz BLANCO sigue una distribución normal con media de* 2 *kilos y desviación estándar de* 0.05 *kilos. Por otro lado, los pesos de las bolsas de azúcar BLANCO sigue una distribución normal con media de* 1, 5 *kilos y desviación estándar de* 0.04 *kilos. En un supermercado venden paquetes BLANCO promocionales, cada paquete contiene* 3 *bolsas de arroz y* 2 *de azúcar. ¿Cuál es la probabilidad de que el paquete Blanco pese menos de* 8.8 *kilos?* *R/* 0.0268

1.4 Teorema del Límite Central

¿Qué pasa con la suma y promedio de variables aleatorias, cuando estás no sigue una distribución normal? La respuesta a esta pregunta, cuando las variables siguen la misma distribución, nos la da el Teorema del Límite Central.

Teorema 105 ***(Teorema del Límite Central 1)***_Sean $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ variables aleatorias mutuamente independientes que siguen una misma distribución, tales que_

$$E(X_i) = \mu \quad y \quad Var(X_i) = \sigma^2, \quad para\ i = 1, 2, 3, ..., n$$

Considere la variable aleatoria suma:

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$$

Se tiene que:

1. $E(S_n) = n\mu$.
2. $Var(S_n) = n\sigma^2$.
3. _Para n suficientemente grande (“$n \to \infty$J) se tiene que_

$$S_n \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right).$$

Prueba _Sea $Y_i = \dfrac{X_i - u}{\sigma}$, para $i = 1, 2, ..., n$. Sea $Z_i = \dfrac{Y_i}{\sqrt{n}}$, para $i = 1, 2, ..., n$. note que la generadora de momentos de esta variable es_

$$M_{Z_i}(t) = E\left(e^{tz_i}\right) = E\left(e^{tY_i/\sqrt{n}}\right) = M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

Dado que $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ siguen una misma distribución con misma esperanza y varianza, entonces las variables $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ siguen una misma distribución con misma esperanza y varianza, y además tiene la mima función generadora de momentos, es decir existe una variable Y tal que la esperanza, la varianza y la generadora es

$$E(Y) = 0, \quad Var(Y) = 1 \quad y \quad M_Y(t) = M(t)$$

Así

$$M_{Z_i}(t) = M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

entonces la generadora de momentos de $W_n = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$ es

$$M_{W_n}(t) = E\left(e^{tw_n}\right) = \left(M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Note $W_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, *así basta demostrar que para* $n \to \infty$ *se tiene que* $W_n \sim N(0,1)$. *Para obtener este resultado se demostrará que* $M_{W_n}(t)$ *converge a la generadora de momentos de la normal estándar:* $e^{t^2/2}$.[7] *Es decir se debe probar que*

$$\left(M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \quad \underrightarrow{n\to\infty} \quad e^{t^2/2} \quad \Leftrightarrow \quad n\ln\left(M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) \quad \underrightarrow{n\to\infty} \quad \frac{t^2}{2}$$

Así, sea $L(t) = \ln(M(t))$ *note que*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\ln\left(M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{L\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{n^{-1}} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{L'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) t n^{--3/2}}{2n^{-2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{L'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) t}{2n^{-1/2}} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{L''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) t^2 n^{--3/2}}{2n^{-3/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} L''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

Note $L'(t) = \dfrac{M'(t)}{M(t)} \Longrightarrow L''(t) = \dfrac{M''(t)M(t) - (M'(t))^2}{(M(t))^2}$, *por lo tanto*

$$L''(0) = \frac{E\left(Y^2\right)\cdot 1 - (E(Y))^2}{1} = Var(Y) = 1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} L''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2}.$$

Así se tiene que $M_{W_n}(t) \quad \underrightarrow{n\to\infty} \quad e^{t^2/2}$ *y por lo tanto*

$$F_{W_n}(z) \quad \underrightarrow{n\to\infty} \quad \phi(z). \qquad \blacksquare$$

La importancia del Teorema del Límite Central radica en que no pone condiciones sobre el tipo de distribución de las variables aleatorias. Si importar que distribución sigan, la suma a partir de cierto n sigue una distribución aproximadamente normal. En la práctica, se considere que para $n \geq 30$, la distribución normal es una buen aproximación a la distribución de la suma.

[7] Aquí se utiliza el siguiente teorema no demostrado: Sean $Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_n$ una secuencia de variables aleatorias. Sea $Z \sim N(0,1)$. Si $M_{Z_n}(t) \to M_Z(t)$ cuando $n \to \infty$, entonces $F_{Z_n}(z) \to \phi(z)$.

Ejemplo 146 *En cierta ciudad, el consumo diario de gasolina, en millones de litros, sigue una distribución gamma con media de* 6 *millones de litros y desviación estándar de* $\sqrt{12}$ *millones de litros. Científicos han determinado que si en un mes (treinta días) se consumen más de 190 millones de litros en la ciudad, el mes se considera altamente contaminante. Suponga que el consumo de gasolina de un día es independiente del consumo en otro día. Determine aproximadamente la probabilidad de que un mes sea considerado altamente contaminante.*

Considere la variable

$$X: \text{ consumo diario de gasolina en litros.}$$

Note que $E(X) = 6$ *y* $Var(X) = 12$.*Sean* $X_1, ..., X_{30}$ *los consumos diarios de gasolina en* 30 *días de un mes. Como el número de días* $n = 30$, *por el Teorema del Límite Central la variable* S_{30}, *consumo mensual de gasolina en litros, cumple que*

$$S_{30} \underset{aprox}{\sim} N(180, 12 \cdot 30)$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un mes sea considerado altamente contaminante es

$$\begin{aligned} P(S_{30} > 190) &= 1 - \phi\left(\frac{190 - 180}{\sqrt{12 \cdot 30}}\right) \\ &= 1 - \phi(0.527) = 1 - 0.7019 = 0.2981 \end{aligned}$$

Ejercicio 56 *Una pequeña barra de acero mide en promedio* 1 *m con una desviación estándar de* 10 *cm. Varias de estas barras se unen para formar una barra larga. Determine la cantidad de barras necesarias para tener una probabilidad mayor al* 90% *de que al unirlas se forme una barra larga con una longitud superior a* 100 *m.* *R/ Al menos* 102 *barras*

Teorema 106 ***(Teorema del Límite Central 2)****Sean* $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ *variables aleatorias mutuamente independientes que siguen una misma distribución, tales que*

$$E(X_i) = \mu \quad y \quad Var(X_i) = \sigma^2, \quad para\ i = 1, 2, 3, ..., n$$

Considere la variable aleatoria promedio

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n}{n}$$

Se tiene que:

1. $E\left(\overline{X}\right) = \mu$.
2. $Var\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

3. *Para n suficientemente grande ("$n \to \infty$") se tiene que*
$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Prueba *Sea*
$$Y_i = \frac{X_i}{n}, \text{ para } i = 1, 2, 3, ..., n$$
Note que para cada $i = 1, 2, ..., n$ se tiene que
$$u_{y_i} = E\left(\frac{X_i}{n}\right) = \frac{\mu}{n} = \quad y \quad \sigma_{y_i}^2 = Var\left(\frac{X_i}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$
Por el Teorema del Límite Central 1 *se tiene que, para n suficientemente grande,*
$$Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \sim N\left(nu_{y_i}, n\sigma_{y_i}^2\right)$$
Pero
$$Y_1 + Y_2 + ... + Y_n = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + ... + \frac{X_n}{n} = \overline{X}, \quad nu_{y_i} = \mu \quad y \quad n\sigma_{y_i}^2 = \sigma^2$$
Por lo tanto, para n suficientemente grande se cumple que
$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 147 *Juan, un pequeño agricultor, se dedica a la producción de cierto tipo de sandías. Estas sandías tiene un peso promedio de 850 gramos con una desviación estándar de 100 gramos. Juan empaca las sandías en cajones de 40 sandías para llevarlas a la feria del agricultor, donde las vende a 1000 colones el kilogramo.*

1. *¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de los sandías en un cajón sea superior a 900 gramos?*

   Considere la variable
   $$X: \text{ peso de la sandía en kg.}$$
   Se tiene que $u_X = 0.85$ y $\sigma_X = 0.1$. Como $n = 40 \geq 30$ por el Teorema del Límite Central se tiene que $\overline{X}$, peso medio de los sandías en un cajón, cumple que
   $$\overline{X} \underset{aprox}{\sim} N\left(0.85, \frac{0.1^2}{40}\right)$$
   Por lo tanto, la probabilidad de que el peso medio de los sandías en un cajón sea superior a 0.9 kg es
   $$P\left(\overline{X} > 0.9\right) = 1 - \phi\left(\frac{0.9 - 0.85}{0.1/\sqrt{40}}\right) = 1 - \phi(3.162\,28) = 1 - 0.9992 = 0.000\,8.$$

2. *¿Cuál la probabilidad de que don Juan tenga un ingreso superior a* 35000 *colones por la venta de todas las sandías de un cajón?*

   Dado que don Juan vende a mil colones el kilogramo, debe vender por lo menos 35 *kg para obtener un ingreso superior a* 35000 *colones. Así, el peso total de las sandías del cajón debe ser de por lo menos* 35 *kg. Como* $n = 40 \geq 30$ *por el Teorema del Límite Central se tiene que* S_{40}*, peso total de las sandías en un cajón, cumple que*

$$S_{40} \underset{aprox}{\sim} N\left(0.85 \cdot 40, 0.1^2 \cdot 40\right)$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que Juan tenga un ingreso superior a 35000 *colones por la venta de todas las sandías de un cajón es*

$$P\left(S_{40} > 35\right) = 1 - \phi\left(\frac{35 - 0.85 \cdot 40}{0.1\sqrt{40}}\right) = 1 - \phi\left(1.581\,14\right) = 1 - 0.9429 = 0.057\,1.$$

Ejercicio 57 *La empresa de Llantas Mundiales distribuye llantas para taxi. Cada llanta tiene una duración promedio de 30000 kilómetros con una desviación de 2500 kilómetros. Además las llantas se venden en paquetes de 40 llantas.*

1. *Determine la probabilidad de que un paquete tenga una duración promedio inferior a* 29500 *kilómetros.* *R/* 0.1038

2. *La empresa incluye la siguiente oferta: "Si en un paquete de llantas la duración promedio no supera un cierto valor* c*, la empresa hace un descuento en la siguiente compra". Determine el valor* c*, de manera tal que el* 95% *de los paquetes no califique para la oferta.* *R/* $c = 29350$

1.5 Aproximación a la Binomial utilizando la Normal

Una de las principales aplicaciones del Teorema del Límite Central es que permite aproximar la distribución Binomial utilizando la distribución Normal

Teorema 107 *Sea* X *una variable aleatoria discreta que sigue una distribución Binomial*

$$X \sim B\left(n, p\right)$$

Entonces, para n *suficientemente grande,* X *sigue una distribución Normal con media* np *y varianza* npq :

$$X \sim N\left(np, npq\right)$$

Prueba *Tome X como el número de éxitos en n intentos, donde la probabilidad de éxito es p. Así $X \sim B(n,p)$. Considere las variables*

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el intento } i \text{ hubo éxito} \\ 0 & \text{si el intento } i \text{ no hubo éxito} \end{cases}, \quad \text{para } i = 1,2,...,n.$$

Note que la función de distribución de probabilidad de cada una de estas variables es

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1-p & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Así, para cada $i = 1,2,...,n$ se tiene que

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p \\ E\left(X_i^2\right) &= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p \\ Var(X_i) &= p - p^2 = pq. \end{aligned}$$

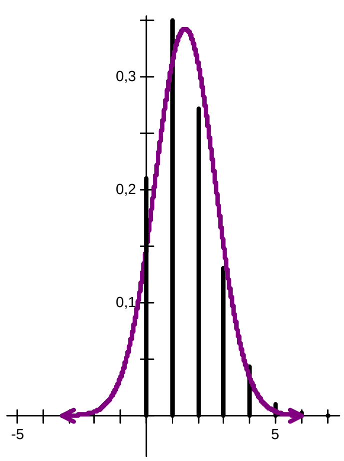
Entonces para n suficientemente grande, por el teorema del Límite Central, se tiene que

$$S_n \sim N(np, npq)$$

Note que por definición de X_i se tiene que $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ es el número total de éxitos en n intentos. Es decir $S_n = X$. Así, para n suficientemente grande se cumple que

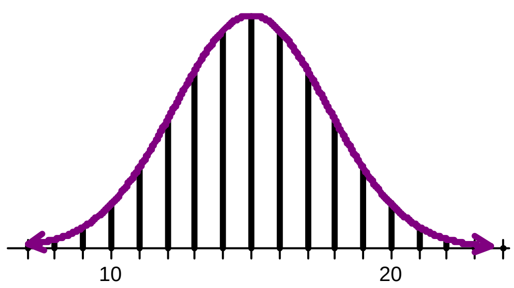
$$X \sim N(np, npq). \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 148 *Seguidamente se presenta el histograma de la variable $X \sim B(n,p)$ con $n = 10$ y $p = 0.1$, sobre poniéndole la gráfica de la distribución normal $N(np, npq)$:*

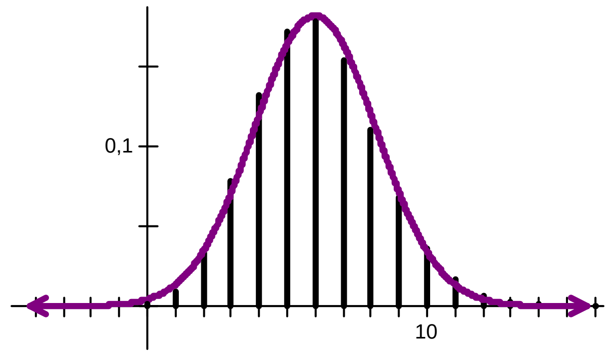


Note que la aproximación que hace la normal a la binomial no es muy buena.

Tomando $n = 30$, *se tiene los siguientes gráficos para distintos valores de* p :



$p = 0.5$



$p = 0.1$

Se puede apreciar que en ambos casos la aproximación que hace la normal a la binomial es buena.

En general, para que la normal se aproxime bien a la binomial :

$$X \sim B(n, p) \quad \Longrightarrow \quad X \underset{aprox}{\sim} N(np, npq)$$

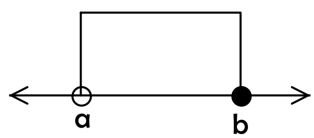
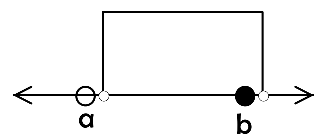
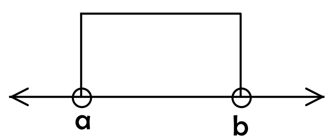
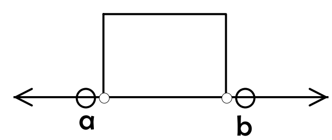
se debe cumplir uno de los siguientes criterios empíricos:

1. $n \geq 30$. (Críterio según el Teorema del Límite Central, pues este teorema es la base de la demostración)

2. $np \geq 5$ y $nq \geq 5$. (Criterio según la Distribución Binomial).

Sin embargo el mejor criterio es el (2) ya que el criterio (1) solo controla el valor de n, mientras el (2) controla n y p.
Si se aproxima la Binomial utilizando la normal, se está interpretando una variable aleatoria discreta como una variable aleatoria continua, por lo que la probabilidad puntual se pierde. Para evitar esto y lograr la inclusión o exclusión de uno de los extremos del intervalo tenga

un efecto sobre su probabilidad, se utiliza un factor de corrección de $\frac{1}{2}$:

X como *v.a.d.*		X como *v.a.c.*
		
$P(a < X \leq b)$	$=$	$P\left(a + \frac{1}{2} < X \leq b + \frac{1}{2}\right)$
		
$P(a < X < b)$	$=$	$P\left(a + \frac{1}{2} < X < b - \frac{1}{2}\right)$

Los demás casos son similares.

Ejemplo 149 *La Biblioteca Virtual de la Universidad Bienestar Seguro tiene un sistema de búsqueda por una palabra clave, un poco lento. El tiempo que tarda el sistema en desplegar la lista de libros asociados a esa palabra clave sigue una distribución exponencial con un promedio de* 1 *minuto.*

1. *Determine la probabilidad de que, en la próxima búsqueda por palabra clave, el sistema tarde más de 2 minutos en desplegar la lista de libros.*

   Considere la variable

   t : *tiempo en minutos que tarda el sistema tarda en desplegar la lista de libros, a partir de una palabra clave.*

   Note que $t \sim Exp(1)$. *Asi, la probabilidad de que, en la próxima búsqueda por palabra clave, el sistema tarde más de 2 minutos en desplegar la lista de libros es*

   $$P(t > 2) = 1 - \left(1 - e^{-2}\right) = 0.135\,335.$$

2. *En 40 búsquedas por palabra clave, ¿cuál es la probabilidad de que en a lo sumo 10 búsquedas, el sistema tarde más de* 2 *minutos en desplegar la lista de libros?*

   Considere la variable

   X : *# de búsquedas, de* 40, *en las que el sistema tarda más de 2 min en desplegar la lista de libros.*

Sea $n = 40$ *y* $p = 0.135\,335$, *note que* $X \sim B(n,p)$. *Así la probabilidad de que a lo sumo en 10 búsquedas, el sistema tarde más de* 2 *minutos en desplegar la lista de libros es*

$$P(X \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} C(40,k)(0.135\,335)^k (1-0.135\,335)^{40-k} \approx 0.985\,188$$

Está probabilidad es engorrosa de calcular. Sin embargo, como $np \approx 5.4134 \geq 30$ *y* $nq \approx 34.5866 \geq 5$, *la probabilidad anterior se puede aproximar utilizando la normal pues*

$$X \underset{aprox}{\sim} N(np, npq) = N(5.413\,4, 4.680\,78)$$

Así, el valor aproximado de la probabilidad, de que a lo sumo en 10 búsquedas el sistema tarde más de 2 *minutos, es*

$$P(X \leq 10) = P(X \leq 10.5) \approx \phi\left(\frac{10.5 - 5.413\,4}{\sqrt{4.680\,78}}\right) = \phi(2.351\,09) \approx 0.9906.$$

Note que 0.9906 *es una buena aproximación de* 0.985 188.

Ejemplo 150 *Un técnico de la empresa ECI señala que las llamadas telefónicas en cierta localidad tienen una distribución normal con media de 180 segundos y una desviación estándar de* 300 *segundos.*

1. *En diez llamadas, ¿Cuál es la probabilidad de que en al menos* 3, *la duración sea menor a* 160 *segundos?*

   Considere la variable

   $$X: \text{ duración de una llamada de la localidad en segundos.}$$

   Dado que $X \sim N(180, 300^2)$, *la probabilidad de que una llamada dure menos de* 160 *segundos es*

   $$P(X < 160) = \phi\left(\frac{160-180}{300}\right) = \phi(-0,066667) \approx 0.4761 = p$$

   Sea

   $$Y: \ \# \text{ de llamadas con duración menor a } 160 \text{ seg, de } 10 \text{ llamadas.}$$

   Note que $Y \sim B(10, 0.4761)$, *por lo tanto la probabilidad de que, en al menos* 3 *llamadas, la duración sea menor a* 160 *segundos, es*

   $$\begin{aligned} P(Y \geq 3) &= 1 - \sum_{k=0}^{2} C(10,k)\, 0.4761^k 0.5239^{10-k} \\ &= 1 - 0.07360\,25 = 0.926\,398 \end{aligned}$$

2. *En 100 llamadas, ¿Cuál es la probabilidad de que en al menos* 40, *la duración sea menor a* 160 *segundos?*

   Considere la variable

   $$W: \ \# \text{ de llamadas con duración menor a } 160 \text{ seg, de } 100 \text{ llamadas.}$$

   Sea $n = 100$ *y* $p = 0.4761$. *De acuerdo con los datos del ejemplo anterior* $W \sim B(n, p)$. *Como* $np = 47.61 \geq 5$ *y* $nq = 52.39 \geq 5$ *entonces*

   $$W \underset{aprox}{\sim} N(47.61, 24.9429)$$

   Por lo tanto, el valor aproximado de la probabilidad de que en al menos 40, *la duración sea menor a* 160 *segundos, es*

   $$\begin{aligned} P(W \geq 40) &= 1 - P(W < 39.5) \approx 1 - \phi\left(\frac{39.5 - 47.61}{\sqrt{24.9429}}\right) \\ &= 1 - \phi(-1.62386) \approx 1 - 0.0526 = 0.9474 \end{aligned}$$

   Note que el valor "real" de esta probabilidad está dado por

   $$P(W \geq 40) = 1 - \sum_{k=0}^{39} C(10, k)\, 0.4761^k 0.5239^{10-k},$$

   el cuál es tedioso calcularlo.

Ejercicio 58 *César, un estudiante de computación, diseñó un juego que tiene cierta probabilidad de ganarlo ajustable. Para las Fiestas Cívicas de su comunidad, decide poner un local y llevar su computadora, cobrando cierta cantidad por jugar. ¿A qué valor debe César ajustar la probabilidad de ganar el juego, para que la probabilidad de que, de* 100 *jugadores, al menos* 10 *lo ganen sea aproximadamente igual a* 15%? *R/* $p \approx 0.0686948$.

1.6 Ejercicios

1. Sea X una *v.a.c.* tal que su distribución de probabilidad está dada por

   $$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

   (a) Calcule $E(X)$ y $Var(X)$. *R/* $E(X) = \dfrac{1}{2}$ y $Var(X) = \dfrac{1}{20}$

   (b) Halle $P(\mu_X - 2\sigma_X < X < \mu_X + 2\sigma_X)$. *R/* $\frac{37}{125}$

(c) Determine una aproximación para $P(\mu_X - 2\sigma_X < X < \mu_X + 2\sigma_X)$ utilizando la Desigualdad de Chevychev. $R/\ \dfrac{3}{4}$

(d) Compare los resultados de 1 y 2.

2. Se sabe que solo el 20% de los conductores de una determina ciudad usan el cinturón. En 200 conductores, ¿cuál es la probabilidad de que entre 30 y 45 usen el cinturón?

3. El Canal 52 realizará el Reality Show Big Father, por lo tanto, inicio una entrevista para elegir los 10 participantes del concurso. La probabilidad de que un entrevistado sea declarado elegible (o sea posible concursante) es de 10%. En total se entrevistaron a 400 personas.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que más de 50 personas y sean declaradas elegibles?. (Exprese el resultado en su forma exacta y aproxímelo) $R/\ 0.0401$

   (b) Si fueron declarados elegibles 9 hombres y 7 mujeres, y de estos se elegirá al azar los participantes de Big Father, ¿cuál es la probabilidad de que se elijan 6 mujeres como participantes? $R/\ \frac{63}{572}$

4. En cierta ciudad, el consumo diario de gasolina (en miles de litros) sigue una distribución gamma con media igual a 6 mil litros y varianza 18 mil litros^2. La capacidad diaria de la ciudad es de 9 mil litros de gasolina.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera el suministro de gasolina sea insuficiente?
   $R/\ 0.199$

   (b) Determine la probabilidad de que el consumo promedio diario de gasolina en un mes (30 días) sea menor a 8 mil litros (¿garantiza este evento que la ciudad no tenga problemas de suministro de combustible en el mes?) $R/\ 0.9951$, no se puede garantizar que la ciudad no tenga problemas de suministro.

5. Una empresa va a realizar una entrevista para contratar empleados. La probabilidad de que una persona que saco cita llegue en realidad a la entrevista es de 0.97.En total se solicitaron 400 citas. Determine la probabilidad de que se realicen al menos 390 entrevistas. $R/\ 0.33$

6. La probabilidad de que una persona que asista a la Expo CAR, compre un automóvil es de 0.4. ¿Cuántas personas deben asistir a este evento, para tener una probabilidad superior al 90% de que hayan al menos 500 personas que compren un automóvil?

2 Introducción a la Estadística Inferencial

2.1 Conceptos básicos

Dado un conjunto de datos, la estadística descriptiva pretende por un lado obtener representaciones descriptivas de los datos como: valores numéricos que caracterizan su distribución, cuadros y gráficos. Por otro lado, la estadística inferencial busca resultados sobre un conjunto de datos mayor a partir de los datos dados, como por ejemplo determinar el porcentaje de todos los ciudadanos que apoyan un candidato a partir de los resultados de una encuesta.Seguidamente se define los conceptos básicos de esta rama de la matemática.

Definición 55 ***Población***: *conjunto de datos que se desea estudiar. Estos datos deben verse como valores de una misma variable, la cual se utiliza para designar la población.*

Definición 56 ***Muestra***: *subconjunto de datos que se seleccionan de la población.*

Así, la estadística inferencial busca generalizar los resultados obtenidos en una muestra a toda la población. Si la muestra es igual a la población, la generalización o estudio se le llama **censo** y es exacta. En caso contrario, se debe buscar que la muestra sea lo más representativa de la población, para que la generalización sea confiable y se disminuya el sesgo.

Ejemplo 151 *Se quiere realizar un estudio para determinar el porcentaje de ciudadanos de un país C que están a favor de un Tratado de Libre Comercio (TLC) con un país E. La población sería el conjunto de opiniones (a favor o en contra) de todos los ciudadanos del país C sobre el TLC. Si se define X como la opinión de un ciudadano sobre el TLC, se dice que la población está dada por X. Como muestra se tomo el conjunto de ciudadanos empresarios del país C que exportan al país E. ¿Es la muestra representativa de la población?.*

Para que la muestra sea representativa de la población se introduce el concepto de muestra aleatoria.

Definición 57 *(**Muestra Aleatoria**) Considere la población dada por la variable aleatoria X con función de distribución f_X. Una muestra aleatoria de tamaño n esta formada por n de estas variables $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$. Estas variables cumplen:*

1. *Todas sigue la misma distribución.*
2. *Son mutuamente independientes.*

Una vez que se tiene certeza de que la muestra es aleatoria, el paso siguiente es definir la característica de la población que se desea estudiar (parámetro) y la herramienta a aplicar a la muestra (estadístico) para realizar el estudio.

Definición 58 ***Parámetro***: *valor numérico que se le asigna a la población.*

El parámetro es valor numérico que se desconoce debido a varios factores, entre ellos: el tamaño de la población y la accesibilidad a los datos que componen la población. La estadística inferencial busca acotar este parámetro por medio de un análisis de la muestra. Seguidamente se define los parámetros más comunes.

Definición 59 *Considere la población* $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$ *dada por la variable aleatoria* X. *Se define los siguientes parámetros:*

1. *media poblacional:*
$$\mu = \frac{\sum X}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}.$$
2. *Varianza poblacional:*
$$\sigma^2 = \frac{\sum (X-\mu)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i-\mu)^2}{N}.$$
3. *Desviación estándar poblacional:*
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$
4. *proporción poblacional o porcentaje de éxitos:*
$$P = \frac{b}{N}$$
donde b *es el número de datos exitosos de la población (datos que cumplen una determinada condición).*

Ejemplo 152 *Se debe estudiar el gasto mensual en consumo de energía eléctrica de las familias un pequeño residencial de un cantón cercano a San José en el mes de Octubre. El residencial esta forma por 40 familias y seguidamente se presentan los gatos en miles de colones de cada familia en este mes, redondeadas al décimo inferior*

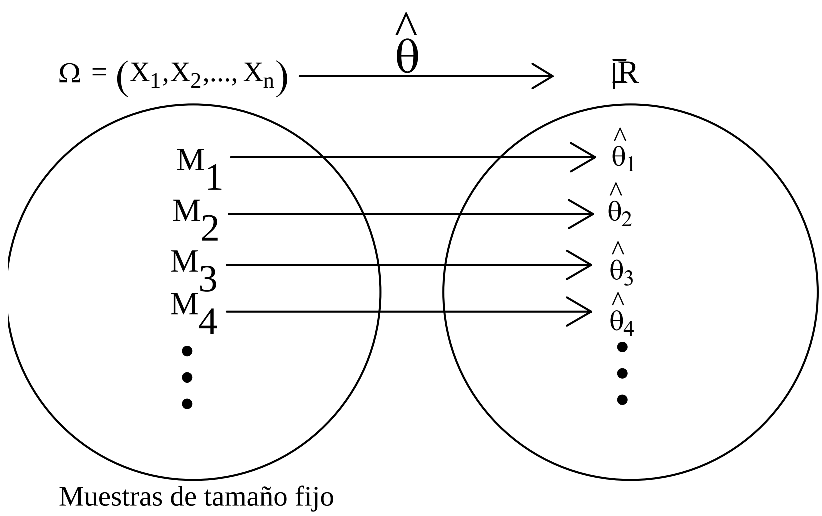
10,5	11,0	10,1	8,9	7,3
8,5	10,6	10,0	8,7	7,0
6,2	10,5	10,0	18,5	10,2
7,5	19,2	9,8	8,0	6,3
14,2	10,5	9,5	10,3	15,8
5,2	9,4	11,1	7,8	6,0
12,2	6,9	7,9	15,5	5,4
9,5	10,2	9,4	7,4	12,7

Aquí la población sería el consumo de energía eléctrica de cada familia del residencial en el mes de Octubre. Note que la población se conoce totalmente.

1. *Determine la media poblacional.* *R/* $\mu = 9,8925$
2. *Halle la Desviación Estándar y la Varianza poblacional.R/* $\sigma^2 = 10,01219375, \quad \sigma = 3,164205074$

La **Estadística Descriptiva** se dedica a calcular e interpretar los parámetros sobre una población de datos, estos junto con tablas, gráficos y diagramas le permiten dar una descripción de la población de datos. Cuando no es factible la determinación de estos parámetros, la Estadística Inferencial permite hallar aproximaciones a los parámetros utilizando muestras. ¿Qué herramienta utiliza para lograr la aproximación?

Definición 60 *Estadístico: variable aleatoria que asigna un valor (llamado estimador) a cada muestra de tamaño fijo. A cada parámetro* θ *se le asigna un estadístico* $\widehat{\theta}$:



La distribución de probabilidad de un estadístico es llamada ***distribución muestral.***

Seguidamente se presentan los estadísticos asociados a los parámetros más comunes.

Definición 61 *Considere la población dada por la variable aleatoria* X *y una muestra aleatoria de esta población* $M = (X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$. *Se define los siguientes estadísticos:*

1. *El estadístico asociado a la media poblacional μ se denomina media muestral $\overline{X}$:*

$$\overline{X}(M)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}{n}.$$

2. *El estadístico asociado a la varianza poblacional σ^2 se denomina varianza muestral S^2:*

$$S^2(M)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}.$$

3. *El estadístico asociado a la desviación estándar poblacional σ se denomina desviación estándar muestral S:*

$$S(M)=\sqrt{S^2(M)}.$$

4. *El estadístico asociado a la proporción poblacional P se denomina proporción muestral $\widehat{P}$:*

$$\widehat{P}(M)=\frac{B(M)}{n}$$

donde $B(M)$ es el número de datos de la muestra M que cumplen una determinada condición.

Ejemplo 153 *Se desea determine la edad promedio de los estudiantes de la Universidad Bienestar Seguro en el II semestre del* 2007. *En este caso la población es el conjunto formado por todas las edades de los estudiantes de la Universidad Bienestar Seguro en el II semestre del* 2007, *el parámetro a estudiar es*

$$\mu: \text{ edad promedio de los estudiantes ...}$$

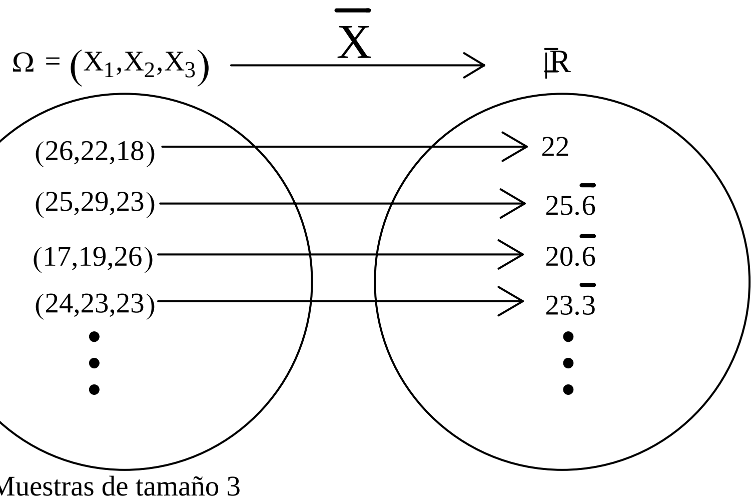
Como herramienta para aproximarse a μ se utilizará el estadístico

$$\overline{X}: \text{ edad promedio en muestras de tamaño } 3.$$

Si Jorge, Karla y Anthony son tres estudiantes de la universidad en el II semestre, elegidos al azar, y tiene edades de $26, 22$ y 18 años respectivamente entonces

$$\overline{X}(\{26,22,18\})=\frac{26+22+18}{3}=22$$

Si se continua tomando muestras, se obtiene que:



Si se sigue tomando muestras de tamaño 3, unas 300, se puede realizar una distribución de frecuencias de los datos obtenidos y determinar empíricamente la distribución de probabilidad de $\overline{X}$. *Sin embargo, ¿Es útil el* $\overline{X}$ *escogido para inferir el valor de* μ?

Más adelante, se estudiará que el tamaño de las muestras influye sobre la distribución muestra de $\overline{X}$.

¿Cómo se utiliza el estadístico? Por medio del estadístico $\widehat{\theta}$ se puede hacer inferencias sobre el parámetro θ de la población, las inferencias puede ser:

1. **Estimación.** Consiste en un utilizar $\widehat{\theta}$ para hallar una aproximación a θ (estimación puntual) o un intervalo que contenga a θ con cierto grado de certeza (intervalos de confianza).

2. **Pruebas de hipótesis**. Se utilizar $\widehat{\theta}$ para determinar si una afirmación sobre el valor de θ es muy probable.

¿Cuando un estadístico es un buen estimador? Para ello, se necesita que el estadístico tenga como valor esperado el parámetro respectivo, este concepto se define a continuación.

Definición 62 *El estadístico* $\widehat{\theta}$ *asociado al parámetro* θ *es insesgado si y solo si:*

$$E\left(\widehat{\theta}\right) = \theta$$

Los teoremas siguientes indican que los estadísticos estudiados son insesgados.

Teorema 108 *Considere la población dada por la variable aleatoria X con media poblacional μ y varianza poblacional σ^2. Dada una muestra aleatoria de esta población $M = (X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$, se tiene que*

1. *Se cumple que*
$$E(X_i) = \mu, \quad Var(X_i) = \sigma^2 \quad y \quad E\left(X_i^2\right) = \sigma^2 + \mu^2.$$

2. *La media muestral es insesgada:*
$$E\left(\overline{X}\right) = \mu.$$

3. $Var\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}.$

4. $E\left(\overline{X}^2\right) = \dfrac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

5. $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$

6. *La varianza muestral es insesgada:*
$$E\left(S^2\right) = \sigma^2$$

Prueba. *Se probará la 1, 5 y 6, las demás quedan de ejercicio.*

1. *Por la definición de muestra aleatoria se tiene que cada X_i es una copia de la variable X, entonces*
$$E(X_i) = \mu \quad y \quad Var(X_i) = \sigma^2.$$
Además, por teorema $Var(X_i) = E\left(X_i^2\right) - [E(X_i)]^2$, por lo tanto
$$E\left(X_i^2\right) = Var(X_i) + [E(X_i)]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

5. *Note que*
$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}n\overline{X} + n\overline{X}^2\right) && \text{por definición: } \sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X} \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)
\end{aligned}$$

6. *Se tiene que*

$$
\begin{aligned}
E\left(S^2\right) &= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right) && \textit{por 5. y propiedad de la esperanza}\\
&= \frac{1}{n-1}\left[E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - nE\left(\overline{X}^2\right)\right] && \textit{por propiedad de la esperanza}\\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right) - nE\left(\overline{X}^2\right)\right] && \textit{por propiedad de la esperanza}\\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2+\mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right] && \textit{por 1. y 4.}\\
&= \frac{1}{n-1}\left[n\left(\sigma^2+\mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]\\
&= \sigma^2 && \blacksquare
\end{aligned}
$$

Teorema 109 *El estadístico $\widehat{P}$ es insesgado.*

Prueba. *Recuerde que $\widehat{P} = \dfrac{B}{n}$ es un estimador para el porcentaje p de éxitos en una población, donde B es el número de éxitos en muestras aleatorias de tamaño n, por lo tanto*

$$B \sim B(n,p)$$

y entonces

$$E\left(\widehat{P}\right) = E\left(\frac{B}{n}\right) = \frac{1}{n}E(B) = \frac{1}{n}\cdot np = p \qquad \blacksquare$$

Por otro lado, entre dos estadísticos insesgados asociados al mismo parámetro, es mejor estimador aquel que tenga una menor varianza. Esto pues entre menor sea la varianza, hay más probabilidad de que el estadístico se concentre en la media.

Seguidamente se estudiará la distribución muestral de $\overline{X}$.

2.2 Distribución muestral de $\overline{X}$ y el Teorema del Límite Central

Dada una muestra aleatoria $(X_1, X_2, ..., X_n)$ formada por n variables aleatorias que sigue una misma distribución y son mutuamente independientes, entonces son aplicables los teoremas que nos hablan sobre la distribución de $\overline{X}$ y S_n.

Teorema 110 ***(La suma y promedio de normales es normal para muestras aleatorias)*** *Considere la población dada por la variable aleatoria X que sigue una distribución normal con media poblacional μ y varianza poblacional σ^2. Dada una muestra aleatoria de esta población $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$ se tiene:*

1. *La media muestral* $\overline{X}$ *sigue una distribución normal:*
$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

2. *La suma muestral* $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$ *sigue una distribución normal:*
$$S_n \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

Ejemplo 154 *El tiempo que tarda una persona resolviendo un examen típico de admisión a la Universidad Bienestar Seguro tiene una distribución Normal con media 3 horas. Se sabe que una muestra de 20 estudiantes, la probabilidad de que tarden en promedio más* 3 *horas* 15 *minutos en resolver el examen es del* 5%.

1. *Determine la desviación estándar de la duración del examen típico.*

   Considere la variable
$$X : \text{duración del examen típico en horas.}$$
   Note que $X \sim N\left(3, \sigma^2\right)$. *Se toma una muestra aleatoria de duraciones de* 20 *estudiantes en el examen:* $(X_1, X_2, ..., X_{20})$. *Por el Teorema Promedio de Normales es Normal, se tiene que*
$$\overline{X} \underset{aprox}{\sim} N\left(3, \frac{\sigma^2}{20}\right)$$
   Así, la probabilidad de que los estudiantes muestreados tarden en promedio más 3.25 *horas en resolver el examen es*
$$0.05 = P\left(\overline{X} > 3.25\right) = 1 - \phi\left(\frac{3.25 - 3}{\sigma/\sqrt{20}}\right) \Longrightarrow \phi\left(\frac{3.25 - 3}{\sigma/\sqrt{20}}\right) = 0.95$$
   Utilizando la tabla de la Normal Estándar, se debe cumplir que
$$\frac{3.25 - 3}{\sigma/\sqrt{20}} = 1.645 \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 0.679\,656.$$
   Por lo tanto, la desviación estándar de la duración del examen típico es de aproximadamente 0.68 *horas.*

2. *Suponga que se toman 80 muestras, cada muestra es de 20 duraciones en la resolución del examen típico. Una muestra se denomina riesgosa si su duración promedio en el examen es mayor a 3 horas 15 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que, de las 100 muestras, al menos 5 sean riesgosas?*

Considere la variable

$$Y : \#\ \textit{de muestras riesgosas de las 100 muestras}$$

SeaN $n = 100$ *y* $p = 0.05$,*note que de acuerdo a los datos* $Y \sim B(n,p)$. *Como* $np = 5 \geq 5$ *y* $nq = 95 \geq 5$ *entonces*

$$Y \underset{aprox}{\sim} N(np, npq) = N(5, 4.75)$$

Por lo tanto, el valor aproximado de la probabilidad de que, de las 100 muestras, al menos 5 sean riesgosas es

$$\begin{aligned} P(Y \geq 5) &= 1 - P(Y < 4.5) \approx 1 - \phi\left(\frac{4.5-5}{\sqrt{4.75}}\right) \\ &\approx 1 - \phi(-0.23) = 1 - 0.409 = 0.591. \end{aligned}$$

Ejercicio 59 *El tiempo que tarda una persona en llenar un solicitud de empleo en una página web sigue una distribución normal con media* 15 *minutos y desviación estándar de 3 minutos. Si se toma una muestra de 10 personas llenan la solicitud, ¿Cuál es la probabilidad de que en promedio duren menos de* 17 *minutos?* *R/* 0.9826

¿Qué pasa cuando la población no sigue una distribución Normal? Veamos el siguiente ejemplo.

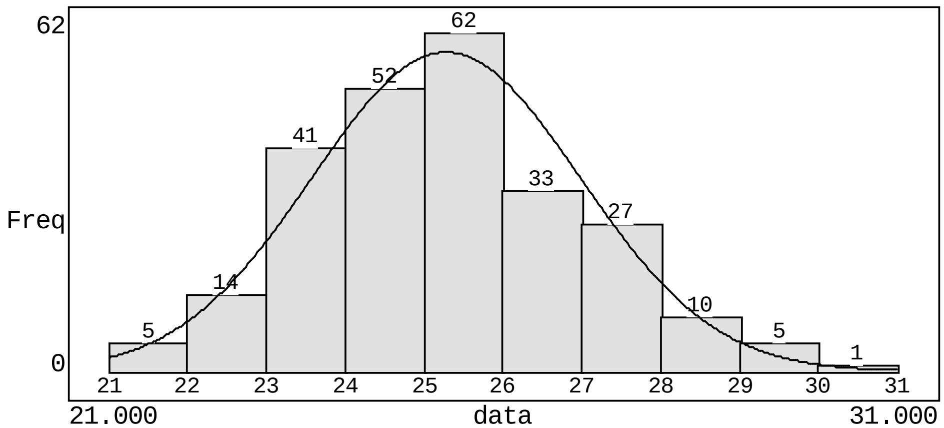
Ejemplo 155 *En el 2004 se realizó una encuesta de opinión para evaluar el servicio que le ofrece la soda comedor del ITCR. Se entrevistaron 147 personas y entre las variables del estudio, se encontraba la edad del cliente de la soda. Para esta variable se contaron en 133 valores (algunos de los entrevistados no dieron su edad) Se quiere estudiar el parámetro*

μ : *edad promedio de las personas que utilizan el servicio comedor del ITCR en el 2004.*

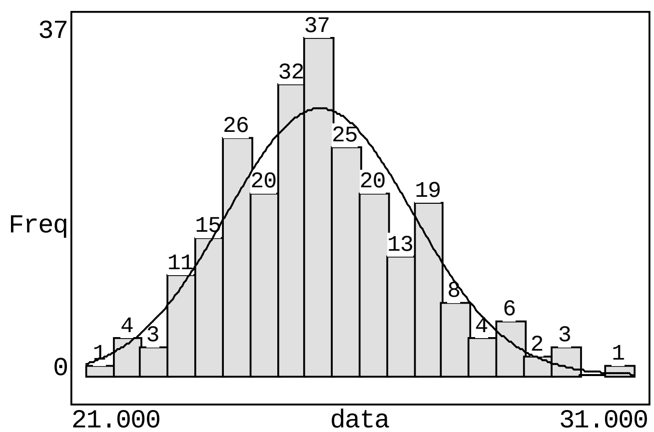
Para ello considere el estadístico

$$\overline{X} : \textit{promedio muestral sobre muestras de tamaño 30.}$$

A partir de los datos recogidos, se tomaron 250 muestras aleatorias de tamaño 30 (¿qué limitaciones existen?) y se determino el valor de $\overline{X}$ *para cada una de las muestras. A partir de los datos obtenidos de* $\overline{X}$ *se realizó una distribución frecuencia con 10 clases y se obtuvo* *el siguiente histograma:*



Observe, por ejemplo, que de los 250 valores de $\overline{X}$ *hay* 52 *entre 24 y 25. Si se realiza una distribución de frecuencias con 20 clases, el histograma será:*



Note que la distribución de $\overline{X}$ *se aproxima a una distribución normal, y tomando más muestras de tamaño 30 y realizan el histograma se puede apreciar mejor esta distribución.*

Teorema 111 ***(Teorema del Límite Central para muestras aleatorias)*** *Considere la población dada por la variable aleatoria* X *que con media poblacional* μ *y varianza poblacional* σ^2*. Dada una muestra aleatoria de esta población* $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$ *Para* n *suficientemente grande* (“$n \to \infty$”) *se tiene que*

1. *La media muestral* $\overline{X}$ *sigue una distribución normal:*

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

2. *La suma muestral* $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$ *sigue una distribución normal:*

$$S_n \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

Similarmente, en la práctica, se considere que para muestras de tamaño mayor igual a 30, la distribución normal es una buen aproximación a la distribución de $\overline{X}$ y S_n :

$$\overline{X} \underset{aprox}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad y \quad S_n \underset{aprox}{\sim} N\left(n\mu, n\sigma^2\right).$$

Ejemplo 156 *El doctor Adrian tiene un consultorio privado y ha estimado que en promedio cobra 15000 colones por consulta con una desviación estándar de* 7000 *colones. Hace poco un cliente se quejo de que el cobro de* 18000 *colones por su consulta fue excesivo. Después de mucho discutir, el doctor establece que si en una muestra de 50 facturas por consulta se revela un ingreso promedio de consulta inferior al monto cobrado al cliente, le devolverá todo el dinero. ¿Considera que el arreglo del doctor, lo favorece?*

Considere la variable

$$X: \text{ ingreso en colones por consulta}$$

Se toma una muestra del ingreso de 40 *consultas:* $(X_1, X_2, ..., X_{40})$ *Como el tamaño de la muestra es de* $n = 40$ *por el Teorema del Límite Central se tiene que* $\overline{X}$, *ingreso promedio muestral, cumple que*

$$\overline{X} \underset{aprox}{\sim} N\left(15000, 7000^2/50\right)$$

Por lo tanto, la probabilidad de que le devuelva al cliente el dinero es

$$P\left(\overline{X} < 18000\right) = \phi\left(\frac{18000 - 15000}{7000/\sqrt{50}}\right) = \phi\left(3.030\,46\right) = 0.9988$$

Este arreglo perjudica al doctor.

Ejercicio 60 *Una clase de melocotones de cierto huerto tienen un diámetro medio de* 10 *cm con una desviación estándar igual a 0.7 cm. En una muestra de* 40 *melocotones, determine la probabilidad de que el diámetro promedio de los cuarenta melocotones sea superior a* 9, 8 *cm.* *R/* 0.9648

2.3 Ejercicios

1. Un saco de arroz Blanco tiene un peso promedio de 30 kilos con una desviación estándar de 2 kilos. El supermercado Precios Bajos, adquiere 40 sacos de este arroz y lo venderá al detalle a 300 colones el kilo. ¿Cuál es la probabilidad de que el supermercado Precios Bajos obtenga un ingreso mayor a 366 000 colones por la venta de este arroz? $R/\quad 0.057\,1$

2. Cierto tipo de llantas tienen una duración media de 30000 kilómetros con una desviación de 2500 km. Don Juan tiene una flota de diez taxis, que utilizan ese tipo de llantas. Don Juan decide cambiarle las llantas a toda su flota.

   (a) ¿cuál es la probabilidad de que la de la duración promedio de las llantas adquiridas por don Juan sea inferior a 29500 kilómetros? $R/\quad 0.1029$

   (b) Se sabe que la probabilidad de que la duración promedio de las llantas adquiridas por don Juan sea mayor a c es de por lo menos 10%. Determine el valor máximo de c. $R/\quad 30505.96$

3. Un paquete de azúcar DULCE pesa en promedio 2 kilos con una varianza de 0.01 kg^2. Estos paquetes son empacados en sacos de 30 paquetes cada uno.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso de un saco de azúcar sea inferior a 59 kilos? $R/\quad 0.0336$

   (b) Si un comedor escolar compra 10 sacos de azúcar, ¿Cual es la probabilidad de que a lo sumo 2 de los sacos comprados tengan un peso inferior a 59 kilos? $R/\quad 0.996\,19$

4. En la ciudad C, se ha abierto la oficina CONOZCA DEL TLC ANTES DE VOTAR. Se ha determinado que el número de personas que acuden a la oficina por hora sigue una distribución de Poisson con media 2 personas.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de 15 personas en 6 horas?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de recibir al menos 125 personas en 40 horas? (Exprese el valor real y aproxímelo)

3 Ejercicios Finales

1. El ingreso diario de la soda EL COMELON se distribuye normalmente con una desviación estándar de 10000 colones. El ingreso promedio según el día de la semana en miles de colones, de lunes a sábado, se muestra en la siguiente tabla:

	L	K	M	J	V	S
Ingreso promedio :	120	120	120	120	110	110

   Determine el ingreso promedio mínimo necesario de los domingos de manera que se obtenga un ingreso semanal menor a 800 *mil* con una probabilidad inferior al 40%.$R/$ 105290.

2. En una finca, el peso de un saco de zanahoria tiene un peso promedio de 45 kilos con una desviación estándar de 2 kilos. Don Francisco, recoge en un camión 40 sacos y los lleva a la Feria del Agricultor, donde se venderá al detalle cada kilo de zanahoria a 80 colones. ¿Cuál es la probabilidad de que don Francisco, obtenga un ingreso mayor a 144 800 colones? $R/$ 0.214 8

3. Una bolsa de zanahoria tiene un peso promedio de 2 kg y una desviación de 100 gramos. Se empacan cajas que contienen 70 bolsas. Determine la probabilidad de que en una caja el peso promedio por bolsa sea inferior a 1990 gramos. $R/$ 0.2005

4. Una empresa va a realizar una entrevista para contratar empleados. En total se solicitaron 400 citas. Si la probabilidad de que hayan al menos 350 personas entrevistadas se estima en 95%, determine la probabilidad de que una persona que saco cita llegue en realidad a la entrevista. $R/$ $p = 0.898\,58$

5. La Agencia de Viajes Diversión a lanzado a inicios de este mes la promoción ¡Vamos al mundial!, la cual ofrece un paquete a Alemania para ver los tres partidos de la primer eliminatoria de Costa Rica. Se ha logrado estimar que el 6% de las personas que compraron un paquete no asistirán a los tres encuentros por diferentes motivos. ¿Cuál es el mínimo de paquetes que se deben vender para garantizar que al menos 1000 personas, que compraron el paquete, asistan a los tres partidos a apoyar a la Selección con una probabilidad superior al 98%? $R/$ 1081

6. Un juego consiste en elegir 3 de cinco cartas, dos de las cartas tienen anotado un 700, dos un 200 y una un 400. Un jugador juega tomando sus cartas sin repetir y recibe en total la suma de los números anotados en las cartas. Si los jugadores realizan 30 veces ese juego, calcule la probabilidad de que en promedio reciban más de 1400 colones $R/$ 0.0559

7. Sea X_1, X_2, X_3 una muestra aleatoria sobre una población que sigue una distribución dada por una variable X con media 50 u y varianza 9 u^2. Considere las variables: $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$, $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$, $Y = 2S_3 - 4\overline{X}$.

   (a) Determine la media y varianza de Y. *R/* $E(Y) = 100, Var(Y) = 12.$

   (b) Utilice la desigualdad de Chebychev para estimar (acotar inferiormente) $P(70 < Y < 130)$. *R/* $\dfrac{74}{75}$

8. Una secretaria graduada en el Instituto de Mecanografía digita un promedio de 80.5 palabras por minuto con una desviación estándar de 7 palabras por minuto. Determine la probabilidad de que en una hora, una secretaria de dicho instituto, digite más de 4850 palabras. *R/* 0.1888

9. La probabilidad de que una persona que asista a la Feria del Agricultor de Zapote, le compre a Don Beto es de 0.9. ¿Cuántas personas deben asistir como mínimo a esta feria el próximo sábado, para tener una probabilidad superior al 95% de que hayan al menos 1500 personas que le compren a Don Beto? *R/* 1689

10. Una empresa va a realizar una entrevista para contratar empleados. La probabilidad de que una persona que saco cita llegue en realidad a la entrevista es de 0.97. ¿Cuántas citas deben darse para tener una probabilidad superior al 95% de que hayan al menos 350 entrevistados? *R/* 366

11. El consumo de cebolla diaria en una zona del país, en miles de kg, es una $v.a.c.$ X cuya función generadora de momentos es

$$m_X(t) = \frac{1}{(1-2t)^2}$$

    Debido al mal tiempo la producción de cebolla ha sido afectada, y se estima que si el consumo promedio diario para un mes determinado es mayor a 4200 kg, entonces en dicho mes habrá problemas de abastecimiento. Determine la probabilidad de que el mes de diciembre tenga problema de abastecimiento de cebolla. *R/* 0.348 3

12. Cada día, el tiempo que tarda Don Juan en encontrar la llave para salir de su casa al trabajo sigue una distribución exponencial con un promedio de 2 minutos. En 60 días, ¿cuál es la probabilidad de que en al menos 20, Don Juan tarde más de 3 minutos en encontrar la llave para salir de su casa al trabajo? *R/* 0.0287

13. El tiempo que un cajero del supermercado MENOS MENOS tarda con cada cliente tiene una distribución normal con un promedio de 7 minutos y una desviación estándar

de 2 minutos. Si un cajero atendió a 8 clientes ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo que tardó en atenderlos sea inferior a 72 minutos? $R/\quad 0.9977$

14. La empresa COMPU-SEGURA se encarga de reparar computadoras personales y por la revisión de una computadora cobra en promedio 10000 colones con una desviación estándar de 1900 colones.

    (a) Don Beto se queja ante el dueño de la empresa de que el cobró de 11300 colones por la revisión de su computadora es muy elevado. Después de discutir, el dueño accede a rebajarle el costo del servicio si el pago promedio en una muestra de 30 revisiones es inferior al monto cobrado a Don Beto. Determine la probabilidad de que se le realice el rebajo a Don Beto. $R/$ aproximadamente 1

    (b) Suponga que todos los días se revisan 100 computadoras. El dueño de la empresa, califica un día de productivo si el ingreso de ese día por concepto de revisión está dentro del 10% de ingresos diarios más elevados. Determine el ingreso diario mínimo para que el día sea productivo. $R/\quad 1.024\,320$

15. Las ganancias diarias que recibe la soda EL COMELON está dado por una *v.a.c.* X, en miles de colones, donde $E(X) = 30$ y $Var(X) = 450$. Determine, aproximadamente, la probabilidad de que la ganancia mensual (en 30 días) sea superior a un millón de colones. $R/\quad 0.194\,9$

16. En el país C, el año pasado se inauguró la esperada Autopista de las Brumas. Sin embargo, desde su inauguración varios vehículos han sufrido accidentes de diferentes tipos, pero la probabilidad **p** de que un vehículo sufra un accidente en la autopista se desconoce. Ante esta situación un estudiante ha estimado que, de 1000 vehículos, la probabilidad de que al menos 50 sufran algún accidente en la autopista es de 20%. Con base en esta estimación, halle aproximadamente la probabilidad **p** de que un vehículo sufra un accidente en esta autopista. $R/\quad p \approx 0.044\,404\,9$

17. Se ha determinado que el tiempo en horas (X) que semanalmente requiere una sitio WEB para actualizarse sigue una distribución gamma con media de 12 horas y desviación estándar de $\sqrt{48}$ horas.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que en alguna semana el tiempo de actualización del sitio sea mayor a 14 horas? $R/\quad 0.238$

    (b) Si el costo de actualización semanal, en dólares, esta dado por $C = 30X + X^2$, halle el costo semanal esperado por la actualización del sitio. $R/$ 552 dólares

    (c) Determine aproximadamente la probabilidad de que en un año (52 semanas), el tiempo promedio semanal de actualización del sitio sea inferior a 15 horas. $R/\quad 0.9991$

18. Las ganancias diarias que recibe la Tienda BARATA está dado por una *v.a.c.* X, en miles de colones, cuya función generadora de momentos es

$$m_X(t) = \frac{1}{(1-15t)^2}$$

Determine, aproximadamente, la probabilidad de que la ganancia mensual (en 30 días) sea superior a un millón de colones. *R/* 0.1949

19. Doña Sonia tiene un pequeña tienda de reparación de ropa cuya ganancia diaria sigue una distribución normal con un promedio de 50 mil colones y una desviación de 5 mil colones. Doña Sonia requiere de 800 mil colones para remodelar su tienda. Suponiendo que ahorrará toda la ganancia obtenida en la tienda para su remodelación, ¿cuántos días necesita para obtener por lo menos el dinero de la remodelación con una probabilidad superior al 90%? *R/* 17

20. En Diciembre, en el Parque de Diversiones JP, un juego mecánico es calificado por día de atractivo si en ese día al menos 100 personas distintas lo utilizan por lo menos una vez. La probabilidad de que una persona que asista al Parque JP se suba en el Ciclón por lo menos una vez es de 0.4.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 personas que asisten al Parque JP, al menos 2 se suban en el Ciclón por lo menos una vez? *R/* 0.953643

    (b) ¿Aproximadamente cuántas personas deben asistir este sábado al Parque JP, para tener una probabilidad cercana al 90% de que este día sea considerado el ciclón como atractivo?
    R/ 275

Capítulo VII

Apéndices

A. Repaso de Teoría de Conjuntos.

B. Algunos tópicos importantes de Funciones.

C. Repaso de Sumas y Series.

D. Repaso de derivación.

E. Repaso de Integración.

F. Tablas de distribuciones

A Repaso de Teoría de Conjuntos

En este capítulo se recuerdan algunos de los tópicos principales de Matemática Discreta que serán de utilidad para el estudio del Análisis Combinatorio y la teoría de Probabilidades.

A.1 Definición de Conjuntos

A.1.1 El axioma de Abstracción y la paradoja de Russell

Definición 63 *(**Relación de pertenencia e inclusión**) Dados los conjuntos A y B, se tiene las siguientes definiciones:*

1. *Se dice que x **pertenece** a A y se denota $x \in A$, si x es un elemento de A*
2. *Se dice que x **no pertenece** a A y se denota $x \notin A$, si x no es un elemento de A. Es decir*
$$x \notin A \equiv \urcorner (x \in A) .$$
3. *Se dice que A **es subconjunto de** B y se denota $A \subseteq B$, si todo elemento de A es elemento de B. Es decir*
$$A \subseteq B \equiv \forall x \left(x \in A \Longrightarrow x \in B \right) .$$
4. *Se dice que A **no es subconjunto de** B y se denota $A \nsubseteq B$,si existe un elemento de A que no es elemento de B.*

Teorema 112 *Se tiene que$A \nsubseteq B \equiv \urcorner (A \subseteq B)$*

Las definiciones anteriores establecen relaciones entre conjuntos, pero ¿qué es un conjunto? Esta la pregunta central que genera toda la axiomática de conjuntos. Se puede creer que toda colección de objetos es un conjunto, es decir, más precisamente, dada una proposición abierta, existe un conjunto cuyos elementos son aquellos que cumplen la proposición. Lo anterior es llamado el axioma de abstracción y seguidamente se define formalmente.

Axioma 7 *(**Axioma de Abstracción**) Dada una proposición abierta $P(x)$, existe el conjunto A tal que*
$$(\forall x) \left(x \in A \quad \Longleftrightarrow \quad P(x) \right)$$

Ejemplo 157 *Considere $P(x)$: x es una silla del ITCR, entonces por el axioma de abstracción existe el conjunto A cuyos elementos son aquellos que cumplen $P(x)$. Así A es el conjunto de sillas del ITCR*

Sin embargo, admitir este axioma nos lleva a contradicciones. Específicamente, una de estas contradicciones es la **paradoja de Russell**: considere la siguiente proposición

$$P(x) : x \notin x.$$

Si asumimos el axioma de Abstracción entonces existe el conjunto A cuyos elementos son aquellos que cumplen $P(x)$:

$$(\forall x)(x \in A \iff x \notin x) \qquad (*)$$

por lo tanto, dado un x se tiene que

$$\begin{array}{rcllr} x & \in & A & \Longrightarrow & x \notin x \qquad (1) \\ x & \notin & x & \Longrightarrow & x \in A \qquad (2) \end{array}$$

¿A es o no elemento de A? analicemos ambas opciones:

1. Si $A \in A$, entonces por $(1) : A \notin A$, lo cual es una contradicción.
2. Si $A \notin A$, entonces por $(2) : A \in A$, lo cual es una contradicción.

Así no sucede que $A \in A$ ni que $A \notin A$, lo cual es ilógico.
Lo anterior hace que el axioma de abstracción se "derrumba". Por lo tanto no toda colección de objetos es un conjunto. Sin embargo, este poblema se arregla de manera sencilla indicando, en el axioma de Abstracción, que los elementos de A deben pertenecer a un conjunto universo existente. Esta modificación, crea el siguiente axioma.

Axioma 8 ***(Axioma de Separación)*** *Dado un conjunto U y una función proposicional $P(x)$ existe el conjunto A formado por todos los elementos de U que cumplen $P(x)$*

Ejemplo 158 *Suponga que existe el conjunto $\mathbb{N}$ formado por todos los números utilizados para contar. Entonces por el axioma anterior, existe el conjunto V formado por los elementos de $\mathbb{N}$ que son números primos. Note que la propiedad que caracteriza a los elementos de V es*

$$P(x) : x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es un número primo.}$$

El lector interesado en los aspectos formales de este nuevo axioma se le invita a leer la sección $(A.1.3)$.

A.1.2 Notación de un conjunto

Para denotar un conjunto se necesita primero el axioma de extensionalidad y la definición del conjunto vacio. El axioma establece que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Axioma 9 *(Axioma de extensionalidad) Dados dos conjuntos A y B se tiene que:*

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x)\,(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)\,.$$

Definición 64 *Se dice que $A = \phi$ si*

$$(\forall x)\,[x \notin A]$$

Note que en la definición anterior ya se está usando el axioma de extensionalidad, pues al indicar que $A = \phi$, basta describir cuales no son elementos de A para describir ϕ.

Un conjunto se puede denotar por abstracción o por extensión. Se denota por abstracción si se indica la propiedad (proposición abierta) que cumplen sus elementos:

Notación 3 *(**Notación de un conjunto por abstracción o comprensión**) Se dice que:*

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

si y solo si se cumple que:

$$\begin{array}{c} (\forall x)\,[x \in A \Longleftrightarrow P(x)] \quad \wedge \quad A \text{ es un conjunto} \\ \vee \\ \neg\,(\exists x)\,[x \in A \Longleftrightarrow P(x)] \quad \wedge \quad A = \phi \end{array}$$

En palabras: $A = \{x \mid P(x)\}$ si y solo si A es un conjunto cuyos elementos son aquellos que cumplen la proposición $P(x)$, o A es el conjunto vacío pues $P(x)$ es falso para todo x.

Es impostante notar que si $y \in \{x|P(x)\}$ entonces $P(y)$ es verdadero.

Ejemplo 159 *Considere el conjunto*

$$A = \{x | x \text{ es un país de América}\}$$

Note que este caso la proposición abierta que define el conjunto es $P(x)$: x es un país de América. Como $P(\text{Guatemala})$ es verdadero y $P(\text{China})$ es falso entonces

$$\text{Guatemala} \in A \quad \text{y} \quad \text{China} \notin A.$$

Ejemplo 160 *Considere el conjunto*

$$B = \left\{x|x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 4 = 0\right\}$$

Sea $P(x) : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 4 = 0$. *Dado que la ecuación* $x^2 + 4 = 0$ *no tiene solución en* $\mathbb{R}$ *entonces* $P(x)$ *es falsa para cualquier* x, *por lo tanto, de acuerdo a la notación por abstracción* $B = \phi$.

Por otro lado, se acepta la siguiente notación $\{x \mid x \in U \quad \wedge \quad P(x)\} = \{x \in U \mid P(x)\}$. Así en el ejemplo anterior se tiene que

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}|x^2 + 4 = 0\right\} = \phi$$

También podemos denotar un conjunto por extensión, indicando cada uno de los elementos del conjunto.

Notación 4 ***(Notación de un conjunto por extensión)*** *Se dice que:*

$$A = \{a, b\}$$

si y solo si se cumple que:

$$(\forall x)\left[x \in A \Longleftrightarrow (x = a \vee x = b)\right] \quad \wedge \quad A \text{ es un conjunto}$$

De la misma manera se puede denotar $\{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, ...$

Ejemplo 161 *El conjunto formado por los elementos* 1, 2 *y* 3, *se puede denotar por extensión* $A = \{1, 2, 3\}$ *y por abstracción por* $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 4\}$.

Ejemplo 162 *Por extensión se definen los conjuntos numéricos*

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\} \\ \mathbb{Z} &= \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \end{aligned}$$

y por comprensión se define

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$$

Ejemplo 163 *Se sientan 3 hombres y 2 mujeres en una banca, entonces el conjunto de personas que se sentaron en la banca definido por extensión es*

$$A = \{\textit{Karla, Jorge, Anthony, María, Francisco}\}$$

y el conjunto formado por las personas mayores de edad se define por abstracción:

$$B = \{x \in A| \text{ la edad de } x \text{ es mayor o igual a } 18\}$$

Ejemplo 164 *De acuerdo a la notación por extensión se tiene que* $\{1,2\} = \{2,1\}$.

Ejemplo 165 *En el ejemplo* (163) *se tiene que jorge* $\in A$ *y* $B \subseteq A$.

Ejemplo 166 *Para el conjunto* $C = \{1,2,\{1,2,3\}\}$, *se tiene que* $2 \in C, \{1,2,3\} \in C$,
$\{2\} \subseteq C$,
$\{\{1,2,3\}\} \subseteq C$.

A.1.3 (♣) Axioma de Separación

Hasta el momento hemos visto como denotar conjuntos. Sin embargo, dejamos pendiente la definición de un conjunto, es decir, cómo nos aseguramos que un conjunto existe ya que como se mostró no toda colección de objetos es un conjunto.

El Axioma de Separación, es una versión mejorada del Axioma de Abstracción y nos permitirá definir conjuntos. Este nuevo axioma permite separar los elementos de un conjunto dado para formar un nuevo conjunto.

Axioma 10 ***(Axioma de Separación)*** *Dado un conjunto* A *y una función proposicional* $P(x)$ *existe el conjunto:*

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}$$

Así, la forma de mostrar que un conjunto existe es viéndolo como el conjunto formado por los elementos de otro conjunto que cumplen una determinada propiedad.

Ejemplo 167 *Suponga que existe el conjunto de los números naturales:* $\mathbb{N}$, *entonces por el axioma de separación existe el conjunto:*

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par}\}.$$

Ejemplo 168 *¡El axioma de Separación no se derrumba con la paradoja de Russell! Dado un conjunto* A *y la proposición* $P(x) : x \notin x$, *si asumimos el Axioma de Separación, entonces existe el conjunto*

$$B = \{x \in A \mid x \notin x\}$$

¿La existencia de este conjunto no provoca contradicciones? Verifiquemos que si tomamos el conjunto $B = A$ *no obtenemos contradicciones. En efecto suponga, que*

$$A = \{x \in A \mid x \notin x\}$$

existe, entonces ¿$A \in A$ o $A \notin A$? Note que

$$\begin{aligned} & A \in A \\ \Longrightarrow\ & A \in \{x \in A \mid x \notin x\} \\ \Longrightarrow\ & A \in \{x \mid x \in A \quad \wedge \quad x \notin x\} \\ \Longrightarrow\ & A \in A \quad \wedge \quad A \notin A \end{aligned}$$

Es decir

$$A \in A \Longrightarrow (A \in A \quad \wedge \quad A \notin A)$$

1. *Si $A \in A$ entonces:*

$$\underbrace{\underbrace{A \in A}_{VERDADERO} \quad \Longrightarrow \underbrace{A \in A \quad \wedge \quad A \notin A}_{FALSO}}_{FALSO}$$

   es decir, se obtiene una contradicción. Por lo tanto, no sucede que $A \in A$.

2. *Si $A \notin A$ entonces:*

$$\underbrace{\underbrace{A \in A}_{FALSO} \Longrightarrow \underbrace{A \in A \quad \wedge \quad A \notin A}_{FALSO}}_{VERDADERO}$$

   No se obtiene una contradicción. Por lo tanto, se concluye que $A \notin A$.

A.2 Operaciones con Conjuntos

A.2.1 La unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica de conjuntos

Definición 65 *Dados los conjuntos A y B se define los conjuntos*

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x | x \in A \quad \vee \quad x \in B\} \\ A \cap B &= \{x | x \in A \quad \wedge \quad x \in B\} \\ A - B &= \{x | x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\} \\ A \Delta B &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

Ejemplo 169 *Se tiene una canasta con 15 bolas enumeradas del uno al quince. Las bolas con número del 1 al 7 son rojas y las demás son verdes. Sea U, el conjunto de bolas de la canasta y considere los siguientes conjuntos:*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in U | x \text{ es verde}\} \\ B &= \{x \in U | x \text{ es roja}\} \\ C &= \{x \in U | x \text{ tiene un número par}\} \end{aligned}$$

Entonces: $B \cup C$ *es el conjunto de todas las bolas que son rojas o que tiene número par,* $A \cap C$ *es el conjunto de todas las bolas verdes que tienen número impar,* $C - A$ *es el conjunto de todas las bolas de número par que no son verdes y* $C \triangle B$ *es el conjunto de las bolas que tiene número par ó son rojas, pero no ambos.*

Algunas propiedades de la unión e intersección son

$$\begin{array}{cc} A \cup \phi = A & A \cap \phi = \phi \\ A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ A \cup A = A & A \cap A = A \\ A \subseteq B \Longrightarrow A \cup B = B & A \subseteq B \Longrightarrow A \cap B = A \\ B \subseteq A \cup B & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}$$

Ejemplo 170 *Simplifique la siguiente expresión* $(AUB) \cap (B \cap A)$ *sabiendo que* $A \subseteq B$.
Como $A \subseteq B$ *entonces* $AUB = B$ *y* $B \cap A = A$ *por lo tanto* $(AUB) \cap (B \cap A) = B \cap A = A$.

A.2.2 El complemento

Si $A \subseteq B$, entonces se define el complemento de A con respecto a B como el conjunto $B - A$, y se denota por

$$C_B A = B - A.$$

Si se sobrentiende quien es B, entonces se habla del complemento de A y se denota como $\overline{A}$ y a B se le llama el conjunto universo. Note que entonces $\overline{A} = \{x/x \notin A\}$.

Entre los resultados más importantes sobre Teoría de Conjuntos, se destacan las Leyes de De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

las cuales se pueden generalizar a una sucesión de conjuntos utilizando el método de inducción:

$$\begin{array}{rcl} \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n} & = & \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \cdots \cap \overline{A_n}, \\ \overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n} & = & \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \cdots \cup \overline{A_n}. \end{array}$$

Ejemplo 171 *Un anagrama de una palabra es un ordenamiento de sus letras. Así, algunos anagramas de la palabra "matematico", son "matematico","matimatceo","ticoamatem". Sea* U *el conjunto de todos los anagramas de la palabra "matematico", que se considera el universo, entonces si*

$$A = \{x \in U | \ x \text{ es un anagrama con las dos "a" juntas}\}$$

entonces $\overline{A}$ es el conjunto de todos los anagramas de la palabra "matematico" que no tienen las dos "a" juntas. Además, dados los conjuntos

$$\begin{aligned} B &= \{x \in U|\ x \text{ es un anagrama con las dos "m" juntas}\} \\ C &= \{x \in U|\ x \text{ es un anagrama con las dos "t" juntas}\} \end{aligned}$$

se tiene que el conjunto $D = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, es el conjunto de todos los anagramas de la palabra "matematico" que no tiene las dos "a" juntas, ni las dos "m" juntas, ni las dos "t" juntas. Utilizando De Morgan se obtiene que

$$D = \overline{A \cup B \cup C}$$

A.2.3 El conjunto potencia

Se define el conjunto potencia de A como el conjunto formado por todos los subconjuntos de A :

$$P(A) = \{B | B \subseteq A\}$$

Ejemplo 172 *Dado $A = \{1, \{2\}, +\}$, se tiene que*

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{\{2\}\}, \{+\}, \{1, +\}, \{1, \{2\}\}, \{\{2\}, +\}, A\}$$

A.2.4 Producto Cartesiano

Se define el producto cartesiano de los conjuntos A y B como el conjunto formado por los pares ordenados $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$ donde la primera coordenada es elemento de A y la segunda es elemento de B :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \quad y \quad b \in B\}.$$

El producto cartesiano introduce el orden que no se tiene en los conjuntos, su definición se puede genralizar. Así se define $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n$ como el conjunto

$$\{(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) | a_i \in A_i, \text{ para cada } i = 1, 2, ..., n\}$$

Ejemplo 173 *En una pecera hay tres tipos de peces: 15 peces guramy, 10 peces espada y 12 peces gato. De la pecera se seleccionan 7 peces, entonces el conjunto de todas las posibles selecciones es*

$$U = \left\{ (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3 | \begin{array}{ll} a_1 : & \#\text{ de peces guramy seleccionados} \\ a_2 : & \#\text{ de peces espada seleccionados} \\ a_3 : & \#\text{ de peces gato seleccionados} \end{array}, a_1 + a_2 + a_3 = 7 \right\}$$

el conjunto de todas las posible selecciones con al menos 2 peces gato es

$$A = \{(a_1, a_2, a_3) \in U | a_3 \geq 2\}.$$

A.3 Algunas definiciones importantes

Dos conjuntos A y B son **excluyentes o disjuntos** si y solo si $A \cap B = \phi$. En general, se dice que los conjuntos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ son **excluyentes dos a dos** si dos conjuntos cualesquiera distintos tiene intersección vacía, es decir

$$(\forall i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}, i \neq j)\,(A_i \cap A_j = \phi)$$

Note que si A y B son excluyentes, entonces $A \cup B = A \triangle B$.

Por otro lado, se dice que los conjuntos $B_1, B_2, ..., B_n$ son **una partición** de un conjunto U si

1. Los conjuntos $B_1, B_2, ..., B_n$ son subconjuntos no vacíos de U.
2. Los conjuntos $B_1, B_2, ..., B_n$ son excluyentes dos a dos.
3. $U = B_1 \cup B_2 \cup .... \cup B_n$

Ejemplo 174 *Sea A un subconjunto no vacío de U, entonces los conjuntos A y $\overline{A}$ son una partición de U.*

Ejemplo 175 *En una localidad hay 3 colegios con 25%, 35% y 40%, respectivamente, de los estudiantes de secundaria del lugar. Sea U el conjunto de estudiantes de la localidad y considere los conjuntos*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in U | x \text{ está en el colegio } 1\} \\ A_2 &= \{x \in U | x \text{ está en el colegio } 2\} \\ A_3 &= \{x \in U | x \text{ está en el colegio } 3\} \end{aligned}$$

dado que los tres colegios abarcan el 100% de la población estudiantil de secundaria, y además, como es absurdo que ocurre que un estudiante este en más de un colegio, entonces los conjuntos A_1, A_2, A_3 son una partición de U.

A.4 Ejercicios

1. Escriba por extensión los siguientes conjuntos

   a) $A = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - 1 = 0\}$

   b) $B = \{x \in \mathbb{Z}^- | -5 < x < 4\}$

   c) $C = \{x \in \mathbb{Q} | x(x-1)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0\}$

   d) $D = \{x \in \mathbb{N} | 3 \text{ divide a } x\}$

   e) $E = \mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$

   f) $F = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es impar y } x < 18.5\}$

2. Escriba por comprensión los siguientes conjuntos

   a) $A = \{5, 6, 7, ...\}$
   b) $B = \{2, 4, 6, 8\}$
   c) $C = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, ... \frac{15}{2}\}$
   d) $D = \{"\text{aba}", "\text{aab}", "\text{baa}"\}$
   e) $E = [2, 45[$
   f) $F = \mathbb{Q} \cap [-1, 0]$
   g) $G = \mathbb{Z}^{+} \cup]3, 5]$
   h) $H = C \cap \mathbb{N}$

3. Sean A, B y D conjuntos tales que $A = \{1, 2\}; B = \{1, \{1, 2\}\}; D = \{\phi\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes preposiciones:

   a) $(\exists x)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$
   b) $(\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$
   c) $A \in B$
   d) $P(A) = D \cup A$
   e) $D = \phi$
   f) $D \subseteq A$
   g) $\neg(1 \in A \; o \; 3 \in A)$
   h) $1 \in A \; o \; 3 \in A$

4. Sean $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7\}$, $D = \{8, 9, 10\}$ (Los complementos se toman respecto a M). Determine

   1. $(AUB) \cap C$
   2. $\overline{B} - \overline{A}$
   3. $C \cap \overline{D}$
   4. $P(A \cap B)$
   5. $A \Delta B$
   6. $C \Delta (AUD)$
   7. $\overline{B - C}$
   8. $D - C$
   9. $(A \cap B) \times A$
   10. $(A - B) \times (B - A)$

5. Sean A, B, C y D conjuntos arbitrarios. Para cada una de las siguientes proposiciones determine el valor de verdad. Si son falsas halle un contraejemplo, sino pruébelas.

   a) $A \cap B = A \cap D \Longrightarrow B = D$
   b) $A - (B \cap D) \subseteq (A - B) \cap (A - D)$
   c) $A \cap B = \phi \Longrightarrow A \cup B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (B - A)$
   d) $\overline{A} - \overline{B} = \overline{A - B}$
   e) $P(A) - P(B) = P(A - B)$
   f) $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$
   g) $P(A) \subseteq P(B) \Longrightarrow A \subseteq B$
   h) $A - (B - C) \subseteq (A - B) \cup C$
   i) $A - B = \phi \Longrightarrow A = B$
   j) $A \cap B = \phi \Longrightarrow A \Delta B = A \cup B$
   k) $A - B = A \cap \overline{B}$
   l) $A - (B - C) = (A - B) - C$
   m) $A \cap \overline{B} = \overline{A} U B$
   n) $A \Delta B$ y $A \cap B$ son una partición de A
   o) $A - B$ y $A - \overline{B}$ es una partición de A
   p) $A \subseteq B \cup C$ y $B \cap C = \phi \Longrightarrow$ los conjuntos $A \cap B$ y $A \cap C$ son una partición de A

6. Determine una partición de $A \cup B \cup C$, sabiendo que $A \cap B \cap C \neq \phi$.

7. Se lanzan dos dados, uno negro y otro blanco, considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .Sea $U = A \times A$ el conjunto de posibles resultados al lanzar los dados, donde la primera entrada corresponde al posible resultado del dado blanco, y la segunda al dado negro. Considere los siguientes conjuntos:

$$B = \{(x, y) \in U \mid y \geq 4\}$$
$$C = \{(x, y) \in U \mid x \geq y\}$$
$$D = \{(x, y) \in U \mid x + y = 6\}$$

Describa con palabras y por extensión, los conjuntos: $B, C, D, B \cup C, D \cap C, B - D, B \triangle D, \overline{D}, \overline{B} - D$.

B Algunos tópicos importantes de Funciones

B.1 Concepto de función

Recordemos que una relación R de un conjunto A a un conjunto B es una tripleta (G_R, A, B), donde $G_R \subseteq A \times B$ es denominado el gráfico de R. Si $(a,b) \in G_R$ se dice que a se relaciona con b, lo cual se denota por aRb.

Se suelen definir varias operaciones entre relaciones, como por ejemplo la inversa de una relación. Dada la relación $R = (G_R, A, B)$, se define su inversa como la relación $R^{-1} = (G_{R^{-1}}, B, A)$, donde

$$G_{R^{-1}} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in G_R\}.$$

Ejemplo 176 *Se distribuyen un morenito, un chicle y una tapita entre Mario y Karla. Considere los conjuntos:*

$$A = \{\textit{morenito, chicle, tapita}\} \quad \textit{y} \quad B = \{\textit{Mario, Karla}\}$$

Sea R una relación de A en B definida por

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x \textit{ es asignado a la persona } y$$

Al distribuir los confites a Mario le correspondió el chicle y a Karla el resto, entonces el gráfico de R es $G_R = \{(\textit{morenito, Karla}), (\textit{chicle, Mario}), (\textit{tapita, Karla})\}$ y el gráfico de R^{-1} es $G_{R^{-1}} = \{(\textit{Karla, morenito}), (\textit{Mario, chicle}), (\textit{Karla, tapita})\}$.

Una función es un tipo de relación. Se dice que la relación $f = (G_f, A, B)$ es una función de A en B y se denota $f : A \to B$, si todo elemento de A esta relacionado con un único elemento de B, es decir, si se cumple que:

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B)((a,b) \in G_f).$$

El conjunto A es llamado el Dominio de la función f, y a sus elementos se les llama preimágenes. El conjunto B es denominado el Codominio de la función f. Se define el Ámbito o Rango de f como el conjunto $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ y a sus elementos se les llama imágenes.

Ejemplo 177 *En el ejemplo anterior, se tiene que las relación R es una función pero la relación R^{-1} no lo es.*

Ejemplo 178 *Sea* $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *Considere los siguientes conjuntos*

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{x \,|\, x \text{ es un número de tres dígitos diferentes tomados de } D\ \} \\ B & = & \{f \,|\, f : D \to D\} \text{ (conjunto de funciones sobre } D) \end{array}$$

Se define la función $\varphi : A \to B$, *como aquella que toma un número de tres dígitos* $x \in A$ *y le asocia la función* $\varphi(x) \in B$, *definida por:*

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & A & \to & B \\ & x = (d_1 d_2 d_3) & & \varphi(x) : D \to D \\ & & & \varphi(x)(y) = \begin{cases} d_2 & si \quad y = d_1 \\ d_3 & si \quad y = d_2 \\ d_1 & si \quad y = d_3 \\ 6 & en \quad otro\ caso \end{cases} \end{array}$$

Así, si $\varphi(146)(y) = \begin{cases} 4 & si \quad y = 1 \\ 6 & si \quad y = 4 \\ 1 & si \quad y = 6 \\ 6 & en \quad otro\ caso \end{cases}$ *y* $\varphi(652)(5) = 2.$

B.2 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Una función $f : A \to B$ es inyectiva si cada imagen se asigna a una única preimagen, es decir, si las preimágenes a y b se relacionan con la misma imagen $(f(a) = f(b))$ entonces a y b no pueden ser diferentes, matemáticamente f es inyectiva si:

$$(\forall a, b \in A) \ \ (f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad a = b)$$

Por otro lado, una función $f : A \to B$ es sobreyectiva si todo elemento de B es imagen, o sea si

$$B = f(A) = \{y \in B | \exists x \in A : f(x) = y\}.$$

Además, se dice que una función f es biyectiva si y solo si f es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo 179 *La función* φ *del ejemplo* (178) *no es inyectiva, pues* $\varphi(126) = \varphi(261)$. *Tampoco es sobreyectiva pues para la función constante* $f \in B$ *definida por* $f(y) = 3$, *no existe un* $x \in A$ *que cumpla que* $\varphi(x) = f$.

Ejemplo 180 *Sea B el conjunto de maneras de distribuir un morenito, un chicle y una tapita entre Mario y Karla. Considere el conjunto*

$$A = \{f | f : \{\textit{morenito, chicle, tapita}\} \to \{\textit{Mario, Karla}\}\}$$

Se define la función $\Psi : A \to B$ por

$$\Psi(f) : \textit{es la distribución que asigna cada confite } x \textit{ a la persona } f(x).$$

La función Ψ es inyectiva, pues si $\Psi(f) = \Psi(g)$ entonces la distribución que asigna cada confite x a la persona $f(x)$ es la misma que la que asigna cada confite x a la persona $g(x)$, por lo tanto, $f(x)$ y $g(x)$ son la misma persona para cada x, entonces $f = g$.

La función Ψ es también sobreyectiva. En efecto, dada la distribución que asigna el morenito a la persona p_1, el chicle a la persona p_2 y la tapita a la persona p_3, con $p_1, p_2, p_3 \in \{\textit{Mario, Karla}\}$, existe la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} p_1 & \textit{si} \quad x \textit{ es el morenito} \\ p_2 & \textit{si} \quad x \textit{ es el chicle} \\ p_3 & \textit{si} \quad x \textit{ es la tapita} \end{cases}$$

Note que $\Psi(f)$ es la distribución dada. Se concluye que Ψ es biyectiva.

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$, se define la función g composición f por

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & A & \to & C \\ & x & & g \circ f(x) = g(f(x)). \end{array}$$

Ejemplo 181 *En un concurso de televisión a las diez personas finalistas se les obsequiará un regalo distinto. Para ello, se repartirán diez cartas enumeradas del 1 al 10 entre los finalistas (ellos las seleccionan y las pueden cambiar). Una vez que todos estén conformes con la tarjeta que poseen, cada finalista deberá buscar entre los diez obsequios puestos en la mesa principal, aquel que tenga el número igual a su carta, éste será su obsequio.*
Sean A el conjunto de finalistas, B el conjunto de tarjetas enumeradas y C el conjunto de obsequios. Si $f : A \to B$ es la función que asigna la persona con la tarjeta que escoge y $g : B \to C$ es la función que asocia cada tarjeta con número x con el obsequio que tenga el número x $(x = 1, 2, 3, ..., 10)$, entonces

$$g \circ f : \quad A \quad \to \quad C$$

es la función que asocia cada finalista con su obsequio.

Seguidamente, se enumeran algunos de los principales resultados de funciones:

1. Dos funciones f y g son iguales si tienen el mismo dominio D y codominio, y además:
$$(\forall x \in D)\left(f(x) = g(x)\right)$$
2. Si f es una función biyectiva entonces, la relación inversa, f^{-1} es una función biyectiva.
3. La composición de funciones biyectivas es una función biyectiva.

Ejemplo 182 *Sean $f : A \to B$ y $g : C \to B$, dos funciones biyectivas. Pruebe que $g^{-1} \circ f$ es biyectiva.*

Como g es biyectiva entonces, por el resultado 2, g^{-1} es biyectiva y por el resultado 3 anterior se concluye que $g^{-1} \circ f$ es biyectiva.

B.3 La función factorial

La función factorial es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, se denota por $n!$ y se define recursivamente de la siguiente manera:
$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n\,(n-1)! \end{cases},$$
note que explícitamente $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n$.

Ejemplo 183 *Se tiene que* $1! = 1, \qquad 4! = 24, \qquad 10! = 3628\,800$

Ejemplo 184 *Simplificando la expresión* $\dfrac{2n!\,(2k)!}{(n-3)!n\,(2k+2)!}$ *se obtiene que*
$$\frac{2n!\,(2k)!}{(n-3)!n\,(2k+2)!} = \frac{2n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)!\,(2k)!}{(n-3)!n\,(2k+2)\,(2k+1)\,(2k)!} = \frac{(n-1)\,(n-2)}{(k+1)\,(2k+1)}.$$

Ejemplo 185 *Escriba en notación factorial las siguientes expresiones:*

1. $K = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)$

$$\begin{aligned} K &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

2. $J = \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3k)}$

$$J = \frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdots 2\cdot n}{3\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdots 3\cdot k} = \frac{2^n n!}{3^k k!}$$

B.4 Ejercicios

1. Simplifique las siguientes expresiones

   a) $5!$

   b) $7! - 6!$

   c) $\dfrac{100!}{98!}$

   d) $\dfrac{40!\cdot 50!}{(6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdots 43)^2}$

   e) $\dfrac{200! - 199!}{198!}$

   f) $\dfrac{\dfrac{7!}{2!5!}\cdot\dfrac{8!}{4!4!}+\dfrac{7!}{3!4!}\cdot\dfrac{8!}{3!5!}}{\dfrac{15!}{6!9!}}$

   g) $\dfrac{(2n)! + (2n+1)!}{(2n-1)!}$

   h) $\dfrac{(2k)!\cdot k!}{(2k+1)!\cdot k! - (2k)!\cdot(k+1)!}$

   i) $\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{4}(2n+i)!}{(2n+1)!}$

C Repaso de Sumas y Series

C.1 Notación de Suma

Notación 5 *Dada una función f definida para todos los enteros entre j y n, se denota la suma $f(j)+f(j+1)+f(j+2)+...+f(n)$ por:*

$$\sum_{k=j}^{n} f(k)$$

Ejemplo 186 *Note que*

$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(100)=\sum_{k=1}^{100} f(k)$$

Ejemplo 187 *Se tiene que:*

$$\sum_{k=3}^{6} k^2 = 3^2+4^2+5^2+6^2 = 86.$$

Ejemplo 188 *Calcule el valor de $\sum\limits_{i=4}^{7} \dfrac{1+i}{1-i}$.*

Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=4}^{7} \frac{1+i}{1-i} &= \frac{1+4}{1-4}+\frac{1+5}{1-5}+\frac{1+6}{1-6}+\frac{1+7}{1-7} \\
&= -\frac{5}{3}+-\frac{6}{4}+-\frac{7}{5}+-\frac{8}{6} \\
&= -\frac{59}{10}
\end{aligned}$$

Ejemplo 189 *Calcule el valor de $\sum\limits_{k=1}^{100} 3$.*

Note que

$$\sum_{k=1}^{100} 3 = \underbrace{3+3+3+...+3}_{100 \text{ veces}} = 300.$$

C.2 Propiedades de la notación de suma

Teorema 113 *(**Propiedades de la notación suma**) Sea c una constante. Dadas dos funciones f y g definidas para todos los enteros entre j y n, se tiene que:*

1. $\sum_{k=j}^{n} [\ f(k) \pm g(k)\ ] = \sum_{k=j}^{n} f(k) \pm \sum_{k=j}^{n} g(k)$.

2. $\sum_{k=j}^{n} [c \cdot f(k)] = c \cdot \sum_{k=j}^{n} f(k)$

Ejemplo 190 *Si se sabe que* $\sum_{k=1}^{100} k = 5050$, *determine el valor de* $\sum_{k=1}^{102} (3k+1)$.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{102} (3k+1) &= \sum_{k=1}^{102} (3k) + \sum_{k=1}^{102} 1 && \text{(propiedad 1)} \\
&= 3 \sum_{k=1}^{102} k + \sum_{k=1}^{102} 1 && \text{(propiedad 2)} \\
&= 3 \sum_{k=1}^{102} k + 102 \\
&= 3 \left(\sum_{k=1}^{100} k + 101 + 102 \right) + 102 \\
&= 3(5050 + 101 + 102) + 102 \\
&= 15\,861
\end{aligned}$$

C.3 Algunas sumas importantes

Teorema 114 *(Sumas importantes). Sea c una constante. Se tiene que*

1. $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. *(Suma de Gauss)*

3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. $\sum\limits_{i=0}^{n} r^i = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$. *(Suma Geométrica)*

5. $\sum\limits_{i=k}^{n} [f(i) - f(i+1)] = f(k) - f(n+1)$ *(Suma Telescópica)*

Ejemplo 191 *Calcule el valor de* $20^2 + 21^2 + 22^2 + .. + 40^2$.

Note que:

$$\begin{aligned}
20^2 + 21^2 + 22^2 + .. + 40^2 &= \sum_{i=20}^{40} i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{40} i^2 - \sum_{i=1}^{19} i^2 \\
&= \frac{40(40+1)(2\cdot 40+1)}{6} - \frac{19(19+1)(2\cdot 19+1)}{6} \\
&= 19\,670
\end{aligned}$$

Ejemplo 192 *Calcule el valor de* $\sum\limits_{i=3}^{60} (3i+1)$.

Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{60} (3i+1) &= 3\sum_{i=3}^{60} i + \sum_{i=3}^{60} 1 \\
&= 3\left(\sum_{i=1}^{60} i - 1 - 2\right) + \sum_{i=3}^{60} 1 \\
&= 3\left(\sum_{i=1}^{60} i - 3\right) + 58 \\
&= 3\left(\frac{60\cdot 61}{2} - 3\right) + 58 \\
&= 5539
\end{aligned}$$

Ejemplo 193 *Simplifique el valor de* $\sum\limits_{i=1}^{n} \left[\left(2\dfrac{i^2}{n^2} + \dfrac{i}{n} + 45\right)\dfrac{1}{n}\right]$.

Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left[\left(2\frac{i^2}{n^2}+\frac{i}{n}+45\right)\frac{1}{n}\right] &= \sum_{i=1}^{n}\left(2\frac{i^2}{n^3}+\frac{i}{n^2}+\frac{45}{n}\right)\\
&= \frac{2}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)+\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)+\frac{45}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\\
&= \frac{2}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{45}{n}\cdot n\\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}+\frac{(n+1)}{2n}+45
\end{aligned}$$

Ejemplo 194 *Determine* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i^2}{n^2}+1\right)\right]$.

Dado que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i^2}{n^2}+1\right) &= \frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{n}\cdot 1\\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+1,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i^2}{n^2}+1\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+1\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6n^2}\right)+1\\
&= \frac{2}{6}+1=\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 195 *Simplifique el valor de* $\sum\limits_{i=3}^{n} 3^i$.

Note que esta suma es Geométrica:

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{n} 3^i &= \sum_{i=0}^{n} 3^i - \left(3^0+3^1+3^2\right)\\ &= \frac{1-3^{n+1}}{1-3} - \left(3^0+3^1+3^2\right)\\ &= \frac{3^{n+1}-1}{2} - 13\\ &= \frac{3^{n+1}-27}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 196 *Calcule el valor de* $\sum\limits_{i=1}^{k} 2^{i^2}\left(2^{-i}-2^{i}\right)$

Se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{i^2}\left(2^{-i}-2^{i}\right) = \sum_{i=1}^{k}\left[2^{i(i-1)}-2^{i(i+1)}\right]$$

Si $f(i)=2^{i(i-1)}$ *entonces* $f(i+1)=2^{(i+1)i}=2^{i(i+1)}$, *por lo tanto esta suma es Telescópica:*

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{i^2}\left(2^{-i}-2^{i}\right) = \sum_{i=1}^{k}\left[f(i)-f(i+1)\right] = f(1)-f(k+1) = 2^0-2^{(k+1)k}.$$

C.4 Series

Definición 66 *Considere*

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=j}^{n} f(k)\right].$$

Si este límite existe se dice que la serie $\sum\limits_{k=j}^{\infty} f(k)$ *es convergente y su valor es el valor del límite:*

$$\sum_{k=j}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=j}^{n} f(k)\right].$$

En caso contrario, se dice que $\sum\limits_{k=j}^{\infty} f(k)$ *es divergente.*

Ejemplo 197 *Calcule, si existe, el valor de* $\sum\limits_{i=3}^{\infty} 3^i$

Dado que por el ejemplo 195 se tiene que

$$\sum_{i=3}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1} - 27}{2},$$

entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{i=3}^{n} 3^i\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1} - 27}{2} = +\infty.$$

Por lo tanto la serie $\sum\limits_{i=3}^{\infty} 3^i$ *diverge.*

Teorema 115 *(**Series importantes**) Se tiene que:*

1. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} r^i = \dfrac{1}{1-r}$, *si* $|r| < 1$. *(Serie Geométrica)*

2. $\sum\limits_{i=k}^{\infty} [f(i) - f(i+1)] = f(k) - \lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1)$ *(Serie Telescópica)*

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$ *(Serie Exponencial)*

Ejemplo 198 *Note que*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Ejemplo 199 *Se tiene que:*

$$\sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{3} - \lim_{i\to+\infty} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 200 *Note que:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = e^1 = e$$

D Repaso de derivación

D.1 Definición de derivada

Definición 67 ***(Derivada en un punto)*** *Se define la derivada de f en $x = b$ como la razón instantánea de cambio de y con respecto a x en $x = b$, y se denota por $f'(b)$. Es decir:*

$$f'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

NOTA: Así $f'(b)$ corresponde a la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = b$. Además, si f es la función posición de un objeto, entonces $f'(b)$ es la velocidad instantánea en $x = b$.

Ejemplo 201 *Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ Determine $f'(3)$*

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(3+h)^2 + b(3+h) + c - (9a + 3b + c)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{6ah + bh + ah^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6a + b + ah) = 6a + b. \end{aligned}$$

Si calculamos $f'(3)$ utilizando el otro límite, se obtiene el mismo resultado:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{ax^2 + bx + c - (9a + 3b + c)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{a\left(x^2 - 9\right) + b(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{a(x-3)(x+3) + b(x-3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)\left[a(x+3) + b\right]}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \left[a(x+3) + b\right] = 6a + b. \end{aligned}$$

Note que f es continua en 3 (¿Por qué?) y su derivada existe en 3. ¿Será que toda función continua en $x = b$ es derivable en $x = b$? El siguiente ejemplo da la respuesta.

D.2 Propiedades de derivadas

Ejemplo 202 *Sea $f(x) = c$ una función constante entonces*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Ejemplo 203 *Dado que*

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$

si $f(x) = x^n$ *entonces*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + ... + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + ... + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\right) = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1}}_{n \text{ sumados}} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

Teorema 116 *Se tiene que*

$$(c)' = 0, \quad (x)' = 1 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad y \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ejemplo 204 *Sea* $f(x) = g(x) + k(x)$, *note que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) + k(x+h) - (g(x) + k(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \frac{+k(x+h) - k(x)}{h}\right] = g'(x) + k'(x). \end{aligned}$$

Teorema 117 *(**Propiedades de las derivadas**) Sea c una constante. Si f y g son funciones derivables, entonces:*

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$

2. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$

4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$

Ejemplo 205 *Sea* $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ *entonces:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x^3\right)' + \left(3x^2\right)' \text{ (por la regla \#1)} \\ &= 2\left(x^3\right)' + 3\left(x^2\right)' \text{ (por la regla \#2)} \\ &= 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x = 6x^2 + 6x \end{aligned}$$

Ejemplo 206 *Determine la tercer derivada de* $f(x) = x^9$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^8 \\ f''(x) &= \left(9x^8\right)' = 9\left(x^8\right)' = 9 \cdot 8x^7 \\ f'''(x) &= \left(9 \cdot 8x^7\right)' = 72\left(x^7\right)' = 72 \cdot 7x^6 = 504x^6 \end{aligned}$$

Ejemplo 207 *Sea* $g(x) = (2-x)\left(x^3 - 4x^2 + 1\right)$, *note que*

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2-x)'\left(x^3-4x^2+1\right) + (2-x)\left(x^3-4x^2+1\right)' \\ &= \left[(2)' - (x)'\right]\left(x^3-4x^2+1\right) + (2-x)\left[\left(x^3\right)' - \left(4x^2\right)' + (1)'\right] \\ &= (0-1)\left(x^3-4x^2+1\right) + (2-x)\left(3x^2 - 4\cdot 2x + 0\right) \\ &= -\left(x^3-4x^2+1\right) + (2-x)\left(3x^2 - 4\cdot 2x\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 208 *Sea* $f(x) = \left(x^2+4x\right)g(x)$. *Se sabe que* $g(0) = 3$. *Determine* $f'(0)$.

Note que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2+4x\right)' g(x) + \left(x^2+4x\right) g'(x) \\ &= (2x+4)\, g(x) + \left(x^2+4x\right) g'(x), \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$f'(0) = 4g(0) + 0\cdot g'(0) = 4g(0) = 4\cdot 3 = 12.$$

Ejemplo 209 *Sea* $h(x) = \dfrac{x^2+3}{2x+1}$, *se tiene que*

$$h'(x) = \frac{\left(x^2+3\right)'(2x+1) - \left(x^2+3\right)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{2x(2x+1) - \left(x^2+3\right)\cdot 2}{(2x+1)^2}$$

Aunque la notación "$(\quad)'$" es muy práctica, no siempre es recomendable su uso. En general se utilizará esta notación cuando se tenga certeza con respecto a la variable con la que se deriva.

Teorema 118 ***(Derivadas de funciones trigonométricas)***

$$\begin{array}{cc} (\operatorname{sen} x)' = \cos x & (\cot x)' = -\csc^2 x \\ (\cos x)' = -\operatorname{sen} x & (\sec x)' = \sec x \tan x \\ (\tan x)' = \sec^2 x & (\csc x)' = -\csc x \cot x \end{array}$$

Teorema 119 ***(Derivadas de funciones exponencial y logarítmica)****Se tiene que*

$$\left(e^x\right)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

D.3 Regla de la cadena

Teorema 120 ***(Regla de la cadena)*** *Si f y g son funciones derivables entonces $f \circ g$ es derivable y además:*

$$(f \circ g(x))' = f'(g(x))\, g'(x)$$

Note que si $y = f \circ g(x)$ y $u = g(x)$, la regla de la cadena esta dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

En palabras se tiene que:

$$\underbrace{(f \circ g(x))'}_{\substack{\text{Derivada de } f \circ g(x) \\ \text{(con respecto a } x)}} = \underbrace{f'(g(x))}_{\substack{\text{Derivada de } f(u) \\ \text{(con respecto a } u) \\ \text{evaluada en } u = g(x)}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{Derivada de } g(x) \\ \text{(con respecto a } x)}}$$

Ejemplo 210 *Sea $f(m) = m^2 + 5m + 3$, note que m no es una constante por lo tanto:*

$$\frac{df}{dm} = 2m + 5, \qquad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dm} \cdot \frac{dm}{dx} = (2m+5)\frac{dm}{dx}.$$

Ejemplo 211 *Determine la derivada de $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$*

Sea $u = \frac{1}{x}$, entonces $f(x) = \sqrt{u}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot -\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \cdot -\frac{1}{x^2} = \frac{-\sqrt{x}}{2x^2}. \end{aligned}$$

En el ejemplo siguiente se muestran una derivada calculada por regla de la cadena de un forma más automatizada.

Ejemplo 212 *Note que*

$$\begin{aligned} \left[\left(x^3+4x\right)^6\right]' &= 6\left(x^3+4x\right)^5 \cdot \left(x^3+4x\right)' = 6\left(x^3+4x\right)^5 \cdot \left(3x^2+4\right) \\ \left(\sqrt{x^4+\frac{1}{x}}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x^4+\frac{1}{x}}} \cdot \left(x^4+\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^4+\frac{1}{x}}} \cdot \left(4x^3+\frac{-1}{x^2}\right) \\ \left(\sqrt[3]{x^3+3x}\right)' &= \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^3+3x\right)^2}} \cdot \left(x^3+3x\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^3+3x\right)^2}} \cdot \left(3x^2+3\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 213 *Para calcular las siguientes derivadas no se conoce $f(x)$, por lo tanto:*

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{f(x)}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) \\ \left[(f(x))^n\right]' &= n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x) \\ \left[\operatorname{sen}(f(x))\right]' &= \cos(f(x)) \cdot f'(x)\end{aligned}$$

Ejemplo 214 *Determine la derivada de $|x|$.*
Dado que $|x| = \sqrt{x^2}$ entonces utilizando la regla de la cadena se tiene que:

$$(|x|)' = \left(\sqrt{x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot \left(x^2\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}.$$

En los ejemplos no solo se uso la regla de la cadena, sino también otras reglas de derivación. ¿Cuáles? Veamos más explícitamente la combinación de estas reglas.

Ejemplo 215 *Determine la derivada de $f(x) = \sqrt[5]{x^3e^x}$*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{5\sqrt[5]{(x^3e^x)^4}} \cdot \left(x^3e^x\right)' \text{ (regla de la cadena)} \\ &= \frac{1}{5\sqrt[5]{(x^3e^x)^4}} \cdot \left[\left(x^3\right)' e^x + x^3\left(e^x\right)'\right] \text{ (regla del producto)} \\ &= \frac{1}{5\sqrt[5]{(x^3e^x)^4}} \cdot \left(3x^2e^x + x^3e^x\right)\end{aligned}$$

En los ejemplos anteriores note que la regla de cadena es la primera que se aplica. Veamos algunos ejemplos donde esto no sucede.

Ejemplo 216 *Determine la derivada de $f(x) = x^2 + \left(x^3+1\right)^5$*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2\right)' + \left(\left(x^3+1\right)^5\right)' \text{ (regla de la suma)} \\ &= 2x + 5\left(x^3+1\right)^4 \cdot \left(x^3\right)' \text{ (regla de la cadena)} \\ &= 2x + 5\left(x^3+1\right)^4 \cdot 3x^2\end{aligned}$$

Ejemplo 217 *Determine la derivada de $h(x) = \left(x^2+1\right)^3 - \left(x^3+x\right)^6$*

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left[\left(x^2+1\right)^3\right]' - \left[\left(x^3+x\right)^6\right]' \text{ (regla de la resta)} \\ &= 3\left(x^2+1\right)^2 \cdot \left(x^2+1\right)' - 6\left(x^3+x\right)^5 \cdot \left(x^3+x\right)' \text{ (regla de la cadena)} \\ &= 3\left(x^2+1\right)^2 \cdot 2x - 6\left(x^3+x\right)^5 \cdot \left(3x^2+1\right)\end{aligned}$$

Ejemplo 218 *Determine la derivada de la función exponencial* $f(x) = a^x$.

Note que $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$, *por lo tanto:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x\ln a}\right)' \\ &= e^{x\ln a} \cdot (x\ln a)' \qquad \textit{(por regla de la cadena)} \\ &= e^{x\ln a} \cdot \ln a \qquad \textit{(pues } \ln a \textit{ es constante)} \\ &= a^x \cdot \ln a. \end{aligned}$$

Teorema 121 *(**Derivada de la función exponencial y logarítmica**). La derivada de la función exponencial y logarítmica es:*

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

Ejemplo 219 *Determine la derivada de* $f(x) = e^{x^2} - \ln\left(x^2+1\right)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x^2}\right)' - \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]' \quad \textit{(regla de la resta)} \\ &= e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)' - \frac{1}{(x^2+1)} \cdot \left(x^2+1\right)' \quad \textit{(regla de la cadena)} \\ &= e^{x^2} \cdot 2x - \frac{2x}{(x^2+1)} \end{aligned}$$

D.4 Derivación logarítmica

Recordemos la regla de la cadena:

$$[\ f(g(x))\ ]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

si se denota $y = g(x)$ se obtiene que

$$[\ f(y)\ ]' = f'(y) \cdot y' \text{ o más explícitamente } \frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Ejemplo 220 *Sea* y *una variable, las siguientes derivadas son con respecto a* x :

$$\begin{aligned} \left(y^3\right)' &= 3y^2 y' \\ \left(x^2+y^2\right)' &= 2x + 2yy' \end{aligned}$$

Hemos visto como la derivación de una suma o resta es mucho más simple que la derivación de un producto o cociente. ¿Hay una forma de convertir un producto o cociente a una suma o resta?

La pregunta anterior es respondida por la función logarítmica, en particular el logaritmo natural, pues:

$$\begin{aligned}
\ln(xy) &= \ln x + \ln y \quad \text{(convierte un producto en una suma)} \\
\ln\frac{x}{y} &= \ln x - \ln y \quad \text{(convierte un cociente en una resta)} \\
\ln(x^n) &= n \cdot \ln x \quad \text{(convierte una potencia en un producto} \\
&\qquad\qquad\quad \text{de una función por una constante)}
\end{aligned}$$

Entonces si quiere hallar la derivada de $f(x) = y$ y esta función es producto o división de varias expresiones, es mejor:

1.Simplificar $\ln y$
2.Aplicar derivación implicita a la ecuación $\ln y = ...$
(recuerde que $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$)

Lo anterior nos permite, además, hallar la derivada de expresiones de la forma: $f(x)^{g(x)}$.

Ejemplo 221 *Determine la derivada de* $g(x) = \left(x^2+1\right)^{\sqrt{x}+1}$

Primero, simplifiquemos $\ln g(x) = \ln y$:

$$\ln y = \left(\sqrt{x}+1\right)\ln\left(x^2+1\right)$$

Derivando a ambos lados:

$$\begin{aligned}
(\ln y)' &= \left[(\sqrt{x}+1)\ln\left(x^2+1\right)\ \right]' \\
\Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} &= (\sqrt{x}+1)'\ln\left(x^2+1\right) + (\sqrt{x}+1)\left[\ln\left(x^2+1\right)\ \right]' \\
\Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(x^2+1\right) + (\sqrt{x}+1)\cdot\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1} \\
\Longrightarrow \quad y' &= y\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(x^2+1\right) + (\sqrt{x}+1)\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo y, *se obtiene que:*

$$y' = \left(x^2+1\right)^{\sqrt{x}+1}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(x^2+1\right) + \left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right]$$

Ejemplo 222 *Determine la derivada de* $f(x) = \dfrac{e^x \sqrt[5]{x^2+2}}{(x+2)^5 \cdot (2+x)^2}$

Primero, simplifiquemos $\ln f(x) = \ln y$:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left(e^x \sqrt[5]{x^2+2}\right) - \ln\left[(x+2)^5 \cdot (2+x)^2\right] \\
&= \ln e^x + \ln\left(\sqrt[5]{x^2+2}\right) - \left[\ln(x+2)^5 + \ln(2+x)^2\right] \\
&= x + \frac{\ln\left(x^2+2\right)}{5} - 5\ln(x+2) - 2\ln(2+x)
\end{aligned}$$

Derivando a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned}
& (\ln y)' = \left(x + \frac{\ln\left(x^2+2\right)}{5} - 5\ln(x+2) - 2\ln(2+x)\right)' \\
\Longrightarrow\quad & \frac{y'}{y} = 1 + \frac{\left(x^2+2\right)'}{5\left(x^2+2\right)} - \frac{5}{x+2} \cdot (x+2)' - \frac{2}{2+x} \\
\Longrightarrow\quad & \frac{y'}{y} = 1 + \frac{2x}{5\left(x^2+2\right)} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{2+x} \\
\Longrightarrow\quad & y' = y\left[\,1 + \frac{2x}{5\left(x^2+2\right)} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{2+x}\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo $y = f(x)$, *se obtiene que*

$$y' = \frac{e^x \sqrt[5]{x^2+2}}{(x+2)^5 \cdot (2+x)^x}\left[\,1 + \frac{2x}{5\left(x^2+2\right)} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{2+x}\right]$$

E Repaso de Integración

E.1 La Antiderivada

Ejemplo 223 *Determine tres funciones cuya derivada sea* $3x^2$.

Estas pueden ser:

$$F_1(x) = x^3, \quad F_2(x) = x^3 - 2, \quad F_3(x) = x^3 + 2\sqrt[5]{4}.$$

Lo anterior evidencia que existe infinitas función cuya derivada sea $f'(x)$.

Definición 68 *(**Antiderivada particular**) Una función* $F(x)$ *es una antiderivada particular de* $f(x)$ *si*

$$F'(x) = f(x).$$

Ejemplo 224 *Determine la familia de funciones cuya derivada es* $2x$.

Para que la derivada de una función sea $2x$*, esta de tener por fórmula* x^2 *más una constante, por ejemplo las funciones:*

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + \sqrt{2}, \quad h(x) = x^2 + \pi$$

tiene por derivada $2x$*. En general, la familia de funciones cuya derivada es* $2x$ *son todas las funciones de la forma:*

$$x^2 + c,$$

donde c *es una constante real.*

Definición 69 *(**Antiderivada**) Dada una función* $f(x)$ *se define su antiderivada (o antiderivada general) como la familia de funciones cuya derivada es* $f(x)$.

Ejemplo 225 *La antiderivada de* $2x$ *es*

$$x^2 + c.$$

Teorema 122 *(**Cálculo de la antiderivada**) Si* $F(x)$ *es una antiderivada particular de* $f(x)$ *(es decir* $F'(x) = f(x)$*), entonces la antiderivada de* $f(x)$ *es*

$$F(x) + c,$$

donde c *es una constante real cualquiera.*

Ejemplo 226 *Determine la antiderivada de* $f(x) = 2xe^{x^2}$.

Note que

$$f(x) = 2xe^{x^2} = e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)',$$

por la regla de la cadena, se tiene que:

$$f(x) = e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)' = \left(e^{x^2}\right)'.$$

Por lo tanto una antiderivada particular de $f(x)$ *es* $F(x) = e^{x^2}$. *Así la antiderivada de* $f(x) = 2xe^{x^2}$ *es*

$$F(x) + c = e^{x^2} + c.$$

Ejemplo 227 *Determine la antiderivada de* $f(x) = \dfrac{3x^2+2}{x^3+2x}$.

Note que

$$f(x) = \frac{3x^2+2}{x^3+2x} = \frac{\left(x^3+2x\right)'}{x^3+2x} = \left[\ln\left(x^3+2x\right)\right]'.$$

Por lo tanto una antiderivada particular de $f(x)$ *es* $F(x) = \ln\left(x^3+2x\right)$. *Así la antiderivada de* $f(x) = \dfrac{3x^2+2}{x^3+2x}$ *es*

$$F(x) + c = \ln\left(x^3+2x\right) + c.$$

Ejemplo 228 *Halle* $f(x)$ *si* $f'(x) = 1 - 6x$ *y* $f(0) = 8$.

Note que $f(x)$ *es una antiderivada particular de de* $f'(x)$. *Dado que*

$$f'(x) = 1 - 6x = (x)' - \left(3x^2\right)' = \left(x - 3x^2\right)',$$

entonces la antiderivada de $f'(x)$:

$$x - 3x^2 + c.$$

Así se debe hallar el valor de c que cumple que:

$$f(x) = x - 3x^2 + c,$$

como $f(0) = 8$ *entonces*

$$f(0) = 0 - 3 \cdot 0^2 + c = c = 8.$$

Por lo tanto $f(x) = x - 3x^2 + 8$.

E.2 Definición de la integral indefinida

Definición 70 *(**Integral Indefinida**) Se define la integral indefinida de $f(x)$ como la antiderivada (general) de $f(x)$ y denota por:*

$$\int f(x)\,dx.$$

Ejemplo 229 *Determine* $\int \left(x^5 + e^x - 1\right) dx$

Sea $f(x) = x^5 + e^x - 1$, note que

$$f(x) = x^5 + e^x - 1 = \left(\frac{x^6}{6}\right)' + (e^x)' - (x)' = \left(\frac{x^6}{6} + e^x - x\right)',$$

así, $F(x) = \dfrac{x^6}{6} + e^x - x$ es una antiderivada particular de $f(x)$, por lo tanto:

$$\int \left(x^5 + e^x - 1\right) dx = \frac{x^6}{6} + e^x - x + c$$

E.3 Propiedades de la integral indefinida

Teorema 123 *(**Propiedades de la integral indefinida**) Sean f y g funciones, c constante. Se cumple que:*

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
2. $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$
3. $\int [c \cdot f(x)]\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$

Ejemplo 230 *Determine* $\int x^n dx$

Sea $f(x) = x^n$, note que

$$f(x) = x^n = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'$$

Por lo tanto:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Teorema 124 ***(Tabla de Integrales indefinidas)*** *Sea b una constante, se tiene que*

$$\int 0dx = c \qquad \int \sec^2 x dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$
$$\int bdx = bx + c \qquad \int \csc^2 x dx = -\cot x + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{sen}^{-1} x + c$$
$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + c \qquad \int \sec x \tan x dx = \sec x + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + c \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$$
$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c \qquad \int e^x dx = e^x + c$$
$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c \qquad \int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + c$$

Ejemplo 231 *Determine* $\int (x+2)^3 dx$

$$\begin{aligned} \int (x+2)^3 dx &= \int \left(x^3 + 6x^2 + 12x + 8\right) dx = \int x^3 dx + 6\int x^2 dx + 12\int xdx + 8\int 1dx \\ &= \frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^2}{2} + 8x + c = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + 6x^2 + 8x + c. \end{aligned}$$

Ejemplo 232 *Determine* $\int \frac{3+x^4}{x^6} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{3-x^4}{x^6} dx &= \int \frac{3}{x^6} dx - \int \frac{x^4}{x^6} dx = 3\int x^{-6} dx - \int x^{-2} dx \\ &= 3\frac{x^{-5}}{-5} - \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{-3}{5} x^{-5} + x^{-1} + c. \end{aligned}$$

Ejemplo 233 *Determine* $\int \frac{4}{\sqrt{3-3x^2}} dx$

$$\int \frac{4}{\sqrt{3-3x^2}} dx = \int \frac{4}{\sqrt{3\left(1-x^2\right)}} dx = \frac{4}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{4}{\sqrt{3}} \arcsin x + c.$$

Ejemplo 234 *Determine* $\int \left(g'(x) \cdot 2^{g(x)} \right) dx$

Sea $f(x) = g'(x) \cdot 2^{g(x)}$, *note que*

$$f(x) = g'(x) \cdot 2^{g(x)} = 2^{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{2^{g(x)} \cdot \ln 2 \cdot g'(x)}{\ln (2)} = \left(\frac{2^{g(x)}}{\ln (2)} \right)'$$

Por lo tanto:

$$\int \left(g'(x) \cdot 2^{g(x)} \right) dx = \frac{2^{g(x)}}{\ln(2)} + c$$

E.4 Métodos de integración

E.4.1 Método de sustitución

Note que si $u = g(x)$ entonces el diferencial de u es

$$du = g'(x)\,dx,$$

entonces $\displaystyle\int f(\ g(x)\ ) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$

Teorema 125 ***(Método de sustitución)*** *Sea g una función diferenciable, si $u = g(x)$ entonces*

$$\int f(\ g(x)\ ) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

El método de sustitución realiza un cambio de variable de integración. Este, de acuerdo al teorema anterior, consiste en hallar una función $g(x)$ dentro de la expresión a integrar, de manera que $g'(x)$ **sea un factor** de dicha expresión.

Ejemplo 235 *Determine* $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+6}dx$

Note que la derivada de x^3+6 es $3x^2$. La integral se puede acomodar de manera que $3x^2$ sea un factor de la expresión a integrar:

$$\int x^2\sqrt{x^3+6}dx = \int \frac{1}{3}\sqrt{x^3+6} \cdot 3x^2dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+6} \cdot 3x^2dx$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = x^3+6 \quad \Longrightarrow \quad du = 3x^2dx$$

se obtiene

$$\frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+6} \cdot 3x^2dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c,$$

volviendo a la variable x se obtiene que:

$$\int x^2\sqrt{x^3+6}dx = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}\left(x^3+6\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

Ejemplo 236 *Determine* $\int \frac{3}{x \ln x} dx$

Note que la derivada de $\ln x$ *es* $\frac{1}{x}$*. La integral se puede acomodar de manera que* $\frac{1}{x}$ *sea un factor de la expresión a integrar:*

$$\int \frac{3}{x \ln x} dx = 3 \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = \ln x \quad \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

se obtiene

$$3 \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = 3 \int \frac{1}{u} \cdot du = 3 \ln u + c,$$

volviendo a la variable x *se obtiene que:*

$$\int \frac{3}{x \ln x} dx = 3 \ln u + c = 3 \ln (\ln x) + c.$$

Ejemplo 237 *Determine* $\int x^3 \sqrt{3x^2 + 4} dx$

Note que la derivada de $3x^2 + 4$ *es* $6x$*. La integral se puede acomodar de manera que* $6x$ *sea un factor de la expresión a integrar:*

$$\int x^3 \sqrt{3x^2 + 4} dx = \int \left(\frac{x^2}{6} \sqrt{3x^2 + 4} \cdot 6x \right) dx = \frac{1}{6} \int \left(x^2 \sqrt{3x^2 + 4} \cdot 6x \right) dx$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = 3x^2 + 4 \quad \Longrightarrow \quad du = 2x dx$$

se obtiene que $x^2 = \frac{u-4}{3}$*, por lo tanto*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \int \left(x^2 \sqrt{3x^2 + 4} \cdot 6x \right) dx &= \frac{1}{6} \int \frac{u-4}{3} \sqrt{u} du = \frac{1}{18} \int (u-4) u^{\frac{1}{2}} du \\
&= \frac{1}{18} \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 4u^{\frac{1}{2}} \right) du = \frac{1}{18} \left[\int u^{\frac{3}{2}} du - 4 \int u^{\frac{1}{2}} du \right] \\
&= \frac{1}{18} \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 4 \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] + c = \frac{1}{18} \left[\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3} u^{\frac{3}{2}} \right] + c,
\end{aligned}$$

volviendo a la variable x se obtiene que:

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{3x^2+4}dx &= \frac{1}{18}\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]+c\\ &= \frac{1}{18}\left[\frac{2}{5}\left(3x^2+4\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{8}{3}\left(3x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]+c.\end{aligned}$$

Los ejemplos siguientes muestran de una manera más ágil la integración por el método de sustitución.

Ejemplo 238 *Determine la integral de* $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx$

Sea $u = x^3+3x \Longrightarrow du = \left(3x^2+3\right)dx = 3\left(x^2+1\right)dx$, *por lo tanto:*

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx &= \frac{1}{3}\int \left[\frac{1}{x^3+3x}\cdot 3\left(x^2+1\right)\right]dx\\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du\\ &= \frac{1}{3}\ln|u|+c = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+3x\right|+c\end{aligned}$$

Ejemplo 239 *Determine la integral de* $\int x^x\left(1+\ln x\right)dx$

Como $x^x = e^{x\ln x}$, *sea* $u = x\ln x \Longrightarrow du = \left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \left(\ln x+1\right)dx$, *por lo tanto:*

$$\int x^x\left(1+\ln x\right)dx = \int e^{x\ln x}\left(1+\ln x\right)dx = \int e^u du = e^u + c = e^{x\ln x}+c.$$

Ejemplo 240 *Calcule* $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

Sea $u = f(x) \Longrightarrow du = f'(x)\,dx$, *por lo tanto:*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{f(x)}f'(x)\,dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u|+c = \ln|f(x)|+c$$

E.4.2 Método de integración por partes

Sean u y v variables en términos de x entonces

$$(uv)' = u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dx},$$

por lo tanto
$$(uv)' = \frac{udv + vdu}{dx} \quad \Longrightarrow \quad (uv)'\,dx = udv + vdu,$$
integrando a ambos lados:
$$\begin{aligned} \int (uv)'\,dx &= \int udv + \int vdu \\ \Longrightarrow \qquad uv &= \int udv + \int vdu \\ \Longrightarrow \qquad uv - \int vdu &= \int udv \end{aligned}$$

Teorema 126 *(Método de integración por partes) Se tiene que*
$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Da la integral $\int f(x)\,dx$, el método de integración por partes consiste en partir la expresión a integrar: $f(x)$, en dos partes: **u** y **dv**. De estas partes se obtiene **du** y **v**, y se aplica el teorema anterior.

Este método no resuelve la integral, sino la cambia por otra más simple o más compleja que la primera, dependiendo de la escogencia del **u** y **dv**..

Ejemplo 241 *Calcule* $\int \ln x dx$

Integrando por partes:
$$\begin{cases} u = \ln x & \Longrightarrow & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{cases},$$
se tiene que
$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

Ejemplo 242 *Calcule* $\int \left(x^2 2^x\right) dx$

Integrando por partes:
$$\begin{cases} u = x^2 & \Longrightarrow & du = 2xdx \\ dv = 2^x dx & \Longrightarrow & v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{cases},$$

se tiene que

$$\int \left(x^2 2^x\right) dx = \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \int \left(\frac{2^x}{\ln 2} \cdot 2x\right) dx = \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\int \left(2^x x\right) dx. \qquad (*)$$

Realizando de nuevo por partes la última integral con

$$\begin{cases} u = x & \Longrightarrow \quad du = dx \\ dv = 2^x dx & \Longrightarrow \quad v = \dfrac{2^x}{\ln 2} \end{cases},$$

se obtiene que $\displaystyle\int \left(2^x x\right) dx = \frac{x2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} dx = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + c$, *entonces sustituyendo en* $(*)$:

$$\int \left(x^2 2^x\right) dx = \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(\frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}\right) + c$$

Ejemplo 243 *Determine* $\displaystyle\int \left(x^3 + x\right) e^{x^2+3} dx$

Realizando la sustitución $w = x^2 + 3 \Longrightarrow dw = 2xdx$, *se obtiene que*

$$\begin{aligned} \int \left(x^3 + x\right) e^{x^2+3} dx &= \frac{1}{2}\int \left[\left(x^2 + 1\right) e^{x^2+3} \cdot 2x\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\int (w - 3 + 1) e^w dw \\ &= \frac{1}{2}\left(\int we^w dw - 2\int e^w dw\right). \qquad (*) \end{aligned}$$

Realizando la primera integral por partes con $\begin{cases} u = w & \Longrightarrow \quad du = dw \\ dv = e^w dw & \Longrightarrow \quad v = e^w \end{cases}$, *se obtiene que* $\displaystyle\int we^w dw = we^w - \int e^w dw$, *sustituyendo en* $(*)$ *se obtiene que:*

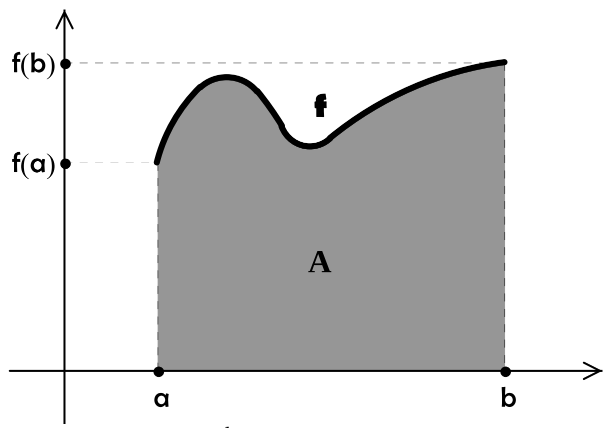
$$\begin{aligned} \int \left(x^3 + x\right) e^{x^2+3} dx &= \frac{1}{2}\left(we^w - \int e^w dw - 2\int e^w dw\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(we^w - 3\int e^w dw\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(we^w - 3e^w\right) + c \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(x^2 + 3\right) e^{x^2+3} - 3e^{x^2+3}\right) + c \end{aligned}$$

E.5 Definición intuitiva de integral definida

Definición 71 *Dada una función f no negativa y continua en $[a, b]$ se define la integral definida de a a b :*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

como el área de la región del plano limitada por las rectas verticales $x = a$, $x = b$, la función $f(x)$ y el eje X.

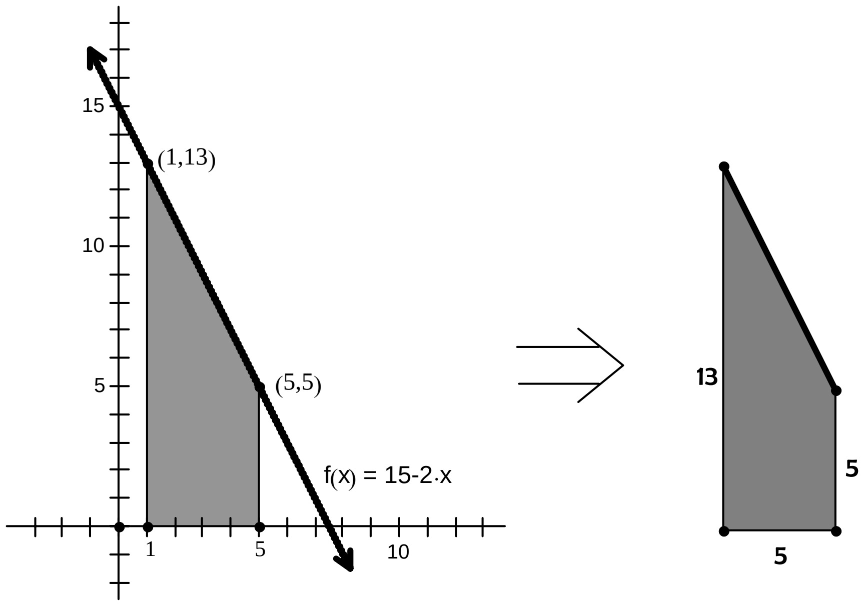


$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$

Ejemplo 244 *Determine el valor de* $\displaystyle\int_1^5 (15 - 2x)\,dx$

Sea $y = 15-2x$, *nos interesa la gráfica de esta recta en* $[1, 5]$. *Note que* $\begin{cases} x = 1 \Longrightarrow y = 13 \\ x = 5 \Longrightarrow y = 5 \end{cases}$.

Entonces esta recta pasa por los puntos $(1,13),(5,5)$:



Por lo tanto el valor de $\int_1^5 (15-2x)\,dx$ *es el área de un trapecio de bases* 5 *y* 13*, altura* $5-1=4$:

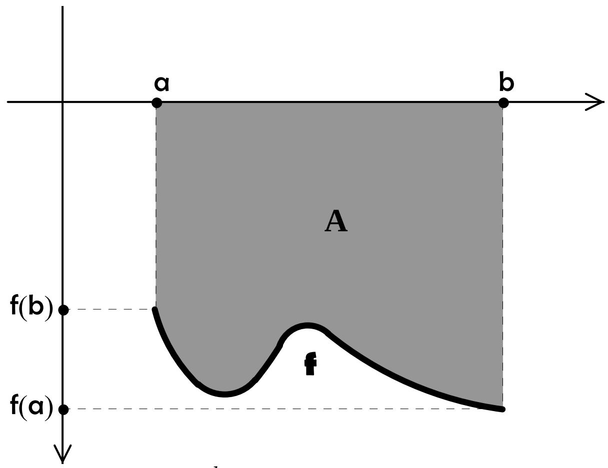
$$\int_1^5 (15-2x)\,dx = \frac{5+13}{2}\cdot 4 = 36.$$

Definición 72 *Dada una función* f *no positiva y continua en* $[a,b]$ *se define la integral definida de* a *a* b :

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

como $-A$*, donde* A *es el área de la región del plano limitada por las rectas verticales* $x=a$,

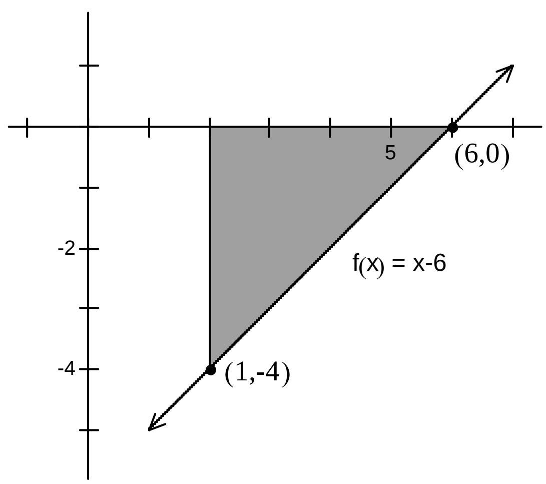
$x = b$, la función $f(x)$ y el eje X.



$$\int_a^b f(x)\,dx = -A$$

Ejemplo 245 *Determine el valor de* $\displaystyle\int_2^6 (x-6)\,dx$

La gráfica la recta $y = x - 6$ entre $x = 2$ y $x = 6$ es



Como la recta es no positiva en ese intervalo y el área de la región encerrada es $\dfrac{4\cdot 4}{2} = 8$, *entonces*

$$\int_2^6 (x-6)\,dx = -8.$$

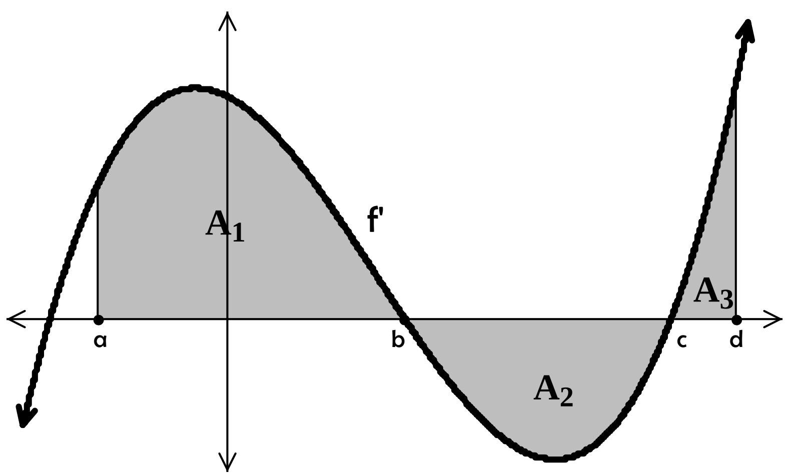
Más adelante, cuando se aborde la definición formal de la integral definida se justificará el resultado:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{para todo } c \in \left]a, b\right[.$$

Intuitivamente, este resultado tiene sentido para cuando la función es positiva ("Si c está entre a y b, entonces el área bajo la curva $y = f(x)$ de a a b es igual a la suma del área de a a c y el área de c a b¡)

En general, este resultado nos permite tener una idea intuitiva de $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando $f(x)$ es continua en $[a, b]$, pero cambia de signo en ese intervalo. ¡Véase el siguiente ejemplo¡

Ejemplo 246 *Considere la gráfica de f en $[a, d]$:*

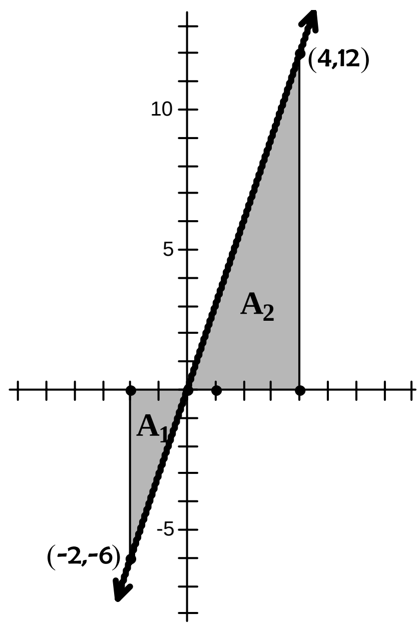


Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^d f(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx \\ &= A_1 + -A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Ejemplo 247 *Determine el valor de* $\int_{-2}^{4} (3x)\,dx$

La gráfica de $y = 3x$ *entre* $x = -2$ *y* $x = 4$ *es*



Note que A_1 *y* A_2 *son áreas de triángulos rectángulos, entonces:*

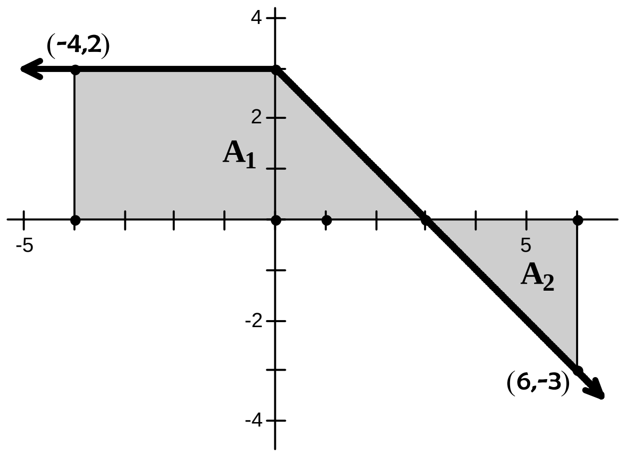
$$A_1 = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6 \quad y \quad A_2 = \frac{4 \cdot 12}{2} = 24,$$

por lo tanto:

$$\int_{-2}^{4} (3x)\, dx = \int_{-2}^{0} (3x)\, dx + \int_{0}^{4} (3x)\, dx = -A_1 + A_2 = -6 + 24 = 18.$$

Ejemplo 248 *Sea* $f(x) = \begin{cases} 3 & si \quad x < 0 \\ 3 - x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$. *Determine el valor de* $\int_{-4}^{6} f(x)\, dx.$

La gráfica de $y = f(x)$ entre $x = -4$ y $x = 6$ es



Note que A_1 es el área de un trapecio de bases 4 y 7 con altura 2, y A_2 es el área de un triángulo rectángulo. Así:

$$A_1 = \frac{4+7}{2} \cdot 2 = 11 \quad y \quad A_2 = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}.$$

Por lo tanto

$$\int_{-4}^{6} f(x)\,dx = \int_{-4}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{6} f(x)\,dx = A_1 + -A_2 = 11 - \frac{9}{2} = \frac{13}{2}.$$

E.6 El Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 127 ***(Teorema Fundamental del Cálculo #2)*** *Sea f una función continua $[a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

donde $F(x)$ es una antiderivada cualquiera de $f(x)$. En particular:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)(b) - \left(\int f(x)\,dx\right)(a).$$

Lo anterior se denota:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_a^b.$$

Lo importante de este teorema es que liga el cálculo de áreas (integral definida) con la antiderivada (integral indefinida).

Ejemplo 249 *Determine el valor de* $\int_{-1}^{3} (2x+3)^2 x^2 dx$.

Note que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} (2x+3)^2 x^2 dx &= \int_{-1}^{3} \left(4x^4 + 12x^3 + 9x^2\right) dx \\ &= \left(4\frac{x^5}{5} + 12\frac{x^4}{4} + 9\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{3} \\ &= \left(4\frac{3^5}{5} + 12\frac{3^4}{4} + 9\frac{3^3}{3}\right) - \left(4\frac{(-1)^5}{5} + 12\frac{(-1)^4}{4} + 9\frac{(-1)^3}{3}\right) \\ &= \frac{2596}{5}\end{aligned}$$

Ejemplo 250 *Determine el valor de* $\int_{-3}^{6} (x+1)\, dx$.

Note que

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{6} (x+1)\, dx &= \int (x+1)\, dx\Big|_{-3}^{6} \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x + c\right)\Big|_{-3}^{6} \\ &= \left(\frac{6^2}{2} + 6 + c\right) - \left(\frac{(-3)^2}{2} + -3 + c\right) \\ &= \frac{45}{2}.\end{aligned}$$

Note que en el ejemplo anterior la constante c se va a cancelar, esto ocurrirá siempre, por lo tanto dicha constante se suele omitir.

Ejemplo 251 *Determine el valor de* $\int_{2}^{-2} (x+1)^2 (x+3)\, dx$.

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{2}^{-2}(x+1)^2(x+3)\,dx &= \int_{2}^{-2}\left(x^3+5x^2+7x+3\right)dx \\
&= \left.\left(\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+3x\right)\right|_{2}^{-2} \\
&= \left(\frac{(-2)^4}{4}+\frac{5(-2)^3}{3}+\frac{7(-2)^2}{2}+3(-2)\right)-\left(\frac{2^4}{4}+\frac{5\cdot 2^3}{3}+\frac{7\cdot 2^2}{2}+3\cdot 2\right) \\
&= -\frac{116}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 252 *Verifique que si $c\in\mathbb{R}$ y f es continua en $\mathbb{R}$ entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \left(\int f(x)\,dx\right)(b) - \left(\int f(x)\,dx\right)(a) \\
&= \underbrace{\left(\int f(x)\,dx\right)(b)-\left(\int f(x)\,dx\right)(c)} + \underbrace{\left(\int f(x)\,dx\right)(c)-\left(\int f(x)\,dx\right)(a)} \\
&= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Teorema 128 *(**Propiedad Sumativa**) Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y $c\in\mathbb{R}$, se tiene que*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo 253 *Sea* $f(x)=\begin{cases} 2x-4 & si\quad x\le 3 \\ 2 & si\quad x>3 \end{cases}$. *Determine* $\int_0^5 f(x)\,dx$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_0^5 f(x)\,dx &= \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx \qquad \textit{(propiedad sumativa)}\\
&= \int_0^3 (2x-4)\,dx + \int_3^5 2dx\\
&= \left(\int (2x-4)\,dx\right)\Big|_0^3 + \left(2\int dx\right)\Big|_3^5\\
&= \left(x^2-4x\right)\Big|_0^3 + 2(5-3)\\
&= \left(3^2-4\cdot 3\right) - \left(0^2-4\cdot 0x\right) + 4\\
&= 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 254 *Determine* $\int_4^6 |x-5|\,dx$

Note que $|x-5| = \begin{cases} -(x-5) & si \quad x<5 \\ x-5 & si \quad x<5 \end{cases}$, *entonces*

$$\begin{aligned}
\int_4^6 |x-5|\,dx &= \int_4^5 |x-5|\,dx + \int_5^6 |x-5|\,dx \qquad \textit{(propiedad sumativa)}\\
&= \int_4^5 -(x-5)\,dx + \int_5^6 (x-5)\,dx\\
&= \left(-\frac{x^2}{2}+5x\right)\Big|_4^5 + \left(\frac{x^2}{2}-5x\right)\Big|_5^6\\
&= \left(-\frac{25}{2}+25\right) - \left(-\frac{16}{2}+20\right) + \left(\frac{36}{2}-30\right) - \left(\frac{25}{2}-25\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Ejemplo 255 *(**Cambio de variable en la Integral Definida**) Determine* $\int_1^2 \frac{x^2+2}{4}\sqrt{x^3+6x+2}dx$

Para calcular el valor de esta integral se puede aplicar directamente el Teorema fundamental del Cálculo y determinar la integral indefinida $\int \frac{x^2+2}{4}\sqrt{x^3+6x+2}dx$ *(se realiza sustitu-*

ción $u = x^3 + 6x + 2$). La otra opción es realizar el cambio de variable en la integral definida:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x^2+2}{4}\sqrt{x^3+6x+2}dx &= \frac{1}{4\cdot 3}\int_1^2 \left(3x^2+6\right)\sqrt{x^3+6x+2}dx \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{12}\int_9^{22}\sqrt{u}du = \frac{1}{12}\left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_9^{22} \\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{2\cdot 22^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2\cdot 9^{\frac{3}{2}}}{3}\right) \\
&= \tfrac{11}{9}\sqrt{22} - \tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$

*Nota: * Sea $u = x^3 + 6x + 2 \Longrightarrow du = \left(3x^2+6\right)dx,$ entonces*

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x = 1 \quad \Longrightarrow \quad u = 9 \\ \text{Si} \quad x = 2 \quad \Longrightarrow \quad u = 22 \end{cases}.$$

E.7 Integración impropia: funciones continuas sobre: $[a,+\infty[\,,\,]-\infty,b]\,,\,]-\infty,+\infty[$

Hasta el momento la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ tiene sentido si $f(x)$ es continua en $[a,b]$. ¿Qué pasa si f es discontinua en algunos valores pertenecientes a $[a,b]$? Nos interesa poder definir este tipo de integrales y también las de la forma: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Definición 73 *(**Integración en** $+\infty$) Sea f una función continua en $[a,+\infty[$. Considere*

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx.$$

Si este límite existe se dice que la integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente y su valor es el valor del límite:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx.$$

En caso contrario, se dice que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es divergente.

Definición 74 ***(Integración en*** $-\infty$*)* *Sea* f *una función continua en* $]-\infty, b]$. *Considere*

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx.$$

Si este límite existe se dice que la integral $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ *es convergente y su valor es el valor del límite:*

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx.$$

En caso contrario, se dice que $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ *es divergente.*

Ejemplo 256 *Determinar si la integral* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$ *es convergente o divergente.*

Note que $\frac{1}{x^3}$ *es una función continua en* $[1,+\infty[$. *Se tiene que*

$$\int_1^t \frac{1}{x^3}dx = \int_1^t x^{-3}dx = \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_1^t = \frac{t^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2},$$

entonces:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^3}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-1}{2t^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Como el límite existe la integral es convergente y su valor es

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 257 *Determinar si la integral* $\int_{-\infty}^{\pi/2}\operatorname{sen}(2x)\,dx$ *es convergente o divergente.*

Note que $\operatorname{sen}(2x)$ *es una función continua en* $\left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right]$. *Se tiene que*

$$\int_t^{\pi/2}\operatorname{sen}(2x)\,dx = \left.\frac{-\cos(2x)}{2}\right|_t^{\pi/2} = \frac{-\cos\pi}{2} - \frac{-\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2},$$

entonces

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^{\pi/2}\operatorname{sen}(2x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2t)}{2}\right).$$

Dado que este liímite no existe entonces la integral es divergente.

Definición 75 ***(Integración en*** $\mathbb{R}$*)* *Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Sea $c \in \mathbb{R}$, si las integrales impropias*

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx, \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

son convergentes, se define:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Ejemplo 258 *Determinar si la integral* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6}dx$ *es convergente o divergente. Si es convergente interprete el resultado de esta integral.*

1. ***Determinar si es convergente o no.*** *Note que* $\frac{1}{x^2+6}$ *es una función continua en* $\mathbb{R}$*. Debemos determinar si las integrales:*

   $$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+6}dx, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6}dx,$$

   son covergentes o no. Se tiene que

   $$\int \frac{1}{x^2+6}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2+1}dx,$$

   Sea $u = \frac{x}{\sqrt{6}} \Longrightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{6}}$*, entonces*

   $$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+6}dx &= \frac{\sqrt{6}}{6}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2+1}\frac{dx}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\int \frac{1}{u^2+1}du \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} arc\tan u + c = \frac{\sqrt{6}}{6} arc\tan\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right) + c. \end{aligned}$$

   Por lo tanto:

   $$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{1}{x^2+6}dx &= \lim_{t\to-\infty} \frac{\sqrt{6}}{6} arc\tan\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)\Big|_{t}^{0} \\ &= \lim_{t\to-\infty} \frac{\sqrt{6}}{6}\left(0 - arc\tan\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}\left(0 - \frac{-\pi}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{6}}{12}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{x^2+6}dx &= \lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{6}}{6}arc\tan\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{6}}{6}\left(arc\tan\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right)-0\right) \\
&= \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi\sqrt{6}}{12}.
\end{aligned}$$

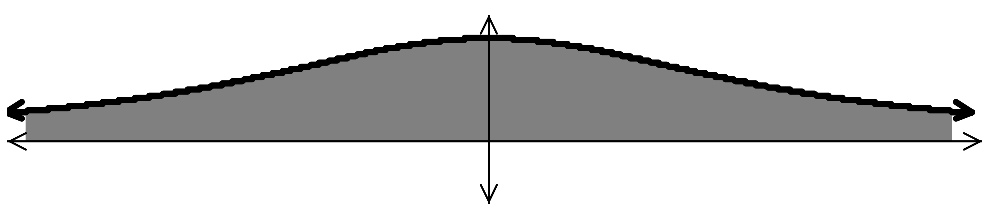
Entonces las integrales $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+6}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+6}dx$, *son convergentes y*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+6}dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{x^2+6}dx=\frac{\pi\sqrt{6}}{12}, \\
\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+6}dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{x^2+6}dx=\frac{\pi\sqrt{6}}{12}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+6}dx=\int_{-\infty}^0\frac{1}{x^2+6}dx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+6}dx=\frac{\pi\sqrt{6}}{12}+\frac{\pi\sqrt{6}}{12}=\frac{\pi\sqrt{6}}{6}.$$

2. *Interpretación del resultado. Note que la función a integrar es positiva* (>0), *por lo tanto el valor de la integral es el área de región infinita encerrada entre la curva* $y=\frac{1}{x^2+6}$ *y el eje* X :



E.8 Ejercicios

1. Determine si la $\int_0^\infty \frac{3}{x^2+2}dx$ es convergente o divergente. *R/* $\frac{3}{4}\pi\sqrt{2}$

2. ¿Para qué valores de p, la integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ es convergente? *R/* $p>1$

3. Determine el área de la región limitada por las curvas $y = \dfrac{1}{x+1}$, $x = 1$ y el eje X. $R/\ \ \frac{1}{9}\pi\sqrt{3} - \frac{1}{3}\ln 2$

F Tablas de distribuciones

Seguidamente se presenta las tablas para las siguientes distribuciones:

1. Distribución Binomial
2. Distribición de Poisson
3. Distribución Normal
4. Distribución Gamma

Distribución Acumulada de la Binomial: B(k;n,p)

n	k	p										
		0,05	**0,1**	**0,2**	**0,25**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
1	**0**	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0,4000	0,3000	0,2000	0,1000
	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	**0**	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0,1600	0,0900	0,0400	0,0100
	1	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8400	0,7500	0,6400	0,5100	0,3600	0,1900
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	**0**	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0,0640	0,0270	0,0080	0,0010
	1	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,6480	0,5000	0,3520	0,2160	0,1040	0,0280
	2	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9360	0,8750	0,7840	0,6570	0,4880	0,2710
	3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	**0**	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1296	0,0625	0,0256	0,0081	0,0016	0,0001
	1	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,4752	0,3125	0,1792	0,0837	0,0272	0,0037
	2	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8208	0,6875	0,5248	0,3483	0,1808	0,0523
	3	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9744	0,9375	0,8704	0,7599	0,5904	0,3439
	4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	**0**	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,0778	0,0313	0,0102	0,0024	0,0003	0,0000
	1	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,3370	0,1875	0,0870	0,0308	0,0067	0,0005
	2	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,6826	0,5000	0,3174	0,1631	0,0579	0,0086
	3	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9130	0,8125	0,6630	0,4718	0,2627	0,0815
	4	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9898	0,9688	0,9222	0,8319	0,6723	0,4095
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	**0**	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0467	0,0156	0,0041	0,0007	0,0001	0,0000
	1	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,2333	0,1094	0,0410	0,0109	0,0016	0,0001
	2	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,5443	0,3438	0,1792	0,0705	0,0170	0,0013
	3	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8208	0,6563	0,4557	0,2557	0,0989	0,0159
	4	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9590	0,8906	0,7667	0,5798	0,3446	0,1143
	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9959	0,9844	0,9533	0,8824	0,7379	0,4686
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	**0**	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0280	0,0078	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000
	1	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,1586	0,0625	0,0188	0,0038	0,0004	0,0000
	2	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,4199	0,2266	0,0963	0,0288	0,0047	0,0002
	3	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,7102	0,5000	0,2898	0,1260	0,0333	0,0027
	4	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9037	0,7734	0,5801	0,3529	0,1480	0,0257
	5	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9812	0,9375	0,8414	0,6706	0,4233	0,1497
	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9984	0,9922	0,9720	0,9176	0,7903	0,5217
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	**0**	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0168	0,0039	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1064	0,0352	0,0085	0,0013	0,0001	0,0000
	2	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,3154	0,1445	0,0498	0,0113	0,0012	0,0000
	3	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,5941	0,3633	0,1737	0,0580	0,0104	0,0004
	4	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,8263	0,6367	0,4059	0,1941	0,0563	0,0050
	5	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9502	0,8555	0,6846	0,4482	0,2031	0,0381
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9915	0,9648	0,8936	0,7447	0,4967	0,1869
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9961	0,9832	0,9424	0,8322	0,5695
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Distribución Acumulada de la Binomial: B(k;n,p)

n	k	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
9	**0**	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0101	0,0020	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,0705	0,0195	0,0038	0,0004	0,0000	0,0000
	2	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,2318	0,0898	0,0250	0,0043	0,0003	0,0000
	3	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,4826	0,2539	0,0994	0,0253	0,0031	0,0001
	4	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,7334	0,5000	0,2666	0,0988	0,0196	0,0009
	5	1,0000	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9006	0,7461	0,5174	0,2703	0,0856	0,0083
	6	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9750	0,9102	0,7682	0,5372	0,2618	0,0530
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9962	0,9805	0,9295	0,8040	0,5638	0,2252
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980	0,9899	0,9596	0,8658	0,6126
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	**0**	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0060	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0464	0,0107	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000
	2	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,1673	0,0547	0,0123	0,0016	0,0001	0,0000
	3	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,3823	0,1719	0,0548	0,0106	0,0009	0,0000
	4	0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,6331	0,3770	0,1662	0,0473	0,0064	0,0001
	5	1,0000	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,8338	0,6230	0,3669	0,1503	0,0328	0,0016
	6	1,0000	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9452	0,8281	0,6177	0,3504	0,1209	0,0128
	7	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9877	0,9453	0,8327	0,6172	0,3222	0,0702
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9893	0,9536	0,8507	0,6242	0,2639
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	0,9940	0,9718	0,8926	0,6513
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	**0**	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0036	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0302	0,0059	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,1189	0,0327	0,0059	0,0006	0,0000	0,0000
	3	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,2963	0,1133	0,0293	0,0043	0,0002	0,0000
	4	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,5328	0,2744	0,0994	0,0216	0,0020	0,0000
	5	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,7535	0,5000	0,2465	0,0782	0,0117	0,0003
	6	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9006	0,7256	0,4672	0,2103	0,0504	0,0028
	7	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9707	0,8867	0,7037	0,4304	0,1611	0,0185
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9941	0,9673	0,8811	0,6873	0,3826	0,0896
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9941	0,9698	0,8870	0,6779	0,3026
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9964	0,9802	0,9141	0,6862
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	**0**	0,5404	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8816	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0196	0,0032	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9804	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,0834	0,0193	0,0028	0,0002	0,0000	0,0000
	3	0,9978	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,2253	0,0730	0,0153	0,0017	0,0001	0,0000
	4	0,9998	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,4382	0,1938	0,0573	0,0095	0,0006	0,0000
	5	1,0000	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,6652	0,3872	0,1582	0,0386	0,0039	0,0001
	6	1,0000	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,8418	0,6128	0,3348	0,1178	0,0194	0,0005
	7	1,0000	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9427	0,8062	0,5618	0,2763	0,0726	0,0043
	8	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9847	0,9270	0,7747	0,5075	0,2054	0,0256
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9972	0,9807	0,9166	0,7472	0,4417	0,1109
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9968	0,9804	0,9150	0,7251	0,3410
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9862	0,9313	0,7176
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Distribución Acumulada de la Binomial: B(k;n,p)

n	k	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
13	**0**	0,5133	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8646	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0126	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9755	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,0579	0,0112	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000
	3	0,9969	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,1686	0,0461	0,0078	0,0007	0,0000	0,0000
	4	0,9997	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,3530	0,1334	0,0321	0,0040	0,0002	0,0000
	5	1,0000	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,5744	0,2905	0,0977	0,0182	0,0012	0,0000
	6	1,0000	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,7712	0,5000	0,2288	0,0624	0,0070	0,0001
	7	1,0000	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9023	0,7095	0,4256	0,1654	0,0300	0,0009
	8	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9679	0,8666	0,6470	0,3457	0,0991	0,0065
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9922	0,9539	0,8314	0,5794	0,2527	0,0342
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9888	0,9421	0,7975	0,4983	0,1339
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9874	0,9363	0,7664	0,3787
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9903	0,9450	0,7458
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
14	**0**	0,4877	0,2288	0,0440	0,0178	0,0068	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8470	0,5846	0,1979	0,1010	0,0475	0,0081	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9699	0,8416	0,4481	0,2811	0,1608	0,0398	0,0065	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9958	0,9559	0,6982	0,5213	0,3552	0,1243	0,0287	0,0039	0,0002	0,0000	0,0000
	4	0,9996	0,9908	0,8702	0,7415	0,5842	0,2793	0,0898	0,0175	0,0017	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9985	0,9561	0,8883	0,7805	0,4859	0,2120	0,0583	0,0083	0,0004	0,0000
	6	1,0000	0,9998	0,9884	0,9617	0,9067	0,6925	0,3953	0,1501	0,0315	0,0024	0,0000
	7	1,0000	1,0000	0,9976	0,9897	0,9685	0,8499	0,6047	0,3075	0,0933	0,0116	0,0002
	8	1,0000	1,0000	0,9996	0,9978	0,9917	0,9417	0,7880	0,5141	0,2195	0,0439	0,0015
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9983	0,9825	0,9102	0,7207	0,4158	0,1298	0,0092
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9961	0,9713	0,8757	0,6448	0,3018	0,0441
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9935	0,9602	0,8392	0,5519	0,1584
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9919	0,9525	0,8021	0,4154
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9932	0,9560	0,7712
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
15	**0**	0,4633	0,2059	0,0352	0,0134	0,0047	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8290	0,5490	0,1671	0,0802	0,0353	0,0052	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9638	0,8159	0,3980	0,2361	0,1268	0,0271	0,0037	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9945	0,9444	0,6482	0,4613	0,2969	0,0905	0,0176	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000
	4	0,9994	0,9873	0,8358	0,6865	0,5155	0,2173	0,0592	0,0093	0,0007	0,0000	0,0000
	5	0,9999	0,9978	0,9389	0,8516	0,7216	0,4032	0,1509	0,0338	0,0037	0,0001	0,0000
	6	1,0000	0,9997	0,9819	0,9434	0,8689	0,6098	0,3036	0,0950	0,0152	0,0008	0,0000
	7	1,0000	1,0000	0,9958	0,9827	0,9500	0,7869	0,5000	0,2131	0,0500	0,0042	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9992	0,9958	0,9848	0,9050	0,6964	0,3902	0,1311	0,0181	0,0003
	9	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9963	0,9662	0,8491	0,5968	0,2784	0,0611	0,0022
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9907	0,9408	0,7827	0,4845	0,1642	0,0127
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9824	0,9095	0,7031	0,3518	0,0556
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9963	0,9729	0,8732	0,6020	0,1841
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9948	0,9647	0,8329	0,4510
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9953	0,9648	0,7941
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Distribución Acumulada de la Binomial: B(k;n,p)

		p										
n	**k**	**0,05**	**0,1**	**0,2**	**0,25**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
16	**0**	0,4401	0,1853	0,0281	0,0100	0,0033	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8108	0,5147	0,1407	0,0635	0,0261	0,0033	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9571	0,7892	0,3518	0,1971	0,0994	0,0183	0,0021	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9930	0,9316	0,5981	0,4050	0,2459	0,0651	0,0106	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9991	0,9830	0,7982	0,6302	0,4499	0,1666	0,0384	0,0049	0,0003	0,0000	0,0000
	5	0,9999	0,9967	0,9183	0,8103	0,6598	0,3288	0,1051	0,0191	0,0016	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9995	0,9733	0,9204	0,8247	0,5272	0,2272	0,0583	0,0071	0,0002	0,0000
	7	1,0000	0,9999	0,9930	0,9729	0,9256	0,7161	0,4018	0,1423	0,0257	0,0015	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9985	0,9925	0,9743	0,8577	0,5982	0,2839	0,0744	0,0070	0,0001
	9	1,0000	1,0000	0,9998	0,9984	0,9929	0,9417	0,7728	0,4728	0,1753	0,0267	0,0005
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9809	0,8949	0,6712	0,3402	0,0817	0,0033
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9951	0,9616	0,8334	0,5501	0,2018	0,0170
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9894	0,9349	0,7541	0,4019	0,0684
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9979	0,9817	0,9006	0,6482	0,2108
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967	0,9739	0,8593	0,4853
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967	0,9719	0,8147
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
17	**0**	0,4181	0,1668	0,0225	0,0075	0,0023	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7922	0,4818	0,1182	0,0501	0,0193	0,0021	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9497	0,7618	0,3096	0,1637	0,0774	0,0123	0,0012	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9912	0,9174	0,5489	0,3530	0,2019	0,0464	0,0064	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9988	0,9779	0,7582	0,5739	0,3887	0,1260	0,0245	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000
	5	0,9999	0,9953	0,8943	0,7653	0,5968	0,2639	0,0717	0,0106	0,0007	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9992	0,9623	0,8929	0,7752	0,4478	0,1662	0,0348	0,0032	0,0001	0,0000
	7	1,0000	0,9999	0,9891	0,9598	0,8954	0,6405	0,3145	0,0919	0,0127	0,0005	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9974	0,9876	0,9597	0,8011	0,5000	0,1989	0,0403	0,0026	0,0000
	9	1,0000	1,0000	0,9995	0,9969	0,9873	0,9081	0,6855	0,3595	0,1046	0,0109	0,0001
	10	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9968	0,9652	0,8338	0,5522	0,2248	0,0377	0,0008
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9894	0,9283	0,7361	0,4032	0,1057	0,0047
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9975	0,9755	0,8740	0,6113	0,2418	0,0221
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9936	0,9536	0,7981	0,4511	0,0826
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9988	0,9877	0,9226	0,6904	0,2382
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9979	0,9807	0,8818	0,5182
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9977	0,9775	0,8332
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
18	**0**	0,3972	0,1501	0,0180	0,0056	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7735	0,4503	0,0991	0,0395	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9419	0,7338	0,2713	0,1353	0,0600	0,0082	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9891	0,9018	0,5010	0,3057	0,1646	0,0328	0,0038	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9985	0,9718	0,7164	0,5187	0,3327	0,0942	0,0154	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9998	0,9936	0,8671	0,7175	0,5344	0,2088	0,0481	0,0058	0,0003	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9988	0,9487	0,8610	0,7217	0,3743	0,1189	0,0203	0,0014	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9998	0,9837	0,9431	0,8593	0,5634	0,2403	0,0576	0,0061	0,0002	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9957	0,9807	0,9404	0,7368	0,4073	0,1347	0,0210	0,0009	0,0000
	9	1,0000	1,0000	0,9991	0,9946	0,9790	0,8653	0,5927	0,2632	0,0596	0,0043	0,0000

Distribución Acumulada de la Binomial: B(k;n,p)

n	k	p										
		0,05	**0,1**	**0,2**	**0,25**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
18	**10**	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9939	0,9424	0,7597	0,4366	0,1407	0,0163	0,0002
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9986	0,9797	0,8811	0,6257	0,2783	0,0513	0,0012
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9942	0,9519	0,7912	0,4656	0,1329	0,0064
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987	0,9846	0,9058	0,6673	0,2836	0,0282
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9962	0,9672	0,8354	0,4990	0,0982
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9918	0,9400	0,7287	0,2662
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9858	0,9009	0,5497
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9820	0,8499
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
19	**0**	0,3774	0,1351	0,0144	0,0042	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7547	0,4203	0,0829	0,0310	0,0104	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9335	0,7054	0,2369	0,1113	0,0462	0,0055	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9868	0,8850	0,4551	0,2631	0,1332	0,0230	0,0022	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9980	0,9648	0,6733	0,4654	0,2822	0,0696	0,0096	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9998	0,9914	0,8369	0,6678	0,4739	0,1629	0,0318	0,0031	0,0001	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9983	0,9324	0,8251	0,6655	0,3081	0,0835	0,0116	0,0006	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9997	0,9767	0,9225	0,8180	0,4878	0,1796	0,0352	0,0028	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9933	0,9713	0,9161	0,6675	0,3238	0,0885	0,0105	0,0003	0,0000
	9	1,0000	1,0000	0,9984	0,9911	0,9674	0,8139	0,5000	0,1861	0,0326	0,0016	0,0000
	10	1,0000	1,0000	0,9997	0,9977	0,9895	0,9115	0,6762	0,3325	0,0839	0,0067	0,0000
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9972	0,9648	0,8204	0,5122	0,1820	0,0233	0,0003
	12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9884	0,9165	0,6919	0,3345	0,0676	0,0017
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9682	0,8371	0,5261	0,1631	0,0086
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9904	0,9304	0,7178	0,3267	0,0352
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9978	0,9770	0,8668	0,5449	0,1150
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9945	0,9538	0,7631	0,2946
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9896	0,9171	0,5797
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9989	0,9856	0,8649
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	**0**	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0036	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0160	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,2500	0,0577	0,0065	0,0003	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,4159	0,1316	0,0210	0,0013	0,0000	0,0000
	8	1,0000	0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,5956	0,2517	0,0565	0,0051	0,0001	0,0000
	9	1,0000	1,0000	0,9974	0,9861	0,9520	0,7553	0,4119	0,1275	0,0171	0,0006	0,0000
	10	1,0000	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,8725	0,5881	0,2447	0,0480	0,0026	0,0000
	11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9435	0,7483	0,4044	0,1133	0,0100	0,0001
	12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9790	0,8684	0,5841	0,2277	0,0321	0,0004
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423	0,7500	0,3920	0,0867	0,0024
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9984	0,9793	0,8744	0,5836	0,1958	0,0113
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9941	0,9490	0,7625	0,3704	0,0432

Distribución Acumulada de la Binomial: B(k;n,p)

		p										
n	**k**	**0,05**	**0,1**	**0,2**	**0,25**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
20	**16**	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987	0,9840	0,8929	0,5886	0,1330
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9964	0,9645	0,7939	0,3231
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9924	0,9308	0,6083
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9885	0,8784
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
21	**0**	0,3406	0,1094	0,0092	0,0024	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7170	0,3647	0,0576	0,0190	0,0056	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9151	0,6484	0,1787	0,0745	0,0271	0,0024	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9811	0,8480	0,3704	0,1917	0,0856	0,0110	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9968	0,9478	0,5860	0,3674	0,1984	0,0370	0,0036	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9996	0,9856	0,7693	0,5666	0,3627	0,0957	0,0133	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9967	0,8915	0,7436	0,5505	0,2002	0,0392	0,0036	0,0001	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9994	0,9569	0,8701	0,7230	0,3495	0,0946	0,0123	0,0006	0,0000	0,0000
	8	1,0000	0,9999	0,9856	0,9439	0,8523	0,5237	0,1917	0,0352	0,0024	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	0,9959	0,9794	0,9324	0,6914	0,3318	0,0849	0,0087	0,0002	0,0000
	10	1,0000	1,0000	0,9990	0,9936	0,9736	0,8256	0,5000	0,1744	0,0264	0,0010	0,0000
	11	1,0000	1,0000	0,9998	0,9983	0,9913	0,9151	0,6682	0,3086	0,0676	0,0041	0,0000
	12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9976	0,9648	0,8083	0,4763	0,1477	0,0144	0,0001
	13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9877	0,9054	0,6505	0,2770	0,0431	0,0006
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9964	0,9608	0,7998	0,4495	0,1085	0,0033
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9867	0,9043	0,6373	0,2307	0,0144
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9964	0,9630	0,8016	0,4140	0,0522
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9890	0,9144	0,6296	0,1520
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9729	0,8213	0,3516
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9944	0,9424	0,6353
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9908	0,8906
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
22	**0**	0,3235	0,0985	0,0074	0,0018	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,6982	0,3392	0,0480	0,0149	0,0041	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9052	0,6200	0,1545	0,0606	0,0207	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9778	0,8281	0,3320	0,1624	0,0681	0,0076	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9960	0,9379	0,5429	0,3235	0,1645	0,0266	0,0022	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9994	0,9818	0,7326	0,5168	0,3134	0,0722	0,0085	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9999	0,9956	0,8670	0,6994	0,4942	0,1584	0,0262	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9991	0,9439	0,8385	0,6713	0,2898	0,0669	0,0070	0,0002	0,0000	0,0000
	8	1,0000	0,9999	0,9799	0,9254	0,8135	0,4540	0,1431	0,0215	0,0011	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	0,9939	0,9705	0,9084	0,6244	0,2617	0,0551	0,0043	0,0001	0,0000
	10	1,0000	1,0000	0,9984	0,9900	0,9613	0,7720	0,4159	0,1207	0,0140	0,0003	0,0000
	11	1,0000	1,0000	0,9997	0,9971	0,9860	0,8793	0,5841	0,2280	0,0387	0,0016	0,0000
	12	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9957	0,9449	0,7383	0,3756	0,0916	0,0061	0,0000
	13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9989	0,9785	0,8569	0,5460	0,1865	0,0201	0,0001
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9930	0,9331	0,7102	0,3287	0,0561	0,0009
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9981	0,9738	0,8416	0,5058	0,1330	0,0044
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9915	0,9278	0,6866	0,2674	0,0182
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9978	0,9734	0,8355	0,4571	0,0621

Distribución Acumulada de la Binomial: B(k;n,p)

		p										
n	**k**	**0,05**	**0,1**	**0,2**	**0,25**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
22	**18**	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9924	0,9319	0,6680	0,1719
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9793	0,8455	0,3800
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9959	0,9520	0,6608
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9926	0,9015
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
23	**0**	0,3074	0,0886	0,0059	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,6794	0,3151	0,0398	0,0116	0,0030	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,8948	0,5920	0,1332	0,0492	0,0157	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9742	0,8073	0,2965	0,1370	0,0538	0,0052	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9951	0,9269	0,5007	0,2832	0,1356	0,0190	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9992	0,9774	0,6947	0,4685	0,2688	0,0540	0,0053	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9999	0,9942	0,8402	0,6537	0,4399	0,1240	0,0173	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9988	0,9285	0,8037	0,6181	0,2373	0,0466	0,0040	0,0001	0,0000	0,0000
	8	1,0000	0,9998	0,9727	0,9037	0,7709	0,3884	0,1050	0,0128	0,0005	0,0000	0,0000
	9	1,0000	1,0000	0,9911	0,9592	0,8799	0,5562	0,2024	0,0349	0,0021	0,0000	0,0000
	10	1,0000	1,0000	0,9975	0,9851	0,9454	0,7129	0,3388	0,0813	0,0072	0,0001	0,0000
	11	1,0000	1,0000	0,9994	0,9954	0,9786	0,8364	0,5000	0,1636	0,0214	0,0006	0,0000
	12	1,0000	1,0000	0,9999	0,9988	0,9928	0,9187	0,6612	0,2871	0,0546	0,0025	0,0000
	13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9979	0,9651	0,7976	0,4438	0,1201	0,0089	0,0000
	14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9872	0,8950	0,6116	0,2291	0,0273	0,0002
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9960	0,9534	0,7627	0,3819	0,0715	0,0012
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9827	0,8760	0,5601	0,1598	0,0058
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9947	0,9460	0,7312	0,3053	0,0226
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987	0,9810	0,8644	0,4993	0,0731
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9948	0,9462	0,7035	0,1927
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9843	0,8668	0,4080
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9970	0,9602	0,6849
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9941	0,9114
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
24	**0**	0,2920	0,0798	0,0047	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,6608	0,2925	0,0331	0,0090	0,0022	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,8841	0,5643	0,1145	0,0398	0,0119	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9702	0,7857	0,2639	0,1150	0,0424	0,0035	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9940	0,9149	0,4599	0,2466	0,1111	0,0134	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9990	0,9723	0,6559	0,4222	0,2288	0,0400	0,0033	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9999	0,9925	0,8111	0,6074	0,3886	0,0960	0,0113	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9983	0,9108	0,7662	0,5647	0,1919	0,0320	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000
	8	1,0000	0,9997	0,9638	0,8787	0,7250	0,3279	0,0758	0,0075	0,0002	0,0000	0,0000
	9	1,0000	0,9999	0,9874	0,9453	0,8472	0,4891	0,1537	0,0217	0,0010	0,0000	0,0000
	10	1,0000	1,0000	0,9962	0,9787	0,9258	0,6502	0,2706	0,0535	0,0036	0,0000	0,0000
	11	1,0000	1,0000	0,9990	0,9928	0,9686	0,7870	0,4194	0,1143	0,0115	0,0002	0,0000
	12	1,0000	1,0000	0,9998	0,9979	0,9885	0,8857	0,5806	0,2130	0,0314	0,0010	0,0000
	13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9964	0,9465	0,7294	0,3498	0,0742	0,0038	0,0000
	14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	0,9783	0,8463	0,5109	0,1528	0,0126	0,0001
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9925	0,9242	0,6721	0,2750	0,0362	0,0003

Distribución Acumulada de la Binomial: B(k;n,p)

n	k	p										
		0,05	**0,1**	**0,2**	**0,25**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**
24	**16**	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9978	0,9680	0,8081	0,4353	0,0892	0,0017
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9887	0,9040	0,6114	0,1889	0,0075
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9967	0,9600	0,7712	0,3441	0,0277
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9866	0,8889	0,5401	0,0851
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9965	0,9576	0,7361	0,2143
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9881	0,8855	0,4357
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9978	0,9669	0,7075
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9202
	24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	**0**	0,2774	0,0718	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,6424	0,2712	0,0274	0,0070	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,8729	0,5371	0,0982	0,0321	0,0090	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9659	0,7636	0,2340	0,0962	0,0332	0,0024	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9928	0,9020	0,4207	0,2137	0,0905	0,0095	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9988	0,9666	0,6167	0,3783	0,1935	0,0294	0,0020	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9998	0,9905	0,7800	0,5611	0,3407	0,0736	0,0073	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9977	0,8909	0,7265	0,5118	0,1536	0,0216	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	8	1,0000	0,9995	0,9532	0,8506	0,6769	0,2735	0,0539	0,0043	0,0001	0,0000	0,0000
	9	1,0000	0,9999	0,9827	0,9287	0,8106	0,4246	0,1148	0,0132	0,0005	0,0000	0,0000
	10	1,0000	1,0000	0,9944	0,9703	0,9022	0,5858	0,2122	0,0344	0,0018	0,0000	0,0000
	11	1,0000	1,0000	0,9985	0,9893	0,9558	0,7323	0,3450	0,0778	0,0060	0,0001	0,0000
	12	1,0000	1,0000	0,9996	0,9966	0,9825	0,8462	0,5000	0,1538	0,0175	0,0004	0,0000
	13	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9940	0,9222	0,6550	0,2677	0,0442	0,0015	0,0000
	14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9982	0,9656	0,7878	0,4142	0,0978	0,0056	0,0000
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9868	0,8852	0,5754	0,1894	0,0173	0,0001
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9957	0,9461	0,7265	0,3231	0,0468	0,0005
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9784	0,8464	0,4882	0,1091	0,0023
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9927	0,9264	0,6593	0,2200	0,0095
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9980	0,9706	0,8065	0,3833	0,0334
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9905	0,9095	0,5793	0,0980
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9668	0,7660	0,2364
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9910	0,9018	0,4629
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9726	0,7288
	24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9962	0,9282
	25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Distribución Acumulada de Poisson: $P(k;\lambda)$

	$\mu = \lambda$										
k	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1**	**1,5**
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,2231
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358	0,5578
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197	0,8088
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810	0,9344
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963	0,9814
5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9955
6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991
7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	$\mu = \lambda$										
k	**2**	**2,5**	**3**	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**	**5,5**	**6**	**6,5**	**7**
0	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009
1	0,4060	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,0611	0,0404	0,0266	0,0174	0,0113	0,0073
2	0,6767	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,1736	0,1247	0,0884	0,0620	0,0430	0,0296
3	0,8571	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,3423	0,2650	0,2017	0,1512	0,1118	0,0818
4	0,9473	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,5321	0,4405	0,3575	0,2851	0,2237	0,1730
5	0,9834	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	0,7029	0,6160	0,5289	0,4457	0,3690	0,3007
6	0,9955	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,8311	0,7622	0,6860	0,6063	0,5265	0,4497
7	0,9989	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9134	0,8666	0,8095	0,7440	0,6728	0,5987
8	0,9998	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9597	0,9319	0,8944	0,8472	0,7916	0,7291
9	1,0000	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9829	0,9682	0,9462	0,9161	0,8774	0,8305
10	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9933	0,9863	0,9747	0,9574	0,9332	0,9015
11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	0,9976	0,9945	0,9890	0,9799	0,9661	0,9467
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980	0,9955	0,9912	0,9840	0,9730
13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9993	0,9983	0,9964	0,9929	0,9872
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9994	0,9986	0,9970	0,9943
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9988	0,9976
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9990
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

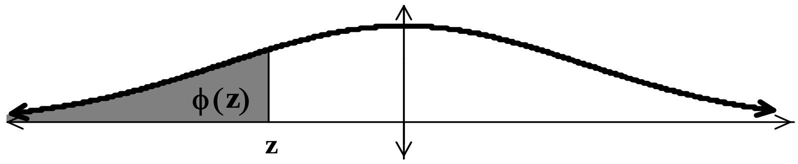
Distribución Acumulada de Poisson: P(k;λ)

	μ = λ										
k	**7,5**	**8**	**8,5**	**9**	**9,5**	**10**	**10,5**	**11**	**11,5**	**12**	**12,5**
0	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0047	0,0030	0,0019	0,0012	0,0008	0,0005	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
2	0,0203	0,0138	0,0093	0,0062	0,0042	0,0028	0,0018	0,0012	0,0008	0,0005	0,0003
3	0,0591	0,0424	0,0301	0,0212	0,0149	0,0103	0,0071	0,0049	0,0034	0,0023	0,0016
4	0,1321	0,0996	0,0744	0,0550	0,0403	0,0293	0,0211	0,0151	0,0107	0,0076	0,0053
5	0,2414	0,1912	0,1496	0,1157	0,0885	0,0671	0,0504	0,0375	0,0277	0,0203	0,0148
6	0,3782	0,3134	0,2562	0,2068	0,1649	0,1301	0,1016	0,0786	0,0603	0,0458	0,0346
7	0,5246	0,4530	0,3856	0,3239	0,2687	0,2202	0,1785	0,1432	0,1137	0,0895	0,0698
8	0,6620	0,5925	0,5231	0,4557	0,3918	0,3328	0,2794	0,2320	0,1906	0,1550	0,1249
9	0,7764	0,7166	0,6530	0,5874	0,5218	0,4579	0,3971	0,3405	0,2888	0,2424	0,2014
10	0,8622	0,8159	0,7634	0,7060	0,6453	0,5830	0,5207	0,4599	0,4017	0,3472	0,2971
11	0,9208	0,8881	0,8487	0,8030	0,7520	0,6968	0,6387	0,5793	0,5198	0,4616	0,4058
12	0,9573	0,9362	0,9091	0,8758	0,8364	0,7916	0,7420	0,6887	0,6329	0,5760	0,5190
13	0,9784	0,9658	0,9486	0,9261	0,8981	0,8645	0,8253	0,7813	0,7330	0,6815	0,6278
14	0,9897	0,9827	0,9726	0,9585	0,9400	0,9165	0,8879	0,8540	0,8153	0,7720	0,7250
15	0,9954	0,9918	0,9862	0,9780	0,9665	0,9513	0,9317	0,9074	0,8783	0,8444	0,8060
16	0,9980	0,9963	0,9934	0,9889	0,9823	0,9730	0,9604	0,9441	0,9236	0,8987	0,8693
17	0,9992	0,9984	0,9970	0,9947	0,9911	0,9857	0,9781	0,9678	0,9542	0,9370	0,9158
18	0,9997	0,9993	0,9987	0,9976	0,9957	0,9928	0,9885	0,9823	0,9738	0,9626	0,9481
19	0,9999	0,9997	0,9995	0,9989	0,9980	0,9965	0,9942	0,9907	0,9857	0,9787	0,9694
20	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9991	0,9984	0,9972	0,9953	0,9925	0,9884	0,9827
21	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993	0,9987	0,9977	0,9962	0,9939	0,9906
22	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9994	0,9990	0,9982	0,9970	0,9951
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9995	0,9992	0,9985	0,9975
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993	0,9988
25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
26	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997
27	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999
28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
29	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Distribución Acumulada de Poisson: $P(k;\lambda)$

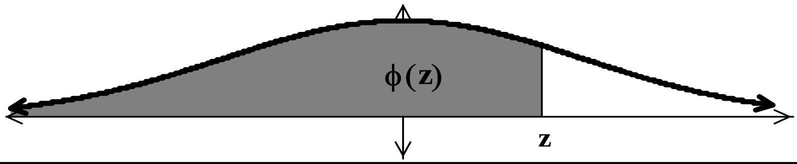
	$\mu = \lambda$										
k	**13**	**13,5**	**14**	**14,5**	**15**	**15,5**	**16**	**16,5**	**17**	**17,5**	**18**
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0011	0,0007	0,0005	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0037	0,0026	0,0018	0,0012	0,0009	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
5	0,0107	0,0077	0,0055	0,0039	0,0028	0,0020	0,0014	0,0010	0,0007	0,0005	0,0003
6	0,0259	0,0193	0,0142	0,0105	0,0076	0,0055	0,0040	0,0029	0,0021	0,0015	0,0010
7	0,0540	0,0415	0,0316	0,0239	0,0180	0,0135	0,0100	0,0074	0,0054	0,0040	0,0029
8	0,0998	0,0790	0,0621	0,0484	0,0374	0,0288	0,0220	0,0167	0,0126	0,0095	0,0071
9	0,1658	0,1353	0,1094	0,0878	0,0699	0,0552	0,0433	0,0337	0,0261	0,0201	0,0154
10	0,2517	0,2112	0,1757	0,1449	0,1185	0,0961	0,0774	0,0619	0,0491	0,0387	0,0304
11	0,3532	0,3045	0,2600	0,2201	0,1848	0,1538	0,1270	0,1041	0,0847	0,0684	0,0549
12	0,4631	0,4093	0,3585	0,3111	0,2676	0,2283	0,1931	0,1621	0,1350	0,1116	0,0917
13	0,5730	0,5182	0,4644	0,4125	0,3632	0,3171	0,2745	0,2357	0,2009	0,1699	0,1426
14	0,6751	0,6233	0,5704	0,5176	0,4657	0,4154	0,3675	0,3225	0,2808	0,2426	0,2081
15	0,7636	0,7178	0,6694	0,6192	0,5681	0,5170	0,4667	0,4180	0,3715	0,3275	0,2867
16	0,8355	0,7975	0,7559	0,7112	0,6641	0,6154	0,5660	0,5165	0,4677	0,4204	0,3751
17	0,8905	0,8609	0,8272	0,7897	0,7489	0,7052	0,6593	0,6120	0,5640	0,5160	0,4686
18	0,9302	0,9084	0,8826	0,8530	0,8195	0,7825	0,7423	0,6996	0,6550	0,6089	0,5622
19	0,9573	0,9421	0,9235	0,9012	0,8752	0,8455	0,8122	0,7757	0,7363	0,6945	0,6509
20	0,9750	0,9649	0,9521	0,9362	0,9170	0,8944	0,8682	0,8385	0,8055	0,7694	0,7307
21	0,9859	0,9796	0,9712	0,9604	0,9469	0,9304	0,9108	0,8878	0,8615	0,8319	0,7991
22	0,9924	0,9885	0,9833	0,9763	0,9673	0,9558	0,9418	0,9248	0,9047	0,8815	0,8551
23	0,9960	0,9938	0,9907	0,9863	0,9805	0,9730	0,9633	0,9513	0,9367	0,9193	0,8989
24	0,9980	0,9968	0,9950	0,9924	0,9888	0,9840	0,9777	0,9696	0,9594	0,9468	0,9317
25	0,9990	0,9984	0,9974	0,9959	0,9938	0,9909	0,9869	0,9816	0,9748	0,9661	0,9554
26	0,9995	0,9992	0,9987	0,9979	0,9967	0,9950	0,9925	0,9892	0,9848	0,9791	0,9718
27	0,9998	0,9996	0,9994	0,9989	0,9983	0,9973	0,9959	0,9939	0,9912	0,9875	0,9827
28	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9991	0,9986	0,9978	0,9967	0,9950	0,9928	0,9897
29	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993	0,9989	0,9982	0,9973	0,9959	0,9941
30	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	0,9991	0,9986	0,9978	0,9967
31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9993	0,9988	0,9982
32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9996	0,9994	0,9990
33	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995
34	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998
35	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999
36	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Distribución Acumulada de la Normal Estandar: $\phi(z)$



z	0,00	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,6	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0046	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0061	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0081	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0106	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0137	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0176	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0225	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0284	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0355	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0441	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0542	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0662	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0800	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0959	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1141	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1346	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1574	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1827	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2104	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2404	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2726	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3068	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3427	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3802	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4188	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4582	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4980	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

Distribución Acumulada de la Normal Estandar: $\phi(z)$



z	0,00	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5020	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5418	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5812	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6198	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6573	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6932	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7274	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7596	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7896	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8173	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8426	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8654	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8859	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9041	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9200	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9338	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9458	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9559	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9645	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9716	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9775	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9824	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9863	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9894	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9919	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9939	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Distribución Acumulada t : $P(t \le t_{\alpha,v}) = \alpha$ (Los valores de la tabla son en valor absoluto)

	α										
v	**0,005**	**0,010**	**0,020**	**0,025**	**0,030**	**0,040**	**0,050**	**0,100**	**0,200**	**0,300**	**0,400**
1	63,6567	31,8205	15,8945	12,7062	10,5789	7,91582	6,31375	3,07768	1,37638	0,72654	0,32492
2	9,92484	6,96456	4,84873	4,30265	3,89643	3,31976	2,91999	1,88562	1,06066	0,61721	0,28868
3	5,84091	4,5407	3,48191	3,18245	2,95051	2,60543	2,35336	1,63774	0,97847	0,58439	0,27667
4	4,60409	3,74695	2,99853	2,77645	2,60076	2,33287	2,13185	1,53321	0,94096	0,56865	0,27072
5	4,03214	3,36493	2,75651	2,57058	2,42158	2,19096	2,01505	1,47588	0,91954	0,55943	0,26718
6	3,70743	3,14267	2,61224	2,44691	2,31326	2,10431	1,94318	1,43976	0,9057	0,55338	0,26483
7	3,49948	2,99795	2,51675	2,36462	2,24088	2,04601	1,89458	1,41492	0,89603	0,54911	0,26317
8	3,35539	2,89646	2,44898	2,306	2,18915	2,00415	1,85955	1,39682	0,88889	0,54593	0,26192
9	3,24984	2,82144	2,39844	2,26216	2,15038	1,97265	1,83311	1,38303	0,8834	0,54348	0,26096
10	3,16927	2,76377	2,35931	2,22814	2,12023	1,9481	1,81246	1,37218	0,87906	0,54153	0,26018
11	3,10581	2,71808	2,32814	2,20099	2,09614	1,92843	1,79588	1,36343	0,87553	0,53994	0,25956
12	3,05454	2,681	2,30272	2,17881	2,07644	1,91231	1,78229	1,35622	0,87261	0,53862	0,25903
13	3,01228	2,65031	2,2816	2,16037	2,06004	1,89887	1,77093	1,35017	0,87015	0,5375	0,25859
14	2,97684	2,62449	2,26378	2,14479	2,04617	1,8875	1,76131	1,34503	0,86805	0,53655	0,25821
15	2,94671	2,60248	2,24854	2,13145	2,03429	1,87774	1,75305	1,34061	0,86624	0,53573	0,25789
16	2,92078	2,58349	2,23536	2,11991	2,024	1,86928	1,74588	1,33676	0,86467	0,53501	0,2576
17	2,89823	2,56693	2,22385	2,10982	2,015	1,86187	1,73961	1,33338	0,86328	0,53438	0,25735
18	2,87844	2,55238	2,2137	2,10092	2,00707	1,85534	1,73406	1,33039	0,86205	0,53382	0,25712
19	2,86093	2,53948	2,2047	2,09302	2,00002	1,84953	1,72913	1,32773	0,86095	0,53331	0,25692
20	2,84534	2,52798	2,19666	2,08596	1,99371	1,84433	1,72472	1,32534	0,85996	0,53286	0,25674
21	2,83136	2,51765	2,18943	2,07961	1,98804	1,83965	1,72074	1,32319	0,85907	0,53246	0,25658
22	2,81876	2,50832	2,18289	2,07387	1,98291	1,83542	1,71714	1,32124	0,85827	0,53208	0,25643
23	2,80734	2,49987	2,17696	2,06866	1,97825	1,83157	1,71387	1,31946	0,85753	0,53175	0,2563
24	2,79694	2,49216	2,17154	2,0639	1,97399	1,82805	1,71088	1,31784	0,85686	0,53144	0,25617
25	2,78744	2,48511	2,16659	2,05954	1,9701	1,82483	1,70814	1,31635	0,85624	0,53115	0,25606
26	2,77871	2,47863	2,16203	2,05553	1,96651	1,82186	1,70562	1,31497	0,85567	0,53089	0,25595
27	2,77068	2,47266	2,15782	2,05183	1,9632	1,81913	1,70329	1,3137	0,85514	0,53065	0,25586
28	2,76326	2,46714	2,15393	2,04841	1,96014	1,81659	1,70113	1,31253	0,85465	0,53042	0,25577
29	2,75639	2,46202	2,15033	2,04523	1,95729	1,81424	1,69913	1,31143	0,85419	0,53021	0,25568
30	2,75	2,45726	2,14697	2,04227	1,95465	1,81205	1,69726	1,31042	0,85377	0,53002	0,25561
31	2,74404	2,45282	2,14383	2,03951	1,95218	1,81	1,69552	1,30946	0,85337	0,52984	0,25553
32	2,73848	2,44868	2,1409	2,03693	1,94987	1,80809	1,69389	1,30857	0,853	0,52967	0,25546
33	2,73328	2,44479	2,13816	2,03452	1,9477	1,80629	1,69236	1,30774	0,85265	0,5295	0,2554
34	2,72839	2,44115	2,13558	2,03224	1,94567	1,80461	1,69092	1,30695	0,85232	0,52935	0,25534
35	2,72381	2,43772	2,13316	2,03011	1,94375	1,80302	1,68957	1,30621	0,85201	0,52921	0,25528
36	2,71948	2,43449	2,13087	2,02809	1,94195	1,80153	1,6883	1,30551	0,85172	0,52908	0,25523
37	2,71541	2,43145	2,12871	2,02619	1,94024	1,80012	1,68709	1,30485	0,85144	0,52895	0,25518
38	2,71156	2,42857	2,12667	2,02439	1,93863	1,79878	1,68595	1,30423	0,85118	0,52883	0,25513
39	2,70791	2,42584	2,12474	2,02269	1,93711	1,79751	1,68488	1,30364	0,85094	0,52871	0,25508
40	2,70446	2,42326	2,12291	2,02108	1,93566	1,79631	1,68385	1,30308	0,8507	0,52861	0,25504
50	2,67779	2,40327	2,10872	2,00856	1,92444	1,787	1,67591	1,29871	0,84887	0,52776	0,2547
60	2,66028	2,39012	2,09936	2,0003	1,91703	1,78085	1,67065	1,29582	0,84765	0,5272	0,25447
70	2,6479	2,38081	2,09273	1,99444	1,91177	1,77647	1,66691	1,29376	0,84679	0,5268	0,25431
80	2,63869	2,37387	2,08778	1,99006	1,90784	1,77321	1,66412	1,29222	0,84614	0,5265	0,25419
90	2,63157	2,3685	2,08394	1,98667	1,9048	1,77068	1,66196	1,29103	0,84563	0,52626	0,2541
100	2,62589	2,36422	2,08088	1,98397	1,90237	1,76866	1,66023	1,29007	0,84523	0,52608	0,25402
∞	2,57583	2,32635	2,05375	1,95996	1,88079	1,75069	1,64487	1,28156	0,84162	0,5244	0,25335

Distribución Acumulada de la Gamma Incompleta F(y; α)

	α										
y	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**3,0**	**4,0**	**5,0**	**6,0**	**7,0**	**8,0**	**9,0**	**10,0**
1	0,632	0,428	0,264	0,080	0,019	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
1,5	0,777	0,608	0,442	0,191	0,066	0,019	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000
2	0,865	0,739	0,594	0,323	0,143	0,053	0,017	0,005	0,001	0,000	0,000
2,5	0,918	0,828	0,713	0,456	0,242	0,109	0,042	0,014	0,004	0,001	0,000
3	0,950	0,888	0,801	0,577	0,353	0,185	0,084	0,034	0,012	0,004	0,001
3,5	0,970	0,928	0,864	0,679	0,463	0,275	0,142	0,065	0,027	0,010	0,003
4	0,982	0,954	0,908	0,762	0,567	0,371	0,215	0,111	0,051	0,021	0,008
4,5	0,989	0,971	0,939	0,826	0,658	0,468	0,297	0,169	0,087	0,040	0,017
5	0,993	0,981	0,960	0,875	0,735	0,560	0,384	0,238	0,133	0,068	0,032
5,5	0,996	0,988	0,973	0,912	0,798	0,642	0,471	0,314	0,191	0,106	0,054
6	0,998	0,993	0,983	0,938	0,849	0,715	0,554	0,394	0,256	0,153	0,084
6,5	0,998	0,995	0,989	0,957	0,888	0,776	0,631	0,473	0,327	0,208	0,123
7	0,999	0,997	0,993	0,970	0,918	0,827	0,699	0,550	0,401	0,271	0,170
7,5	0,999	0,998	0,995	0,980	0,941	0,868	0,759	0,622	0,475	0,338	0,224
8	1,000	0,999	0,997	0,986	0,958	0,900	0,809	0,687	0,547	0,407	0,283
8,5	1,000	0,999	0,998	0,991	0,970	0,926	0,850	0,744	0,614	0,477	0,347
9	1,000	1,000	0,999	0,994	0,979	0,945	0,884	0,793	0,676	0,544	0,413
9,5	1,000	1,000	0,999	0,996	0,985	0,960	0,911	0,835	0,731	0,608	0,478
10	1,000	1,000	1,000	0,997	0,990	0,971	0,933	0,870	0,780	0,667	0,542
10,5	1,000	1,000	1,000	0,998	0,993	0,979	0,950	0,898	0,821	0,721	0,603
11	1,000	1,000	1,000	0,999	0,995	0,985	0,962	0,921	0,857	0,768	0,659
11,5	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,989	0,972	0,940	0,886	0,809	0,711
12	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,992	0,980	0,954	0,910	0,845	0,758
12,5	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,995	0,985	0,965	0,930	0,875	0,799
13	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,974	0,946	0,900	0,834
13,5	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,992	0,981	0,959	0,921	0,865
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,994	0,986	0,968	0,938	0,891
14,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,990	0,976	0,952	0,912
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,992	0,982	0,963	0,930
15,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,994	0,987	0,971	0,945
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,990	0,978	0,957
16,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,993	0,983	0,966
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,995	0,987	0,974
17,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,991	0,980
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,993	0,985
18,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,995	0,988
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,996	0,991
19,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,993
20	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,995
20,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,996
21	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997
21,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998
22	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998
22,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
23	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
23,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
24	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Bibliografía

1. Antibí, André. Didáctica de las Matemáticas: Métodos de Resolución de problemas. Serie Cabecar, Costa Rica 2000.

2. Calderon, Silvia; Morales, Mario. Análisis Combinatorio. Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1992.

3. Devore, J. Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias, 4a ed. International Thomson Editores, México, 1998.

4. Gómez, Miguel. Elementos de estadístitca descriptiva. EUNED, San José, Costa Rica, 2000.

5. Marín, Mario. "Notas del Curso Probabilidades". Publicaciones ITCR.

6. Mora, E. "Curso Intermedio de Probabilidades". Universidad de Costa Rica, 2001.

7. Murrillo, M. "Introducción a la matemática Discreta". Editorial Tecnológica de Costa Rica, 2004.

8. Piza, Eduardo. "Combinatorio esencial con ejercicios resueltos". Universidad de Costa Rica, 2000.

9. Sanabria G. "Tópicos precedentes al estudio de la Teoría de Probabilidades, II semestre del 2007", Publicaciones ITCR, 2007..

10. Sanabria, Giovanni. Una propuesta para la enseñanza de los Elementos de Análisis Combinatorio. Memorias del Primer Encuentro Nacional en la Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística (1° ENEPE), Puebla – México del 16 al 18 de junio del 2010.

11. Sanabria, Giovanni; Núñez Félix. Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial. Memorias del III Encuentro de Enseñanza de la Matemática "La mediación pedagógica para el aprendizaje de la matemática en los niveles educativos nacionales". INBio Parque, 3 y 4 de setiembre del 2010.

12. Walpole, R; Myers, R; Myers, S. "Probabilidad y estadística para ingenieros", 6a ed, Prentice-Hall Hispanoamericana. S.A., 1999.