$\mathcal{P}$ráctica $\mathcal{G}$eneral
$\mathcal{E}$spacios $\mathcal{V}$ectoriales (Parte II)

1. Sea $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R})$ un espacio vectorial y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathcal{V}$. Si $w_1 = v_1$, $w_2 = v_1 + v_2$ y $w_3 = v_1 + v_2 + v_3$, demuestre que $\{w_1, w_2, w_3\}$ es una base de $\mathcal{V}$

2. Sea $\{x, y\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sean $u = 2x - y, v = 2x - 3y$. Demuestre que $\{u, v\}$ es, también, una base de $\mathbb{R}^2$

3. Considere el conjunto $\mathcal{B} = \{(k-2, 1, -1), (2, -k, 4), (8, -11, 1+k)\}$ ¿Para qué valor o valores de k se cumple que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$?

4. Determine si el conjunto de vectores que se enuncia es una base de $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ o no lo es. Justifique.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

5. Sea $\mathcal{H} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big/ 3x - y + 5z = 0 \right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$
   (a) Si $\mathcal{B} = \{(1, -2, -1), (0, 5, 1)\}$, verifique que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}$ y, además, una base de $\mathcal{H}$
   (b) Verifique que el vector $u = (3, -1, -2)$ pertenece a $\mathcal{H}$ y, además, expréselo como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$

6. En $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ considere las bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$. Si $p(x) = 2-x+x^2$, determine el vector de coordenadas de $p(x)$ respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, respectivamente.

7. Considere las bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \left\{ -1, x(x+1), x \right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{ 2x, -3, 2x(1-x) \right\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$
   (a) Determine la matriz de transición de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$
   (b) Determine $\left[a + bx + cx^2\right]_{\mathcal{B}_1}$
   (c) Usando los resultados obtenidos anteriormente, determine $\left[a + bx + cx^2\right]_{\mathcal{B}_2}$

8. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \big/ Ax = \mathcal{O}_{m\times 1} \right\}$
   (a) Demuestre que $\mathcal{S}$ es subespacio de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$
   Note que $\mathcal{S}$ es el conjunto solución del sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas $Ax = \mathcal{O}$
   (b) Encuentre la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$
   (c) Encuentre la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$

9. Si se sabe que $\mathcal{V} = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Big/ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

(a) Halle tres elementos de $\mathcal{V}$
(b) Determine una base de $\mathcal{V}$
(c) Obtenga $\dim(\mathcal{V})$

10. En $\mathbb{R}^3$ considere las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, definidas por:
$$\mathcal{B}_1 = \Big\{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \Big\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \Big\{ (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0) \Big\}$$
   (a) Determine la matriz de transición de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$
   (b) Determine la matriz de transición de la base $\mathcal{B}_2$ a la base $\mathcal{B}_1$
   (c) Usando el resultado obtenido en (a) calcule $\Big[(1,3,-2)\Big]_{\mathcal{B}_2}$

11. Considere las bases ordenadas $\mathcal{B} = \left\{2 - x^2, 4x, 3x^2 + x\right\}$ y $\mathcal{B}' = \left\{x, 2, x^2\right\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$,
   (a) Determine la matriz de transición de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$
   (b) Con base en la matriz anterior, determine la matriz de transición de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$
   (c) Determine $[-5 + 3x - 8x^2]_{\mathcal{B}'}$
   (d) Determine $[-5 + 3x - 8x^2]_{\mathcal{B}}$ utilizando los resultados de los incisos b y c.

12. En $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ considere las bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{x^2 - x, x - 1, 2\}$
   (a) Determine la matriz de transición de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$
   (b) Determine la matriz de transición de la base $\mathcal{B}_2$ a la base $\mathcal{B}_1$
   (c) Usando el resultado obtenido en (a) calcule $\Big[\left(x^2 + 5x - 2\right)\Big]_{\mathcal{B}_2}$

13. En $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ considere las bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{3x + 6, 2x + 10\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{2, 2x + 3\}$
   (a) Determine la matriz de transición de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$
   (b) Determine la matriz de transición de la base $\mathcal{B}_2$ a la base $\mathcal{B}_1$
   (c) Usando los resultados obtenidos en (a) y en (b), según corresponda, calcule $\Big[x-4\Big]_{\mathcal{B}_1}$ y $\Big[x-4\Big]_{\mathcal{B}_2}$

14. En $\mathbb{R}^2$ considere las bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{(1,1), (2,3)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(0,3), (5,-1)\}$. Sea $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\Big[x\Big]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, calcule $\Big[x\Big]_{\mathcal{B}_2}$

15. Considere los vectores siguientes: $p(x) = 2 - 3x + x^2$, $q(x) = 1 + 37x - 17x^2$, $r(x) = 1 + 4x - 2x^2$, $s(x) = -8 + 12x - 4x^2$ y $t(x) = -3 - 5x + 8x^2$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Si se define el conjunto $\mathcal{B}$ como $\mathcal{B} = \{p(x), q(x), r(x), s(x), t(x)\}$, verifique que $\mathcal{G}en(\mathcal{B}) = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y determine, a partir de $\mathcal{B}$, un subconjunto que sea una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

16. Sean $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R})$ algún espacio vectorial, u y v vectores de $\mathcal{V}$. Demuestre que si $\{u, v\}$ es una base de $\mathcal{V}$ y α y β son escalares distintos de cero, entonces los conjuntos $\{u + v, \alpha u\}$ y $\{\alpha u, \beta v\}$ son, también, bases de $\mathcal{V}$

17. Si se sabe que $\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Big/ a - d = 0, 2b - c = 0 \right\}$ es subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, determine:
   (a) Una base de $\mathcal{W}$

(b) $\dim(\mathcal{W})$

(c) Una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a partir de la base de $\mathcal{W}$

18. Si se sabe que $\mathcal{W} = \left\{ \left(x, y, 0, x - y\right) \Big/ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^4$, determine:

(a) Una base de $\mathcal{W}$

(b) $\dim(\mathcal{W})$

(c) Una base de $\mathbb{R}^4$ a partir de la base de $\mathcal{W}$

19. Determine la dimensión de cada uno de los subespacios siguientes (debe justificar su respuesta):

(a) $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $\mathcal{V} = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \Big/ a - 4b - c = 0 \right\}$

(c) $\mathcal{V} = \left\{ (a, b, 0) \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $\mathcal{V} = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \Big/ 2a - 7b + c = 0 \right\}$

(e) $\mathcal{V} = \left\{ (a, 0, a + b, b, a - b) \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(f) $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(g) $\mathcal{V} = \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \Big/ a + b - c = 0, -2a - b + 3c = 0 \right\}$

(h) $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \Big/ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

(i) $\mathcal{V} = \left\{ (a, 2a, 3a) \Big/ a \in \mathbb{R} \right\}$

Definición 1 (suma)
Si $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subconjuntos no vacíos de algún espacio vectorial $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R})$, la suma de $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$, denotada por $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$, está definida como: $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \left\{ v_1 + v_2 \Big/ v_1 \in \mathcal{W}_1, v_2 \in \mathcal{W}_2 \right\}$

20. Demuestre que si $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subespacios de dimensión finita de algún espacio vectorial real $\mathcal{V}$, entonces el subespacio $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ (ver definición 1) es de dimensión finita y, además,

$$\dim(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = \dim(\mathcal{W}_1) + \dim(\mathcal{W}_2) - \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2)$$

Sugerencia: inicie con una base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ para $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ y extienda este conjunto a bases $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ de $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$, respectivamente.

Definición 2 (suma directa)
Un espacio vectorial $\mathcal{V}$ es llamado la suma directa de $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$, si $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subespacios de $\mathcal{V}$, tales que $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \left\{ \boldsymbol{0} \right\}$ y $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{V}$; en este caso, se escribe $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.

21. Si $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subespacios de dimensión finita de algún espacio vectorial real $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$, demuestre que $\mathcal{V}$ es la suma directa de $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ (ver definición 2) si, y sólo si, $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{W}_1) + \dim(\mathcal{W}_2)$