INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

15 de octubre de 2011
Total: 32 puntos
Tiempo: 2 h. 10 m.

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto, debe aparecer todos los pasos, y sus respectivas justificaciones, que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Considere las dos relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ definidas sobre el conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$, donde $\mathcal{R}$ está definida por

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow [\ a + b < 10\ ]$$

y la matriz de $\mathcal{S}$ cumple que $M_{\mathcal{S}}[i, j] = 1 \Longleftrightarrow [\ i = 2\ \vee\ j = 3\ ]$.

   (a) Calcule el gráfico de $\mathcal{R}$ y el gráfico de $\mathcal{S}$. **(3 puntos)**

   (b) Determine la matriz asociada a la relación $(\overline{\mathcal{R}} - \mathcal{S}^{-1}) \cup (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$. **(3 puntos)**

2. Sea A un conjunto, sobre $P(A)$ se define la relación $\mathcal{R}$ de manera que $M\mathcal{R}N$ si y solo si $|M| = |N|$, es decir, M se relaciona con N si y solo si tienen la misma cardinalidad.

   (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. **(4 puntos)**

   (b) Si $A = \{a, b, c, d\}$ calcule la clase de equivalencia de $\{a, c\}$. **(2 puntos)**

3. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones definidas sobre un conjunto A, con A no vacío. Si se sabe que $\mathcal{R}$ es transitiva y $\mathcal{S}$ es simétrica, demuestre que si $a(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})b \wedge b\mathcal{R}c$, entonces $b(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})c$.

   (4 puntos)

4. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ con criterio $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, y la función $g : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ con criterio $g(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$.
Si se sabe que ambas funciones son biyectivas, verifique que:

$$(f \circ g^{-1})(x) = \frac{x-1}{4x-5}$$

y además, determine el dominio de $f \circ g^{-1}$. **(4 puntos)**

5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva, si $(2,5) \in G_f$ y además $f^{-1}\left(\frac{k+4}{k-2}\right) = 2$, calcule el valor de k. **(3 puntos)**

6. Para los conjuntos $A = \{a,b,c\}$, $B = \{0,1,2,3,4\}$ y $C = \{1,2,3\}$. Considere la función $f\colon P(A) \to B$ definida por $f(M) = |M|$ y la función $g\colon B \to C$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ x-2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

   (a) Determine si $g \circ f$ es inyectiva y/o si $g \circ f$ es sobreyectiva. **(3 puntos)**

   (b) Calcule $f^{-1}(\{2,3\})$. **(1 punto)**

   (c) Calcule $(g \circ f)^{-1}(\{2,3\})$. **(1 punto)**

7. Sean A, B y C conjuntos no vacíos, suponga que f es una función de A en B y además, que g es una función de B en C.
   Demuestre que si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva. **(4 puntos)**