$\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación

$\mathcal{T}$iempo: 2 horas y 45 minutos
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 40 puntos (35%)
$\mathcal{A}$bril de 2014

$\mathcal{I}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes reclamos en exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Sea $k \in \mathbb{R}$ y considere las matrices reales A y C definidas como: (7 pts)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & k \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

   Si se sabe que $AB^t + A = (2C)^t + 2B^t$ determine la matriz B que satisface dicha ecuación (usando álgebra matricial y sin resolver sistema de ecuaciones alguno).

2. Halle el determinante de la matriz $2A\,(CB)^t$ si se sabe que A es una matriz de tamaño 4×4, B es una matriz de tamaño 2×4 y C es una matriz de tamaño 4×2, para las que $\left|A^{-1}\right| = 3$ y $\left|(CB)^{-1}\right| = -6$. (4 pts)

3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y considere las matrices A y B ambas de tamaño $m \times m$. Demuestre, entrada por entrada, que $(\alpha A + BA)^t = A^t B^t + \alpha A^t$ (4 pts)

4. Demuestre que si A es una matriz no singular, entonces $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$ (3 pts)

5. Sean A y B dos matrices no singulares de orden n, tales que $A + B = AB$. Demuestre que $(\mathcal{I}_n - B)^{-1} = -B^{-1}A$ (3 pts)

6. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y considere el sistema lineal $\begin{cases} x - \alpha y = \beta \\ 2x + y = \alpha \end{cases}$

   Determine todos los valores para α y para β de manera que el sistema: (5 pts)

   (a) Posea solución única.

   (b) Sea inconsistente.

   (c) Tenga infinito número de soluciones e indique una solución particular.

7. Sea $(\mathcal{G}, *)$ un grupo cuyo elemento neutro es e; demuestre que si $(x * y)^2 = x^2 * y^2, \forall x, y \in \mathcal{G}$, entonces $(\mathcal{G}, *)$ es abeliano. (3 pts)

8. Si $\mathcal{W} = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle/ x = \dfrac{5^k}{7^m},\ \text{con } k, m \in \mathbb{Z} \right\}$, pruebe que $(\mathcal{W}, \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ (4 pts)

9. Si $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle/ x, y \in \mathbb{R} \right\}$, demuestre que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es anillo conmutativo. (4 pts)

10. Sea $\mathcal{H} \neq \varnothing$, y sean $\circledast$ y $\odot$ dos opeaciones binarias. Si se sabe que $(\mathcal{H}, \circledast, \odot)$ es anillo unitario, indique las únicas propiedades que hacen falta para que $(\mathcal{H}, \circledast, \odot)$ sea campo. (3 pts)