

## I Examen Parcial

*Instrucciones:* Esta es una prueba de desarrollo; por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Sea  $A$  alguna matriz de orden  $n$ ; se dice que  $A$  es *nilpotente* si, y sólo si,  $\exists k \in \mathbb{N}$ , tal que  $A^k = \mathcal{O}_n$

Demuestre que si  $\alpha \neq 0$ , entonces la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & -1 \\ \alpha & \end{pmatrix}$  es nilpotente. (3 pts)

Observación:  $\mathcal{O}_n$  representa la matriz nula de orden  $n$

2. Considere las matrices  $A$  y  $B$ , tales que  $A \in \mathcal{M}_{p \times w}(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{w \times d}(\mathbb{R})$ ; demuestre que, entrada por entrada,  $(AB)^t = B^t A^t$  (4 pts)

3. Considere las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando únicamente operaciones con matrices determine, de manera explícita, la matriz  $X$  que satisface la ecuación matricial siguiente: (6 pts)

$$XAB^t = AB^t + XC^2$$

4. Sean  $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Si se sabe que  $2AC = \mathcal{I}_3 + BC$  y  $|2A - B| = 2$ , calcule: (4 pts)

$$|(6A - 3B)^{-1} C^t|$$

Observación:  $\mathcal{I}_3$  representa la matriz identidad de orden 3

5. Sean  $A, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $B = Q^{-1}AQ$

(a) Demuestre, utilizando inducción matemática, que: (4 pts)

$$\forall k \in \mathbb{N}, B^k = Q^{-1}A^kQ$$

(b) Considere las matrices siguientes: (3 pts)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si  $D = P^{-1}CP$  utilice el resultado del inciso (a) y determine, de manera explícita, la matriz  $D^7$

6. Calcule  $|A|$  si se tiene que: (4 pts)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & b+a \end{pmatrix}$$

7. Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente: (7 pts)

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

Determine el valor o los valores (en caso de existir) que debe tomar la constante real  $a$  para que el sistema de ecuaciones anterior:

- (a) Tenga solución única (halle el conjunto solución).
- (b) Posea infinito número de soluciones (enuncie una solución particular).
- (c) No tenga solución.