

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Trabaje en forma ordenada y clara. Escriba todos los procedimientos que utilice para resolver los ejercicios propuestos.

1. Sea $A = \{0, 2, 4, 6\}$, sea \mathcal{R} una relación sobre A , cuya matriz asociada está definida por

$$M_{\mathcal{R}}[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 3 \vee j = 2 \vee i = j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y sea \mathcal{S} otra relación sobre A , definida por

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow a + b \in A$$

- (a) Determine el gráfico de \mathcal{R} y el gráfico de \mathcal{S} (2 puntos)
 - (b) Determine la matriz asociada de $\overline{\mathcal{S}} \circ \mathcal{R}^{-1}$ (2 puntos)
 - (c) Determine el gráfico de $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) - (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$ (2 puntos)
2. En \mathbb{Z} se define la relación \mathcal{R} de la siguiente manera:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow [a = b \vee a + b = 12]$$

- (a) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia. (4 puntos)
 - (b) Determine el conjunto cociente \mathbb{Z}/\mathcal{R} . (2 puntos)
3. Si $f(x) = ax^3$ con $a \neq 0$ y $g(x) = 2x + 3$, determine $(f^{-1} \circ g \circ f)(x)$ (4 puntos)
4. Sean $f : A \longrightarrow B$ una función, M y N dos conjuntos tales que $M \subseteq N \subseteq B$. Demuestre que $f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N)$ (3 puntos)

5. Considere la relación \mathcal{R} definida sobre un conjunto $A \neq \emptyset$

(a) Demuestre que $R^{-1} \circ R$ es simétrica (3 puntos)

(b) ¿Qué condiciones se requieren para que $R^{-1} \circ R$ es reflexiva? (2 puntos)

6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función biyectiva, y sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cuyo criterio está dado por $g(x) = f(x) + k$, para $k \in \mathbb{R}$.

(a) Muestre que g es una función inyectiva. (2 puntos)

(b) Muestre que g es una función sobreyectiva. (2 puntos)

(c) Determine $g^{-1}(x)$. (1 punto)

7. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y considere la función $f : A \rightarrow A$ definida por

$$f(a) = \begin{cases} a - 1 & \text{si } a \geq 2 \\ a + 1 & \text{si } a < 2 \end{cases}$$

(a) Determine si f es inyectiva (1 puntos)

(b) Determine si f es sobreyectiva (1 puntos)

(c) Calcule $f(\{2, 4, 5\})$ (2 puntos)

(d) Calcule $f^{-1}(\{3, 5\}) \cup f^{-1}(f(\{4\}))$ (2 puntos)