TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO
24 de marzo de 2014

Tiempo 2 horas y 15 minutos
Puntaje total: 32 puntos

I EXAMEN PARCIAL

INSTRUCCIONES Este es un examen de desarrollo, por eso deben aparecer en forma clara y ordenada todos los pasos que le conducen a sus respuestas. No se permite el uso de hojas sueltas. No se aceptan reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (total o parcialmente) o que presenten algún tipo de alteración. Mantenga su celular apagado.

1. Usando la definición formal de límite, demuestre que:

   a)
$$\lim_{x\to 2}(x^2 - x) = 2$$
(4 puntos)

   b)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$
(3 puntos)

2. Calcule los siguientes límites.

   a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\text{sen}(7x)}{1-\sqrt{\cos(x)}}$$
(5 puntos)

   b)
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-5x^2+3x}{|x+3|-x^2}$$
(3 puntos)

   c)
$$\lim_{x\to -1^-} \left(2^{\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)} - \ln(-x-1) \right)$$
(3 puntos)

3. Sean f y g dos funciones y a un número real tal que
$$\lim_{x\to a} f(x) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 7$$
Utilice la definición formal de límite para demostrar que
$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = 11$$
(5 puntos)

4. Sea g una función continua en $\mathbb{R}$ y sea $F(x) = x^3 + g(x)$

   Si $g(-1) > 1$ y $g(1) < -1$

   a) Justifique que F es continua en todo $\mathbb{R}$ (1 punto)

   b) Muestre que existe $c \in [-1, 1]$ tal que $g(c) = -c^3$

   (3 puntos)

5. Considere la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(\pi x)}{x(x-1)} & \text{si } x \neq 0, x \neq 1 \\ \\ -\pi & \text{si } x = 0 \text{ ó } x = 1 \end{cases}$$

   Analice la continuidad en $x = 0$ y en $x = 1$

   Sugerencia:

   Para el análisis en $x = 1$ use la fórmula $\text{sen}(\alpha + \pi) = -\text{sen}\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

   (5 puntos)