$\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica	$\mathcal{T}$iempo: 2 horas
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática	$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 32 puntos
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación	$\mathcal{O}$ctubre de 2015

$\mathcal{II}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial - $\mathcal{S}$olución

1. Sea $(G, *)$ algún grupo cuyo elemento neutro es e; para $a \in G$ se dice que a es un *elemento involutivo* de $(G, *)$ si $a^2 = e$. Si se sabe que $(\mathbb{Z}_4, +)$ es grupo abeliano:

   La tabla de operación binaria para $(\mathbb{Z}_4, +)$ es

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

   Note que el elemento neutro es $e = 0$, pues $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 0 + 2 = 2, 0 + 3 = 3$.

   (a) Halle x', $\forall x \in \mathbb{Z}_4$. (3 pts)
   $0' = 0$, pues $0 + 0 = 0$
   $1' = 3$, pues $1 + 3 = 0$
   $2' = 2$, pues $2 + 2 = 0$
   $3' = 1$, pues $3 + 1 = 0$

   (b) Detetermine todos los elementos involutivos de $(\mathbb{Z}_4, +)$. (3 pts)
   Note que:
   $0^2 = 0 + 0 = 0$
   $1^2 = 1 + 1 = 2$
   $2^2 = 2 + 2 = 0$
   $3^2 = 3 + 3 = 2$
   Así, los únicos elementos involutivos son 0 y 2.

2. Si se sabe que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \circledcirc)$ es grupo abeliano, tal que $\forall\,(x, y)\,, (z, w) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,

$$(x, y) \circledcirc (z, w) = (-5xz, y + 3 + w)$$

   (a) Determine el elemento neutro de $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \circledcirc)$. (2 pts)
   Sea (e_1, e_2), tal que $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, (e_1, e_2) \circledcirc (x, y) = (x, y)$
   Veamos:

$$\begin{aligned} (e_1, e_2) \circledcirc (x, y) = (x, y) &\Rightarrow (-5e_1x, e_2 + 3 + y) = (x, y) \\ &\Rightarrow -5e_1x = x \ \wedge \ e_2 + 3 + y = y \\ &\Rightarrow e_1 = \frac{-1}{5} \ \wedge \ e_2 = -3 \end{aligned}$$

Así, el neutro es $e = \left(\frac{-1}{5}, -3\right)$.

Note que el neutro es efectivamente un elemento del conjunto en estudio (principalmente, que la primera componente no es cero).

(b) Determine el elemento simétrico de todo elemento (a,b) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. (2 pts)

Sea $(a,b)' = (x,y)$. Así, se busca (x,y) tal que $(a,b) \circledcirc (x,y) = \left(\frac{-1}{5}, -3\right)$

Veamos:

$$\begin{aligned}
(a,b) \circledcirc (x,y) = \left(\frac{-1}{5}, -3\right) \quad &\Rightarrow \quad (-5ax, b+3+y) = \left(\frac{-1}{5}, -3\right) \\
&\Rightarrow \quad -5ax = \frac{-1}{5} \ \wedge \ b+3+y = -3 \\
&\Rightarrow \quad x = \frac{1}{25a} \ \wedge \ y = -6-b
\end{aligned}$$

Así, el simétrico de cada elemento (a,b) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ está dado por $(a,b)' = \left(\frac{1}{25a}, -6-b\right)$.

Note que el simétrico de cada elemento es efectivamente un elemento del conjunto en estudio (principalmente, que la primera componente no sea cero) y, además, todo elemento posee simétrico, pues la única restricción que se tiene es que $a \neq 0$, lo cual se cumple pues $a \in \mathbb{R}^*$.

(c) Resuelva la ecuación $(-2,3) \circledcirc (x,y) = (-1,0)$. (2 pts)

$$\begin{aligned}
(-2,3) \circledcirc (x,y) = (-1,0) \quad &\Rightarrow \quad (x,y) = (-2,3)' \circledcirc (-1,0) \\
&\Rightarrow \quad (x,y) = \left(\frac{1}{25 \cdot -2}, -6-3\right) \circledcirc (-1,0) \\
&\Rightarrow \quad (x,y) = \left(\frac{-1}{50}, -9\right) \circledcirc (-1,0) \\
&\Rightarrow \quad (x,y) = \left(-5 \cdot \frac{-1}{50} \cdot -1, -9+3+0\right) \\
&\Rightarrow \quad (x,y) = \left(\frac{-1}{10}, -6\right)
\end{aligned}$$

3. Sea $(G,*)$ algún grupo cuyo elemento neutro es e; demuestre que:

(a) e es único. (3 pts)

Se sabe que e es neutro de $(G,*)$; para probar que es único, supongamos que existen dos elementos neutros e y e_1 en $(G,*)$, tales que $e \neq e_1$.

Ahora, note que $e, e_1 \in G$ y se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
e &= e * e_1 \quad \text{pues como } e_1 \text{ es neutro, } \forall x \in G, x = x * e_1 \\
&= e_1 \qquad\ \ \text{pues como } e \text{ es neutro, } \forall x \in G, e * x = x
\end{aligned}$$

Por lo que $e = e_1$ y contradice nuestra hipótesis de que fueran distintos los elementos.

Por lo tanto, el neutro de todo grupo es único.

(b) $\forall a, b \in G,\ (a * b)' = b' * a'$. (3 pts)

En general, para probar que $p' = q$ es suficiente demostrar que $p * q = e$. De esta manera, para demostrar que $\forall a, b \in G,\ (a * b)' = b' * a'$, es sufiente demostrar que $(a * b) * \big(b' * a'\big) = e$

Veamos:

$$\begin{array}{rcll} (a * b) * \big(b' * a'\big) & = & a * \big(b * b'\big) * a' & \text{ya que } * \text{ es asociativa} \\ & = & a * e * a' & \text{por prop. de elemento simétrico} \\ & = & a * a' & \text{por prop. de elemento neutro} \\ & = & e & \text{por prop. de elemento simétrico} \end{array}$$

Luego, como $(a * b) * \big(b' * a'\big) = e$ se concluye que $\forall a, b \in G,\ (a * b)' = b' * a'$.

4. Sea $(H, *)$ algún grupo cuyo elemento neutro es e. Demuestre que si $\forall a \in H,\ a = a'$ entonces $(H, *)$ es abeliano. (3 pts)

Note que ya se indica que $(H, *)$ es grupo, de esta manera, lo que se debe probar es que la operación sea conmutativa bajo la hipótesis adicional que $\forall a \in H,\ a = a'$.

Sean $x, y \in H$; como $x, y \in H \Rightarrow x = x' \quad \wedge \quad y = y'$.

Además, como H es grupo, si $x, y \in H \Rightarrow y * x \in H$; es decir, $y * x = (y * x)'$.

Hay que demostrar que $x * y = y * x$.

Veamos:

$$\begin{array}{rcll} x * y & = & x' * y' & \text{por hipótesis} \\ & = & (y * x)' & \text{por teorema } (a * b)' = b' * a' \\ & = & y * x & \text{ya que } x, y \in H \Rightarrow y * x \in H \end{array}$$

Así, $x * y = y * x$ por lo que si $\forall a \in H,\ a = a'$ entonces $(H, *)$ es abeliano.

5. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \Big/ x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Si se sabe que $(H, +)$ es subgrupo de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$, conteste lo que se pide en cada caso:

(a) Demuestre que $(H, +, \cdot)$ es anillo conmutativo con unidad. (4 pts)

Para probar que $(H, +, \cdot)$ es anillo conmutativo con unidad hay que demostrar las propiedades siguientes:

i. $(H, +)$ grupo abeliano.
Note que ya se tiene que $(H, +)$ es grupo; de esta manera, hace falta probar que $+$ es conmutativa en H. Como $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ es grupo abelino, la conmutatividad de $+$ es una propiedad que también se cumple en H (se hereda).

ii. $\cdot$ es asociativa en H
Como la multiplicación de matrices es una operación asociativa, se tiene que esta propiedad también se hereda en H.

iii. $\cdot$ es distributiva con respecto a $+$ en H
Como la multiplicación de matrices es una operación distributiva con respecto a la adición, se tiene que esta propiedad también se hereda en H.

iv. $\cdot$ es conmutativa en H

Dado que la multiplicación de matrices no es una operación conmutativa, se tiene que ver si en H lo es. Sean $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \in H$; hay que demostrar que:
$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}$
Veamos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 & 0 \\ 0 & y_1 \cdot y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2 \cdot x_1 & 0 \\ 0 & y_2 \cdot y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

v. H posee elemento neutro bajo $\cdot$

Como se sabe que la matriz identidad es el elemento neutro en la multiplicación de matrices, para H el neutro es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Note que este elemento está en H.

Así, queda demostrado que $(H, +, \cdot)$ es anillo conmutativo con unidad.

(b) ¿Posee $(H, +, \cdot)$ divisores de cero? Justifique. (3 pts)

Como $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es el neutro de $(H, +)$, el anillo $(H, +, \cdot)$ posee divisores de cero si existen matrices $A, B \in H$, con $A \neq \mathcal{O}$ y $B \neq \mathcal{O}$, tales que $AB = \mathcal{O}$.
En este caso, sí existen matrices A y B de H no nulas que multiplicadas den como resultado la matriz nula; por ejemplo, $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Si se sabe que $(G, *)$ es algún grupo cuyo elemento neutro es e y $m \in G$, con m fijo, demuestre que H es subgrupo de G, donde $H = \{w \in G \mid w * m = m * w\}$. (4 pts)

Note que $H \subset G$ pues $\forall x \in H \Rightarrow x \in G$; además, $H \neq \varnothing$ pues $e \in H$ (e satisface la condición enunciada en H, ya que $e * m = m * e$ —en ambos miembros de la igualdad se obtiene m como resultado).

Así, H es subgrupo de G si $\forall x, y \in H, \quad x * y \in H \quad \wedge \quad x' \in H$

Como $x, y \in H$, se tiene que $x * m = m * x \quad \wedge \quad y * m = m * y$

Ahora, $x * y \in H$ si $(x * y) * m = m * (x * y)$

Veamos:

$$\begin{aligned}
(x * y) * m &= x * (y * m) && \text{asociatividad} \\
&= x * (m * y) && \text{pues } y \in H \\
&= (x * m) * y && \text{asociatividad} \\
&= (m * x) * y && \text{pues } x \in H \\
&= m * (x * y) && \text{asociatividad}
\end{aligned}$$

Por otra parte, $x' \in H$ si $x' * m = m * x'$

Dado que $x \in H$ se tiene que $x * m = m * x$, luego:

$$\begin{aligned}
x * m = m * x \quad &\Rightarrow \quad x' * (x * m) = x' * (m * x) \\
&\Rightarrow \quad \big(x' * x\big) * m = \big(x' * m\big) * x \\
&\Rightarrow \quad e * m = \big(x' * m\big) * x \\
&\Rightarrow \quad m = \big(x' * m\big) * x \\
&\Rightarrow \quad m * x' = \big(\big(x' * m\big) * x\big) * x' \\
&\Rightarrow \quad m * x' = \big(x' * m\big) * \big(x * x'\big) \\
&\Rightarrow \quad m * x' = \big(x' * m\big) * e \\
&\Rightarrow \quad m * x' = x' * m
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall x, y \in H, \quad x * y \in H \quad \wedge \quad x' \in H$ y con esto queda demostrado que H es sugrupo de G.