

TERCER EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Utilice el método de inducción matemática para demostrar la validez, para todo $n \geq 1$, con n número natural, de la identidad:
(4 puntos)

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

2. Utilice el método de inducción matemática para demostrar la validez, para todo $n \geq 1$, con n número natural, de la desigualdad:
(5 puntos)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \frac{n}{2} + 1$$

3. Considere la sucesión a_n definida por:

$$a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} - 8a_{n-3}$$

si $n \geq 3$, con $a_0 = 4$, $a_1 = -4$, $a_2 = -16$. Determine la fórmula explícita para esta relación.
(4 puntos)

4. Suponga que la fórmula explícita asociada a la relación por recurrencia a_n , para $n \geq 1$, es:

$$a_n = -5^n - 5 + 3^n$$

Determine una fórmula recursiva para esta sucesión. (3 puntos)

5. En el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_{18}, \oplus)$, con \oplus la suma usual de clases de equivalencia, calcule el valor exacto de: **(3 puntos)**

$$1\dot{3} \oplus \left[4\dot{\oplus} (\dot{2})^{-3} \right]^2$$

6. En \mathbb{R} se define la operación interna $*$ como:

$$a * b = a + b - \frac{1}{2}$$

Pruebe que la estructura $(\mathbb{R}, *)$ es un grupo abeliano. **(4 puntos)**

7. Si $P(E)$ denota el conjunto de partes de E , con E no vacío. Sobre el conjunto $P(E)$ se define la operación interna $A * B = A \cup B$, analice las propiedades que cumple e indique qué tipo de estructura es $(P(E), *)$. **(3 puntos)**

8. En el conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ se define la ley de composición interna $*$ cuya tabla de operación es:

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Si se sabe que $(E, *)$ es un grupo abeliano, determine todos los subgrupos de $(E, *)$. **(4 puntos)**