Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática

Christian Páez Páez

2014

Transformaciones Lineales

Índice

1 Introducción

Anteriormente, estudiamos temas relacionados con *espacios vectoriales*. Ahora, vamos a retomar uno de los conceptos más importantes en matemáticas, el concepto de función; específicamente, estaremos estudiando algunas funciones definidas sobre espacios vectoriales, que satisfacen ciertas propiedades.
Este tipo de funciones son llamadas *transformaciones lineales* y, frecuentemente, se presentan en problemas tanto de matemáticas puras como de matemáticas aplicadas.
Dos de los más importantes ejemplos de transformaciones lineales se han considerado en cursos anteriores; la *diferenciación* y la *integración* son los ejemplos en cuestión y posteriormente las estaremos retomando.

2 Transformaciones Lineales

Es importante recordar que una función $\mathcal{T}$ con dominio $\mathcal{V}$ y codominio $\mathcal{W}$ es denotada como $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$

Definición 1 (transformación lineal)
Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales. Toda función $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una transformación lineal *de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ si $\forall x, y \in \mathcal{V}$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, se cumplen las propiedades siguientes:*

a) $\mathcal{T}(x + y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y)$

b) $\mathcal{T}(\alpha x) = \alpha \mathcal{T}(x)$

Ejemplo 1
Considere la función $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathcal{T}(a, b) = (a + b, a - b, 3b)$

a) *Determine la imagen del vector $(-2, 8)$ y la imagen del vector $(0, 0)$*

b) *Verifique que $\mathcal{T}$ es una transformación lineal.*[a]

c) *Determine, si es que existe, algún vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tal que $\mathcal{T}(a, b) = (6, 2, 6)$*

d) *Determine, si es que existe, algún vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tal que $\mathcal{T}(a, b) = (2, -3, 12)$*

Solución

a) Las imágenes respectivas de los vectores son las siguientes:

i) $\mathcal{T}(-2, 8) = (-2 + 8, -2 - 8, 3 \cdot 8) = (6, -10, 24)$
ii) $\mathcal{T}(0, 0) = (0 + 0, 0 - 0, 3 \cdot 0) = (0, 0, 0)$

[a] Si $\mathcal{T}$ es una transformación lineal, se dice que $\mathcal{T}$ es una aplicación lineal o, simplemente, que $\mathcal{T}$ es lineal.

b) $\mathcal{T}$ es lineal si se satisfacen las dos condiciones enunciadas en la definición 1; veamos:

i) Sean $x = (a_1, b_1)$ y $y = (a_2, b_2)$ vectores de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(x+y) &= \mathcal{T}\Big(\,(a_1,b_1)+(a_2,b_2)\,\Big)\\
&= \mathcal{T}(a_1+a_2, b_1+b_2)\\
&= \Big(\,(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\,,(a_1+a_2)-(b_1+b_2)\,,3\,(b_1+b_2)\Big)\\
&= (a_1+a_2+b_1+b_2, a_1+a_2-b_1-b_2, 3b_1+3b_2)\\
&= (a_1+b_1+a_2+b_2, a_1-b_1+a_2-b_2, 3b_1+3b_2)\\
&= (a_1+b_1, a_1-b_1, 3b_1)+(a_2+b_2, a_2-b_2, 3b_2)\\
&= \mathcal{T}(a_1,b_1)+\mathcal{T}(a_2,b_2)\\
&= \mathcal{T}(x)+\mathcal{T}(y)\\
\therefore \mathcal{T}(x+y) &= \mathcal{T}(x)+\mathcal{T}(y)
\end{aligned}$$

ii) Sean $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\alpha x) &= \mathcal{T}\Big(\alpha\,(a,b)\Big)\\
&= \mathcal{T}(\alpha a, \alpha b)\\
&= \Big(\alpha a+\alpha b, \alpha a-\alpha b, 3(\alpha b)\Big)\\
&= \Big(\alpha(a+b), \alpha(a-b), \alpha(3b)\Big)\\
&= \alpha(a+b, a-b, 3b)\\
&= \alpha\mathcal{T}(a,b)\\
&= \alpha\mathcal{T}(x)\\
\therefore \mathcal{T}(\alpha x) &= \alpha\mathcal{T}(x)
\end{aligned}$$

c) Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tal que $\mathcal{T}(a, b) = (6, 2, 6)$

$$\begin{aligned}
& \text{Si } \mathcal{T}(a,b) = (6,2,6)\\
\Rightarrow\quad & (a+b, a-b, 3b) = (6,2,6)\\
\Rightarrow\quad & \begin{cases} a+b=6\\ a-b=2\\ 3b=6 \end{cases}\\
\Rightarrow\quad & \begin{cases} a=6-b\\ a=2+b\\ b=2 \end{cases}\\
\Rightarrow\quad & \begin{cases} a=6-2=4\\ a=2+2=4\\ b=2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ De esta manera, si $(a,b) = (4,2) \Rightarrow \mathcal{T}(a,b) = \mathcal{T}(4,2) = (6,2,6)$

d) Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tal que $\mathcal{T}(a,b) = (2,-3,12)$

$$\begin{aligned} & \text{Si } \mathcal{T}(a,b) = (2,-3,12) \\ \Rightarrow \quad & (a+b, a-b, 3b) = (2,-3,12) \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} a+b = 2 \\ a-b = -3 \\ 3b = 12 \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} a = 2-b \\ a = -3+b \\ b = 4 \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} a = 2-4 \\ a = -3+4 \\ b = 4 \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} -2 = 1 \qquad (\Rightarrow\Leftarrow) \\ b = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$\therefore \nexists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \big/ \mathcal{T}(a,b) = (2,-3,12)$

Ejercicio 1
Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son espacios vectoriales reales, $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una función, $x, y \in \mathcal{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, verifique cada una de las propiedades siguientes:

a) *Si $\mathcal{T}$ es lineal, entonces $\mathcal{T}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$*

b) *Si $\mathcal{T}$ es lineal, entonces $\mathcal{T}(-x) = -\mathcal{T}(x)$*

c) *Si $\mathcal{T}$ es lineal, entonces $\mathcal{T}(x-y) = \mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)$*

d) *$\mathcal{T}$ es lineal si, y solo si, $\mathcal{T}(\alpha x + y) = \alpha \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y)$*[b]

e) *$\forall x_i \in \mathcal{V}, \forall \alpha_i \in \mathbb{R},$ con $i = 1, 2, \ldots, n$, se cumple que $\mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{T}(x_i)$ si, y solo si, $\mathcal{T}$ es lineal.*

[b]Usualmente, esta propiedad es utilizada en lugar de la definición 1 para determinar si alguna función es una transformación lineal o no lo es.

Ejemplo 2
Determine, en cada caso, si la función definida es una transformación lineal o no lo es.

a) $\mathcal{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *con* $\mathcal{T}(a,b) = (b-a, b-3)$

b) $\mathcal{T}: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, *con* $\mathcal{T}\left(ax^2+bx+c\right) = (a-c)x^3 + (b-c)x^2 + cx + a + b$

Solución
Para determinar si la función dada es una transformación lineal o no lo es, es conveniente utilizar el resultado "d" del ejercicio 1.

a) Sean $x = (a_1, b_1)$ y $y = (a_2, b_2)$ vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

Por una parte,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\alpha x + y) &= \mathcal{T}\Big(\alpha\,(a_1,b_1) + (a_2,b_2)\Big) \\
&= \mathcal{T}\Big(\,(\alpha a_1, \alpha b_1) + (a_2,b_2)\Big) \\
&= \mathcal{T}(\alpha a_1 + a_2, \alpha b_1 + b_2) \\
&= \Big(\,(\alpha b_1 + b_2) - (\alpha a_1 + a_2)\,, (\alpha b_1 + b_2) - 3\Big) \\
&= (\alpha b_1 + b_2 - \alpha a_1 - a_2, \alpha b_1 + b_2 - 3) \\
\text{Así, } \mathcal{T}(\alpha x + y) &= (\alpha b_1 + b_2 - \alpha a_1 - a_2, \alpha b_1 + b_2 - 3)
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\alpha\mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y) &= \alpha\mathcal{T}(a_1,b_1) + \mathcal{T}(a_2,b_2) \\
&= \alpha\Big(b_1 - a_1, b_1 - 3\Big) + \Big(b_2 - a_2, b_2 - 3\Big) \\
&= (\alpha b_1 - \alpha a_1, \alpha b_1 - 3\alpha) + (b_2 - a_2, b_2 - 3) \\
&= (\alpha b_1 - \alpha a_1 + b_2 - a_2, \alpha b_1 - 3\alpha + b_2 - 3) \\
&= (\alpha b_1 + b_2 - \alpha a_1 - a_2, \alpha b_1 + b_2 - 3 - 3\alpha) \\
\text{Así, } \alpha\mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y) &= (\alpha b_1 + b_2 - \alpha a_1 - a_2, \alpha b_1 + b_2 - 3 - 3\alpha)
\end{aligned}$$

$\therefore \mathcal{T}$ no es lineal, ya que $\mathcal{T}(\alpha x + y) \neq \alpha\mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y)$

b) Sean $p\,(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $q\,(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ vectores de $\mathcal{P}_2\,(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\Big(\alpha p(x) + q(x)\Big) &= \mathcal{T}\left(\alpha(a_1x^2 + b_1x + c_1) + a_2x^2 + b_2x + c_2\right) \\
&= \mathcal{T}\left(\alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha c_1 + a_2x^2 + b_2x + c_2\right) \\
&= \mathcal{T}\left((\alpha a_1 + a_2)x^2 + (\alpha b_1 + b_2)x + \alpha c_1 + c_2\right) \\
&= \Big((\alpha a_1 + a_2) - (\alpha c_1 + c_2)\Big)x^3 + \Big((\alpha b_1 + b_2) - (\alpha c_1 + c_2)\Big)x^2 \\
&\quad + \Big(\alpha c_1 + c_2\Big)x + (\alpha a_1 + a_2) + (\alpha b_1 + b_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha a_1 + a_2 - \alpha c_1 - c_2)\, x^3 + (\alpha b_1 + b_2 - \alpha c_1 - c_2)\, x^2 \\
&\quad + (\alpha c_1 + c_2)\, x + \alpha a_1 + a_2 + \alpha b_1 + b_2 \\
&= (\alpha a_1 - \alpha c_1 + a_2 - c_2)\, x^3 + (\alpha b_1 - \alpha c_1 + b_2 - c_2)\, x^2 \\
&\quad + (\alpha c_1 + c_2)\, x + \alpha a_1 + \alpha b_1 + a_2 + b_2 \\
&= (\alpha a_1 - \alpha c_1)\, x^3 + (a_2 - c_2)\, x^3 + (\alpha b_1 - \alpha c_1)\, x^2 + (b_2 - c_2)\, x^2 \\
&\quad + \alpha c_1 x + c_2 x + \alpha a_1 + \alpha b_1 + a_2 + b_2 \\
&= (\alpha a_1 - \alpha c_1)\, x^3 + (\alpha b_1 - \alpha c_1)\, x^2 + \alpha c_1 x + \alpha a_1 + \alpha b_1 \\
&\quad + (a_2 - c_2)\, x^3 + (b_2 - c_2)\, x^2 + c_2 x + a_2 + b_2 \\
&= \alpha(a_1 - c_1)x^3 + \alpha(b_1 - c_1)x^2 + \alpha c_1 x + \alpha a_1 + \alpha b_1 \\
&\quad + (a_2 - c_2)\, x^3 + (b_2 - c_2)\, x^2 + c_2 x + a_2 + b_2 \\
&= \alpha\Big((a_1 - c_1)\, x^3 + (b_1 - c_1)\, x^2 + c_1 x + a_1 + b_1 \Big) \\
&\quad + (a_2 - c_2)\, x^3 + (b_2 - c_2)\, x^2 + c_2 x + a_2 + b_2 \\
&= \alpha\mathcal{T}(a_1 x^2 + b_1 x + c_1) + \mathcal{T}(a_2 x^2 + b_2 x + c_2) \\
&= \alpha\mathcal{T}\Big(p(x)\Big) + \mathcal{T}\Big(q(x)\Big)
\end{aligned}
$$

$\therefore \mathcal{T}$ es lineal, ya que $\mathcal{T}\Big(\alpha p(x) + q(x)\Big) = \alpha\mathcal{T}\Big(p(x)\Big) + \mathcal{T}\Big(q(x)\Big)$

Ejercicio 2

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales. Verifique que son transformaciones lineales las funciones siguientes.

a) $\mathcal{I}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, *con* $\mathcal{T}(x) = x, \forall x \in \mathcal{V}$

Esta transformación lineal es llamada transformación identidad.

b) $\mathcal{T}_0 : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, *con* $\mathcal{T}(x) = \boldsymbol{0}, \forall x \in \mathcal{V}$

Esta transformación lineal es llamada transformación cero o transformación nula

Práctica 1

Verifique que son transformaciones lineales las funciones siguientes:

a) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $\mathcal{T}(a, b) = (a, -b)$

b) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con $\mathcal{T}(a, b) = (a, a + b, a - b)$

c) $\mathcal{T} : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, con $\mathcal{T}(A) = A^t$

d) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $\mathcal{T}(a, b) = (2a, a + b)$

e) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, con $\mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = a(x + 2)^2 + b(x + 2) + c$

f) Para B alguna matriz fija del espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{T} : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(A) = AB$$

g) Para B alguna matriz fija del espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{T} : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(A) = BA$$

h) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (2a + b, a)$

i) Para $\mathcal{B} = \left\{u_1, u_2, \ldots, u_n\right\}$ alguna base del espacio vectorial $\left(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R}\right)$ y $x \in \mathcal{V}$, tal que $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n,$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n, \text{ con } \mathcal{T}(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

j) Para $\mathcal{V} = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle/ f \text{ es derivable en } \mathbb{R}\right\}$,

$$\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \text{ con } \mathcal{T}(f(x)) = f'(x)$$

k) Para $\mathcal{V} = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle/ f \text{ es continua en } \mathbb{R}\right\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$,

$$\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}, \text{ con } \mathcal{T}(f(x)) = \int_a^b f(t)dt$$

l) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \text{ con } \mathcal{T}(a, b, c) = (a + b + c, b + c, 3a + b, 2b + c)$

m) Para $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (a + \lambda b, -b)$

n) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = (b + 2c)x + a + c$

o) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (a - b, a + b)$

p) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (a + b, a - b)$

q) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (2a + b, a - 2b)$

r) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$

s) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$

t) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = a(2x + 1)^2 + b(2x + 1) + c$

u) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = bx + c$

v) $\mathcal{T} : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \text{ con } \mathcal{T}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2a + 3b + c - d$

w) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, con $\mathcal{T}(ax+b) = a(x+3)+b$

x) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $\mathcal{T}(a,b,c) = (c-b, c-a, a+b)$

y) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, con $\mathcal{T}(ax^2+bx+c) = (9b-20a)x^2+(13b-30a)x+12a-6b+c$

z) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $\mathcal{T}(a,b,c) = (4a+c, 2a+3b+2c, a+4c)$

Definición 2 (núcleo e imagen de una transformación lineal)
Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales y $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. Se definen el núcleo[c] *de $\mathcal{T}$ y la imagen*[d] *de $\mathcal{T}$, denotados como $Nucl(\mathcal{T})$ e $Im(\mathcal{T})$, respectivamente, de la manera siguiente:*

a) $Nucl(\mathcal{T}) = \left\{v \in \mathcal{V} \big/ \mathcal{T}(v) = \boldsymbol{0}\right\}$

b) $Im(\mathcal{T}) = \left\{w \in \mathcal{W} \big/ \text{ para al menos un } v \in \mathcal{V}, w = \mathcal{T}(v)\right\}$

Ejemplo 3
Si se sabe que $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ 0 & 3c \end{pmatrix}$ es lineal, determine:

a) $Nucl(\mathcal{T})$

b) $Im(\mathcal{T})$

Solución

a) Sea $x \in Nucl(\mathcal{T})$

Si $x \in Nucl(\mathcal{T}) \Rightarrow x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{T}(x) = \mathbf{0}$; esto es,

$$\mathcal{T}(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ 0 & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[c] También es llamado *kernel* de $\mathcal{T}$ y denotado como $Ker(\mathcal{T})$
[d] También es llamada *recorrido* de $\mathcal{T}$ y denotada como $R(\mathcal{T})$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-b=0 \\ b-a=0 \\ 0=0 \\ 3c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=b \\ b=a \\ 0=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=\lambda \\ b=\lambda \\ c=0 \end{cases}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Así, $x=(\lambda,\lambda,0)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

$\therefore Nucl(\mathcal{T})=\left\{(\lambda,\lambda,0)\big/\lambda \in \mathbb{R}\right\}=\mathcal{G}en\left(\{(1,1,0)\}\right)$

b) Sea $A \in Im(\mathcal{T})$

Si $A \in Im(\mathcal{T}) \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}(x)=A$, para algún $x=(x_1,x_2,x_3)\in \mathbb{R}^3$; esto es,

$$\mathcal{T}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\mathcal{T}(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1-x_2 & x_2-x_1 \\ 0 & 3x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1-x_2=a \\ x_2-x_1=b \\ 0=c \\ 3x_3=d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=x_1-x_2 \\ b=-(x_1-x_2) \\ c=0 \\ d=3x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=\lambda \\ b=-\lambda \\ c=0 \\ d=\delta \end{cases}, \text{ con } \lambda,\delta \in \mathbb{R}$$

Así, $A = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, con $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$

$\therefore Im(\mathcal{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \Big/ \lambda, \delta \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{G}en \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$

Teorema 1

Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son espacios vectoriales reales y $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es lineal, entonces:

a) $Nucl(\mathcal{T}) \preceq \mathcal{V}$

b) $Im(\mathcal{T}) \preceq \mathcal{W}$

Demostración

a) Como $Nucl(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{V}$ y $Nucl(\mathcal{T}) \neq \varnothing$, para demostrar que $Nucl(\mathcal{T})$ es subespacio de $\mathcal{V}$ basta probar que $\forall x, y \in Nucl(\mathcal{T})$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, se cumplen las propiedades siguientes:

i) $x + y \in Nucl(\mathcal{T})$

ii) $\alpha x \in Nucl(\mathcal{T})$

Veamos: sean $x, y \in Nucl(\mathcal{T})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

i) Si $x \in Nucl(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{T}(x) = \mathbf{0}$; asimismo, si $y \in Nucl(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{T}(y) = \mathbf{0}$

Luego,

$$\begin{array}{rl} & \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y) = \mathbf{0} + \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y) = \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \mathcal{T}(x + y) = \mathbf{0} \end{array}$$

$\therefore x + y \in Nucl(\mathcal{T})$, ya que $\mathcal{T}(x + y) = \mathbf{0}$

ii) Si $x \in Nucl(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{T}(x) = \mathbf{0}$

Luego,

$$\begin{array}{rl} & \alpha\,\mathcal{T}(x) = \alpha \cdot \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \alpha\,\mathcal{T}(x) = \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \mathcal{T}(\alpha x) = \mathbf{0} \end{array}$$

$\therefore \alpha x \in Nucl(\mathcal{T})$, ya que $\mathcal{T}(\alpha x) = \mathbf{0}$

De esta manera, se concluye que $Nucl(\mathcal{T})$ es subespacio de $\mathcal{V}$

b) Como $Im(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{W}$ e $Im(\mathcal{T}) \neq \varnothing$, para demostrar que $Im(\mathcal{T})$ es subespacio de $\mathcal{W}$ basta probar que $\forall x, y \in Im(\mathcal{T})$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, se cumplen las propiedades siguientes:

i) $x + y \in Im(\mathcal{T})$

ii) $\alpha x \in Im(\mathcal{T})$

Veamos: sean $x, y \in Im(\mathcal{T})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

i) Si $x \in Im(\mathcal{T})$, existe al menos un vector $u_1 \in \mathcal{V}$, tal que $\mathcal{T}(u_1) = x$; asimismo, si $y \in Im(\mathcal{T})$, existe al menos un vector $u_2 \in \mathcal{V}$, tal que $\mathcal{T}(u_2) = y$. Luego,

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}(u_1) + \mathcal{T}(u_2) = x + y \\ \Rightarrow \quad & \mathcal{T}(u_1 + u_2) = x + y \end{aligned}$$

$\therefore$ $x + y \in Im(\mathcal{T})$, ya que existe al menos un vector $u_1 + u_2 \in \mathcal{V}$, tal que $\mathcal{T}(u_1 + u_2) = x + y$

ii) Si $x \in Im(\mathcal{T})$, existe al menos un vector $u \in \mathcal{V}$, tal que $\mathcal{T}(u) = x$ Luego,

$$\begin{aligned} & \alpha\,\mathcal{T}(u) = \alpha \cdot x \\ \Rightarrow \quad & \mathcal{T}(\alpha u) = \alpha x \end{aligned}$$

$\therefore$ $\alpha x \in Im(\mathcal{T})$, ya que existe al menos un vector $\alpha u \in \mathcal{V}$, para el que $\mathcal{T}(\alpha u) = \alpha x$

De esta manera, se concluye que $Im(\mathcal{T})$ es subespacio de $\mathcal{W}$

Dada la importancia de los espacios vectoriales $Nucl(\mathcal{T})$ e $Im(\mathcal{T})$, sus dimensiones reciben nombres específicos.

Definición 3 (nulidad y rango de una transformación lineal)
Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales y $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. Si $Nucl(\mathcal{T})$ e $Im(\mathcal{T})$ son espacios vectoriales finitos, se definen sus dimensiones respectivas de la manera siguiente:

a) *nulidad de $\mathcal{T}$, denotada por $n(\mathcal{T})$, como:*

$$n(\mathcal{T}) = \dim(Nucl(\mathcal{T}))$$

b) *rango de $\mathcal{T}$, denotado por $r(\mathcal{T})$, como:*

$$r(\mathcal{T}) = \dim(Im(\mathcal{T}))$$

Ejemplo 4
Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales. Considerando las transformaciones lineales $\mathcal{I}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ y $\mathcal{T}_0 : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$; determine:

a) $Nucl\left(\mathcal{I}_{\mathcal{V}}\right)$ *y* $n\left(\mathcal{I}_{\mathcal{V}}\right)$

b) $Im\left(\mathcal{I}_{\mathcal{V}}\right)$ *y* $r\left(\mathcal{I}_{\mathcal{V}}\right)$

c) $Nucl\left(\mathcal{T}_0\right)$ *y* $n\left(\mathcal{T}_0\right)$

d) $Im\left(\mathcal{T}_0\right)$ *y* $r\left(\mathcal{T}_0\right)$

Solución

a) Como $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}(x) = x, \forall x \in \mathcal{V}$, entonces $Nucl(\mathcal{I}_{\mathcal{V}}) = \Big\{\mathbf{0}\Big\}$

Note que en $\mathcal{V}$ solo $x = \mathbf{0}$ satisface $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}(x) = \mathbf{0}$

De esta manera, $n(\mathcal{I}_{\mathcal{V}}) = 0$

b) Como $\mathcal{I}_{\mathcal{V}}(x) = x, \forall x \in \mathcal{V}$, entonces $Im(\mathcal{I}_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}$

Note que todo elemento de $\mathcal{V}$ posee preimagen.

De esta manera, $r(\mathcal{I}_{\mathcal{V}}) = dim(\mathcal{V})$

c) Como $\mathcal{T}_0(x) = \mathbf{0}, \forall x \in \mathcal{V}$, entonces $Nucl(\mathcal{T}_0) = \mathcal{V}$

Note que todo $x \in \mathcal{V}$ satisface $\mathcal{T}_0(x) = \mathbf{0}$

De esta manera, $n(\mathcal{T}_0) = dim(\mathcal{V})$

d) Como $\mathcal{T}_0(x) = \mathbf{0}, \forall x \in \mathcal{V}$, entonces $Im(\mathcal{T}_0) = \Big\{\mathbf{0}\Big\}$

Note que en $\mathcal{W}$ solo $\mathbf{0}$ posee preimágenes.

De esta manera, $r(\mathcal{T}_0) = 0$

Ejemplo 5

Para el ejemplo 3 se consideró la transformación lineal $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*, definida por* $\mathcal{T}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ 0 & 3c \end{pmatrix}$*, y se determinaron, respectivamente,* $Nucl(\mathcal{T})$ *e* $Im(\mathcal{T})$*. Halle el valor de* $n(\mathcal{T})$ *y el valor de* $r(\mathcal{T})$

Solución

En el ejemplo 3 se concluyó que

$$Nucl(\mathcal{T}) = \Big\{(\lambda,\lambda,0) \Big/ \lambda \in \mathbb{R}\Big\} = \mathcal{G}en\left(\{(1,1,0)\}\right)$$

Es claro que $\{(1,1,0)\}$ es una base de $Nucl(\mathcal{T})$

$\therefore n(\mathcal{T}) = 1$

Por otra parte, en el ejemplo 3 se concluyó que

$$Im(\mathcal{T}) = \left\{\begin{pmatrix} \lambda & -\lambda \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \Big/ \lambda, \delta \in \mathbb{R}\right\} = \mathcal{G}en\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

El conjunto $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base[e] de $Im(\mathcal{T})$

$\therefore r(\mathcal{T}) = 2$

Ejercicio 3

Considere la función $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $\mathcal{T}(a, b, c) = (-a, 0, b)$. *Verifique que:*

a) $\mathcal{T}$ *es lineal.*

b) $Nucl(\mathcal{T}) = \left\{ (0, 0, \lambda) \big/ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

c) $r(\mathcal{T}) = 2$

Teorema 2

Sean $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{W}$ *espacios vectoriales reales y* $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *una transformación lineal. Si el conjunto* $\mathcal{B} = \left\{ u_1, u_2, \ldots, u_n \right\}$ *es una base de* $\mathcal{V}$ *y* $Nucl(\mathcal{T}) = \left\{ \boldsymbol{0} \right\}$, *entonces* $\mathcal{H} = \left\{ \mathcal{T}(u_1), \mathcal{T}(u_2), \ldots, \mathcal{T}(u_n) \right\}$ *es una base de* $Im(\mathcal{T})$

Demostración

Para demostrar que $\mathcal{H} = \left\{ \mathcal{T}(u_1), \mathcal{T}(u_2), \ldots, \mathcal{T}(u_n) \right\}$ es una base de $Im(\mathcal{T})$ hay que verificar las dos condiciones siguientes.

a) $\mathcal{H}$ es linealmente independiente.

b) $\mathcal{G}en\,(\mathcal{H}) = Im(\mathcal{T})$

Veamos:

a) Para demostrar que $\mathcal{H}$ es $l.i$, hay que verificar que dados $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 \mathcal{T}(u_1) + \alpha_2 \mathcal{T}(u_2) + \cdots + \alpha_n \mathcal{T}(u_n) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \mathcal{T}(u_1) + \alpha_2 \mathcal{T}(u_2) + \cdots + \alpha_n \mathcal{T}(u_n) = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathcal{T}(\alpha_1 u_1) + \mathcal{T}(\alpha_2 u_2) + \cdots + \mathcal{T}(\alpha_n u_n) = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathcal{T}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

[e]Recuerde un conjunto $\mathcal{B}$ es una base de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ si, y solo si,

i. $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, y

ii. $\mathcal{B}$ genera a $\mathcal{V}$

Como $Nucl(\mathcal{T}) = \Big\{\mathbf{0}\Big\}$, se cumple que $\mathcal{T}(x) = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$; así,

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Como $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son $l.i$,

$$\begin{aligned} & \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\alpha_1 \mathcal{T}(u_1) + \alpha_2 \mathcal{T}(u_2) + \cdots + \alpha_n \mathcal{T}(u_n) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

$\therefore \mathcal{H}$ es linealmente independiente.

b) $\mathcal{G}en\,(\mathcal{H}) = Im(\mathcal{T})$ si todo vector $y \in Im(\mathcal{T})$ es una combinación lineal de los vectores $\mathcal{T}(u_1), \mathcal{T}(u_2), \ldots, \mathcal{T}(u_n)$

Sea $x \in \mathcal{V}$. Como $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{V}$, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tales que:

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

Luego,

$$\begin{aligned} & x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \\ \Rightarrow \quad & \mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) \end{aligned}$$

Note que $\mathcal{T}(x)$ representa todo vector $y \in \mathcal{W}$ que es imagen de algún vector $x \in \mathcal{V}$; es decir, $\mathcal{T}(x) = y$ representa todo vector de $Im(\mathcal{T})$

Así,

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) \\ \Rightarrow \quad & y = \mathcal{T}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) \\ \Rightarrow \quad & y = \mathcal{T}(\alpha_1 u_1) + \mathcal{T}(\alpha_2 u_2) + \cdots + \mathcal{T}(\alpha_n u_n) \\ \Rightarrow \quad & y = \alpha_1 \mathcal{T}(u_1) + \alpha_2 \mathcal{T}(u_2) + \cdots + \alpha_n \mathcal{T}(u_n) \end{aligned}$$

De esta manera, todo vector $y \in Im(\mathcal{T})$ es una combinación lineal de los vectores $\mathcal{T}(u_1), \mathcal{T}(u_2), \ldots, \mathcal{T}(u_n)$

$\therefore \mathcal{G}en\,(\mathcal{H}) = Im(\mathcal{T})$

Con esto, queda demostrado que $\mathcal{H} = \Big\{\mathcal{T}(u_1), \mathcal{T}(u_2), \ldots, \mathcal{T}(u_n)\Big\}$ es una base de $Im(\mathcal{T})$

Teorema 3
Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son espacios vectoriales reales, tales que $\mathcal{V}$ es de dimensión finita, y $\mathcal{T}:\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ es lineal, entonces se cumple que

$$n(\mathcal{T})+r(\mathcal{T})=\dim(\mathcal{V})$$

Demostración
Analizaremos siguientes tres casos:

a) $Im(\mathcal{T})=\left\{0\right\}$

b) $Nucl(\mathcal{T})=\left\{0\right\}$

c) $Im(\mathcal{T})\neq\left\{0\right\}$ y $Nucl(\mathcal{T})\neq\left\{0\right\}$

Supongamos que $\dim(\mathcal{V})=n$,

a) Por una parte, si se tiene que $Im(\mathcal{T})=\left\{\mathbf{0}\right\}$, entonces $r(\mathcal{T})=0$

Por otra parte, como $Im(\mathcal{T})=\left\{\mathbf{0}\right\}$, $\mathcal{T}$ representa a la transformación cero, $\mathcal{T}_0$[f]
De esta manera, se tiene que $Nucl(\mathcal{T})=\mathcal{V}$[g] y $\dim(Nucl(\mathcal{T}))=\dim(\mathcal{V})$; es decir, $n(\mathcal{T})=n$

Por lo tanto, $n(\mathcal{T})+r(\mathcal{T})=\dim(\mathcal{V})$

Ejercicio 4
Demuestre el caso b.

c) $Im(\mathcal{T})\neq\left\{\mathbf{0}\right\}$ y $Nucl(\mathcal{T})\neq\left\{\mathbf{0}\right\}$

Supongamos que $n\left(\mathcal{T}\right)=k$, $0<k<n$, con $\mathcal{B}'=\{u_1,u_2,\ldots,u_k\}$ una base de $Nucl\left(\mathcal{T}\right)$

Como $\mathcal{B}'$ es un subconjunto linealmente independiente de $\mathcal{V}$, existen $n-k=m$ vectores de $\mathcal{V}$, tales que el conjunto $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\ldots,u_k,w_1,w_2,\ldots,w_m\}$ es una base de $\mathcal{V}$

Probando que $\mathcal{B}''=\{\mathcal{T}\left(w_1\right),\mathcal{T}\left(w_2\right),\ldots,\mathcal{T}\left(w_m\right)\}$ es una base de $Im\left(\mathcal{T}\right)$ se tendría demostrado que $n\left(\mathcal{T}\right)+r\left(\mathcal{T}\right)=\dim\left(\mathcal{V}\right)$

$\mathcal{B}''$ es base de $Im\left(\mathcal{T}\right)$ si $\mathcal{B}''$ es $l.i$ y si $\mathcal{G}en\left(\mathcal{B}''\right)=Im\left(\mathcal{T}\right)$

Sean $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{R}$, tales que $\alpha_1\mathcal{T}\left(w_1\right)+\alpha_2\mathcal{T}\left(w_2\right)+\cdots+\alpha_m\mathcal{T}\left(w_m\right)=\mathbf{0}$

[f] Ver ejercicio 2.
[g] Ver ejemplo 4.

Luego,

$$\begin{array}{ll}
 & \alpha_1 \mathcal{T}(w_1) + \alpha_2 \mathcal{T}(w_2) + \cdots + \alpha_m \mathcal{T}(w_m) = \mathbf{0} \\
\Rightarrow & \mathcal{T}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_m w_m) = \mathbf{0} \\
\Rightarrow & \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_m w_m = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i \in Nucl(\mathcal{T}) \\
\Rightarrow & \exists \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}, \text{ tales que } \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i \\
\Rightarrow & -\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i = \mathbf{0} \\
\Rightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (-\beta_i) u_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i = \mathbf{0} \\
 & \text{Como } \mathcal{B} \text{ es una base de } \mathcal{V},\ \mathcal{B} \text{ es linealmente independiente} \\
\Rightarrow & \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0
\end{array}$$

Así, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathcal{T}(w_i) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0, \forall i, 1 \leq i \leq m$, con lo que $\mathcal{B}''$ es linealmente independiente.

Sea $y \in Im(\mathcal{T})$

Como $y \in Im(\mathcal{T}), \exists x \in \mathcal{V}$, tal que $y = \mathcal{T}(x)$

Dado que $x \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{V}$, existen $n = k + m$ únicos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$, tales que

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i$$

Luego,

$$\begin{array}{ll}
 & x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i \\
\Rightarrow & \mathcal{T}(x) = \mathcal{T}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i\right) \\
\Rightarrow & y = \mathcal{T}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right) + \mathcal{T}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i\right) \\
\Rightarrow & y = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{T}(u_i) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathcal{T}(w_i)
\end{array}$$

$$\begin{aligned} &\text{Como } \mathcal{B}' \text{ es una base de } Nucl\left(\mathcal{T}\right) \\ \Rightarrow \quad & y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{0} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathcal{T}\left(w_i\right) \\ \Rightarrow \quad & y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathcal{T}\left(w_i\right) \end{aligned}$$

Así, todo vector $y \in Im\left(\mathcal{T}\right)$ es una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}''$, con lo que $\mathcal{G}en\left(\mathcal{B}''\right) = Im\left(\mathcal{T}\right)$

Por lo tanto, $\mathcal{B}'' = \left\{\mathcal{T}\left(w_1\right), \mathcal{T}\left(w_2\right), \ldots, \mathcal{T}\left(w_m\right)\right\}$ es una base de $Im\left(\mathcal{T}\right)$; de esta manera, $\dim\left(Im\left(\mathcal{T}\right)\right) = m$ y queda demostrado que $n\left(\mathcal{T}\right) + r\left(\mathcal{T}\right) = \dim\left(\mathcal{V}\right)$

Práctica 2

Para cada una de las transformaciones $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ que se enuncian, realice lo siguiente:

i) Verifique que $\mathcal{T}$ es lineal.

ii) Determine $Nucl(\mathcal{T})$ y $n(\mathcal{T})$

iii) Determine $Im(\mathcal{T})$ y $r(\mathcal{T})$ utilizando lo desarrollado en la demostración del teorema 3.

a) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (a, -b)$

b) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (a, a + b, a - b)$

c) $\mathcal{T} : \mathcal{M}_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right) \to \mathcal{M}_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right), \text{ con } \mathcal{T}(A) = A^t$

d) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (2a, a + b)$

e) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2\left(\mathbb{R}\right) \to \mathcal{P}_2\left(\mathbb{R}\right), \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = a(x + 2)^2 + b(x + 2) + c$

f) Para B alguna matriz fija del espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 3}\left(\mathbb{R}\right)$,

$$\mathcal{T} : \mathcal{M}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) \to \mathcal{M}_{2\times 3}\left(\mathbb{R}\right), \text{ con } \mathcal{T}(A) = AB$$

g) Para B alguna matriz fija del espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$,

$$\mathcal{T} : \mathcal{M}_{n\times 1}\left(\mathbb{R}\right) \to \mathcal{M}_{m\times 1}\left(\mathbb{R}\right), \text{ con } \mathcal{T}(A) = BA$$

h) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (2a + b, a)$

i) Para $\mathcal{B} = \left\{u_1, u_2, \ldots, u_n\right\}$ alguna base del espacio vectorial $\left(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R}\right)$ y $x \in \mathcal{V}$, tal que $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n, \text{ donde } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n, \text{ con } \mathcal{T}(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

j) Para $\mathcal{V} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle/ f \text{ es derivable en } \mathbb{R} \right\}$,

$$\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \text{ con } \mathcal{T}(f(x)) = f'(x)$$

k) Para $\mathcal{V} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle/ f \text{ es continua en } \mathbb{R} \right\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$,

$$\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}, \text{ con } \mathcal{T}(f(x)) = \int_a^b f(t)dt$$

l) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \text{ con } \mathcal{T}(a, b, c) = (a + b + c, b + c, 3a + b, 2b + c)$

m) Para $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (a + \lambda b, -b)$

n) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = (b + 2c)x + a + c$

o) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (a - b, a + b)$

p) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (a + b, a - b)$

q) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ con } \mathcal{T}(a, b) = (2a + b, a - 2b)$

r) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$

s) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$

t) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = a(2x + 1)^2 + b(2x + 1) + c$

u) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(ax^2 + bx + c) = bx + c$

v) $\mathcal{T} : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \text{ con } \mathcal{T}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2a + 3b + c - d$

w) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(ax + b) = a(x + 3) + b$

x) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{ con } \mathcal{T}(a, b, c) = (c - b, c - a, a + b)$

y) $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \text{ con } \mathcal{T}(ax^2+bx+c) = (9b-20a)x^2+(13b-30a)x+12a-6b+c$

z) $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{ con } \mathcal{T}(a, b, c) = (4a + c, 2a + 3b + 2c, a + 4c)$

Teorema 4
Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales y $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. $\mathcal{T}$ es inyectiva si, y solo si, $Nucl(\mathcal{T}) = \left\{ \boldsymbol{0} \right\}$

Demostración
Primero, asumamos que que $\mathcal{T}$ es inyectiva.[h]
Se debe probar que $Nucl(\mathcal{T}) = \left\{0\right\}$

Sea $x \in Nucl(\mathcal{T})$. Como $x \in Nucl(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{T}(x) = \mathbf{0}$
Se sabe que si $\mathcal{T}$ es lineal, entonces $\mathcal{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$[i]
De los últimos dos resultados, se concluye que $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(\mathbf{0})$
Dado que $\mathcal{T}$ es inyectiva, entonces $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(\mathbf{0}) \Rightarrow x = \mathbf{0}$
$\therefore Nucl(\mathcal{T}) = \left\{\mathbf{0}\right\}$

Ahora, asumamos que $Nucl(\mathcal{T}) = \left\{\mathbf{0}\right\}$
Se debe probar que $\mathcal{T}$ es inyectiva.

Sean $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$, tal que $\mathcal{T}(v_1) = \mathcal{T}(v_2)$
Como $\mathcal{T}(v_1) = \mathcal{T}(v_2) \Rightarrow \mathcal{T}(v_1) - \mathcal{T}(v_2) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{T}(v_1 - v_2) = \mathbf{0}$
Dado que $Nucl(\mathcal{T}) = \left\{\mathbf{0}\right\}$, la igualdad $\mathcal{T}(v_1 - v_2) = \mathbf{0}$ se cumple solo si $v_1 - v_2 = \mathbf{0}$
De esta manera, $v_1 = v_2$
$\therefore \mathcal{T}$ es inyectiva.

Ejemplo 6
Si se tiene que $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es una transformación lineal, tal que $\mathcal{T}(-1,0) = 2 - x$ y $\mathcal{T}(0,4) = 1 + x^2$, determine una fórmula explícita para $\mathcal{T}$

Solución
Como $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $(a,b) = -a(-1,0) + \frac{b}{4}(0,4)$ (verifíquelo); de esta manera:

$$
\begin{aligned}
& (a,b) = -a(-1,0) + \frac{b}{4}(0,4) \\
\Rightarrow \quad & \mathcal{T}(a,b) = \mathcal{T}\left(-a(-1,0) + \frac{b}{4}(0,4)\right) \\
\Rightarrow \quad & \mathcal{T}(a,b) = -a\mathcal{T}(-1,0) + \frac{b}{4}\mathcal{T}(0,4) \\
\Rightarrow \quad & \mathcal{T}(a,b) = -a(2-x) + \frac{b}{4}\left(1 + x^2\right) \\
\Rightarrow \quad & \mathcal{T}(a,b) = -2a + ax + \frac{b}{4} + \frac{b}{4}x^2
\end{aligned}
$$

[h]Recuerde que una función $f : A \to B$ es inyectiva o *uno-a-uno* si $\forall x_1, x_2 \in A$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

[i]Ver ejercicio 1.

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{T}(a,b) = \frac{b}{4} - 2a + ax + \frac{b}{4}x^2$$

$\therefore \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}(a,b) = \dfrac{b}{4} - 2a + ax + \dfrac{b}{4}x^2$

Definición 4 (transformación sobreyectiva)
Si $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una transformación lineal, con $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita, se dice que $\mathcal{T}$ es una transformación sobreyectiva si $Im(\mathcal{T}) = \mathcal{W}$; esto es, si $r(\mathcal{T}) = \dim(\mathcal{W})$

Definición 5 (isomorfismo)
Si $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una transformación lineal, con $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita, se dice que $\mathcal{T}$ es un isomorfismo (biyectiva) si $\mathcal{T}$ es tanto inyectiva como sobreyectiva.

Ejemplo 7
Considere la transformación lineal $\mathcal{T}$ definida por $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}(p(x)) = \begin{pmatrix} p'(0) & 2\,p(1) \\ 0 & p''(3) \end{pmatrix}$
Determine: $Nucl(\mathcal{T})$, $Im(\mathcal{T})$, $n(\mathcal{T})$, $r(\mathcal{T})$, una base para $Im(\mathcal{T})$ ¿Es $\mathcal{T}$ una transformación biyectiva?

Solución
Sea $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$
$p'(x) = b + 2cx \Rightarrow p'(0) = b$
$p''(x) = 2c \Rightarrow p''(3) = 2c$
$2\,p(1) = 2(a+b+c) = 2a + 2b + 2c$
De esta manera, $\mathcal{T}(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} b & 2a+2b+2c \\ 0 & 2c \end{pmatrix}$, $\forall a+bx+cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$
Una vez que se tiene la transformación lineal definida de manera explícita, se procede a determinar lo que se pide en el enunciado.
Sea $a+bx+cx^2 \in Nucl(\mathcal{T})$, como $a+bx+cx^2 \in Nucl(\mathcal{T})$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} b & 2a+2b+2c \\ 0 & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} b = 0 \\ 2a+2b+2c = 0 \\ 0 = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

De esta manera, $Nucl\,(\mathcal{T}) = \{\boldsymbol{0}\}$

Como $Nucl\,(\mathcal{T}) = \{\boldsymbol{0}\} \Rightarrow n\,(\mathcal{T}) = 0$

Dado que $n\,(\mathcal{T}) + r\,(\mathcal{T}) = \dim\left(\mathcal{P}_2\,(\mathbb{R})\right) \Rightarrow 0 + r\,(\mathcal{T}) = 3 \Rightarrow r\,(\mathcal{T}) = 3$

Si $\mathcal{T}\left(a + bx + cx^2\right) = \begin{pmatrix} b & 2a + 2b + 2c \\ 0 & 2c \end{pmatrix}$ *y* $\dim\left(Im\,(\mathcal{T})\right) = 3$, *es claro que*

$$Im\,(\mathcal{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \Big/ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

De esta manera, una base para $Im\,(\mathcal{T})$ *está dada por*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(Verifique de $\mathcal{G}en\,(\mathcal{B}) = Im\,(\mathcal{T})$ *y que* $\mathcal{B}$ *es linealmente independiente)*

Como $Nucl\,(\mathcal{T}) = \{\boldsymbol{0}\}$*, se tiene que* $\mathcal{T}$ *es inyectiva; como* $\dim\left(\mathcal{M}_{2\times 2}\,(\mathbb{R})\right) = 4$ *y* $r\,(\mathcal{T}) = 3$*, se tiene que* $Im\,(\mathcal{T}) \neq \mathcal{M}_{2\times 2}\,(\mathbb{R})$*, por lo que* $\mathcal{T}$ *no es sobreyectiva y, por lo tanto, tampoco isomorfismo.*

Teorema 5
Sean $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{W}$ *espacios vectoriales de dimensión finita y* $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *una transformación lineal.*

a) *Si* $\mathcal{T}$ *es inyectiva, entonces* $\dim\,(\mathcal{V}) \leq \dim\,(\mathcal{W})$

b) *Si* $\mathcal{T}$ *es sobreyectiva, entonces* $\dim\,(\mathcal{V}) \geq \dim\,(\mathcal{W})$

c) *Si* $\mathcal{T}$ *es isomorfismo, entonces* $\dim\,(\mathcal{V}) = \dim\,(\mathcal{W})$

Ejercicio 5
Demuestre el teorema anterior.

Teorema 6
Sean $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{W}$ *espacios vectoriales de dimensión finita e igual, y sea* $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *una transformación lineal; son equivalentes los enunciados siguientes:*

a) $\mathcal{T}$ *es inyectiva*

b) $\mathcal{T}$ *es sobreyectiva*

c) $r(\mathcal{T}) = dim(\mathcal{V})$

Ejercicio 6
Demuestre el teorema anterior.

Teorema 7
Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita y sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de $\mathcal{V}$. Para $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \in \mathcal{W}$ existe, exactamente, una transformación lineal $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ tal que $\forall i$, con $1 \leq i \leq n, \mathcal{T}(u_i) = w_i$

Ejercicio 7
Demuestre el teorema anterior.

Sugerencia: defina $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ tal que $\forall x \in \mathcal{V}, \mathcal{T}(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$

Por acá

Definición 6 (adición de transformaciones lineales)
Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales, y $\mathcal{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ transformaciones lineales. Se define $\mathcal{F} + \mathcal{G} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ como

$$(\mathcal{F} + \mathcal{G})(x) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{G}(x), \forall x \in \mathcal{V}$$

Definición 7 (multiplicación de un escalar por una transformación lineal)
Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales y $\mathcal{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $\alpha\mathcal{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ como

$$(\alpha\mathcal{F})(x) = \alpha\mathcal{F}(x), \forall x \in \mathcal{V}$$

Para el siguiente teorema considere las definiciones 6 y 7.

Teorema 8
Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales, y $\mathcal{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ transformaciones lineales.

a) $\forall \delta \in \mathbb{R}$ *demuestre que $\delta\mathcal{F} + \mathcal{G}$ es lineal.*

b) *Si $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ representa el conjunto formado por todas las transformaciones lineales de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$, demuestre que $\Big(\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}), +, \cdot\mathbb{R}\Big)$ es un espacio vectorial.*

Ejercicio 8
Demuestre el teorema anterior.

Definición 8 (transformación compuesta (producto))
Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales reales. Si $\mathcal{F}:\mathcal{U}\rightarrow\mathcal{V}$ y $\mathcal{G}:\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ son transformaciones lineales, la composición $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ se llama producto de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$ y es denotada como $\mathcal{GF}$; así, se define el producto $\mathcal{GF}$ de la manera siguiente

$$\mathcal{GF}:\mathcal{U}\rightarrow\mathcal{W},\ \text{ tal que } \mathcal{GF}(x)=\mathcal{G}(\mathcal{F}(x))$$

Ejercicio 9
Demuestre (asuma que están definidas las operaciones) las propiedades siguientes:

a) $\mathcal{GF}(\alpha x+y)=\alpha\mathcal{GF}(x)+\mathcal{GF}(y)$

b) $\mathcal{G}(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2)=\mathcal{GF}_1+\mathcal{GF}_2$

c) $(\mathcal{GF}_1)\mathcal{F}_2=\mathcal{G}(\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2)$

Teorema 9
Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son espacios vectoriales de dimensión finita y $\mathcal{T}:\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ es un isomorfismo, entonces $\mathcal{T}$ es invertible y su inversa, denotada como $\mathcal{T}^{-1}$ es, también, una transformación lineal.

Ejercicio 10
Demuestre el teorema anterior.

Definición 9 (representación matricial de una transformación)
Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita, $\mathcal{T}:\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ una transformación lineal, y $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ y $\mathcal{B}'=\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$ bases ordenadas de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, respectivamente. Para cada j, $1\leq j\leq n$, existen únicos escalares $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $1\leq i\leq m$, tales que $\mathcal{T}(v_j)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}a_{ij}wi$, para $1\leq j\leq n$. La matriz A de tamaño $m\times n$, definida por $\langle A\rangle_{ij}=a_{ij}$ es la matriz de representación de $\mathcal{T}$ en las bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, y se escribe $A=[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Para el caso en que $\mathcal{V}=\mathcal{W}$ y $\mathcal{B}=\mathcal{B}'$, se escribe $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}}$ en vez de $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

Ejemplo 8
Considere la transformación lineal $\mathcal{T}:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}(a,b)=a+(b-a)x+bx^2$. Si $\mathcal{B}=\{(3,-1),(-2,5)\}$ y $\mathcal{B}'=\{2x,1,x^2\}$ son bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respectivamente, determine $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

Solución
El procedimiento esencial para esto es hallar la imagen de cada uno de los vectores de la base del dominio de $\mathcal{T}$ y represetar dichas imágenes como combinación lineal de los vectores de la base del codominio de $\mathcal{T}$ (específicamente, se desean los vectores de

coordenadas de estas).

$\mathcal{T}(3,-1) = 3 - 4x - x^2 = -2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + -1 \cdot x^2$

$\mathcal{T}(-2,5) = -2 + 7x + 5x^2 = \dfrac{7}{2} \cdot 2x + -2 \cdot 1 + 5 \cdot x^2$

Así, la matriz $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *está dada por:*

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -2 & \dfrac{7}{2} \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Teorema 10
Sean $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{W}$ *espacios vectoriales de dimensión finita, con* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B}'$ *bases ordenadas de* $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{W}$*, respectivamente. Si* $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *es una transformación lineal, se cumple que* $\forall x \in \mathcal{V}$, $[\mathcal{T}(x)]_{\mathcal{B}'} = [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [x]_{\mathcal{B}}$

Ejercicio 11
Demuestre el teorema anterior.

Teorema 11
Sean $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{W}$ *espacios vectoriales de dimensión finita, con* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B}'$ *bases ordenadas de* $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{W}$*, respectivamente. Si* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *demuestre que*

a) $[\mathcal{F} + \mathcal{G}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} + [\mathcal{G}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

b) $[\alpha \mathcal{F}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \alpha [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

Ejercicio 12
Demuestre el teorema anterior.

Ejercicio 13
Si $\mathcal{T}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *tal que* $\mathcal{T}_1(a,b) = (a+3b, 0, 2a-4b)$ *y* $\mathcal{T}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *tal que* $\mathcal{T}_2(a,b) = (a-b, 2a, 3a+2b)$ *son transformaciones lineales, y* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B}'$ *son las bases estándar de* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$*, respectivamente, verifique lo que se enuncia en el teorema 11.*

3 Valores y vectores propios

Definición 10 (valor y vector propio de una matriz)
Si A es una matriz de orden n, un valor propio de A es todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, para el que exista un vector no nulo $u \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, tal que $Au = \lambda u$; asimismo, todo vector no nulo $u \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ para el que $Au = \lambda u$ recibe el nombre de vector propio de A asociado con el valor propio λ.

Definición 11 (espacio propio)
Sea A es una matriz de orden n y λ un valor propio de A. Se define E_λ, dado por $E_\lambda = \left\{ u \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \Big/ Au = \lambda u \right\}$, como el espacio propio asociado al valor propio λ.

Ejercicio 14
Demuestre que, efectivamente, E_λ es subespacio de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

Teorema 12
Sean A una matriz de orden n y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se cumple que λ es un valor propio de A si, y solo si, $\det(A - \lambda \mathcal{I}_n) = 0$

Ejemplo 9
Considere la matriz A definida por $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
Determine los valores propios de A y, para cada uno de los valores propios λ, determine el espacio propio asociado E_λ

Solución
Para encontrar los valores propios de A se resulve la ecuación[j] $\det(A - \lambda\mathcal{I}_3) = 0$

$$\begin{aligned}
& \det(A - \lambda\mathcal{I}_3) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

[j]Esta ecuación recibe el nombre *ecuación característica* y el polinomio dado por $p(\lambda) = \det(A - \lambda\mathcal{I})$ recibe el nombre *polinomio característico*.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad -12-5\lambda+6\lambda^2-\lambda^3=0\\
&\Leftrightarrow \quad (\lambda-4)(3-\lambda)(\lambda+1)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \lambda=4 \quad \vee \quad \lambda=3 \quad \vee \quad \lambda=-1
\end{aligned}$$

De esta manera, los valores propios de A son $\lambda = 4$, $\lambda = 3$ y $\lambda = -1$

Ahora, se determinará E_λ para cada uno de estos tres valores propios encontrados.

Sea $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_4$; es decir, u es un vector propio[k] *asociado con el valor propio*[l] *$\lambda = 4$. Se cumple que:*

$$\begin{aligned}
& Au = 4u\\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} a+3c \\ a \\ -4b+5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a \\ 4b \\ 4c \end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a+3c=4a \\ a=4b \\ -4b+5c=4c \end{cases}\\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -3a+3c=0 \\ a-4b=0 \\ -4b+c=0 \end{cases}\\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a=4b \\ c=4b \end{cases}
\end{aligned}$$

De esta manera, $E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 4b \\ b \\ 4b \end{pmatrix} \Big/ b \in \mathbb{R} \right\}$; o bien, $E_4 = \mathcal{G}en\left(\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}\right)$

Sea $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_3$; es decir, u es un vector propio asociado con el valor propio $\lambda = 3$. Se cumple que:

$$\begin{aligned}
& Au = 3u\\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a+3c=3a \\ a=3b \\ -4b+5c=3c \end{cases}
\end{aligned}$$

[k]También es llamado vector característico.

[l]También es llamado valor característico.

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2a + 3c = 0 \\ a - 3b = 0 \\ -4b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 3b \\ c = 2b \end{cases}$$

De esta manera, $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3b \\ b \\ 2b \end{pmatrix} \Big/ b \in \mathbb{R} \right\}$; *o bien,* $E_3 = \mathcal{G}en\left(\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)$

Sea $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_{-1}$; *es decir,* u *es un vector propio asociado con el valor propio* $\lambda = -1$. *Se cumple que:*

$$Au = -1\, u$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + 3c = -a \\ a = -b \\ -4b + 5c = -c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a + 3c = 0 \\ a + b = 0 \\ -4b + 6c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -b \\ c = \dfrac{2}{3}b \end{cases}$$

De esta manera, $E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ b \\ \dfrac{2b}{3} \end{pmatrix} \Big/ b \in \mathbb{R} \right\}$; *o bien,* $E_{-1} = \mathcal{G}en\left(\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)$

4 Bibliografía

Anton, Howard. (2 004). *Introducción al álgebra lineal.* Tercera edición, México: LIMUSA WILEY.

Ayres Jr, Frank. (1 992). *Matrices.* México: McGRAW-HILL.

Barrantes, Hugo. (1 998). *Elementos de álgebra lineal.* Costa Rica: EUNED.

Friedberg, Stephen H; **Insel**, Arnold J. y **Spence**, Lawrence E. (2 003). *Linear algebra.* Cuarta edición, USA: PRENTICE HALL.

Grossman, Stanley I. (1 996). *Álgebra lineal.* Quinta edición, México: McGRAW-HILL.

Lipschutz, Seymour. (1 992). *Álgebra lineal.* Segunda edición, España: McGRAW-HILL.

Rodríguez, Julio. (2 006). *Transformaciones lineales.* Costa Rica: EDITORIAL TECNOLÓGICA.

Chen, W. (2 006). *Linear algebra.*

Dirección electróniuca: http://www.maths.mq.edu.au/˜(revisar revisar revisar) wchen/lnlafolder/la08.pdf

Santos, David A. (2 006). *Linear algebra notes.*

Dirección electrónica: http://www.openmathtext.org/lecture_(revisar revisar revisar)notes/new_(revisar revisar revisar)linearalgebra.pdf