

PARCIAL III

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. No son procedentes las apelaciones sobre preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con témpera (corrector). Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que  $7^{2n} + 16n - 1$  es divisible por 64, para todo  $n \geq 2$ , con  $n$  número natural. (4 puntos)

2. Utilice la fórmula

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + (n-1) \cdot (n+1) = \frac{(n-1)n(2n+5)}{6}$$

para calcular el valor exacto de la suma

$$121 \cdot 123 + 122 \cdot 124 + 123 \cdot 125 + \cdots + 35343$$

(3 puntos)

3. Determine la fórmula explícita para la relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} U_0 &= 3, U_1 = -2, U_2 = 46 \\ U_n &= -U_{n-1} + 8U_{n-2} + 12U_{n-3} \text{ para } n \geq 3 \end{aligned}$$

(4 puntos)

4. Considere la sucesión dada en forma explícita por:  $a_n = 3 + 2n + 3^{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 1$ . Determine la fórmula recursiva para la sucesión anterior. (4 puntos)

5. En  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  se define la operación  $\otimes$  por  $(a, b) \otimes (x, y) = \left(a + x - 3, \frac{by}{2}\right)$

(a) Demuestre que  $(\otimes, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)$  es grupo abeliano o conmutativo. (5 puntos)

(b) Calcule el valor de  $(5, 2)^{-2} \otimes \left[(3, 7) \otimes (5, 2)^{-1}\right]^{-1}$  (3 puntos)

(c) ¿Es  $(\otimes, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  grupo abeliano? Justifique (1 punto)

6. Considere el conjunto  $A = \{\alpha, \beta, \epsilon, \theta, \lambda, \omega\}$ . Sobre  $A$  se define la operación  $\perp$  de la siguiente manera:

$\perp$	$\alpha$	$\beta$	$\epsilon$	$\theta$	$\lambda$	$\omega$
$\alpha$	$\alpha$	$\beta$	$\epsilon$	$\theta$	$\lambda$	$\omega$
$\beta$	$\beta$	$\theta$	$\omega$	$\alpha$	$\epsilon$	$\lambda$
$\epsilon$	$\epsilon$	$\omega$	$\beta$	$\lambda$	$\alpha$	$\theta$
$\theta$	$\theta$	$\alpha$	$\lambda$	$\beta$	$\omega$	$\epsilon$
$\lambda$	$\lambda$	$\epsilon$	$\alpha$	$\omega$	$\theta$	$\beta$
$\omega$	$\omega$	$\lambda$	$\theta$	$\epsilon$	$\beta$	$\alpha$

Si se sabe que  $(\perp, A)$  es asociativa:

- (a) Demuestre que  $(\perp, A)$  es grupo abeliano. (3 puntos)
- (b) Calcule el resultado de la operación  $\left[(\alpha \perp \beta^{-1})^{-1} \perp (\lambda^3 \perp \theta)\right]^{-2}$  (3 puntos)
- (c) Determine los elementos absorbentes, idempotentes e involutivos de  $(\perp, A)$ , si existen. En caso de no existir debe indicarlo. (3 puntos)
- (d) Determine todos los subgrupos de  $(\perp, A)$ . (4 puntos)