INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *Tiempo: 2 horas 10 minutos*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 33 puntos*
Álgebra Lineal para Computación (MA-2405) — *I Semestre 2015*

Segundo Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios o procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes la apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono móvil.

1. Se dice que una estructura algebraica $(A, *)$ es un **monoide** si la operación es asociativa y el conjunto posee elemento neutro.
   Muestre dos ejemplos de estructuras que sean monoides pero que no sean grupos. **(2 puntos)**

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sobre A se define la operación $*$ de la siguiente manera:

$*$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	4	3	6	5
3	3	5	1	6	2	4
4	4	6	2	5	1	3
5	5	3	6	1	4	2
6	6	5	4	2	3	1

   Si se sabe que $(A, *)$ es un grupo.

   (a) Calcule todos los subgrupos de $(A, *)$. **(4 puntos)**

   (b) Determine el valor de x que satisface la ecuación $(5 * x)^{-1} = 4^{-1} * 3$. **(2 puntos)**

3. Si $(G, *)$ es un grupo y H_1 y H_2 son subgrupos de G:

   (a) Pruebe que $H_1 \cap H_2$ es subgrupo de G. **(4 puntos)**

   (b) Muestre, con un contraejemplo, que $H_1 \cup H_2$ no es, necesariamente, subgrupo de G. **(2 puntos)**

4. Si C es un campo y $a, b \in C$, pruebe que si $a^2 = b^2$ entonces, $a = b \vee a = -b$. **(3 puntos)**

5. Determine todos los divisores de cero del anillo $\mathbb{Z}_{15}$. **(2 puntos)**

6. En el espacio vectorial P_2, considere el conjunto $B = \{(x+1)^2, x-1, -3\}$. Escriba, si es posible, el vector $p(x) = 2x^2 + 3x + 2$ como combinación lineal de los elementos de B.

   (3 puntos)

7. Sea V un espacio vectorial. Si se sabe que $\{x, y, z\}$ es un conjunto linealmente independiente en V, determine si el conjunto $\{x+y, 2x+y+z, 2z-y+2x\}$ es un conjunto linealmente independiente o no.

   (3 puntos)

8. Pruebe que $W = \{ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbf{R}) \ / \ a + 2b - 3c = 0\}$ es subespacio vectorial del espacio vectorial $P_2(\mathbf{R})$.

   (4 puntos)

9. Considere el espacio vectorial

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \ / \ a + b + c = 0 \wedge a + 3b + 5c - d = 0 \right\}$$

   Determine un conjunto S de manera que $\text{gen}(S) = W$. **(4 puntos)**