INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

II semestre 2013
Total: 36 puntos
Tiempo: 2 h. 30 m.

PRIMER EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios o procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes la apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono móvil.

1. [4 puntos] Sean P, Q y R tres proposiciones cualesquiera. Utilizando tablas de verdad, determine si la proposición:
$$[\neg [P \wedge \neg (Q \wedge R)] \wedge (Q \rightarrow \neg P)] \longleftrightarrow \neg P$$
es una falacia, una tautologa o una contingencia.

2. [4 puntos] Utilice las leyes de la lgica para simplificar la expresión:
$$[(P \vee Q) \wedge \neg Q] \vee [(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg P]$$

3. [4 puntos] Utilice las reglas de inferencia y las leyes de la lógica para demostrar $\neg(R \wedge A)$ a partir de las premisas: $P \vee Q$, $\neg R \rightarrow (\neg A \wedge Q)$, $\neg R \vee \neg P$, $\neg Q \vee T$, $R \rightarrow \neg T$.

4. Si $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$ y $C = \{a, d\}$, con $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f\}$ como el conjunto universo. Calcule:
   (a) Calcule $\overline{A \triangle (B \cap C)}$ [2 puntos]
   (b) Calcule $(A - \overline{B \cup C}) \times P(A \cap C)$ [3 puntos]

5. [3 puntos] Sean A y B subconjuntos de un conjunto universo $\mathcal{U}$ el cual consta de N elementos. Si se sabe que $|A \cap B| = \frac{2N}{5}$, $|B| = \frac{N}{2}$, $|A \cup B| = \frac{3N}{20}$, calcule la cardinalidad de A.

6. Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \;/\; -2x + 3 = -9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 3, 6, 7, 8\}$, con $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ como el conjunto universo. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando cada respuesta:
   (a) $(\forall x \in B)(\exists y \in C)[x + 1 = y]$ [2 puntos]
   (b) $\exists x[x \in B \rightarrow (x^2 + 2) \in A \cap C]$ [2 puntos]

7. Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demuestre la validez de las siguientes proposiciones:
   (a) $A \subseteq \overline{B} \longrightarrow B \subseteq \overline{A}$ [3 puntos]
   (b) $A \times \overline{\overline{B} \cap \overline{C}} = (A \times \overline{B}) \cup (A \times C)$ [5 puntos]
   (c) $A - B$ y $A \cap B$ son conjuntos disjuntos. [4 puntos]