

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto, debe aparecer todos los pasos, y sus respectivas justificaciones, que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Considere las dos relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} definidas sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, donde \mathcal{R} está definida por

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a - b)^2 \in A$$

y el par ordenado (i, j) pertenece al gráfico de \mathcal{S} si y solo si $i - j \geq 1$

- (a) Determine el gráfico de $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1}) - \mathcal{R}$. **(2 puntos)**
 - (b) Determine la matriz asociada a $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) - \overline{\mathcal{R}}$ **(3 puntos)**
2. Sobre \mathbb{Q} , el conjunto de los números racionales, se define la relación \mathcal{R} de la siguiente manera:

$$x\mathcal{R}y \iff \left[\exists h \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = y + \frac{h}{5} \right]$$

- (a) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia. **(4 puntos)**
 - (b) Calcule la clase de equivalencia de $\frac{1}{2}$ y encuentre tres elementos de esta clase. **(2 puntos)**
3. Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} dos relaciones definidas sobre un conjunto A , con A no vacío. Si \mathcal{R} es transitiva y se cumple que $a(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})b$ y $b\mathcal{R}c$ entonces, demuestre que $a[\mathcal{R} \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{S})]c$. **(4 puntos)**

4. Considere las dos funciones f y g , definidas sobre sus respectivos dominios de números reales, con criterios $g(x) = \frac{x}{x+2}$, $f(x) = x - 1$.
Verifique que $(g^{-1} \circ f \circ g)(x) = \frac{-4}{x+4}$. **(3 puntos)**

5. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = 8x^3 - 5$, además, sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ otra función que cumple $(f \circ g)(x) = 35 - 8x$. Determine el criterio $g(x)$. **(3 puntos)**

6. Pruebe que la función $f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}$ definida por $f(x) = \frac{2x}{3x+6}$ es una función biyectiva. **(5 puntos)**

7. Sean $A = \{8\}$ y $B = \{1, 3, 9\}$. Considere la función $g: A \times B \rightarrow \{3, 4\}$ definida por:

$$g((a, b)) = \begin{cases} 3 & \text{si } a < b \\ 4 & \text{si } a > b \end{cases}$$

Además, considere la función $f: P(B) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de manera que $f(X)$ es igual a la cardinalidad de X .

- (a) Determine si f es inyectiva y si es sobreyectiva. **(2 puntos)**
 - (b) Determine si g es inyectiva y si es sobreyectiva. **(2 puntos)**
 - (c) Calcule $f^{-1}(\{2\})$. **(1 punto)**
 - (d) Calcule $g^{-1}(g(\{(8, 1)\}))$. **(1 punto)**
8. Sean A , B y C conjuntos no vacíos, suponga que f es una función de A en B y además, que g es una función de B en C .
Demuestre que si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva. **(4 puntos)**