INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — MATEMÁTICA GENERAL
ESCUELA DE MATEMÁTICA — II SEMESTRE 2004

Solución I Examen Parcial

1. Encuentre el valor numérico de la siguiente expresión para $x = -3$ y $y = \dfrac{3}{2}$. [5 puntos]

$$\frac{\left(-x^{-2}+y^{-1}\right)^{-2}}{\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{-x}}\right)^{4}\right)^{3}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(-x^{-2}+y^{-1}\right)^{-2}}{\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{-x}}\right)^{4}\right)^{3}} &= \frac{\left(-\left(-3\right)^{-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{-2}}{\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{-\left(-3\right)}}\right)^{4}\right)^{3}} \\
&= \frac{\left(\frac{-1}{(-3)^2}+\frac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(\sqrt[6]{3}\right)^{12}} \\
&= \frac{\left(\frac{-1}{9}+\frac{2}{3}\right)^{-2}}{3^2} = \frac{\left(\frac{5}{9}\right)^{-2}}{9} \\
&= \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^{2}}{9} = \frac{\frac{81}{25}}{9} = \frac{81}{9\cdot 25} = \frac{9}{25}
\end{aligned}$$

Así, $\dfrac{\left(-x^{-2}+y^{-1}\right)^{-2}}{\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{-x}}\right)^{4}\right)^{3}} = \dfrac{9}{25}$ cuando $x = -3$ y $y = \dfrac{3}{2}$.

2. Realice la división $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y exprese el resultado en la forma $P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$, donde $C(x)$ es el cociente de la división y $R(x)$ es el residuo, si [4 puntos]

$$P(x) = 3x^5 + 6x^4 + 20x^2 - 26x - 10; \quad Q(x) = x^2 + 2x - 3$$

Solución:

Así, $3x^5 + 6x^4 + 20x^2 - 26x - 10 = \left(3x^3 + 9x + 2\right)\left(x^2 + 2x - 3\right) - 3x - 4$.

3. Determine un polinomio $P(x)$ de grado 3, tal que $x - 2$ sea uno de sus factores y $x = -1$ sea un cero de $P(x)$. [3 puntos]

Solución: Como $x = -1$ es un cero de $P(x)$, se tiene que $x + 1$ también es un factor de $P(x)$. De esta manera, $P(x) = (x-2)(x-1)A(x)$, donde $A(x)$ es cualquier polinomio de grado uno. Por ejemplo, si $A(x) = x$ se obtiene el polinomio $P(x) = (x-2)(x-1)x = x^3 - 3x^2 + 2x$.

4. Factorice al máximo las siguientes expresiones.

(a) $3^{3x}+3^{2x}-3^{x}-1$ [3 puntos]

Solución:

$$\begin{aligned}
3^{3x}+3^{2x}-3^{x}-1 &= \left(3^{3x}+3^{2x}\right)+\left(-3^{x}-1\right)\\
&= 3^{2x}\left(3^{x}+1\right)-\left(3^{x}+1\right)\\
&= \left(3^{x}+1\right)\left(3^{2x}-1\right)\\
&= \left(3^{x}+1\right)\left(3^{x}-1\right)\left(3^{x}+1\right)
\end{aligned}$$

(b) $a^{3}\left(x^{2}-1\right)-3a^{2}b\left(x^{2}-1\right)+3ab^{2}\left(x^{2}-1\right)-b^{3}\left(x^{2}-1\right)$ [3 puntos]

Solución:

$$\begin{aligned}
&a^{3}\left(x^{2}-1\right)-3a^{2}b\left(x^{2}-1\right)+3ab^{2}\left(x^{2}-1\right)-b^{3}\left(x^{2}-1\right)\\
=\ &\left(x^{2}-1\right)\left(a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}\right)\\
=\ &\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(a-b\right)^{3}
\end{aligned}$$

5. Racionalice el denominador de la siguiente expresión y simplifique al máximo el resultado. [4 puntos]

$$\frac{50ab-8a^{3}}{2a-5\sqrt{b}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{50ab-8a^{3}}{2a-5\sqrt{b}} &= \frac{50ab-8a^{3}}{2a-5\sqrt{b}}\cdot\frac{2a+5\sqrt{b}}{2a+5\sqrt{b}}\\
&= \frac{\left(50ab-8a^{3}\right)\left(2a+5\sqrt{b}\right)}{\left(2a-5\sqrt{b}\right)\left(2a+5\sqrt{b}\right)}\\
&= \frac{2a\left(25b-4a^{2}\right)\left(2a+5\sqrt{b}\right)}{\left(2a\right)^{2}-\left(5\sqrt{b}\right)^{2}}\\
&= \frac{2a\left(25b-4a^{2}\right)\left(2a+5\sqrt{b}\right)}{4a^{2}-25b}\\
&= -2a\left(2a+5\sqrt{b}\right)
\end{aligned}$$

6. Si $P\left(x\right)=2x^{4}-5x^{3}-x^{2}-5x-3$.

(a) Factorice $P\left(x\right)$ al máximo [3 puntos]

Solución: Los posibles ceros racionales de $P(x)$ son los valores del siguiente conjunto, $\left\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2}\right\}$. Se comprueba que $P(1) = 12$, $P(-1) = 8$, $P(2) = -25$, $P(-2) = 75$. Como $P(3) = 0$, un factor de $P(x)$ es $x - 3$.

Luego, se realiza la división sintética con el valor 3 para obtener otro factor de $P(x)$.

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & -1 & -5 & -3 & \\ \downarrow & 6 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

Teniendo el factor $x - 3$, sólo salta factorizar el polinomio $2x^3 + x^2 + 2x + 1$. Los posibles ceros racionales de este polinomio son: $\left\{\pm 1;\ \pm\frac{1}{2}\right\}$, pero ya se habían descartado los valores $x = \pm 1$, así que las únicas dos posibilidades son $x = \pm\frac{1}{2}$. Realizando la división sintética con $x = -\frac{1}{2}$ se tiene:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & \\ \downarrow & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

Por último, se tendría que factorizar el polinomio $2x^2 + 2$. Como $\Delta = -16 < 0$, $2x^2 + 2$ no es factorizable en $I\!R$. Así:

$$\begin{aligned} P(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3 &= (x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 2\right) \\ &= (x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right) 2\left(x^2 + 1\right) \\ &= (x-3)(2x+1)\left(x^2+1\right) \end{aligned}$$

(b) Resuelva $P(x) = 0$ [2 puntos]

Solución: Como $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x-3)(2x+1)\left(x^2+1\right)$, se tiene que $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x+1)(x^2+1) = 0$. Luego:

$$(x-3)(2x+1)\left(x^2+1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \ \vee \ 2x + 1 = 0 \ \vee \ x^2 + 1 = 0$$

De esta manera, el conjunto solución para la ecuación $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$ está dado por:

$$S = \left\{3;\ \frac{-1}{2}\right\}$$

7. Simplifique al máximo la siguiente expresión. [5 puntos]

$$\frac{4}{x} - \frac{2x}{x^2 - 6x + 9} - \frac{5}{x-3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x} - \frac{2x}{x^2 - 6x + 9} - \frac{5}{x-3} &= \frac{4}{x} - \frac{2x}{(x-3)^2} - \frac{5}{x-3} \\
&= \frac{4 \cdot (x-3)^2 - 2x \cdot x - 5x \cdot (x-3)}{x\,(x-3)^2} \\
&= \frac{4\,(x^2 - 6x + 9) - 2x^2 - 5x^2 + 15x}{x\,(x-3)^2} \\
&= \frac{4x^2 - 24x + 36 - 7x^2 + 15x}{x\,(x-3)^2} \\
&= \frac{-3x^2 - 9x + 36}{x\,(x-3)^2}
\end{aligned}$$

La factorización de $-3x^2 - 9x + 36$ se realiza utilizando la fórmula general.

$$\Delta = (-9)^2 - 4\,(-3)\,(36) = 513$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{513} = 3\sqrt{57}$$

$$x = \frac{9 \pm 3\sqrt{57}}{2\,(-3)}$$

$$x = \frac{3\left(3 \pm \sqrt{57}\right)}{-3 \cdot 2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{57}}{-2}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{57}}{-2}$$

$$-3x^2 - 9x + 36 = -3\left(x - \frac{3+\sqrt{57}}{-2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{57}}{-2}\right)$$

$$-3x^2 - 9x + 36 = -3\left(x + \frac{3+\sqrt{57}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{57}}{2}\right)$$

Por lo tanto, $\dfrac{4}{x} - \dfrac{2x}{x^2 - 6x + 9} - \dfrac{5}{x-3} = \dfrac{-3\left(x + \frac{3+\sqrt{57}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{57}}{2}\right)}{x\,(x-3)^2}$