Instituto Tecnológico de Costa Rica | Tiempo máximo: 2 horas 30 minutos
Escuela de Matemática | puntaje total: 33 puntos
Matemática General | I semestre 2014

Tercer Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer todos los pasos que lo llevaron a su respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada. No son procedentes reclamos sobre exámenes resueltos con lápiz (parcial o totalmente), o que presenten alguna alteración. No se permite el uso de hojas sueltas, calculadoras programables ni teléfonos celulares.

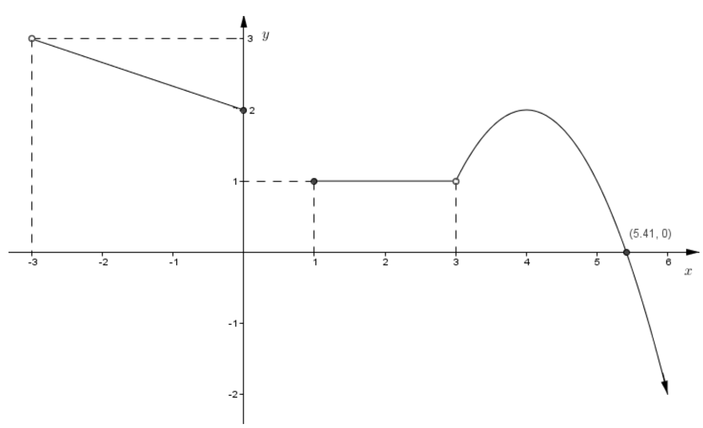
---

1. Trace la gráfica de la función $f : D \to \mathbb{R}$ con $D =]-3, 0] \cup [1, +\infty[- \{3\}$ y de criterio:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{3} + 2 & \text{si} \quad -3 < x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ -x^2 + 8x - 14 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

[4 puntos]

Solución



2. Considere la función $g : A \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 4 - \log_5(2-3x)$:

a. Determine el conjunto A, tal que A sea el dominio máximo de la función g. [2 puntos]

b. Si se sabe que g es biyectiva, determine g^{-1}. [3 puntos]

Solución

a.

$$\begin{aligned} 2-3x &> 0 \\ \frac{2}{3} &> x \\ \therefore \quad & A = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} y &= 4 - \log_5(2-3x) \\ x &= 4 - \log_5(2-3y) \\ \log_5(2-3y) &= 4-x \\ 2-3y &= 5^{4-x} \\ 2-5^{4-x} &= 3y \\ \frac{2-5^{4-x}}{3} &= y \\ &\therefore \quad g^{-1} : IR \to A; \\ g^{-1}(x) &= \frac{2-5^{4-x}}{3} \end{aligned}$$

3. Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$:

a. $\log_2\left(x^2+3x+2\right)+\log_2(x-5)=3+\log_2(x+1)$ [4 puntos]

Solución

$$\begin{aligned}
\log_2\left(x^2+3x+2\right)+\log_2(x-5)=3+\log_2(x+1) \quad &\rightarrow \log_2\left[\tfrac{\left(x^2+3x+2\right)(x-5)}{(x+1)}\right]=3\\
&\rightarrow \frac{\left(x^2+3x+2\right)(x-5)}{(x+1)}=8\\
&\rightarrow \left(x^2+3x+2\right)(x-5)=8x+8\\
&\rightarrow x^3-2x^2-21x-18=0\\
&\rightarrow x=-3,\ x=6,\ x=-1
\end{aligned}$$

$x=-3$ no es solución, pues $\log_2(-3+1)$ no está definido.

$x=-1$ no es solución, pues $\log_2(-1+1)$ no está definido.

$$\begin{aligned}
&\log_2(36+18+2)+\log_2(6-5)\stackrel{?}{=}3+\log_2(6+1)\\
\rightarrow\quad &\log_2(36+18+2)+\log_2 1\stackrel{?}{=}3+\log_2 7\\
\rightarrow\quad &\log_2 56\stackrel{?}{=}\log_2 8+\log_2 7\\
\rightarrow\quad &\log_2 56=\log_2 56\ \checkmark
\end{aligned}$$

$S=\{6\}$

b. $3^{2x}-3^x=2$ [3 puntos]

Sea $u=3^x$ luego:

$$\begin{aligned}
u^2-u=2=0 \quad &\rightarrow u^2-u=2=0\\
&\rightarrow u=-1,\ u=2\\
&\rightarrow 3^x=-1,\ 3^x=2\\
&\rightarrow x=\log_3 2\\
&\rightarrow S=\{\log_3 2\}
\end{aligned}$$

c. $(3-9\sec x)(1+\tan(2x))=0$ [4 puntos]

Solución

$$\begin{aligned}
3-9\sec x &= 0\\
3 &= 9\sec x\\
\sec x &= \frac{1}{3}\\
\cos x &= 3\\
\therefore &\quad S_1=\varnothing
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
1+\tan(2x) &=& 0\\
\tan(2x) &=& -1\\
2x &=& \arctan(-1)\\
2x &=& -\dfrac{\pi}{4} \rightarrow \text{ángulo}\\
2x &=& -\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\
x &=& -\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2} \rightarrow \text{variable}
\end{array}$$

$$\therefore \quad S_2=\left\{x\in\mathbb{R}/x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}/x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$$

4. Verifique la siguiente identidad trigonométrica.

$$\frac{\tan x-\mathrm{sen}x}{\mathrm{sen}^3x}=\frac{\sec x}{1+\cos x}$$

[4 puntos]

Solución

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\tan x-\mathrm{sen}x}{\mathrm{sen}^3x} &=& \dfrac{\dfrac{\mathrm{sen}x}{\cos x}-\mathrm{sen}x}{\mathrm{sen}^3x}\\
&=& \dfrac{\dfrac{\mathrm{sen}x-\mathrm{sen}x\cos x}{\cos x}}{\mathrm{sen}^3x}\\
&=& \dfrac{\mathrm{sen}x-\mathrm{sen}x\cos x}{\mathrm{sen}^3x\cos x}\\
&=& \dfrac{1-\cos x}{\mathrm{sen}^2x\cos x}\\
&=& \dfrac{1-\cos^2 x}{\mathrm{sen}^2x\cos x\,(1+\cos x)}\\
&=& \dfrac{1}{\cos x\,(1+\cos x)}\\
&=& \dfrac{\sec x}{1+\cos x}
\end{array}$$

5. Resuelva los siguientes problemas

a. Se desea cercar un terreno rectangular que colinda con un río, de tal forma que no se utilice cerca en el lado que da a la orilla del río. El material para cercar el lado paralelo al río tiene un costo de 60 dólares por metro lineal y el material para cercar los otros dos lados tiene un costo de 40 dólares por metro lineal.

   Si se dispone de un presupuesto de 4800 dólares para construir la cerca, determine el área máxima de terreno que se puede cercar, utilizando todo el presupuesto disponible. [4 puntos]

Solución

x : lado paralelo al río

y : lado perpendicular al río

$$60x + 80y = 4800 \rightarrow x = 80 - \frac{4y}{3}$$

$$A = xy \rightarrow A(y) = \left(80 - \frac{4y}{3}\right) y = 80y - \frac{4y^2}{3}$$

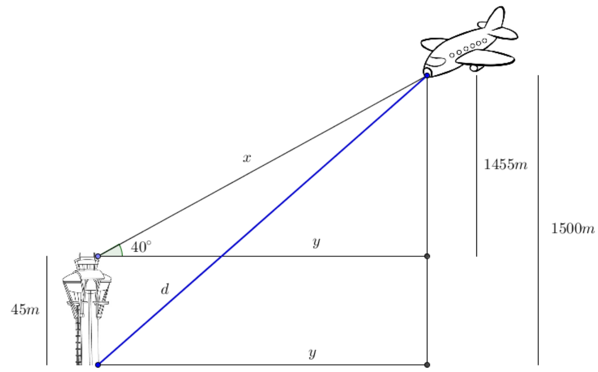
Como se obtiene una parábola cóncava hacia abajo, el vértice es máximo.

$$y = \frac{-80}{2 \cdot -\frac{4}{3}} = 30 \rightarrow x = 80 - \frac{4 \cdot 30}{3} = 40$$

R/ Área máxima es 1200 m^2

b. Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de $1500m$ y el ángulo de observación desde la cúspide de la torre es de $40°$. ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si ésta mide $45m$ de altura? [4 puntos]

Solución



Primero se calculará las medidas x, y

$$\begin{aligned} \sin 40° &= \frac{1455}{x} \\ x &\approx 2263.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + 1455^2 \\ y &= \sqrt{(2263.6)^2 - 1455^2} \\ y &\approx 1734.0 \end{aligned}$$

Ahora se calcula d

$$\begin{aligned} d^2 &= y^2 + 1500^2 \\ d &= \sqrt{(1734.0)^2 + 1500^2} \\ d &\approx 2292.8 \end{aligned}$$

R/ El avión está a una distancia aproximada de $2292.8m$ del pie de la torre.

opción 2

Primero se calculará la medida x

$$\begin{aligned} \sin 40° &= \frac{1455}{x} \\ x &\approx 2263.6 \end{aligned}$$

Luego usando ley de cosenos

$$\begin{aligned} d^2 &= 45^2 + (2263.6)^2 - 2 \cdot 45 \cdot 2263.6 \cdot \cos\left(\frac{13\pi}{18}\right) \\ d &= \sqrt{45^2 + (2263.6)^2 - 2 \cdot 45 \cdot 2263.6 \cdot \cos\left(\frac{13\pi}{18}\right)} \\ d &= 2292.8 \end{aligned}$$