$\mathcal{I}$nstituto $\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática
$\mathcal{M}$atemática $\mathcal{D}$iscreta

$\mathcal{T}$iempo: 2 horas y 20 minutos
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 32 puntos
$\mathcal{I}$ $\mathcal{S}$emestre 2013

# $\mathcal{S}$egundo $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial

**Instrucciones**: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Sean $A = \{1, 2, 3, 7\}$ y $\mathcal{R}$ una relación sobre $A$, tal que

$$G_{\mathcal{R}} = \{(1,3), (1,7), (3,1), (3,2), (7,2)\}$$

y sea $\mathcal{S}$ otra relación sobre $A$, definida por

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow a + b \text{ es par}$$

(a) Determine el gráfico de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. (3 puntos)

(b) Determine la matriz asociada a $\left( \overline{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S} \right)^{-1}$ (3 puntos)

2. Sobre $\mathbb{R}$, se define la relación $\mathcal{R}$ de acuerdo al criterio

$$a\mathcal{R}b \iff a - b \in \mathbb{Z}$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia (4 puntos)

(b) Determine explícitamente la clase de equivalencia de 0. (1 punto)

3. Sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $\mathcal{R}$ de acuerdo al siguiente criterio:

$$(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff [a + d \leq b + c \;\; \wedge \;\; a = c]$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es antisimétrica (2 puntos)

(b) Brinde un contraejemplo que verifique que $\mathcal{R}$ no es total. (1 punto)

4. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{6\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{5\}$ definida por $f(x) = \dfrac{3}{x-6} + 5$

   (a) Pruebe que $f$ es biyectiva. (4 puntos)

   (b) Determine $f^{-1}(x)$. (1 punto)

5. Sea $A = \{2, 3, 4, 6, 12\}$ . Considere la función $f : A \times A \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(a, b) = ab$. Dados los conjuntos $B = \{(2, 2), (3, 4), (2, 6)\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$

   (a) Determine $f(B)$ y $f^{-1}(C)$ (3 puntos)

   (b) ¿ Es $f$ inyectiva?, ¿ es $f$ sobreyectiva? Explique. (2 puntos)

6. Sean $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ tres relaciones sobre un conjunto $A$, con $A$ no vacío. Si se sabe que $\mathcal{R}$ es transitiva y se cumple que $a(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})\, b \wedge b(\mathcal{T} \circ \mathcal{R})\, c$, pruebe que $a[(\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) \circ S]\, c$. (4 puntos)

7. Sea $f : A \to B$ una función inyectiva y sean $E, D \subseteq A$ tales que $E \cap D = \phi$. Pruebe que $f(E) \cap f(D) = \phi$. (4 puntos)