Instituto Tecnológico de Costa Rica — Tiempo: 2.20 horas
Escuela de Matemática — Puntaje: 30 puntos
Álgebra Linea para Computación — II Semestre 2017

I Examen

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración. No se permite el uso de dispositivos con memoria de texto ni conectividad a Internet, así como el uso de hojas sueltas.

---

1. *(5 puntos)* Considere las matrices $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   calcule $(X - I_3)^{-1} + 3Y^tY$

   Solución

   $X - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, así $(X - I_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

   Por otro lado: $3Y^tY = \begin{pmatrix} 24 & 12 & -24 \\ 12 & 6 & -12 \\ -24 & -12 & 30 \end{pmatrix}$

   Finalmente:$(X - I_3)^{-1} + 3Y^tY = \begin{pmatrix} 27 & 13 & -28 \\ 11 & 6 & -11 \\ -19 & -11 & 23 \end{pmatrix}$

2. *(3 puntos)* Demuestre que si A es una matriz invertible, entonces su inversa es única.

   Solución

   Supongamos que B y C son dos matrices inversas de la matriz A, tales que $B \neq C$; es decir, se cumplen los resultados siguientes:

   De acuerdo al lema de Euclides tenemos que

$$\begin{aligned} AB &= BA = I_n \\ AC &= CA = I_n \end{aligned}$$

   Por otra parte, se tiene que:

$$\begin{aligned} B &= BI_n \\ &= B(AC) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (BA)C \\
&= I_nC \\
&= C
\end{aligned}
$$

3. *(5 puntos)* Demuestre, entrada por entrada, que si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $F \in \mathcal{M}_{r\times m}(\mathbb{R})$, entonces $FA - FB = F(A - B)$

Solución

$$
\begin{aligned}
\langle FA - FB\rangle_{ij} &= \langle FA\rangle_{ij} - \langle FB\rangle_{ij} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \langle F\rangle_{ik} \langle A\rangle_{kj} - \sum_{k=1}^{m} \langle F\rangle_{ik} \langle B\rangle_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \Big(\langle F\rangle_{ik} \langle A\rangle_{kj} - \langle F\rangle_{ik} \langle B\rangle_{kj} \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \langle F\rangle_{ik} \Big(\langle A\rangle_{kj} - \langle B\rangle_{kj} \Big) \\
&= \langle F(A - B)\rangle_{ij}
\end{aligned}
$$

4. *(4 puntos)* Sean $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ tales que $det(B) = \frac{1}{8}$ y $A^3 = 2B^{-1}$. Calcule el resultado de:

$$det\left[2(A^t)\cdot A^{-1}\cdot A^2\right]$$

Solución

Se tiene que: $A^3 = 2B^{-1} \Longrightarrow [det(A)]^3 = 2^3\cdot 8 \Longrightarrow det(A) = 4$, por otro lado:

$det\left[2(A^t)\cdot A^{-1}\cdot A^2\right] = 2^3 det(A)\dfrac{1}{det(A)}[det(A)]^2 = 2^3\cdot 16 = 128$

5. *(4 puntos)* Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Determine los valores de α para que AB sea invertible (no singular).

Sol: $A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+1 & 2\alpha+3 \\ -\alpha+1 & 1 \end{pmatrix}$

Luego $det(A\cdot B) = 2x^2 + 3x - 2$, por lo tanto $A\cdot B$ es invertible en $\mathbb{R} - \{-2, \frac{1}{2}\}$

6. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{cases}
x - 2y - 3z &= 4 \\
3x - y + 5z &= 2 \\
4x + y + (t^2 - 14)z &= t + 2
\end{cases}
$$

Utilice el *método de Gauss-Jordan* para determinar el o los valores de t para los cuales el sistema posee solución única, y encuentre dicha solución.

7. *(4 puntos)* Si se sabe que $\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ 1 & c & z \end{vmatrix} = 2$ calcule el valor de $\begin{vmatrix} 3-x & 3-y & 3-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

Solución

$$\begin{vmatrix} 3-x & 3-y & 3-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3-x & 3-y & 3-z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 12$$