INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MA-1404 CÁLCULO
PROFESOR FÉLIX NÚÑEZ V.

Práctica Número 7
Sumas de Riemann, área entre curvas

1. Utilice cinco rectángulos para aproximar el área bajo la curva (por exceso y defecto) para cada una de las siguientes funciones

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 1]$

   (b) $g(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, 2]$

2. Utlizar sumas de Riemann para calcular:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 (-2x + 3)\, dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(1 - x^2\right) dx$

   (c) $\displaystyle\int_1^3 \left(2x^2\right) dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^2 (2x^2 - x + 1)dx$

3. Sean $f$ y $g$ dos funciones integrables en $[a, b]$ y $k$ una constante. Demuestre que

   (a) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

   (b) $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

4. Si $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx = 4$ y además $\displaystyle\int_3^6 f(x)dx = -1$ hallar el valor de

   (a) $\displaystyle\int_0^6 f(x)dx$

   (b) $\displaystyle\int_6^3 f(x)dx$

   (c) $\displaystyle\int_4^4 f(x)dx$

(d) $\displaystyle\int_3^6 -4f(x)dx$

5. Si $\displaystyle\int_2^6 f(x)dx = 10$ y además $\displaystyle\int_2^6 g(x)dx = -2$ calcular el valor de

   (a) $\displaystyle\int_2^6 (3f(x) - 2g(x))dx$

   (b) $\displaystyle\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{6}{5}} f(5x)dx$

6. Sea $f$ una función integrable. Suponga que la función $f$ es impar, es decir, que $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$. Demuestre que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

7. Sea $f$ una función continua en $[a, b]$ que satisface la identidad $f(a+b-x) = f(x)$. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)dx = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$$

8. Calcule la derivada de las siguientes funciones con respecto a $x$

   (a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \tan(t)dt$

   (b) $F(x) = \displaystyle\int_1^{3x} \cos(t)dt$

   (c) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \tfrac{1-u^2}{u^2+2}du$

   (d) $F(x) = \displaystyle\int_{3-5x}^{2} \ln(t)dt$

9. Calcule si existe el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}\int_0^x \sin(t^2)dt$$

10. Dibujar la región limitada por las gráficas de las funciones dadas y calcular el área de cada región

    (a) $f(x) = x^2 - 4x$; $g(x) = 0$

    (b) $f(x) = 3 - 2x - x^2$; $g(x) = 0$

(c) $f(x) = -x^2 + 4x + 2; \;\; g(x) = x + 2$

(d) $f(x) = x^2 - 4x + 3; \quad g(x) = 3 + 4x - x^2$

(e) $f(x) = x^3; \quad g(x) = x$