INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — II SEMESTRE 2013
ESCUELA DE MATEMÁTICA — TIEMPO HORAS MIN
PROBABILIDADES — VALOR PTS

PARCIAL I EXTRAORDINARIO

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. No son procedentes las apelaciones sobre preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con témpera (corrector). Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Considere la palabra ENAJENACION. ¿Cuántos anagramas se pueden formar a partir de las letras de esta palabra en los cuáles

   (a) no hay restricción? (2 puntos)

   $\frac{11!}{3!2!2!} = 1663\,200$

   (b) Las vocales deben ir juntas en cualquier orden y las N también juntas. (4 puntos)

   Considere los bloques: AAEEIO, NNN,

   E1: Permutar los objetos AAEEIONNNCJ: $4! = 24$

   E2: Permutar objetos dentro del bloque: AAEEIO: $\frac{6!}{2!2!} = 180$

   (c) las N no están juntas? (4 puntos)

   Al total le restamos los casos en los que las N van juntas:
   $\frac{11!}{3!2!2!} - \frac{9!}{2!2!} = 1572\,480$

   (d) las vocales deben ir después de la tercera posición? (4 puntos)

   $\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

   E1: Elegir espacios donde irán las vocales: $\binom{8}{6}$

   E2: Colocar vocales: $\frac{6!}{2!2!} = 180$

   E3: Colocar el resto: $\frac{5!}{3!} = 20$

2. Considere la ecuación $x + y + z = 15$. ¿Cuántas soluciones naturales (x, y, z) tiene esta ecuación si

   (a) no hay restriciones? (2 puntos)

   (b) cada incognita debe ser menor igual a 6? (5 puntos)

$$\begin{aligned} & |U| - \left|\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}\right| \\ = \;& C(3+15-1, 15) - (3C(3+8-1, 8) - C(3,2)\, C(3+1-1, 1) + 0) \\ = \;& \binom{17}{15} - \left(3\binom{10}{8} - 3\binom{3}{1}\right) \\ = \;& 10 \end{aligned}$$

3. ¿Cuántos anagramas existe de PREGUNTA donde aparecen al menos un par de vocales en orden alfabético (debe aparecer A y luego E, o E y luego U, o A y luego U)? (6 puntos)

$$3 \cdot C(8,2)\, 6! - C(8,3)\, 5! - C(8,3)\, 2 \cdot 5! - C(8,3)\, 2 \cdot 5! + C(8,3)\, 5!$$

4. Considere la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, ¿cuántas soluciones naturales tiene esta ecuación donde $x_1 \leq 5$ y $x_2 > 6$? (5 puntos)

$$\text{Sea } x_2 = 7 + y, \text{ con } y = 0, 1, ..., 13.$$
$$\text{Sustituyendo}$$
$$x_1 + 7 + y + x_3 + x_4 = 20$$
$$x_1 + y + x_3 + x_4 = 13, \qquad (*)$$
$$\text{Por complemento}$$
$$\text{Sea } U = \{x \mid x \text{ es una solución de la ecuación } (*)\}$$
$$|U| = C(4 + 13 - 1, 13) = \binom{16}{13} = 560$$
$$\text{Sea } A = \{x \in U \mid x \text{ es una solución de la ecuación } (**)\}$$
$$x_1 + y + x_3 + x_4 = 13 \text{ con } x_1 \leq 5, \qquad (**)$$
$$x_1 + y + x_3 + x_4 = 13 \text{ con } x_1 \geq 6,$$
$$\text{Sea } x_1 = 6 + z, \text{ con } z = 0, 1, 2, ..., 13$$
$$6 + z + y + x_3 + x_4 = 13$$
$$z + y + x_3 + x_4 = 7$$
$$\left|\overline{A}\right| = C(4 + 7 - 1, 7) = \binom{10}{7} = 120$$
$$|A| = |U| - \left|\overline{A}\right| = 560 - 120 = 440$$

5. De un segmento que mide 10 cm se eligen 6 puntos al azar. Demostrar que hay al menos dos puntos que se encuentra a una distancia menor igual a 2 cm. (5 puntos)