INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMATICA — TIEMPO 2 HORAS 20 MIN
PROBABILIDADES — VALOR 50 PTS

TERCER PARCIAL, II-2014

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Las preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con corrector no podrán apelarse. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Sea X una variable aleatoria continua cuya distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{7}\right)^{k-1} & si \quad 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & en\ otro \quad caso \end{cases}$$

   (a) Determine el valor de k. (4 puntos)

$$\int_0^7 \left(\frac{x}{7}\right)^{k-1} dx = \left(\frac{1}{7}\right)^{k-1} \int_0^7 x^{k-1}\, dx = \left(\frac{1}{7}\right)^{k-1} \left.\frac{x^k}{k}\right|_0^7 = \left(\frac{1}{7}\right)^{k-1} \frac{7^k}{k} = 1 \Rightarrow k = 7$$

   (b) Halle la fórmula de la función de distribución acumulada de X (6 puntos)

$$\begin{aligned} y &< 0 : F_X(y) = 0 \\ 0 &\leq y \leq 7 : F_X(y) = \int_0^y \left(\frac{x}{7}\right)^{7-1} dx = \frac{1}{823\,543} y^7 \\ y &> 7 : F_X(y) = 1 \end{aligned}$$

2. Sea X una variable aleatoria continua cuya distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{4-2x} & si \quad x \geq 2 \\ 0 & en\ otro \quad caso \end{cases}$$

   (a) Determine la función generadora de momentos para $X : m_X(t)$ para $t < 2$. (6 puntos)

$$\begin{aligned} m_x(t) &= E(e^{tx}) = \int_2^{+\infty} e^{tx} 2e^{4-2x} dx = 2e^4 \int_2^{+\infty} e^{(t-2)x} dx \\ &= 2e^4 \lim_{b\to\infty} \left.\frac{e^{(t-2)x}}{t-2}\right|_2^b = \frac{2e^4\left(0 - e^{2(t-2)}\right)}{t-2} = -2\frac{e^{2t}}{t-2} \text{ si } t < 2 \end{aligned}$$

(b) Sea $Y = X + e^X$. Determine $E(Y)$ (5 puntos)

$$\begin{aligned} m_x'(t) &= -2e^{2t}\frac{2t-5}{(t-2)^2} \Rightarrow E(X) = m_x(0) = \frac{5}{2} \\ E(Y) &= E(X) + E\left(e^X\right) = \frac{5}{2} + m_X(1) = \frac{5}{2} + -2\frac{e^2}{1-2} = 2e^2 + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

3. El tiempo de vida útil de una tablet marca XTEC sigue una distribución exponencial con una media de 3 años. Dada la variedad de marcas de tablet en el mercado, la organización Evalúa Tablet se ha dedicado a evaluar estos dispositivos y considera que una tablet es de buena calidad si tiene una vida útil mayor a 4 años.

(a) Determine la probabilidad de que una tablet XTEC sea de buena calidad. (4 puntos)

$$\begin{array}{l} X: \text{ vida útil de tablet XTEC} \\ X \sim Exp(1/3) \\ P(X > 4) = 1 - \left(1 - e^{-4/3}\right) \approx 0.263\,597 \end{array}$$

(b) A partir del 2017 la empresa Evalúa Tablet otorgará un certificado de calidad a las empresas que fabrican tablet y que cumplan el siguiente test: al elegir 40 tabletas al azar, estás deben ser, en promedio, de buena calidad. Determine la probabilidad de que XTEC obtenga el certificado de buena calidad. (5 puntos)

$$X: \text{vida útil de tablet XTEC}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 3, \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 9$$

$$TLC: \overline{X} \underset{aprox}{\sim} N\left(3, \frac{81}{40}\right)$$

$$P\left(\overline{X} > 4\right) = 1 - P\left(Z < \frac{4-3}{\sqrt{\frac{81}{40}}}\right) = 1 - \phi(0.702\,728\ )$$

4. Dada una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2 recuerde que utilizando la desigualdad de Chebishev se tiene que para todo $k > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

(a) Verifique que $P(|X - \mu| < k\sigma) \geq \dfrac{k^2 - 1}{k^2}$. (3 puntos)

(b) Si X es una variable aleatoria continua tal que $E(X) = 25$ y $Var(X) = 4$. Acote inferiormente $P(20 < X < 30)$. (4 puntos)

5. Dadas las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$, mutuamente independientes tales que:

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \text{ con } \mu_i = 10i \quad y \quad \sigma_i^2 = 2i,$$

para $i = 1, 2, ..., n$. Considere la variable aleatoria $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

   (a) Verifique que $E(\bar{X}) = 5n + 5$ y que $Var(\overline{X}) = n + 1$. Sugerencia: recuerde que $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. (3 puntos) $\overline{X}$

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \frac{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n}{n} \\ &= \frac{10 + 20 + \cdots + 10n}{n} \\ &= \frac{10(1 + 2 + \cdots + n)}{n} \\ &= \frac{10n(n+1)}{2n} \\ &= 5n + 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Var(\bar{X}) &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2}{n} \\ &= \frac{2 + 4 + \cdots + 2n}{n} \\ &= \frac{2(1 + 2 + \cdots + n)}{n} \\ &= \frac{2n(n+1)}{2n} \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

   (b) Determine el menor valor de n que satisface que la probabilidad de que $\overline{X} < 5n$ sea superior al 10%.. (4 puntos)

$$\begin{aligned} P(\overline{X} &< 5n) > 0.1 \\ &\iff \phi\left(\frac{5n - (5n+5)}{\sqrt{n+1}}\right) > 0.1 = \phi(-1.28) \\ &\implies \frac{5n - (5n+5)}{\sqrt{n+1}} > -1.28 \\ &\implies n > 14.258 \end{aligned}$$

6. El peso de una bolsa de tomate de cierta distribuidora alimenticia sigue una distribución normal con media de 1000 gramos y desviación estándar de 75 gramos. Debido a la sobre oferta de tomate, deciden hacer paquetes de 3 bolsas y vender cada paquete por 1000 colones. Un inspector decide revisar 1000 de tales paquetes. Si al menos 175 de ellos pesan menos de 2975 g, entonces castigará a la distribuidora con una multa. ¿Cuál es aproximadamente la probabilidad de que la distribuidora sea castigada? (6 puntos)

   Solución: Sea X el peso de 3 paquetes; así $X \sim N(3000, 625)$, por lo que

$$P(X < 2975) = \phi\left(\frac{2975 - 3000}{25}\right) = \phi(-1) = 0.15866.$$

Sea Y el número de paquetes que pesan menos de $2975\,\mathrm{g}$, así $Y \sim B(1000, 0.15866)$, es decir, $Y \underset{\text{aprox.}}{\sim} N(158.66, 133.487)$, por lo que

$$P(Y \geq 175) = 1 - P(Y < 175) \approx 1 - \phi\left(\frac{174.5 - 158.66}{\sqrt{133.487}}\right) \approx 1 - 0.92785 = 7.215\%.$$