$\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación

$\mathcal{T}$iempo: 2,5 horas
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 34 puntos
$\mathcal{J}$unio de 2014

$\mathcal{III}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Sea $\mathcal{T}:\mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}(a,b) = b - 2a\,x + (2a-c)\,x^2$. Determine si $\mathcal{T}$ es transformación lineal o no. (4 pts)

2. Sea $\mathcal{T}:\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right) = (-a, 2a+2b-c, c-2b)$ una transformación lineal. Obtenga:
   (a) Núcleo de $\mathcal{T}$ y nulidad de $\mathcal{T}$ (5 pts)
   (b) Rango de $\mathcal{T}$ y una base de la imagen de $\mathcal{T}$ (5 pts)

3. Considere la matriz A definida como $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
   (a) Verifique que $\lambda = -6$ y $\lambda = -2$ son los únicos valores propios de A (3 pts)
   (b) Determine tres vectores propios asociados con el valor propio $\lambda = -2$ (4 pts)

4. Sea $\mathcal{T}:\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}\left(a+b\,x+c\,x^2\right) = -2a + (2b-c+a)\,x + b\,x^2 + 2c\,x^3$ una transformación lineal. Si se tiene que $\mathcal{B}_1 = \left\{x, 1, x^2\right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{x^3, -x, 2, x^2\right\}$ son bases del dominio y del codominio de $\mathcal{T}$, respectivamente, conteste lo que se pide en cada caso:
   (a) Determine la matriz representativa de $\mathcal{T}$ relativa a las bases enunciadas. (5 pts)
   (b) Utilizando la matriz de representación de $\mathcal{T}$ que obtuvo en el inciso (a), verifique que $\mathcal{T}\left(2-3x+4x^2\right) = 8x^3 - 3x^2 - 8x - 4$. (3 pts)

5. Si se sabe que $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz representativa de $\mathcal{T}:\mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ relativa a las bases canónicas del dominio y del codominio de $\mathcal{T}$, respectivamente, y que $\mathcal{T}$ es tanto inyectiva como sobreyectiva, determine la fórmula explícita para $\mathcal{T}^{-1}:\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ (5 pts)