INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

16 de junio de 2014
Total: 33 puntos
Tiempo: 2 horas 10 minutos

Tercer Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, se deben presentar todos los pasos necesarios, y sus respectivas justificaciones, que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de celular durante el desarrollo de la prueba.

1. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que la fórmula:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

es verdadera, para todo $n \geq 1$, con n número natural. **(4 puntos)**

2. Utilice el método de inducción matemática para probar que $4^n + 3n - 1$ es divisible por 3, para todo $n \geq 1$, con n número natural. **(4 puntos)**

3. Considere la sucesión a_n definida por $a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} - 8a_{n-3}$ si $n \geq 3$, con $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$. Determine la fórmula explícita para esta relación. **(5 puntos)**

4. Determine la fórmula por recurrencia para la sucesión a_n cuya fórmula es $a_n = 5(-2)^n - 3$, para $n \geq 1$, con n natural. **(4 puntos)**

5. Sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ se define la operación $*$ por:

$*$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	3	4	1	6	7	8	5
3	3	4	1	2	7	8	5	6
4	4	1	2	3	8	5	6	7
5	5	8	7	6	1	4	3	2
6	6	5	8	7	2	1	4	3
7	7	6	5	8	3	2	1	4
8	8	7	6	5	4	3	2	1

Si se sabe que $(A, *)$ es grupo.

(a) Determine si $*$ es conmutativa. **(1 punto)**

(b) Determine el neutro y los inversos de cada uno de los elementos de A. **(2 puntos)**

(c) Calcule el resultado de $(4 * 5)^3 * (5 * 4)^{-2}$ **(3 puntos)**

6. Sobre $\mathbb{R} - \{-1\}$ se define la operación $*$ por $a * b = a + b + ab$. Si se sabe que la operación $*$ es cerrada en $\mathbb{R} - \{-1\}$, pruebe que $(\mathbb{R} - \{-1\}, *)$ es grupo abeliano. **(5 puntos)**

7. Considere el conjunto $\mathbb{Z}_9$, con la operación interna $\oplus$ como la adición usual de clases de equivalencia.

   (a) Determine el elemento neutro y los inversos de cada elemento del grupo $(\mathbb{Z}_9, \oplus)$. **(2 puntos)**

   (b) Determine todos los subgrupos del grupo $(\mathbb{Z}_9, \oplus)$. **(3 puntos)**