INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

5 de mayo del 2004
Total: 30 puntos
Tiempo: 2 h. 20 min.

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

1. Sobre $\mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow [a = b \vee a + b = 5]$$

   (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. (3 puntos)

   (b) Determine la clase de equivalencia de -3 y el conjunto cociente. (1 punto)

2. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre A, cuyo gráfico H viene dado por $H = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, e), (d, d), (c, c), (e, c), (e, e), (f, f)\}$. Si se sabe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre A, determine la clase de equivalencia de a y determine el conjunto cociente de la relación $\mathcal{R}$ sobre A.
(2 puntos)

3. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre A, se dice que $\mathcal{R}$ es **irreflexiva**, si para toda $x \in A$, se cumple $a \not\mathcal{R} a$. (2 puntos)

   (a) Dé un ejemplo de una relación, sobre $A = \{a, b, c\}$, que no sea reflexiva y no sea irreflexiva.

   (b) Dé un ejemplo de una relación, sobre $A = \{a, b, c\}$, que sea reflexiva e irreflexiva.

4. Sea $A = \{0, 2, 3, 4\}$, sea $\mathcal{R}$ una relación sobre A, definida por

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a - b)^2 \in A$$

   y sea $\mathcal{S}$ otra relación sobre A, definida por

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow [a = b \ \vee \ b = a + 1]$$

   (a) Determine los gráficos de $\mathcal{R}$, de $\mathcal{S}$ y de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

   (b) Construya los grafos de $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ y de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$

   (c) Determine la matriz de $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}^{-1}$

(6 puntos)

5. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre A, con $A \neq \emptyset$, de las siguientes proposiciones, demuestre las que sean verdaderas y de un contraejemplo para las proposiciones falsas:

(a) Si $\mathcal{R}$ es transitiva, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ es transitiva.

(b) Si $\mathcal{R}$ es transitiva, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ es transitiva.

(3 puntos)

6. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre un conjunto A, con $A \neq \emptyset$:

   (a) Pruebe que si $\mathcal{R}$ es transitiva, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ es transitiva.

   (b) Con un contraejemplo, verifique que la siguiente proposición es falsa:
   Si $\mathcal{R}$ es transitiva, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ es transitiva

(3 puntos)

7. Si $f(x) = -3x + 1$ y $g(x) = 2x + 3$, calcule $(f \circ f \circ g)^{-1}(x)$. (2 puntos)

8. Considere la función $f\colon \mathbb{R}-\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{1\}$ definida por $f(x) = \dfrac{x-4}{x-3}$.

   (a) Pruebe que f es una función biyectiva. (4 puntos)

   (b) Determine el criterio de $f^{-1}(x)$. (1 punto)

9. Sean A y B conjuntos no vacíos, suponga que f es una función de A en B y sea $D \subseteq A$. Si f es sobreyectiva, pruebe que $B - f(D) \subseteq f(A - D)$. (2 puntos)

10. Sean A, B y C conjuntos no vacíos, suponga que f es una función de A en B y g una función de B en C.
    Pruebe que si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.
    (2 puntos)

11. Sea $A = \{2, 3, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, considere la función

$$f\colon A \times B \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

definida por

$$f((a,b)) = \begin{cases} 2a & \text{si } a < b \\ b & \text{si } a > b \\ 2b & \text{si } a = b \end{cases}$$

   (a) Determine si f es inyectiva y si es sobreyectiva.

   (b) Determine $f(\{(2,3),(3,2)\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1,3,5\})$

   (c) Si $C = \{(a,b) \in A \times B \ / \ a + b = 6\}$, calcule $f(C)$

(5 puntos)

NOTA: Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.