INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ALGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN

I Semestre del 2011
Total: 35 puntos
Tiempo: 2 horas y 30 minutos.

SEGUNDO PARCIAL

Instrucciones: Trabaje en forma ordenada y clara en su cuaderno de examen. Escriba todos los procedimientos que utilice para resolver los ejercicios propuestos. Se permite el uso de calculadora científica o de menor potencia. Apague el celular.

1. Considere el conjunto $(Z_2 \times Z_3, \oplus)$ en donde se define

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

   Demuestre que:

   (a) Es un grupo abeliano. **(3 puntos)**

   (b) Halle todos los elementos del Grupo **(2 puntos)**

2. Asuma que las matrices de 2×2 es un conjunto asociativo con la suma y el producto, y que el producto es distributivo respecto a la suma. Demuestre que:

   (a) Las matrices de 2×2 es un anillo. **(3 puntos)**

   (b) Justifique si tiene o no divisores de cero. **(2 puntos)**

3. Sea G un grupo, con H y K subgrupos de G. Demuestre que $H \cap K$ es subgrupo de G. **(4 puntos)**

4. Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Demuestre que $x \cdot x = e, \forall x \epsilon G \Longleftrightarrow G$ es abeliano. **(4 puntos)**

5. Se $(R, +, \cdot)$ un anillo. Demuestre que $0 \cdot r = r \cdot 0 = 0$ donde 0 es el neutro de $+$. **(3 puntos)**

6. Determine si H_1 y H_2 son subespacios vectoriales del espacio vectorial real V indicado.

   (a) $H_1 = \{f(x) / \int_a^b f(x)\, dx = 1\}$ en V, donde V es el espacio vectorial sobre IR de todas las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. **(3 puntos)**

   (b) $H_2 = \{(x, y, z) \epsilon \text{ IR}^3 / x + y + z = 0 \wedge x + y - z = 0\}$ en V, donde $V = \text{IR}^3$. **(3 puntos)**

7. Sea W el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores u, v, w es decir $W = Cl\{u, v, w\}$, con $u = (-3, 4), v = (\frac{-6}{5}, \frac{8}{5}), w = (4, \frac{-16}{3})$.

   (a) Halle una base para W. **(3 puntos)**

   (b) Halle la dimensión de W. **(2 puntos)**

8. Suponga que $\{v_1, ..., v_n\}$ es un conjunto de vectores $l.i.$ de un espacio vectorial V y sea v un vector que pertenece al conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, ..., v_n$ es decir $v \,\epsilon\, Cl\{v_1, ..., v_n\}$. Demuestre que $\{v_1, ..., v_n, v\}$ es $l.d.$ **(3 puntos)**