INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — II SEMESTRE 2012
ESCUELA DE MATEMÁTICA — TIEMPO HORAS
PROBABILIDADES — VALOR pts

PARCIAL III

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. No son procedentes las apelaciones sobre preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con témpera (corrector). Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Se sabe que el tiempo de espera al hacer fila para almorzar en el comedor de la universidad CET sigue una distribución Gamma con $\alpha = 4$. La probabilidad de que una persona, elegida al azar, espere por menos de 15 minutos es de 0.353. Determine el tiempo promedio de espera al hacer fila para almorzar en esta universidad. (4 puntos)

X : el tiempo de espera al hacer fila para almorzar en el comedor de la universidad CET

$$X \sim Gamma\left(\alpha = 4, \beta\right)$$
$$P\left(X < 15\right) = F_I\left(\frac{15}{\beta}, 4\right) = 0.353$$
$$\frac{15}{\beta} = 3 \Rightarrow \beta = 5$$
$$E\left(X\right) = \alpha\beta = 4 \cdot 5 = 20$$

El tiempo promedio de espera es de 20 minutos.

2. El tiempo que tarda un empleado para empacar una caja de banano sigue una distribución exponencial con media 90 segundos. La bananera ha decido despedir a aquellos que en una inspección sorpresa tarden más de 2 minutos.

   (a) Determine la probabilidad de que el empacador sea despedido. (3 puntos)

   X : tiempo, en segundos, que tarda un empacador para empacar un caja de bananos

$$X \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{90}\right)$$
$$P\left(X > 120\right) = 1 - P\left(X \leq 120\right)$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{90}\cdot 200}\right)$$
$$= 0.108\,37$$

   (b) La empresa tiene distribuidas empacadoras, y cada una cuenta con 35 empleados empacadores. La empresa ha decido cerrar empacadores en las que el promedio por empacador sea mayor a 100 segundos. Determine la probabilidad de que una empresa sea cerrada. (3 puntos)

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{35}}{35} : \text{ el tiempo promedio por empacadora}$$

$$\overline{X} \sim N\left(\mu = 90; \sigma^2 = \frac{8100}{35}\right)$$

$$P\left(\overline{X} > 100\right) = P\left(Z > \frac{100 - 90}{\sqrt{\frac{8100}{35}}}\right)$$

$$= P(Z > 0.657\,34)$$

$$= 0.2555$$

3. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim N(5, 9)$. Obtenga los valores de a y b tales que $P(a < X < b) = 0.8$, en donde el intervalos es simétrico con respecto a la media. (3 puntos)

$$P(X < a) = 0.1$$

$$P\left(Z < \frac{a - 5}{3}\right) = 0.1$$

$$\frac{a - 5}{3} = z_{0.1}$$

$$\frac{a - 5}{3} = -1.2816$$

$$a = 1.\,155\,2$$

$$P(X < b) = 0.9$$

$$P\left(Z < \frac{b - 5}{3}\right) = 0.9$$

$$\frac{b - 5}{3} = z_{0.9}$$

$$\frac{b - 5}{3} = 1.2816$$

$$b = 8.\,844\,8$$

4. El peso de una barra de chocolate sigue una distribución normal con media 100 gramos y desviación estándar 10 gramos.

   (a) La promoción el *estafado feliz* premia las barras que pesan cierta cantidad menos de lo que se indica en el empaque. ¿Cuál debe ser el peso si se desea que el total de barras a premiar sea inferior a 5%? (3 puntos)

$$X: \text{el peso, en gramos, de las barras de chocolate}$$
$$X \sim N(\mu = 100, \sigma = 10)$$
$$P(X < c) = 0.05$$
$$P\left(Z < \frac{c-100}{10}\right) < 0.05$$
$$\phi\left(\frac{c-100}{10}\right) < 0.05$$
$$\frac{c-100}{10} < -1.645$$
$$c < 83.55$$

(b) En una caja se colocan 100 barras de chocolate y se indica que el peso promedio de la caja está entre 99 y 101 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que esa afirmación sea verdadera? (3 puntos)

$$\overline{X}: \text{ el peso promedio, en gramos, de las 100 barras de chocolate}$$
$$\overline{X} \sim N\left(\mu = 100, \sigma^2 = \frac{10^2}{100} = 1\right)$$
$$P\left(99 < \overline{X} < 101\right) = P\left(\frac{99-100}{1} < Z < \frac{101-100}{1}\right)$$
$$= P(-1 < Z < 1)$$
$$= \phi(1) - \phi(-1)$$
$$= 0.84135 - 0.1587$$
$$= 0.68265$$

5. El número de llamadas que se reciben en una oficina sigue una distribución de Poisson con promedio de 7 llamadas cada dos horas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo entre llamadas exceda el tiempo esperado? (3 puntos)

Sea X el número de llamadas que se reciben en una oficina cada dos horas

Sea Y el tiempo en horas entre los momentos en que se reciben dos llamadas sucesivas en la oficina

$X \sim P(\lambda = 7)$, por teorema de relación entre la distribución de Poisson y la distribución Exponencial

$$Y \sim Exp(\lambda = 7)$$
$$E(Y) = \frac{1}{7}$$
$$P\left(Y > \frac{1}{7}\right) = 1 - F_Y\left(\frac{1}{7}\right) = 1 - \left(1 - e^{-7 \cdot \frac{1}{7}}\right) = e^{-1}$$

(b) Determine el intervalo de tiempo tal que la probabilidad de que no se reciban llamadas en dicho intervalo sea de 0.8. (3 puntos)

$$
\begin{aligned}
P\left(Y>t\right) &= 1-F_Y\left(t\right)=1-\left(1-e^{-7t}\right)=0.8 \\
1-\left(1-e^{-7t}\right) &= 0.8 \\
t &= \frac{\ln\left(0.8\right)}{-7}=0.031878
\end{aligned}
$$