INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *7 de mayo de 2011*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 29 puntos*
MATEMÁTICA DISCRETA — *Tiempo: 2 h. 15 m.*

# SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

**Este es un examen de desarrollo, por tanto, debe aparecer todos los pasos, y sus respectivas justificaciones, que sean necesarios para obtener su respuesta.**

1. Considere las dos relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ definidas sobre el conjunto $A = \{3, 4, 5, 6\}$, donde $\mathcal{R}$ está definida por

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \Big[\, b = 6 \ \vee \ (a-b)^2 = 1 \,\Big]$$

y la matriz de $\mathcal{S}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determine el gráfico de $\mathcal{R}$ y el gráfico de $\mathcal{S}$. **(2 puntos)**

   (b) Determine la matriz asociada a $\overline{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} \cap \mathcal{R}$. **(3 puntos)**

2. En $\mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow [\ a = b \ \vee \ a + b = 8\ ]$$

   (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. **(4 puntos)**

   (b) Determine la clase de equivalencia de $-10$. **(1 punto)**

3. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones definidas sobre un conjunto $A$, con $A$ no vacío. Demuestre que si $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ es transitiva, entonces $G_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} \subseteq G_{\mathcal{R}\cup\mathcal{S}}$. **(3 puntos)**

4. Considere la función $f\colon \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{k\}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ ,

   (a) Demuestre que $f$ es inyectiva. **(2 puntos)**

   (b) Determine el valor de $k$ para que $f$ sea sobreyectiva. **(2 puntos)**

5. Calcule el criterio de $f^{-1}$ para la función biyectiva $f\colon ]-\infty, 0] \longrightarrow ]-\infty, 5]$ definida por $f(x) = -2x^2 + 5$. **(4 puntos)**

6. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Considere la función $f \colon A \times A \to B$ definida por:

$$f\big((x,y)\big) = \begin{cases} x + y & \text{si } x < y \\ 2x & \text{si } x = y \\ x - y & \text{si } x > y \end{cases}$$

   (a) Determine si $f$ es inyectiva y si es sobreyectiva. **(2 puntos)**

   (b) Calcule $f^{-1}(\{2, 7\})$. **(1 punto)**

   (c) Calcule $f^{-1}\Big(f(\{(2,2)\})\Big)$. **(1 punto)**

7. Sean $A$, $B$ y $C$ conjuntos no vacíos, suponga que $f$ es una función de $A$ en $B$ y además, que $g$ es una función de $B$ en $C$.
   Demuestre que si $g \circ f$ es inyectiva y $f$ es sobreyectiva, entonces $g$ es inyectiva. **(4 puntos)**