INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *11-1-2011/Verano*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 34 puntos*
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN — *Tiempo: 2 h. 15 m.*

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

1. Considere el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$.
   (a) Determine el elemento neutro, los inversos de cada elemento del grupo, los elementos involutivos y los elementos idempotentes. **(2 puntos)**
   (b) Calcule todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$. **(3 puntos)**

2. En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación $\otimes$ como:
$$(a,b) \otimes (c,d) = (a+c-2, 3bd)$$
   Si se sabe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ es grupo abeliano.
   (a) Determine la fórmula explícita de $(a,b)^{-1}$ **(2 puntos)**
   (b) Calcule el valor exacto de $(4,-1)^{-2} \otimes (2,1)^3$ **(2 puntos)**
   (c) Si $H = \left\{(2,t) \ / \ t \in \mathbb{R}^*\right\}$, pruebe que $(H, \otimes) < (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ **(2 puntos)**

3. Sea $S \subset \mathbb{R}^4$ el espacio solución del sistema lineal homogéneo:
$$\begin{cases} x+y+z+w &= 0 \\ 2x-y+2z-w &= 0 \\ x-2y+z-2w &= 0 \end{cases}$$
   Encuentre una base para S y determine la dimensión de S. **(5 puntos)**

4. Sea $p(x) = x^3 + x^2 - 5$ un vector de P_3. Exprese a p como combinación lineal de los vectores $x^3 - x^2 + 3$, $3x^3 - 2x^2 + 3$, $-x^2 + 1$. **(4 puntos)**

5. Sea $S = \{u, v, w\}$ una base para el espacio vectorial V. Determine si el conjunto $S_1 = \{v + w - u, 2w + v + u, v + 3u + 3w\}$ es o no, base de V. **(4 puntos)**

6. Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} : a + b + 2c - 2d = 0 \wedge 2a - b + c - d = 0 \right\}$
   (a) Pruebe que W es subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$. **(4 puntos)**
   (b) Determine una base de W y calcule su dimensión. **(2 puntos)**

7. Sean V algún espacio vectorial de dimensión n. Si $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base de V, y $w \in V$, demuestre que el conjunto $H = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, w\}$:
   (a) Genera a V. **(2 puntos)**
   (b) Es linealmente dependiente. **(2 puntos)**