INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

21 de noviembre del 2001
Total: 31 puntos
Tiempo: 2 h. 20 m.

TERCER EXAMEN PARCIAL

1. Use el método de inducción matemática para demostrar las siguientes proposiciones:

   (a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}(i^2 - i) = \frac{n(n^2-1)}{3}$ (5 puntos)

   (b) $4^{n-1} + 15n - 16$ es divisible por 9, para $n \geq 2$ (5 puntos)

2. Determine la fórmula explícita para cada una de las relaciones de recurrencia:

   (a) $\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2}; \text{ si } n \geq 3 \\ a_1 = 3 \\ a_2 = 5 \end{cases}$ (3 puntos)

   (b) $\begin{cases} U_n = 3U_{n-2} + 2U_{n-3}; \text{ si } n \geq 3 \\ U_0 = 1 \\ U_1 = 2 \\ U_2 = 7 \end{cases}$ (5 puntos)

3. En $\mathbb{R}$ se define la operación $\otimes$ como $a \otimes b = a + b + 6$. Pruebe que $(\mathbb{R}, \otimes)$ es un grupo abeliano. (5 puntos)

4. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación $\perp$ como: (2 puntos)

   $$(a, b) \perp (c, d) = (a + c + 2, 7bd)$$

   Suponga que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \perp)$ es un grupo abeliano. Determine su elemento neutro y el inverso del elemento arbitrario (a, b).

5. Pruebe que si $ax < ay \wedge a > 0$ entonces $x < y$. (3 puntos)

6. Pruebe, usando la definición de valor absoluto, que si $x < 0$ y $y > 0$ entonces se cumple $|x + y| \leq |x| + |y|$ (3 puntos)