INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — II SEMESTRE 2012
ESCUELA DE MATEMÁTICA — TIEMPO 2 HORAS
PROBABILIDADES — VALOR 29 PTS

PARCIAL II

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. No son procedentes las apelaciones sobre preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con témpera (corrector). Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - k & si \quad x = -1 \\ \\ \frac{1}{6} + k^2 & si \quad x = 0 \\ \\ 2k & si \quad x = 1 \end{cases}$$

con $R_X = \{-1.0, 1\}$.

(a) Determine el valor de k. (4 puntos)

$$\frac{1}{2} - k + \frac{1}{6} + k^2 + 2k = 1 \Longrightarrow k = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{7}$$

Como $f_X(x) \geq 0$ entonces $k = \frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{7} - \frac{1}{2}$

(b) Determine la esperanza y varianza de X en términos de k. (4 puntos)

$$\begin{aligned} E(X) &= -\left(\frac{1}{2} - k\right) + 2k = 3k - \frac{1}{2} \\ E\left(X^2\right) &= \left(\frac{1}{2} - k\right) + 2k = k + \frac{1}{2} \\ Var(X) &= k + \frac{1}{2} - \left(3k - \frac{1}{2}\right)^2 = -9k^2 + 4k + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. En una caja hay 15 bolas de colores, de las cuales 6 son de un color distinto de rojo y las demás rojas. El color favorito de un niño es el rojo, por lo que él saca una bola de la caja y si no es de color rojo la devuelve y así sucesivamente hasta obtener una roja. ¿Cuál es la probabilidad de que el niño obtenga la primera bola roja después de la décima extracción, inclusive? (4 puntos)

Sea X una v.a.d. que determina la cantidad de bolas que debe sacar el niño antes de obtener una bola roja

$$X \sim G\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 9) &= 1 - P(X < 9) \\
&= 1 - P(X \leq 8) \\
&= 1 - \sum_{x=0}^{8} \left(\frac{2}{5}\right)^x \frac{3}{5} \\
&= 0.00026214
\end{aligned}
$$

3. Sea X una variable aleatoria discreta que mide el número de computadoras de la marca COMPUT que presentan daños en la batería durante el primer año después de haber sido comprada. X sigue una distribución de Poisson con un promedio de 5 computadoras con la batería dañada durante el primer año de uso.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que más de 20 computadoras presenten problemas en la batería durante los dos primeros años de uso? (4 puntos)
   Sean:
   X: una v.a.d. que determina la cantidad de computadoras con la batería dañada durante el primer año de uso

   $$X \sim P(5)$$

   Y: una v.a.d. que determina la cantidad de computadoras con la batería dañada durante los dos primeros años de uso

   $$Y \sim P(10)$$

   Note que $p = P(Y > 20)$, así:

   $$
   \begin{aligned}
   p &= 1 - P(Y \leq 20) \\
   &= 1 - \sum_{k=0}^{20} \frac{10^k e^{-10}}{k!} \\
   &= 1 - 0.9984 \\
   &= 0.001\,6
   \end{aligned}
   $$

   (b) La oficina de servicio al cliente hace estudios cada dos años para verificar la confiabilidad de los productos vendidos. Si en al menos tres de cada cinco estudios realizados por servicio al cliente más de 20 computadoras presentan problemas en la batería durante los dos primeros años de uso, la empresa debe pagar una multa. ¿Cuál es la probabilidad de que COMPUT tenga que pagar multa? (4 puntos)

   Sea Z: una v.a.d. que determina la cantidad de estudios, de un total de 5, que presentan problemas de batería en más de 20 computadoras durante los dos primeros años de uso:

   $$Z \sim B(5, p)$$

   Con lo que se tiene que:

   $$Z \sim B(5, 0.0016)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
P(Z \geq 3) &= 1 - P(Z < 3) \\
&= 1 - P(Z \leq 2) \\
&= 1 - \sum_{z=0}^{2} \binom{5}{z} \cdot 0.001\,6^{z} \cdot 0.9984^{5-z} \\
&= 0.000000040862
\end{aligned}$$

4. Ester y Hernán lanzan un una moneda cada uno. Sea X el número de coronas obtenidas.

   (a) Determine el rango de la variable X. (1 punto)

   $$R_X = \{0, 1, 2\}$$

   (b) La distribución de probabilidad de X. (3 puntos)

X	0	1	2
$P(X = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

   (c) Según el número total de coronas obtenidas por Hernán y Ester será la cantidad de bolas que extraigan, sin reemplazo, de una urna que tiene 1 bola roja y 4 bolas blancas. Si Y es la variable que representa la cantidad total de bolas blancas extraídas, determine:

   i. El rango de la variable Y. (1 punto)

   $$R_y = \{0, 1, 2\}$$

   ii. La distribución de probabilidad de Y. (4 puntos)

X	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
Y	0	$0\ (1R \wedge 0B) \vee 1\,(0R \wedge 1B)$	$(1R \wedge 1B) \vee (0R \wedge 2B)$
$P(Y = y)$	$\frac{1}{4}\left(\frac{\binom{1}{0}\binom{4}{0}}{\binom{5}{0}}\right)$	$\frac{2}{4}\left(\frac{\binom{1}{1}\binom{4}{0}}{\binom{5}{1}} + \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{1}}{\binom{5}{1}}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\frac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}}{\binom{5}{2}} + \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}}\right)$