INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

20 de octubre de 2008
Total: 32 puntos
Tiempo: 2 h. 10 m.

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto, debe aparecer todos los pasos, y sus respectivas justificaciones, que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Para $A = \{3, 4, 6\}$, sea $\mathcal{R}$ una relación sobre A, definida por

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a + b \leq 8 \ \vee \ b = 3)$$

y sea $\mathcal{S}$ otra relación sobre A, cuya matriz es $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Determine el gráfico de $\mathcal{S} - \mathcal{R}$. **(1 punto)**

(b) Determine la matriz asociada a $\overline{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}}$ **(2 puntos)**

(c) Determine el gráfico asociado a $(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \cap \mathcal{S}^{-1}$ **(2 puntos)**

2. En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow [3(a - c) = 7(b - d)]$$

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. **(3 puntos)**

(b) Calcule tres elementos que pertenecen a la clase de equivalencia de $(-1, 2)$ **(2 puntos)**

3. Considere las funciones G y H, definidas sobre sus respectivos dominios reales, con criterios $H(x) = \dfrac{2}{x-4}$, $G(x) = 2x - 1$. Determine $(G^{-1} \circ H \circ H)(x)$ y encuentre el dominio de esta función.

(4 puntos)

4. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre el conjunto A, con A no vacío. Demuestre que si $\mathcal{R}$ es transitiva, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ es transitiva.

(4 puntos)

5. Pruebe que la función $f\colon \mathbb{R}-\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{-2\}$ definida por $f(x) = \dfrac{5-2x}{x-3}$ es una función biyectiva. **(5 puntos)**

6. Sea $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ considere la función $f\colon A \to A$ definida por:

$$f(a) = \begin{cases} a-3 & \text{si } a \geq 4 \\ a+3 & \text{si } a < 4 \end{cases}$$

   (a) Determine si f es inyectiva.

   (b) Determine si f es sobreyectiva.

   (c) Calcule $f(\{0,3,6\})$

   (d) Calcule $f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(f(\{6\}))$

(5 puntos)

7. Sean A, B y C conjuntos no vacíos, suponga que f es una función de A en B y g una función de B en C.
   Demuestre que si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva. **(4 puntos)**