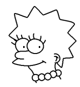
Instituto Tecnológico de Costa Rica	Tiempo: 2 horas 20 min
Escuela de Matemática	Puntaje Total: 31 puntos
Matemática Discreta	I Semestre 2012



I Examen Parcial (solución)

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, se deben presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de celular durante el desarrollo de la prueba.

---

1. [**3 puntos**] Si se sabe que la proposición $\neg(\neg P \vee H) \rightarrow K \vee T$ es Falsa, determine el valor de verdad de la proposición $(P \vee M) \rightarrow (K \wedge E)$

   Solución

   Para que $\neg(\neg P \vee H) \rightarrow K \vee T$ sea falsa se debe cumplir que $\neg(\neg P \vee H) = P \wedge \neg H$ sea verdadera y que $K \vee T$ sea falsa (Verdadero implica a Falso), de donde se obtiene:

   P: Verdadero, H: Falso, K: Falso, T: Falso

   Por lo que $P \vee M$ es Verdadero y $K \wedge E$ es Falso, de aquí se puede concluir que $(P \vee M) \rightarrow (K \wedge E)$ es Falso.

2. [**5 puntos**] Demostrar la proposición $\neg U$, utilizando las reglas de equivalencias y de inferencias, a partir de las siguiente premisas. Justifique cada paso.

1)	$(Q \wedge R) \rightarrow \neg P$	Premisa
2)	$\neg Q \rightarrow S$	Premisa
3)	$R \vee T$	Premisa
4)	P	Premisa
5)	$U \rightarrow (\neg S \wedge \neg T)$	Premisa
6)	$\neg (Q \wedge R)$	MT de (1) y (4)
7)	$\neg Q \vee \neg R$	DM de (6)
8)	$\neg R \rightarrow T$	ID de (3)
9)	$S \vee T$	DC de (7), (2) y (8)
10)	$\neg (\neg S \wedge \neg T)$	DM de (5)
14)	$\neg U$	MT de (10) y (5)

3. [**5 puntos**] Simplifique la expresión (debe indicar en cada paso la ley que utiliza)

$$\overline{(Q \cup \overline{P}) \cup (Q \cap R)} \cup \Big[P \cap [R \cap (\overline{Q \cap R})]\Big]$$

   Solución

$$
\begin{array}{ll}
\overline{(Q\cup\overline{P})\cup(Q\cap R)}\cup\left[P\cap[R\cap(\overline{Q\cap R})]\right] & \\
\equiv\left[\overline{(Q\cup\overline{P})}\cap\overline{(Q\cap R)}\right]\cup\left[P\cap[R\cap(\overline{Q}\cup\overline{R})]\right] & \text{DM}\\
\equiv\left[(\overline{Q}\cap P)\cap(\overline{Q}\cup\overline{R})\right]\cup\left[P\cap[R\cap(\overline{Q}\cup\overline{R})]\right] & \text{DM, DN}\\
\equiv\left[P\cap\left(\overline{Q}\cap(\overline{Q}\cup\overline{R})\right)\right]\cup\left[P\cap[R\cap(\overline{Q}\cup\overline{R})]\right] & \text{Conm, Asoc}\\
\equiv\left(P\cap\overline{Q}\right)\cup\left[P\cap[(R\cap\overline{Q})\cup(R\cap\overline{R})]\right] & \text{Abs y Dist}\\
\equiv\left(P\cap\overline{Q}\right)\cup\left[P\cap[(R\cap\overline{Q})\cup\varnothing]\right] & \text{Inv}\\
\equiv\left(P\cap\overline{Q}\right)\cup\left[P\cap[R\cap\overline{Q}]\right] & \text{Ne}\\
\equiv\left(P\cap\overline{Q}\right)\cup\left[(P\cap\overline{Q})\cap R\right] & \text{Conm, Asoc}\\
\equiv P\cap\overline{Q} & \text{Abs}
\end{array}
$$

4. Si se tiene como universo al conjunto $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ y se tienen los conjuntos $A=\{a,d,e\}$ y $B=\{b,c,d\}$, determine

   a) **[2 puntos]** $\overline{(A\cup B)}\times(\overline{A}\cap B)$
   Solución
   $\overline{(A\cup B)}\times(\overline{A}\cap B)=\overline{\{a,d,e,b,c\}}\times(\{b,c,f,g\}\cap\{b,c,d\})$
   $=\{f,g\}\times\{b,c\}=\{(f,b),(f,c),(g,b),(g,c)\}$

   b) **[2 puntos]** $P(A\cap\overline{B})$
   Solución
   $P(A\cap\overline{B})=P(\{a,d,e\}\cap\{a,e,f,g\})=P(\{a,e\})=\{\varnothing,\{a\},\{e\},\{a,e\}\}$

5. **[3 puntos]** Si se sabe que $|A|=2$, $|B|=3$ y A y B son conjuntos disjuntos entonces calcule

$$|P(A\times(A\cup B))|$$

   Solución

   Como son disjuntos $|A\cup B|=|A|+|B|$
   $|P(A\times(A\cup B))|=2^{|A\times(A\cup B)|}=2^{|A|\cdot|A\cup B|}=2^{|A|\cdot(|A|+|B|)}=2^{2\cdot(2+3)}=2^{10}=1024$

6. Demuestre que

   a) **[4 puntos]** $(A\cap B)-C\subseteq(A\cup B)\cap\overline{C}$
   Solución
   HQD $\forall x\left[x\in(A\cap B)-C\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap\overline{C}\right]$
   Demostración (directa):

$$
\begin{array}{rcl}
x\in(A\cap B)-C & \Rightarrow & x\in(A\cap B)\wedge x\notin C\\
 & \Rightarrow & (x\in A\wedge x\in B)\wedge x\notin C\\
 & \Rightarrow & x\in A\wedge x\notin C\\
 & \Rightarrow & (x\in A\vee x\in B)\wedge x\notin C\\
 & \Rightarrow & x\in(A\cup B)\wedge(x\in\overline{C})\\
 & \Rightarrow & x\in(A\cup B)\cap\overline{C}
\end{array}
$$

   Por lo que queda demostrado.

b) **[3 puntos]** $\left(M \subseteq \overline{N} \wedge M \cap \overline{T} = \varnothing\right) \Rightarrow M \subseteq T - N$

Solución

Hipótesis: $M \subseteq \overline{N}$, $M \cap \overline{T} = \varnothing$

HQD $\forall a\, [a \in M \Rightarrow a \in T - N]$

Demostración (directa):

$$\begin{aligned}\text{Sea } a \in M &\Rightarrow a \in \overline{N} \wedge a \notin \overline{T} (\text{Por hipótesis})\\ &\Rightarrow a \notin N \wedge a \in T\\ &\Rightarrow a \in T - N\end{aligned}$$

Por lo que queda demostrado.

c) **[4 puntos]** $\left(\overline{A \cup B} \cup C\right) \cap (A - C) = \varnothing$

Solución

Se va a demostrar por reducción al absurdo, suponga que $\left(\overline{A \cup B} \cup C\right) \cap (A - C) \neq \varnothing$, es decir, se debe demostrar que

$$\exists a \in \left(\overline{A \cup B} \cup C\right) \cap (A - C)$$

$$\begin{aligned}\exists a \in \left(\overline{A \cup B} \cup C\right) \cap (A - C) &\Rightarrow a \in \left(\overline{A \cup B} \cup C\right) \wedge a \in (A - C)\\ &\Rightarrow (a \notin (A \cup B) \vee a \in C) \wedge (a \in A \wedge a \notin C)\\ &\Rightarrow ((a \notin A \wedge a \notin B) \vee a \in C) \wedge (a \in A \wedge a \notin C)\\ &\Rightarrow ((a \notin A \vee a \in C) \wedge (a \notin B \vee a \in C)) \wedge (a \in A \wedge a \notin C)\\ &\Rightarrow (\neg(a \in A \wedge a \notin C) \wedge (a \in A \wedge a \notin C)) \wedge (a \notin B \vee a \in C)\\ &\Rightarrow F_0 \wedge (a \notin B \vee a \in C)\\ &\Rightarrow F_0\end{aligned}$$

Por lo tanto lo que se supuso es falso (verdadero no puede implicar a falso) y entonces, la proposición original es verdadera.

Así, se demostró que $\left(\overline{A \cup B} \cup C\right) \cap (A - C) = \varnothing$