INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *22 de noviembre de 2010*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 33 puntos*
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN — *Tiempo: 2 h. 20 m.*

TERCER EXAMEN PARCIAL

1. Considere la transformación lineal $T\colon P_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} a-2b \\ -a+b+c \\ -b+c \end{pmatrix}$$

   (a) Pruebe que T es una transformación lineal. **(2 puntos)**

   (b) Calcule el núcleo de T y obtenga una base para éste. **(2 puntos)**

   (c) Obtenga una base para la imagen de T. **(2 puntos)**

2. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ una transformación lineal y sean B_1 y B_2 bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ y $M_{2\times 2}$, respectivamente, dadas por $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ y

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   Si la matriz de cambio de base de T de la base B_1 a B_2 es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y se sabe que $v = 2u_3 + 3u_1$, calcule $T(v)$.

   (4 puntos)

3. Considere la transformación lineal $T\colon P_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} a+c \\ a+b-c \\ -a+b+c \end{pmatrix}$$

   (a) Pruebe que T es biyectiva. **(4 puntos)**

   (b) Calcule el criterio de T^{-1}. **(3 puntos)**

4. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que T es inyectiva si y solo si $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$.

   (5 puntos)

5. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal dada. Demuestre que si T es inyectiva y $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ es también un conjunto de vectores linealmente independiente.

(4 puntos)

6. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Calcule el polinomio característico asociado a A y los valores propios de A.
   (2 puntos)

   (b) Determine los espacios propios. **(2 puntos)**

   (c) Determine una base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios. **(1 punto)**

   (d) Determine una matriz C tal que $C^{-1}AC = D$ con D una matriz diagonal.
   (2 puntos)