INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

I Semestre 2014
Total: 31 puntos
Tiempo: 2 horas 10 minutos

Segundo Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, se deben presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de celular durante el desarrollo de la prueba. Este es un examen de desarrollo, por tanto, debe aparecer todos los pasos, y sus respectivas justificaciones, que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones definidas sobre $A = \{1, 2, 3, 5\}$. La relación $\mathcal{R}$ se define por

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a < 2 \lor a + b \geq 5)$$

y la matriz de $\mathcal{S}$ es

$$M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule el gráfico de la relación $(\mathcal{R} - \mathcal{S})^{-1}$. **(3 puntos)**

   (b) Calcule la matriz asociada a la relación $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \circ \overline{\mathcal{S}}$. **(3 puntos)**

2. Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son dos relaciones definidas sobre un conjunto A, con A no vacío.

   (a) Pruebe que si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son reflexivas, entonces $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ es reflexiva. **(2 puntos)**

   (b) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son antisimétricas, determine si $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ es antisimétrica. **(2 puntos)**

3. Considere la relación $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a^2 + b = b^2 + a$$

   (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. **(4 puntos)**

   (b) Calcule la clase de equivalencia de 1. **(1 punto)**

4. Considere las funciones f y g definidas sobre sus respectivos dominios de números reales de manera que ambas son biyectivas y sus criterios son $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$, $g(x) = 2x - 1$. Calcule $(g^{-1} \circ f)(x)$. **(3 puntos)**

5. Sea $A = \{1, 3, 9\}$, $B = \{0, 1, 3, 9\}$ y $f\colon P(A) \to B$ definida por

$$f(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } M = \emptyset \\ k & \text{si } M \neq \emptyset \end{cases}$$

donde k es el menor elemento del conjunto M

   (a) Determine si f es inyectiva y si es sobreyectiva. **(2 puntos)**

   (b) Si $C = \{M \in P(A) \ / \ |M| = 2\}$, calcule $f(C)$. **(2 puntos)**

   (c) Calcule $f^{-1}(\{0, 3\})$. **(1 punto)**

6. Considere la función $f\colon]-\infty, 1] \longrightarrow [2, +\infty[$ definida por $f(x) = (x-1)^2 + 2$.

   (a) Pruebe que f es una función biyectiva. **(4 puntos)**

   (b) Determine el criterio $f^{-1}(x)$. **(1 punto)**

7. Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva, además, sea $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ otra función definida por

$$g(x) = 2f(5x) + 3$$

   Demuestre que g es una función inyectiva. **(3 puntos)**