$\mathcal{I}$nstituto $\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica | $\mathcal{T}$iempo: 2 horas
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemáticas | $\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 29 puntos
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación | $\mathcal{A}$bril de 2 008

$\mathcal{II}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Sea $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Si "$\cdot$" representa la multiplicación usual de números reales:

   (a) Demuestre que $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ es un grupo abeliano. (3 pts)

   (b) Si $\mathcal{H} = \left\{x \in \mathbb{R}^* \big/ x \geq 1\right\}$, determine si $\mathcal{H}$ es subgrupo de $\mathbb{R}^*$ o no lo es. (3 pts)

2. Sea e el elemento neutro del grupo $(\mathcal{G}, *)$. Demuestre que $\mathcal{G}$ es abeliano si, y sólo si, $(x * y)^2 = x^2 * y^2$, $\forall x, y \in \mathcal{G}$. (4 pts)

3. Si $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo y $x \in \mathcal{A}$, se dice que x es *idempotente* si $x^2 = x$.

   Para cada uno de los anillos que se enuncian a continuación, determine todos sus elementos idempotentes. (3 pts)

   (a) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$

   (b) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$

4. Considere el conjunto $\mathcal{A} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Si se sabe que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo módulo 10 ¿Es $\mathcal{A}$ un anillo unitario o no lo es? Justifique. (3 pts)

5. Sea $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ un anillo conmutativo ¿Cuáles son las propiedades, adicionales a las de anillo, que se deben cumplir para que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ sea campo? (2 pts)

6. Si $\mathcal{W} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ ax + by + cz = 0, \text{ con } a, b \text{ y } c \text{ números reales fijos}\right\}$, demuestre que $\mathcal{W}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. (4 pts)

7. Considere el conjunto $\mathcal{B}$ definido como $\mathcal{B} = \left\{1 + x, 1 - x, 1 - x^2, x^3 + x^2 + x + 1\right\}$. Determine si el polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ o no. (4 pts)

8. Determine si los vectores $u_1 = (2, -1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 0, 1, -1)$ y $u_3 = (-1, 1, 1, 0)$ son linealmente dependientes o linealmente independientes. (3 pts)