Práctica para Examen 1

Giovanni Sanabria Brenes

1. Considere la población dada por la variable aleatoria X con media poblacional μ y varianza σ^2. Dada una muestra aleatoria de esta población de tamaño $n > 1 : (X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$, considere los siguientes estadísticos de σ^2

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1} \quad y \quad S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n}$$

   (a) Exprese S_2^2 en términos de S_1^2 y de n.

$$S_2^2 = \frac{n-1}{n} S_1^2$$

   (b) Si S_1^2 es un estadístico insesgado de σ^2, ¿es S_2^2 un estimador insesgado de σ^2? *R/ No*

2. Una variable aleatoria X tiene una distribución con densidad $f(x) = \dfrac{\lambda^2 (x-5)}{e^{\lambda(x-5)}}$ para $x \geq 5$, con λ un parámetro. Dadas las observaciones $x_1 = 6$, $x_2 = 8$ y $x_3 = 11$, encuentre las estimaciones de máxima verosimilitud de λ. *R/* $\frac{3}{5}$

3. Actualmente las personas debido a sus ocupaciones dedican poco tiempo a bañarse antes de ir al trabajo. Una médico señala que una persona se baña un tiempo saludable si tarda al menos 15 minutos en esta actividad. Seguidamente se presentan el tiempo en minutos que tarda 15 personas en bañarse antes de ir al trabajo, tomadas al azar de la ciudad C

$$10, 6, 8, 7, 10, 11, 15, 20, 17, 17, 16, 5, 12, 8, 9$$

   (a) Determine un IC del 90% para el promedio en minutos que tardan en bayarse las personas de la ciudad C que laboran. *R/* $]9.31741, 13.4826[$

   (b) ¿Considera que las personas de la ciudad C que laboran, en promedio tardan un tiempo saludable en bañarse? Justifique. *R/ No*

   (c) Determine un intervalo de confianza de 95% para **la proporción p** de personas de la ciudad C que tardan un tiempo saludable en bañarse antes de ir al trabajo. *R/* $]0.152077 , 0.647923[$

   (d) ¿Considera que el IC hallado es muy grande? Determine el tamaño de la muestra si se quiere un IC del 95% para p con un radio menor a la cuarta parte del radio del IC hallado en c, sin importar el verdadero valor de p. *R/ 250*

4. Una persona denuncia ante la Oficina del Consumidor que el peso de una bolsa de azúcar Dulce, con peso marcado de 2 kg, suele ser muy variable. Ante esto, un Inspector de la Oficina del Consumidor desea determinar si la desviación estándar del peso de estas bolsas es superior a $50g$, si esto sucede sancionará a la empresa Dulce S.A. En una muestra al azar de 20 bolsas de azúcar Blanco se observó una desviacíon estándar de 0.105, a partir de estos el inspector obtuvo un IC para la variancia de los pesos de la bolsa de azúcar Blanco en kilogramos.

$$]0.00274171, 0.012999[$$

Suponga que el peso de la bolsa de arroz Blanco sigue una distribución normal.

(a) ¿Es confiable el IC determinado por el inspector. Determine aproximadamente su nivel de confianza. $R/$ 98%

(b) ¿Aceptaría que la empresa Blanco reciba una sanción de parte de la Oficina del Consumidor? Justifique su respuesta. $R/$ $]0.05236, 0.114\,013[$

5. Considere la población X_1 con media poblacional μ_1 y variancia poblacional σ_1^2. Considere la población X_2 con media poblacional μ_2 y variancia poblacional σ_2^2. Suponga que $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ siguen una distribución normal para muestras de tamaño n y $3n$ respectivamente, y se conocen σ_1 y σ_2. Demuestre que para encontrar un intervalo de confianza del $100\,(1-\alpha)\,\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ con un radio menor o igual r, se debe cumplir que

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{3}}}{r} \right)^2 .$$

6. Se quiere analizar la vida útil en años de las marcas de computadoras A y H. Un vendedor indica que las computadoras H son más caras porque la vida útil promedio de las A es inferior en al menos 2 años a la vida útil promedio de las computadoras H. Se determanaron duraciones de ambos tipos de computadoras, la información se resume en la siguiente tabla

Computadora	tamaño de muestra	$\overline{x}$	s
A	17	2.6 años	0.9 años
H	11	4.7 años	1.1 años

Juan, un estudiante de estadística, a partir de estos datos determinó un IC del 95% para la diferencia de las vidas útiles promedio de las computadoras entre el tipo A y el tipo H, suponiendo que las variancias poblacionales son iguales.

(a) Determine el IC que halló Juan. $R/$ $]-2.\,880\,88, -1.\,319\,12[$

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \pm t_{\alpha/2,v} \cdot \sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}},$$

donde

$$\begin{aligned} s_p^2 &= \frac{16s_1^2+10s_1^2}{26} = \frac{16\,(0.9)^2+10\,(1.1)^2}{26} \approx 0.963\,846 \\ t_{\alpha/2,v} &= t_{0.025,26} = -2.05553. \end{aligned}$$

: Entonces, si tiene que el IC tiene extremos

$$(2.6-4.7)+2.05553\cdot\sqrt{\frac{0.963\,846}{17}+\frac{0.963\,846}{11}} \approx -2.1 \pm 0.780\,883\,.$$

Así un IC del 95% para $\mu_1-\mu_2$ es$]-2.\,880\,88, -1.\,319\,12[$.

(b) ¿Es aceptable la suposición que hace Juan para hallar el IC de suponer que las variacias son iguales? Utilice un nivel de significancia del 5%. $R/$ $]0.598\,968\,,4.\,224\,54[$, Si

$$\begin{aligned} f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1} &= f_{0.95,16,10} = 2.828 \\ f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} &= f_{0.95,10,16} = 2.494 \end{aligned}$$

Por lo tanto, un intervalo de confianza del 90% para $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ es

$$\begin{aligned} I &= \left]\frac{s_2^2}{s_1^2\ f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1}}, \frac{s_2^2 f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}}{s_1^2}\right[\\ &= \left]\frac{()^2}{(0.9)^2\cdot 2.494}, \frac{(1.1)^2\cdot 2.828}{(0.9)^2}\right[=]0.598\,968\,,4.\,224\,54[\end{aligned}$$

Como $1\in I$ se acepta la suposición de Juan. Puede realizar tambien la prueba de hipótesis:

Afir: $\sigma_1 \neq \sigma_2$
$H_0:\sigma_1=\sigma_2 \quad H_1:\sigma_1\neq\sigma_2 \quad$ ó $\quad H_0:\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}=1 \quad H_1:\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\neq 1$
$s_1 = 1.1$ y $s_2 = 32.18$
$f_{c1} = F_{0.025;16;10} = \dfrac{1}{F_{0.975;10;16}} = \dfrac{1}{2.986} = 0.334\,896 \qquad f_{c2} = f_{0.975;16;10} = 3.496$:
$f_{obs} = \dfrac{1.1^2}{0.9^2} = 1.\,493\,83$ que está en la zona de aceptación de H_0
Por lo tanto se puede suponer que las variancias son iguales.

(c) ¿Se comprueba la afirmación del vendedor? $R/$ No

7. Zapatos Únicos desea abrir una tienda exclusiva de su calzado en una de las ciudades A ó B, las cuales tiene cantidad de habitantes similares. El gerente asegura que la tienda se debe abrir en A pues el porcentaje de habitantes que utilizan este calzado es mayor, con respecto al porcentaje en la ciudad B. En un encuesta se reuniéron los siguientes datos:

Ciudad A:	23 habitantes utilizan el canzado de 120
Ciudad B:	19 habitantes utilizan el canzado de 130

(a) Encuentre un intervalo de confianza del 96% para la diferencia de proporciones de habitantes que utilizan el calzado entre las ciudades A y B. $R/ \quad]-0.0517495, 0.0.142775[$

(b) ¿Los datos apoyan la afirmación que realiza el gerente? $R/ \quad No$

8. Considere la población A con media poblacional μ_1 desconocida y con variancia poblacional 8.1^2. Considere también la población B con media poblacional μ_2 desconocidad y variancia poblacional 6.7^2. Suponga que $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ siguen una distribución normal para muestras de tamaños respectivos n y $3n$. ¿De qué tamaño deben ser las muestras para encontrar un intervalo de confianza del 96% para $\mu_1 - \mu_2$ con un radio menor o igual a 2? $R/ \quad 85$

9. Una variable aleatoria X tiene una distribución geométrica de parámetro p (la densidad es $f(x) = p(1-p)^x$ para $x = 0, 1, 2, ...$). Dadas las observaciones $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $x_3 = 8$ y $x_4 = 9$, encuentre las estimaciones de máxima verosimilitud de p. $R/ \quad \frac{4}{35}$

10. Una línea aérea afirma que el retraso en la salida de sus vuelos tiene un promedio menor que 10 minutos. En una muestra de siete vuelos se registran los siguientes retrasos, en minutos: 11, 7, 13, 9, 17, 8 y 12. Suponga que los retrasos en la salida de los vuelos siguen una distribución normal.

    (a) Encuentre un intervalo de confianza del 90% para el retraso promedio.$R/ \quad]8.491\,37, 13.508\,6[$

    (b) ¿Ese intervalo es evidencia en contra de la afirmación de la empresa? ¿Por qué? $R/ \quad No$

11. Se desea estimar el porcentaje de habitantes de una ciudad C que no se lavan los dientes regularmente. Con una muestra de tamaño 80 se observó que menos de la mitad no se lavan los dientes regularmente y se obtuvo un IC del 95% cuyo radio fue de 0.095. Determine aproximadamente cuántas personas en la muestra no se lavan los dientes regularmente. $R/ \quad \dfrac{1}{4}$

12. Para controlar el buen embolsado de sus productos un productor de fertilizantes toma una muestra de 15 bolsas del mismo, obteniendo una desviación estándar de 0.50 kg. Suponga que los pesos de las bolsas siguen una distribución normal.

    (a) Determine un intervalo de confianza del 98% para la variancia que tendrán los pesos de las bolsas de fertilizante. $R/ \quad]0.120\,105\,, 0.751\,004[$

    (b) ¿Es razonable suponer que la desviación estándar que tendrán los pesos de las bolsas de fertilizante es de 300 gramos? $R/ \quad]0.346\,562\,, 0.866\,605\,[$, no

13. Se quiere estimar la diferencia entre la proporción de personas albinas de Europa y la proporción de personas albinas de América. ¿De qué tamaños deben ser las muestras para obtener un intervalo de confianza del 95% con radio no mayor que 0.03? $R/ \quad 2135$

14. Suponga que los pesos de los estudiantes hombres del Tec siguen una distribución normal al igual que los pesos de las estudiantes. Una muestra de estudiantes del Tec contiene 61 hombres y 31 mujeres. En la muestra, los pesos de los hombres tienen una desviación estándar de 8.79 kg, y los de las mujeres una desviación estándar de 8.52 kg.

    (a) Encuentre un intervalo de confianza del 95% para el cociente de las desviaciones estándar. $R/ \quad]0.586\,438\,, 2.064\,91[$

(b) ¿Es razonable suponer que las desviaciones estándar poblacionales son iguales? $R/$ Si

15. El tiempo que un estudiante tarda en cierto examen es una variable aleatoria T con función de densidad $f(t) = (\theta + 1)t^{\theta}$ para $0 \leq t \leq 1$ con $\theta > -1$. Cuatro estudiantes seleccionados al azar tardan $t_1 = 0.79$, $t_2 = 0.65$, $t_3 = 0.47$ y $t_4 = 0.97$. Encuentre la estimación de máxima verosimilitud de θ. $R/ \quad -3.754\,85$

16. Taxis Tiquicia planea comprar una flota de taxis. La decisión de comprar cierta marca depende de si los autos de dicha marca rinden por lo menos 43 km por galón de gasolina en promedio. Alquilan 36 carros de la marca Odoronly, que reportan una media de 40.2 km por galón, con una desviación estándar de 5.5 km por galón. A un nivel de confianza de 98%, ¿aconsejaría usted a Taxis Tiquicia comprar autos de esta marca? $R/ \quad]38.064\,2, 42.335\,8[$, No

17. Considere la siguiente muestra, tomada de un estudio de acceso a Internet en hogares de cierta comunidad:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 1, \\ x_9 &= 0, x_{10} = 0, x_{11} = 1, x_{12} = 0, x_{13} = 0, x_{14} = 1, x_{15} = 1 \end{aligned}$$

donde $x_i = 1$ si el hogar i-ésimo tiene acceso a Internet, o $x_i = 0$ si no lo tiene.

(a) Encuentre un intervalo de confianza de 95% para p, la proporción de hogares en esta comunidad que tienen acceso a Internet. $R/ \quad]0.280\,861, 0.785\,805[$

(b) ¿Cuántos hogares debe incluir la muestra si queremos un intervalo de confianza de 95% con radio menor que 0.5?

18. Para estimar una desviavión estándar se halló el siguiente IC del 98% utilizando una muestra de tamaño 15 :

$$]0.120\,105\,, 0.751\,004[$$

Para hallar el IC se supuso que la población sigue una distribución normal. Detemine la variación muestral utilizada en el calculo del IC. $R/ \quad 0.5$

19. Una variable aleatoria X tiene una distribución con densidad $f(x) = \dfrac{k}{7}\left(\dfrac{x}{7}\right)^{k-1}$ para $0 \leq x \leq 7$, con k constante.

(a) Dadas las observaciones $x_1 = 2.8$, $x_2 = 3.5$ y $x_3 = 1.4$, encuentre la estimación de máxima verosimilitud de k. $R/ \quad 0.932\,002$

(b) Dadas las observaciones $x_1 = 1.4$, $x_2 = 0.7$ y $x_3 = 3.5$, encuentre la estimación de máxima verosimilitud de k. $R/ \quad 0.651\,442$

20. Una muestra de 10 alturas de álboles de cierto tipo con 30 años de edad dio una media 4.38 metros y una desviación estándar de 0.06 metros. Hallar un intervalo de confianza del 95% para la altura promedio de este tipo de árboles con 30 años de edad. $R/ \quad]4.334\,76, 4.425\,24[$

21. Si $]30, 46[$ es el intervalo de confianza del 95 % para la media de una variable aleatoria normalmente distribuida con variancia desconocida, basado en una muestra de tamaño 16, halle el valor de la variancia muestral. $R/ \quad 225.399$