INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *Tiempo: 2 horas 20 minutos*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 30 puntos*
Álgebra Lineal para Computación (MA-2405) — *II Semestre 2014*

Segundo Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios o procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes la apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono móvil.

1. Se dice que un elemento a de una estructura algebraica $(G, *)$ es **idempotente** si este elemento cumple que $a * a = a$.
   Determine todos los elementos idempotentes de la estructura algebraica $(\mathbb{R}, *)$ donde $x * y = xy + yy$ para todo $x,\, y \in \mathbb{R}$. **(3 puntos)**

2. En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación $\otimes$ como:
   $$(a, b) \otimes (c, d) = (a + c - 2, 2bd)$$
   Si se sabe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ es grupo abeliano
   (a) Calcule el elemento neutro de este grupo. **(1 punto)**
   (b) Determine la fórmula para el inverso de (a, b). **(2 puntos)**
   (c) Calcule el resultado de $(3, 1)^{-2} \otimes (-1, -2)$. **(2 puntos)**

3. Si se sabe que $(G, *)$ es un grupo y H_1 y H_2 son subgrupos de G, pruebe que $H_1 \cap H_2$ es subgrupo de G. **(4 puntos)**

4. Si $W = \Big\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \;/\; a + b + 2c + 4d = 0 \;\wedge\; 2a + 3b + c + d = 0\Big\}$:
   (a) Pruebe que W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. **(4 puntos)**
   (b) Encuentre un conjunto de vectores S de manera que $\text{gen}(S) = W$. **(2 puntos)**

5. Determine si los vectores $u = (3, -1, 2, 1)$, $w = (2, -1, 1, 2)$ y $z = (0, 1, 1, -4)$ de $\mathbb{R}^4$ son linealmente dependientes o linealmente independientes. **(3 puntos)**

6. Considere el conjunto $\mathcal{B}$ definido como $\mathcal{B} = \{-x+1, x-2, x^2+1, x^3+x\}$. Escriba, si es posible, el vector $p(x) = -4x^3 + 5x^2 - 8x + 10$ como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.

(4 puntos)

7. Justifique por qué $W = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3(\mathbb{R}) \ / \ a = b + d, \ c \geq 0\}$ <u>no es subespacio vectorial</u> del espacio vectorial $P_3(\mathbb{R})$.

(2 puntos)

8. Sean V un espacio vectorial y $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un subconjunto de V, tal que S es linealmente independiente y sea $x \in V$.
Demuestre que si $x \in gen(S)$ entonces, el conjunto $H = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, x\}$ es linealmente dependiente.

(3 puntos)