INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — VERANO 2012-2013
ESCUELA DE MATEMÁTICA — TIEMPO 2 HORAS
MATEMÁTICA DISCRETA — VALOR 28 PTS

PARCIAL II

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. No son procedentes las apelaciones sobre preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con témpera (corrector). Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Sea $A = \{0, 2, 4, 6\}$, sea $\mathcal{R}$ una relación sobre A, cuya matriz asociada está definida por

$$M_{\mathcal{R}}[i, j] = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 3 \vee j = 2 \vee i = j \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

y sea $\mathcal{S}$ otra relación sobre A, definida por

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow (a + b) \in A$$

Determine el gráfico y la matriz asociada de $\overline{\mathcal{S}} \circ \mathcal{R}^{-1}$. (5 puntos)

2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$, considere la función

$$f : A \times B \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

definida por

$$f((a, b)) = \begin{cases} |a - b| \text{ si } a + b \text{ es par} \\ 2b - a \text{ si } a + b \text{ es impar} \end{cases}$$

(a) Calcule (4 puntos)

i. $f(\{(1, 5), (2, 3)\})$

ii. $f^{-1}(\{0\})$

iii. $f^{-1}(\{4, 7\})$

(b) Si $C = \{(a, b) \in A \times B \mid b - a = 3\}$, calcule $f^{-1}(f(C))$ (2 puntos)

3. En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$ como

$$(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d) \Leftrightarrow 3(a - c) = -5(b - d)$$

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. (5 puntos)

(b) Muestre dos elementos de la clase de equivalencia de $(-5, -6)$. (2 puntos)

4. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones transitivas definidas sobre un conjunto A, con A no vacío. Demuestre que si $a\,(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})\,b \wedge b\,(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})\,a$, entonces $a\,(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})\,b$ (4 puntos)

5. Sea $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3}$.

   (a) Pruebe que f es una función inyectiva. (2 puntos)

   (b) Pruebe que f NO es sobreyectiva. (2 puntos)

   (c) Redefina f para que sea biyectiva y determine $f^{-1}(x)$ (2 puntos)