$\mathcal{I}$nstituto $\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática
$\mathcal{M}$atemática $\mathcal{G}$eneral

$\mathcal{T}$iempo: 2 horas 20 minutos
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 34 puntos
$\mathcal{I}$ $\mathcal{S}$emestre 2010

III $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Considere la función f cuyo criterio es $f(x) = 1 + log_3(3 - 2x)$

(a) Establezca el máximo dominio real de f. (1 punto)

(b) Determine los puntos de intersección con los ejes coordenados. (2 puntos)

(c) Realice el dibujo de la gráfica de f. (2 puntos)

(d) Suponiendo que f es biyectiva, verifique que $g(x) = \dfrac{-3\left(3^{x-2} - 1\right)}{2}$ es el criterio de la función inversa de f. (2 puntos)

2. Resuelva en $\mathbb{R}$ las ecuaciones siguientes

(a) $\left(4^x - 3 \cdot 2^x - \dfrac{7}{4}\right)(log_3(1 - x) - 1) = 0$ (4 puntos)

(b) $sec(x)\, sen(2x) = csc(x) + 1$ (4 puntos)

3. Si $sen(\alpha) = \dfrac{3}{5}$ con $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ y $cos(\beta) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ con $\dfrac{-\pi}{2} < \beta < 0$, determine el valor exacto de $sen(\alpha + \beta)$. (3 puntos)

4. Verifique que $\left(\dfrac{tan\,\beta+1}{tan\,\beta-1}\right)^2=\dfrac{1+sen\,2\beta}{1-sen2\,\beta}$ (4 puntos)

5. Resuelva cada uno de los problemas siguientes

(a) Un bioquímico observa un cultivo de bacterias. Ve que la población (en miles de bacterias) "t" horas después de las 7:00 a.m., se puede estimar mediante la ecuación $N(t)=N_0\cdot e^{0.4055t}$, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que el número de bacterias sea el doble de lo que había a las 10:00 a.m.? (4 puntos)

(b) Desde lo alto de una roca de 30 metros de alto, los ángulos de depresión de dos botes que están en el mar, ambos hacia el oeste de un observador son 45° y 30° respectivamente. ¿Qué distancia hay entre los botes? (3 puntos)

6. Si $log_b\,N=2$ determine el valor numérico de $log_{\frac{1}{b}}\,N-1$ donde $N>0$ y $b>0$ (5 puntos)