INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
Álgebra Lineal para Computación (MA-2405)

Tiempo: 2 h. 30 m.
Total: 37 puntos
Fecha: 11 de octubre de 2010

Segundo Examen Parcial

Instrucciones: Trabaje en forma ordenada y clara. Escriba todos los procedimientos que utilice para resolver los ejercicios propuestos.

1. Considere el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_8, +)$.

   (a) Determine el elemento neutro, los inversos de cada elemento del grupo, los elementos involutivos y los elementos idempotentes. **(2 puntos)**

   (b) Calcule todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}_8, +)$. **(3 puntos)**

2. En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación $\otimes$ como:

   $$(a, b) \otimes (c, d) = (a + c - 1, 2bd)$$

   Si se sabe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ es grupo abeliano.

   (a) Determine la fórmula explícita de $(a, b)^{-1}$ **(2 puntos)**

   (b) Calcule el valor exacto de $(3, -1)^{-2} \otimes (1, 2)^3$ **(2 puntos)**

   (c) Si $H = \left\{(1, t) \ / \ t \in \mathbb{R}^*\right\}$, pruebe que $(H, \otimes)$ es subgrupo de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ **(2 puntos)**

3. Si $(G, *)$ es un grupo, con e su elemento neutro. Pruebe que $(G, *)$ es grupo abeliano si y solo si para todo a, b en G se cumple que $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$. **(4 puntos)**

4. Sea $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, un vector del espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$. Exprese a A como combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **(4 puntos)**

5. Sea $W = \left\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3 \ / \ 2a - c + 3d = 0\right\}$. Pruebe que W es subespacio vectorial de P_3. **(5 puntos)**

6. Sea $H = \Big\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \;/\; a + 2b + 3d = 0 \wedge a + 3b + 5c - d = 0\Big\}$. Si se sabe que H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

   (a) Determine una base para H. **(4 puntos)**

   (b) Determine la dimensión de H. **(1 punto)**

7. Si se sabe que $\{u, v, w\}$ es una base de un espacio vectorial V, determine si el conjunto $\{2u + v + w, u - v + 2w, u - 2v + w\}$ es o no base de V. **(4 puntos)**

8. Sean V algún espacio vectorial y $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un subconjunto de V, tal que S es linealmente independiente. Si $x \in V$, tal que $x \notin Gen(S)$. Demuestre que el conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, x\}$ es, también, linealmente independiente. **(4 puntos)**