$\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemáticas
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación

$\mathcal{T}$iempo: 2 horas 50 minutos
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 50 puntos
$\mathcal{J}$unio de 2010

$\mathcal{E}$xamen de $\mathcal{R}$eposición

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Sin resolver sistemas de ecuaciones determine, de manera explícita, la matriz X que satisface la ecuación matricial siguiente: $XAB^t = AB^t + XC^2$ (5 pts)

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + py + 2z = -2 \\ 4x + 2py + 4z = m \end{cases}$$

   (a) Determine todos los valores de p y m, respectivamente, de manera que el sistema tenga infinito número de soluciones dependiendo de un parámetro. (6 pts)

   (b) ¿Existe algún valor para p de manera que el sistema de ecuaciones posea solución única? Justifique. (2 pts)

   (c) Indique todos los valores de p y m, respectivamente, de manera que el sistema sea inconsistente. (2 pts)

3. Sean $(G, *)$ algún grupo con elemento neutro e y t un elemento fijo de G. Si se tiene que $H = \{x \in G / x * t = t * x\}$, demuestre que $(H, *)$ es subgrupo de $(G, *)$ (4 pts)

4. Sea $A = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, tal que $det\,(A) = 6$. Calcule:

   (a) $det\,(2A^{-1})$ (2 pts)

   (b) $det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ d & e & f \end{pmatrix}$ (3 pts)

5. Sea H algún espacio vectorial real. Si $B = \{u, v, w\}$ es un subconjunto linealmente independiente de H, determine si $C = \{2u - v, 3u + 2v + w, u - 4v - w\}$ es un subconjunto linealmente independiente de H o no lo es. (4 pts)

6. Sean $W_1 = \mathcal{G}en\,(\{v_1, v_2, v_3\})$ y $W_2 = \mathcal{G}en\,(\{v_4, v_5\})$ subespacios de $\mathbb{R}^3$, con $v_1\,(1, 4, 7)$, $v_2 = (2, -1, 3)$, $v_3 = (-4, 11, 5)$, $v_4 = (1, -1, 4)$ y $v_5 = (3, -3, 12)$

   (a) Determine una base B_1 de W_1 y una base B_2 de W_2 (4 pts)

   (b) ¿Cuál es la dimensión del subespacio $W_1 \cap W_2$? Justifique. (3 pts)

7. Considere la función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida de la manera siguiente:

$$T\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y & y - x \\ 0 & 3z \end{pmatrix}$$

   (a) Demuestre que T es una transformación lineal. (3 pts)

   (b) Obtenga el núcleo de T, la dimensión del núcleo de T, la imagen de T y la dimensión de la imagen de T (5 pts)

   (c) ¿Es T inyectiva? ¿Es T sobreyectiva? Justifique. (2 pts)

8. Considere la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 12 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Determine el polinomio característico de A. (2 pts)

   (b) Halle una base de E_2 (espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$). (3 pts)