$\mathcal{I}$nstituto $\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación

$\mathcal{T}$iempo: 2 horas 20 minutos
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 36 puntos
$\mathcal{O}$ctubre de 2 008

$\mathcal{II}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo; por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

Notación: En el estudio de grupos, $x' = x^{-1}$

1. Considere el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_6, +)$ y conteste lo que se pide en cada caso.
   (a) Enuncie la tabla de operación binaria para dicho grupo. (1 pto)
   (b) Determine el elemento neutro y el elemento simétrico (inverso) de cada uno de los elementos de $(\mathbb{Z}_6, +)$ (1 pto)
   (c) Enuncie todos los elementos involutivos y todos los elementos idempotentes de este grupo. (1 pto)
   (d) Halle todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}_6, +)$ (2 pts)

2. Demuestre que si $(\mathcal{G}, *)$ es grupo con elemento neutro e, entonces $\mathcal{G}$ es abeliano si, y sólo si, $(a * b)' = a' * b'$, $\forall a, b \in \mathcal{G}$ (4 pts)

3. Si se sabe que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \circ)$ es grupo abeliano, con $(a, b) \circ (c, d) = (2ac, b + d - 3)$, pruebe que $\mathcal{H} = \left\{(t, 3) \middle/ t \in \mathbb{R}^*\right\}$ es subgrupo de $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \circ)$ (5 pts)

4. Considere el conjunto $\mathcal{A} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Si se sabe que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo módulo 10, conteste lo que se pide en cada caso.
   (a) Realice la tabla de operación binaria para cada una de las dos operaciones definidas en el anillo $\mathcal{A}$ (1 pto)
   (b) ¿Por qué $\mathcal{A}$ es un anillo conmutativo? (1 pto)
   (c) ¿Es $\mathcal{A}$ un anillo unitario o no lo es? Justifique. (2 pts)

5. Demuestre que $\mathcal{W} = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \big/ b + c + d = 0 \right\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^4$ (3 pts)

6. Considere los subconjuntos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que se enuncian y, según sea el caso, demuestre que $\mathcal{H}$ es subespacio de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o justifique por qué no se cumple que $\mathcal{H}$ sea subespacio de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (3 pts)

   (a) $\mathcal{H} = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \big/ A \cdot A = A \right\}$

   (b) $\mathcal{H} = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \big/ A^t = A \right\}$

7. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ considere los vectores siguientes: $p(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3$, $q(x) = 1 + x^2 + x^3$, $r(x) = 3 - x - 2x^2 + 2x^3$ y $s(x) = -1 + 3x + x^2$. Escriba, en caso de ser posible, el vector $p(x)$ como una combinación lineal de los vetores $q(x)$, $r(x)$ y $s(x)$ (4 pts)

8. Determine si el conjunto $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 8 & -11 \\ 16 & 10 & 9 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente en $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ (4 pts)

9. Sean $\mathcal{V}$ algún espacio vectorial real y $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un subconjunto de $\mathcal{V}$, tal que $\mathcal{S}$ es linealmente independiente. Si $x \in \mathcal{V}$, tal que $x \notin \mathcal{G}en(\mathcal{S})$, demuestre que el conjunto $\mathcal{H} = \{x, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es, también, linealmente independiente. (4 pts)