INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *8 de octubre de 2007*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 31 puntos*
MATEMÁTICA DISCRETA — *Tiempo: 2 h.*

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 5\}$, sea $\mathcal{R}$ una relación sobre A, cuya matriz asociada está definida por

$$M_{\mathcal{R}}[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = 2 \ \vee \ j = 3 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y sea $\mathcal{S}$ otra relación sobre A, definida por

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow a + b < 6$$

   (a) Determine el gráfico de $\mathcal{R}$, el gráfico de $\mathcal{S}$ y el gráfico de $\mathcal{R}^{-1} \circ \overline{\mathcal{S}}$

   (4 puntos)

   (b) Determine la matriz asociada a $(\overline{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S})^{-1}$ (2 puntos)

2. En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow [2(a-c) = 5(b-d)]$$

   (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

   (b) Calcule tres elementos que pertenecen a la clase de equivalencia de $(2, -3)$

   (5 puntos)

3. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre el conjunto A, con A no vacío. Demuestre que si $\mathcal{R}$ es transitiva, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ es transitiva.
   (4 puntos)

4. Pruebe que la función $f\colon \mathbb{R}-\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{-1\}$ definida por $f(x)=\dfrac{3-x}{x-2}$ es una función biyectiva. (4 puntos)

5. Considere las funciones G y H, definidas sobre el conjunto de los números reales, con criterios $G(z)=2z+3$, $H(w)=3-5w$. Determine el criterio de la función $(H\circ G\circ H^{-1})^{-1}$.
(3 puntos)

6. Sea $A=\{a,b,c\}$ y considere la función $f\colon P(A)\to\{0,1,2,3,4\}$ definida por $f(B)=|B|$.

   (a) Determine si f es inyectiva o sobreyectiva.

   (b) Si es posible, calcule

      i. $f(\{\{a\},\{a,b\},\{b\}\})$
      ii. $f(f^{-1}(\{4\}))$
      iii. $f^{-1}(0)$
      iv. $f^{-1}(f(\{b\}))$

   (5 puntos)

7. Sean A, B y C conjuntos no vacíos, suponga que f es una función de A en B y g una función de C en B.
Demuestre que si f y g son biyectivas, entonces $g^{-1}\circ f$ es biyectiva.
(4 puntos)