Álgebra Lineal para Computación: MA-2405
Resumen de estructuras

1. Sea $\mathcal{G}$ un conjunto no vacío y $*$ es una operación interna definida $\mathcal{G}$, se dice que $\boldsymbol{(\mathcal{G}, *)}$ es un:
   - **semigrupo** si $*$ es asociativa.
   - **monoide** si es un semigrupo con elemento neutro.
   - **grupo** si es un monoide que cumple la propiedad de los inversos, es decir, $(\mathcal{G}, *)$ es un grupo si $*$ es cerrada, asociativa, posee elemento neutro y cada elemento tiene inverso.
   - **grupo abeliano** o grupo conmutativo si es un grupo y se cumple la conmutatividad.
2. Si $(\mathcal{G}, *)$ es un grupo y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ con $\mathcal{H} \neq \emptyset$, $\mathcal{H}$ se llamará **subgrupo** de $\mathcal{G}$, y se denota por $\boldsymbol{\mathcal{H} \leq \mathcal{G}}$ si y solo si $(\mathcal{H}, *)$ es un grupo. Es decir, un subgrupo de un grupo es un subconjunto no vacío del grupo que sea grupo con la operación restringida a sus elementos.
3. Si $+$ y $\cdot$ son dos l.c.i sobre $\mathcal{A}$, se dice que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un **anillo** si se cumple:
   - $(\mathcal{A}, +)$ es grupo abeliano.
   - $(\mathcal{A}, \cdot)$ es asociativa.
   - La distributividad de $\cdot$ respecto de $+$, es decir, $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$ se cumple $x(y+z) = xy+xz$ y además $(y+z)x = yx+zx$.
4. Se dice que el anillo $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es:
   - **Conmutativo** si $(\mathcal{A}, \cdot)$ es conmutativo.
   - **Unitario** si $(\mathcal{A}, \cdot)$ tiene neutro.
   - **Un dominio entero** si y solo si es un anillo conmutativo sin divisores de cero. (Se dice que $a \in \mathcal{A}$, con $a \neq 0$ es **divisor de cero** si existe $b \in \mathcal{A}$, con $b \neq 0$, tal que $a \cdot b = 0$.)
5. Se dice que $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ es un **campo** si se cumple:
   - $(\mathcal{C}, +)$ es grupo abeliano.
   - $(\mathcal{C}^*, \cdot)$ es grupo abeliano.
   - La distributividad de $\cdot$ respecto de $+$, es decir, $x(y+z) = xy+xz$, $\forall x, y, z \in \mathcal{C}$
6. Se dice que $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R})$ es un **espacio vectorial** si se cumple:
   - $(\mathcal{V}, +)$ es grupo abeliano.
   - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \mathcal{V}$ se cumple: $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ y $1v = v$.
   - La distributividad de $+$ respecto a $\cdot\mathbb{R}$, es decir, $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \mathcal{V}$.
   - La distributividad de $\cdot\mathbb{R}$ respecto a $+$, es decir, $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v, w \in \mathcal{V}$.
7. Si $(\mathcal{V}, *, \cdot\mathbb{R})$ es un espacio vectorial y $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ con $\mathcal{W} \neq \emptyset$, $\mathcal{W}$ se llamará **subespacio vectorial** de $\mathcal{V}$, y se denota por $\boldsymbol{\mathcal{W} \preceq \mathcal{V}}$ si y solo si $(\mathcal{W}, *, \cdot\mathbb{R})$ es un espacio vectorial. Es decir, un subespacio vectorial de un espacio vectorial es un subconjunto no vacío del espacio vectorial que sea espacio vectorial con las operaciones restringidas a sus elementos.