INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *Tiempo: 2 h. 30 m.*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 33 puntos*
Álgebra Lineal para Computación (MA-2405) — *I Semestre de 2011*

Segundo Examen Parcial

Instrucciones: Trabaje en forma ordenada y clara. Escriba todos los procedimientos que utilice para resolver los ejercicios propuestos.

1. En el grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ donde $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$.
   (a) Demuestre que es un grupo abeliano. **(3 puntos)**
   (b) Halle todos los elementos del grupo. **(2 puntos)**
2. Asuma que el conjunto de las matrices de 2×2 es asociativo con la suma y con el producto y que el producto es distributivo respecto a la suma.
   (a) Demuestre que las matrices de 2×2 es un anillo. **(3 puntos)**
   (b) Justifique si tiene o no divisores de cero. **(2 puntos)**
3. Sea G un grupo, con H y K subgrupos de G. Demuestre que $H \cap K$ es subgrupo de G. **(4 puntos)**
4. Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Demuestre que si $x \cdot x = e$, para todo $x \in G$, entonces G es abeliano. **(2 puntos)**
5. Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo. Pruebe que $0 \cdot r = r \cdot 0 = 0$, $\forall r \in R$. **(3 puntos)**
6. Determine si H_1 y H_2 son subespacios vectoriales del espacio vectorial V indicado
   (a) $H_1 = \left\{ f \in V \ / \ \int_a^b f(x)\,dx = 1 \right\}$ en V, donde V es el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de todas las funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$. **(3 puntos)**
   (b) $H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y - z = 0 \wedge x + 2y + 3z = 0\}$ en V, donde $V = \mathbb{R}^3$. **(3 puntos)**
7. Sea W el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $u = (-3, 4)$, $v = \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$, $w = \left(4, -\frac{16}{3}\right)$.
   (a) Halle una base para W. **(3 puntos)**
   (b) Halle la dimensión de W. **(2 puntos)**
8. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. Si w es un vector que pertenece al conjunto de las combinaciones lineales de los $v_1, v_2, \ldots, v_n$, demuestre que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, w\}$ es linealmente dependiente. **(3 puntos)**