$\mathcal{I}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial de $\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación - SOLUCIÓN

1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Verifique que A satisface la ecuación $A^2 - 4A - 5\mathcal{I} = \mathcal{O}$ (3 pts)

Respuesta 1

Se tiene que:

$$A^2 - 4A - 5\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

   (b) Utilizando el resultado del inciso anterior, demuestre que $A^{-1} = \dfrac{1}{5}(A - 4\mathcal{I})$ (2 pts)

Respuesta 2

De la ecuación de la parte a se tiene:

$$\begin{aligned} A^2 - 4A - 5\mathcal{I} = \mathcal{O} \quad &\Longrightarrow \quad A^2 - 4A - 5\mathcal{I} = \mathcal{O} \\ &\Longrightarrow \quad (A - 4\mathcal{I})A = 5\mathcal{I} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{5}(A - 4\mathcal{I})A = \mathcal{I} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{5}(A - 4\mathcal{I})AA^{-1} = \mathcal{I}A^{-1} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{5}(A - 4\mathcal{I}) = A^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto $A^{-1} = \dfrac{1}{5}(A - 4\mathcal{I})$

   (c) Halle A^{-1} (2 pts)

Respuesta 3

De la ecuación de la parte b se tiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4\mathcal{I}) = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Sean A y B matrices de tamaño $p \times q$, y sea C alguna matriz de tamaño $p \times m$. Demuestre, entrada por entrada, que $A^tC + B^tC = (A+B)^tC$ (4 pts)

Respuesta 4

Hay que demostrar: $\forall i, j \in \mathbb{N}; 1 \leq i \leq q,\ 1 \leq j \leq m : \left\langle A^tC + B^tC \right\rangle_{ij} = \left\langle (A+B)^tC \right\rangle_{ij}$

Veamos que $\forall i, j \in \mathbb{N}; 1 \leq i \leq q,\ 1 \leq j \leq m$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\left\langle A^tC + B^tC \right\rangle_{ij} &= \left\langle A^tC \right\rangle_{ij} + \left\langle B^tC \right\rangle_{ij} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left\langle A^t \right\rangle_{ik} \langle C \rangle_{kj} + \sum_{k=1}^{p} \left\langle B^t \right\rangle_{ik} \langle C \rangle_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\left\langle A^t \right\rangle_{ik} \langle C \rangle_{kj} + \left\langle B^t \right\rangle_{ik} \langle C \rangle_{kj} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\left\langle A^t \right\rangle_{ik} + \left\langle B^t \right\rangle_{ik} \right) \langle C \rangle_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\langle A \rangle_{ki} + \langle B \rangle_{ki} \right) \langle C \rangle_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \langle A + B \rangle_{ki} \langle C \rangle_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left\langle (A+B)^t \right\rangle_{ik} \langle C \rangle_{kj} \\
&= \left\langle (A+B)^tC \right\rangle_{ij}
\end{aligned}$$

Así, $\forall i, j \in \mathbb{N}; 1 \leq i \leq q,\ 1 \leq j \leq m : \left\langle A^tC + B^tC \right\rangle_{ij} = \left\langle (A+B)^tC \right\rangle_{ij}$
Por lo tanto $A^tC + B^tC = (A+B)^tC$

3. Se dice que dos matrices P y Q son *anticonmutativas* si satisfacen $PQ = -QP$ y se dice que son *conmutativas* si satisfacen $PQ = QP$.

   Si A, B y C son matrices tales que A y C son anticonmutativas y, además, B y C son conmutativas, demuestre que $(AB - BA)C = C(BA - AB)$. (4 pts)

Respuesta 5

Tenemos:

$$\begin{array}{rcl} (AB-BA)C & = & (AB)C-(BA)C \ \text{ distributividad} \\ & = & A(BC)-B(AC) \ \text{ asociatividad} \\ & = & A(CB)-B(-CA) \ \text{ dado que: } AC=-CA; BC=CB \\ & = & (AC)B-(B\cdot -C)A \ \text{ asociatividad} \\ & = & (AC)B+(BC)A \ \text{ dado que: } \ P(\alpha Q)=\alpha(PQ) \\ & = & (-CA)B+(CB)A \ \text{ dado que: } \ AC=-CA; BC=CB \\ & = & (C\cdot -A)B+(CB)A \ \text{ dado que: } (\alpha P)Q=P(\alpha Q) \\ & = & C(-AB)+C(BA) \ \text{ asociatividad} \\ & = & C(-AB+BA) \ \text{ distributividad} \\ & = & C(BA-AB) \ \text{ conmutatividad} \end{array}$$

Por lo tanto $(AB-BA)C=C(BA-AB)$

4. Se dice que una matriz P es *idempotente* si $P^2=P$.

   (a) Determine si la matriz
   $$Q=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$
   es idempotente o no. (2 pts)

Respuesta 6

Se tiene que:

$$Q^2=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=Q$$

Luego A es idempotente.

   (b) Demuestre que si se cumple $AB=A$ y $BA=B$, entonces las matrices A y B son matrices idempotentes. (3 pts)

Respuesta 7

Tenemos:

$$\begin{array}{rcll} A^2 & = & AA & \\ & = & (AB)A & \text{por: } AB=A \\ & = & A(BA) & \text{asociatividad} \\ & = & AB & \text{por: } BA=B \\ & = & A & \text{por: } AB=A \end{array}$$

Por lo tanto $A^2=A$, esto es, A es idempotente.

Por otra parte:

$$\begin{aligned} B^2 &= BB \\ &= (BA)B && \text{por: } B = BA \\ &= B(AB) && \text{asociatividad} \\ &= BA && \text{por: } AB = A \\ &= B && \text{por: } BA = B \end{aligned}$$

Por lo tanto $B^2 = B$, esto es, B es idempotente.

5. Si A y B son matrices no singulares, demuestre que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (3 pts)

Respuesta 8

Tenemos:

$$\begin{aligned} (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}[A^{-1}(AB)] \\ &= B^{-1}[(A^{-1}A)B] \\ &= B^{-1}(\mathcal{I}B) \\ &= B^{-1}B \\ &= I \end{aligned}$$

Por lo tanto $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

6. Si se sabe que $A \sim B$ y que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -7$$

halle $|B|$ donde

$$B = \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 5 & 5 & 5 \\ 3a + \dfrac{x}{2} & 3b + \dfrac{y}{2} & 3c + \dfrac{z}{2} \end{pmatrix}$$

Respuesta 9

$$\begin{aligned}
|B| = \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 5 & 5 & 5 \\ 3a+\dfrac{x}{2} & 3b+\dfrac{y}{2} & 3c+\dfrac{z}{2} \end{vmatrix} &= (-2)(5)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a+\dfrac{x}{2} & 3b+\dfrac{y}{2} & 3c+\dfrac{z}{2} \end{vmatrix} \quad (-3f_1+f_3) \\
&= (-10)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{x}{2} & \dfrac{y}{2} & \dfrac{z}{2} \end{vmatrix} \quad (f_1 \longleftrightarrow f_2) \\
&= \frac{10}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= (5)(-7) \\
&= -35
\end{aligned}$$

Luego $|B| = -35$

7. Utilice inducción matemática y demuestre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ (3 pts)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta 10

Para $n = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suponga que para $k \in \mathbb{Z}^+, k > 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hay que demostrar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Utilizando el método Gauss–Jordan, determine el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones

lineales: (5 pts)

$$\begin{cases} -x + 2y + z - 3w & = & -3 \\ 2x - 4y + z & = & 6 \\ x - 2y + w & = & 3 \end{cases}$$

Respuesta 11

Mediante la aplicación de operaciones elementales por fila en la matriz ampliada del sistema se tiene:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{lrlr|l} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el conjunto solución del sistema esta dado por:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 + 2y - w \\ y \\ 2w \\ w \end{pmatrix} / y, w \in \mathbb{R} \right\}$$