INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
Álgebra Lineal para Computación

Tiempo: 2 h. 30 m.
Total: 38 puntos
Fecha: 18 de diciembre de 2012

Primer examen parcial (Verano)

1. Considere las matrices $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ calcule $B^{-1} + 2I_3 - H^t H$. **(4 puntos)**

2. Sean A una matriz de tamaño $p \times q$, B de $r \times q$ y C de $q \times r$. Pruebe, entrada por entrada, que $(3A)(B - 2C^t)^t = 3AB^t - 6AC$. **(5 puntos)**

3. Determine el conjunto solución del sistema: **(5 puntos)**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$$

4. Considere el sistema de ecuaciones en la variables x, y: **(5 puntos)**

$$\begin{cases} ax - 2y = 2 \\ 5ax + ay = b \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros a y b para que el sistema:

(a) No tenga solución.
(b) Tenga solución única.
(c) Tenga infinita cantidad de soluciones.
(d) Determine el conjunto solución en el caso (b).

5. Si A y B son matrices de 4×4, tales que $\det(A) = -2$ y $\det(B^{-1}) = \frac{4}{3}$, calcule $\det(2B \cdot Adj(A))$ **(5 puntos)**

6. Si $\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c & 4d \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -2$, calcule el valor de $\begin{vmatrix} a & b & 5c & d \\ 6 & 0 & 15 & -3 \\ 7 & -7 & 35 & -7 \\ 1 & 2 & 15 & 4 \end{vmatrix}$ utilizando las propiedades de los determinantes. **(4 puntos)**

7. Sean A y B matrices de $n \times n$, pruebe que:

(a) Si A es idempotente, entonces $(2A - I_n)^{-1} = 2A - I_n$. **(2 puntos)**
(b) Si $2B$ es involutiva, entonces $B + \frac{1}{2}I_n$ es idempotente. **(3 puntos)**

8. Si A es una matriz idempotente de $n \times n$, pruebe que $\forall k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 2$, se cumple que $(A + I_n)^k = I_n + (2^k - 1)A$. **(5 puntos)**