INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *Tiempo: 2 h. 15 m.*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 30 puntos*
Álgebra Lineal para Computación (MA-2405) — *II Semestre de 2011*

# Primer examen parcial

**Instrucciones**: Trabaje en forma ordenada y clara. Escriba todos los procedimientos que utilice para resolver los ejercicios propuestos.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Resuelva para $X$ la ecuación matricial $XB(A + A^2) - (XB - B^2)A - B^2A = A$. **(4 puntos)**

2. Sean $A$ y $B$ matrices simétricas. Demuestre que
   (a) $A + B$ es simétrica. **(2 puntos)**
   (b) $AB$ es simétrica si y solo si $AB = BA$ **(4 puntos)**

3. Determine los valores de $a$, $b$, $c$ y $\lambda$, si existen, para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} \lambda x - y + z = a \\ x + y - 2z = b \\ x - y + z = c \end{cases}$$
   (a) tenga infinitas soluciones. **(3 puntos)**
   (b) no tenga solución. **(2 puntos)**
   (c) tenga una única solución. **(2 puntos)**

4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde a $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Determine los valores de $a$ para que $AB$ sea invertible (no singular). **(3 puntos)**
   (b) Para $c$ y $d$ números reales cualesquiera, ¿puede el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ser inconsistente? Justifique su respuesta. **(3 puntos)**

5. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^4 = 0$, demuestre que $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3$. **(4 puntos)**

6. Demuestre la igualdad $\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = b^2(3a + b)$ **(3 puntos)**