Matrices y sistemas lineales

Christian Páez Páez
Escuela de Matématica,
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Revista digital Matemática Educación e Internet (www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/)
Primera Edición
Correo Electrónico: wmora2@gmail.com
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Apdo. 159-7050, Cartago
Teléfono (506)25502225
Fax (506)25502493

Páez Páez Christian.
- Matrices y sistemas lineales/Christian Páez P. – 1ra ed.
- Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2013.
92 pp.
ISBN Obra Independiente: 978-9968-641-15-9
1. Matrices. 2. Determinantes. 3. Sistemas lineales.

Prólogo

Este libro de matrices y sistemas lineales surge de apuntes que se han utilizado en varias oportunidades en cursos que se imparten a nivel universitario, principalmente, en el curso álgebra lineal para Computación del Tecnológico de Costa Rica.

Gracias a sugerencias y observaciones que han realizado profesores y estudiantes, este libro presenta una estructura en el desarrollo de los contenidos con la que se espera ayudar a los estudiantes de álgebra lineal, principalmente. El gran número de ejercicios resueltos con detallada explicación, las demostraciones de teoremas expuestas y justificadas en cada uno de sus pasos realizados y, además, los ejercicios propuestos en cada una de las secciones, pretenden que los estudiantes se apropien de destrezas y habilidades importantes en su formación académca.

La teoría se desarrolla considerando aspectos de rigurosidad y formalidad, pero no alcanza el nivel de formalismo que en matemática pura se espera, sino que dicha rigurosidad va de la mano con la población a la que va dirigo lo desarrollado en el libro: estudiantes de Ingenierías y de enseñanza de la matemática.

Cartago, 2013. EL AUTOR

Contenido

1 Introducción **2**

2 Matrices **3**

2.1 Conceptos básicos y definiciones . . . 3
2.2 Tipos de matrices y resultados . . . 8
2.3 Operaciones con matrices . . . 12
2.4 Matrices no singulares . . . 19
2.5 Matrices elementales . . . 24
2.6 Reducción de matrices . . . 29
2.7 Ejercicios . . . 35

3 Determinantes **38**

3.1 Definiciones básicas . . . 38
3.2 Propiedades básicas . . . 43
3.3 Determinantes e inversas . . . 55
3.4 Ejercicios . . . 58

4 Sistemas lineales **60**

4.1 Definiciones básicas . . . 60
4.2 Método de Gauss–Jordan . . . 66
4.3 Regla de Cramer . . . 71
4.4 Ejercicios . . . 73

5 Ejemplos (ejercicios resueltos) **75**

6 Bibliografía **92**

1 Introducción

Asociados con las herramientas más importantes del Álgebra Lineal se encuentran los temas relacionados con matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, que permiten estudiar con mayor detalle muchas áreas de las matemáticas.

Por ejemplo, las matrices juegan un papel importante en áreas como: las ciencias sociales y naturales, los negocios, diversas ingenierías, computación y, además, matemáticas pura y aplicada.

Se estudiarán y desarrollarán temas relacionados con el álgebra de las matrices, aplicaciones de estas en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, y temas relacionados con determinantes y sus aplicaciones. En cada uno de los capítulos se presentan ejemplos resueltos, teoremas, demostraciones y ejercicios propuestos. El último capítulo contiene una importante variedad de ejercicios resueltos asociados con los temas desarrollados.

2 Matrices

Las matrices, sus propiedades y aplicaciones, son de los temas más importante en el estudio del álgebra lineal. Este tipo de objetos matemáticos permiten representar en forma ordenada y conveniente variada información con el fin de facilitar su lectura.
Por ejemplo, usualmente las calificaciones finales de los estudiantes en los diversos cursos del TEC son mostradas en forma tabular. En la tabla que se muestra se presentan las calificaciones de tres estudiantes del curso de álgebra lineal para computación impartido en algún semestre previo.

	EP1	EP2	EP3	NF
Ana Lucía	70	78	94	80
Ricardo	47	58	65	55
Ernesto	68	72	66	70

En esta tabulación de datos EP1, EP2, EP3 y NF significan, respectivamente, calificación del primer examen parcial, calificación del segundo examen parcial, calificación del tercer examen parcial y nota final.
Determinar la calificación de Ricardo en el tercer examen parcial o determinar la nota final de Ana Lucía sería muy sencillo con ayuda de esta tabulación. Si quedan claramente definidos los encabezados y el orden para los nombres de los estudiantes, el arreglo anterior se puede resumir mediante la representación de tres filas y cuatro columnas de números reales que se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} 70 & 78 & 94 & 80 \\ 47 & 58 & 65 & 55 \\ 68 & 72 & 66 & 70 \end{pmatrix}$$

Se definirán algunos conceptos básicos relacionados con el tema de matrices, tipos especiales de matrices, operaciones que se definen entre matrices; además, se estudiará el concepto de matriz inversa y se definirán las operaciones elementales sobre las filas de alguna matriz.

2.1 Conceptos básicos y definiciones

Se iniciará con la definición de algunos conceptos básicos relacionados con matrices y aspectos varios de notación.

Definición 2.1 (Matriz en $\mathbb{R}$)

Una matriz en $\mathbb{R}$ es un arreglo rectangular de números reales distribuidos en filas y columnas.

En general, una matriz real A que tiene m filas y n columnas es un ordenamiento de números reales de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

Notación

- Si una matriz A tiene m filas y n columnas se dice que A es de tamaño $m \times n$ o que A es de orden $m \times n$. Si $m = n$, se dice que A es de orden n
- Cada número real a_{ij} del ordenamiento es llamado *elemento de A* o *entrada de A*
- $A_{(i)}$ representa la i-ésima fila de A; así,

$$A_{(i)} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

- $A^{(j)}$ representa la j-ésima columna de A; así,

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

- El elemento a_{ij}, entrada de A que está en la i-ésima fila y en la j-ésima columna,[a] es también denotado como $\langle A \rangle_{ij}$
- El conjunto formado por todas las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas reales es denotado como $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Si $m = n$, simplemente se escribe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

[a] En casos de ambigüedad, con respecto al número de fila o de columna, es válida la notación $a_{i,j}$

Ejemplo 2.1

Considere la matriz B, definida por

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & -7 \\ 1 & 0{,}75 & -31 & 0{,}5 \\ \ln 2 & e^{-7} & 4 & \cos e \end{pmatrix}$$

1. Determine el tamaño de B
2. Enuncie, en caso de existir, el valor de $\langle B\rangle_{23}$, $\langle B\rangle_{41}$, $\langle B\rangle_{11}$, $\langle B\rangle_{14}$, $\langle B\rangle_{34}$ y $\langle B\rangle_{31}$, respectivamente.
3. Determine el valor de la expresión siguiente: $\langle B\rangle_{13} \cdot \langle B\rangle_{32} + \dfrac{\langle B\rangle_{33}}{\langle B\rangle_{22}}$

Solución

1. B es de tamaño 3×4, ya que B tiene tres filas y cuatro columnas.
2. $\langle B\rangle_{23} = -31$ $\quad$ $\langle B\rangle_{11} = -5$ $\quad$ $\langle B\rangle_{34} = \cos e$

   $\langle B\rangle_{41}$ no existe $\quad$ $\langle B\rangle_{14} = -7$ $\quad$ $\langle B\rangle_{31} = \ln 2$
3. $\langle B\rangle_{13} \cdot \langle B\rangle_{32} + \dfrac{\langle B\rangle_{33}}{\langle B\rangle_{22}} = \dfrac{16}{3}$, ya que

$$\begin{aligned} \langle B\rangle_{13} \cdot \langle B\rangle_{32} + \frac{\langle B\rangle_{33}}{\langle B\rangle_{22}} &= 0 \cdot e^{-7} + \frac{4}{0{,}75} \\ &= 0 + \frac{16}{3} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2

La matriz D, definida por

$$D = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ \pi \\ -7 \end{pmatrix}$$

es una matriz de tamaño 4×1 en la que $\dfrac{\left(\langle D\rangle_{11} + \langle D\rangle_{41}\right)\langle D\rangle_{31}}{5 + \langle D\rangle_{21}} + 2\,\langle D\rangle_{31} = \dfrac{11\pi}{5}$, ya que

Ejemplo 2.2 - continuación

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\langle D\rangle_{11}+\langle D\rangle_{41}\right)\langle D\rangle_{31}}{5+\langle D\rangle_{21}}+2\langle D\rangle_{31} &= \frac{\left(8+-7\right)\cdot\pi}{5+0}+2\cdot\pi \\
&= \frac{1\cdot\pi}{5}+2\pi \\
&= \frac{\pi}{5}+2\pi \\
&= \frac{11\pi}{5}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.3

La matriz C, definida por

$$C = \begin{pmatrix} -7 & 21 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz de tamaño 1×5, en la que $\langle C\rangle_{14} = -1$

Ejercicio 2.1

Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Determine la matriz A, de manera explícita, si se tiene que:

$$\langle A\rangle_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j+1}2^i & \text{si} \quad i = 1,2,3, \quad j = 1 \\ \dfrac{i(-1)^{i+j}}{i+j-1} & \text{si} \quad i = 1,2,3, \quad j = 2,3 \end{cases}$$

Definición 2.2 (Igualdad de matrices)

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se dice que A y B son iguales, y se escribe $A = B$, si se cumple que

$$\langle A\rangle_{ij} = \langle B\rangle_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

De acuerdo con la definición anterior, para determinar si dos matrices son iguales se debe cumplir que dichas matrices tengan el mismo tamaño y que, además, todas sus entradas correspondientes sean iguales.

Ejercicio 2.2

Determine, de ser posible, valores para las incógnitas $x, y, z \in \mathbb{R}$ de manera que se cumpla, respectivamente, la igualdad entre cada par de matrices.

1.
$$E = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ y & 0{,}5 \\ -\sqrt{16} & x-1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} z+1 & -\sqrt{49} \\ 1 & \cos\frac{\pi}{3} \\ -\ln e^4 & y-2x \end{pmatrix}$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} x^2-1 & 9^2 & -5^2 & 2 \\ y & z+y & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & (-3)^4 & -25 & y+z \\ y & 2 & yz & -1 \end{pmatrix}$$

Definición 2.3 (Matriz transpuesta de una matriz)

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. La matriz transpuesta de A, denotada como A^t, es la matriz de tamaño $n\times m$, tal que
$$\langle A^t \rangle_{ij} = \langle A \rangle_{ji}, \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Con base en lo anterior, se puede asegurar que la matriz transpueta de A es aquella matriz que se obtiene a partir de A luego de escribir cada fila i como columna i. En general, si
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
se tiene que
$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3

Si $D \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$, tal que $\langle D \rangle_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j}(2j-i)}{Min(i,j)}, \forall i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq 4$, $j = 1, 2$, determine lo que se pide en cada caso.

1. D
2. D^t
3. $(D^t)^t$
4. $D_{(1)}$
5. $D^{(2)}$
6. $D_{(2)}$
7. $D^t_{(2)}$
8. $D^t_{(1)}$
9. ${D_{(2)}}^t$

Ejemplo 2.4

Demuestre que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces $\left(A^t\right)^t = A$

Solución

Para demostrar que $\left(A^t\right)^t = A$, con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, basta demostrar (entrada por entrada) que $\left\langle \left(A^t\right)^t \right\rangle_{ij} = \langle A\rangle_{ij}, \forall i,j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$
Veamos:
$\forall i,j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left\langle \left(A^t\right)^t \right\rangle_{ij} &= \left\langle A^t \right\rangle_{ji} && \text{definición 2.3} \\ &= \langle A\rangle_{ij} && \text{definición 2.3} \end{aligned}$$

$$\text{Así, } \left\langle \left(A^t\right)^t \right\rangle_{ij} = \langle A\rangle_{ij}, \forall i,j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

$\therefore \left(A^t\right)^t = A$

2.2 Tipos de matrices y resultados

Frecuentemente, se estará trabajando con matrices que presentan cierta particularidad; algunas de ellas se definen a continuación.

Definición 2.4 (Matriz cuadrada)

Una matriz A es una matriz cuadrada si, y solo si, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

La definición anterior indica que una matriz cuadrada es aquella que posee igual número de filas y de columnas; es decir, un arreglo de números de tamaño $n\times n$. Si A es una matriz de tamaño $n\times n$, se dice que A es de orden n. Toda matriz cuadrada A de orden n es un arreglo de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ conforman lo que se denomina *diagonal principal*[1] *de A*.

[1]En adelante se empleará simplemente el término *diagonal de A* para hacer referencia a estos elementos; note que este es un concepto exclusivo para matrices cuadradas.

Se dice, además, que el elemento $\langle A \rangle_{ij}$ está bajo la diagonal de A si se cumple que $i > j$; similarmente, si $i < j$ se dice que el elemento $\langle A \rangle_{ij}$ está sobre la diagonal de A.

Ejercicio 2.4

Enuncie alguna matriz B que cumpla, simultáneamente, las condiciones siguientes:

- Los elementos de su diagonal son entradas de la forma 2λ, con $\lambda \in \mathbb{Z}$
- B es de orden 6.
- Los elementos sobre su diagonal son menores que la suma de los elementos de la diagonal.
- $\langle B \rangle_{ij} = j - i, \forall i, j$ con $i > j$

Definición 2.5 (Matriz columna)

Una matriz A es una matriz columna si, y solo si, $A \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$

En general, una matriz columna de tamaño $m \times 1$ es un arreglo de m filas y 1 columna de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Definición 2.6 (Matriz fila)

Una matriz A es una matriz fila si, y solo si, $A \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$

En general, una matriz fila de tamaño $1 \times n$ es un arreglo de 1 fila y n columnas de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Definición 2.7 (Matriz identidad)

Una matriz A es una matriz identidad si, y solo si, los elementos de su diagonal son todos iguales a 1 y sus restantes elementos son iguales a 0.

La matriz identidad de orden n será denotada como I_n; de esta manera, se tiene que

$$\langle I_n \rangle_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

Ejemplo 2.5

1. La matriz identidad de orden 5 es la matriz

$$I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La matriz identidad de orden 2 es la matriz

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 2.8 (Matriz nula)

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. La matriz A es una matriz nula si, y solo si, todas sus entradas son iguales a 0.

La matriz nula de tamaño $m\times n$ será denotada como $\mathcal{O}_{m\times n}$ (si $m = n$ se denota como $\mathcal{O}_n$); de esta manera, se tiene que

$$\langle \mathcal{O}_{m\times n}\rangle_{ij} = 0, \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Ejemplo 2.6

1. La matriz nula de tamaño 2×5 es la matriz

$$\mathcal{O}_{2\times 5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La matriz nula de tamaño 1×4 es la matriz

$$\mathcal{O}_{1\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. La matriz nula de orden 3 es la matriz

$$\mathcal{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 2.9 (Matriz diagonal)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matriz A es una matriz diagonal si, y solo si, todos los elementos de A que no están en su diagonal son iguales a 0.

Con base en la definición anterior, si A es una matriz diagonal de orden n, se cumple que

$$\langle A \rangle_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{donde } a_{ii} \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq n$$

Es decir, A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 2.10 (Matriz triangular superior)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matriz A es una matriz triangular superior si, y solo si, $\langle A \rangle_{ij} = 0, \forall i, j$ con $i > j$

De esta manera, si A es una matriz triangular superior todos los elementos de A que están bajo su diagonal son iguales a 0; es decir, A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 2.11 (Matriz triangular inferior)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matriz A es una matriz triangular inferior si, y solo si, $\langle A \rangle_{ij} = 0, \forall i, j$ con $i < j$

Así, si A es una matriz triangular inferior todos los elementos de A que están sobre su diagonal son iguales a 0; es decir, A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.5

Enuncie una matriz como ejemplo para cada uno de los primeros cuatro enunciados y responda la pregunta del último del ellos.

1. Matriz triangular superior de orden 5.
2. Matriz diagonal de orden 4.
3. Matriz triangular inferior de orden 2.
4. Matriz triangular superior e inferior, simultáneamente, y de orden 3.
5. ¿Cuáles son los tipos en los que se puede clasificar la matriz O_4?

2.3 Operaciones con matrices

En esta sección se estudiarán las operaciones que se definen en el conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y algunas de sus propiedades más relevantes.

Definición 2.12 (Adición de matrices)

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se define la suma de A y B, denotada como $A+B$, como la matriz de tamaño $m\times n$ dada por

$$\langle A+B\rangle_{ij} = \langle A\rangle_{ij} + \langle B\rangle_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

En términos generales,[2] si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ entonces

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.7

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & -2 \\ -8 & -3 & 7 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & -10 & 11 & -1 \\ 4 & 15 & 10 & 8 \\ 7 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 & 11 & 0 \\ 3 & 18 & 15 & 6 \\ -1 & -3 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

[2] Observe que la adición de matrices con tamaños diferentes no está definida.

Definición 2.13 (Multiplicación de un número real por una matriz)

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se define el producto de λ y A, denotado como $\lambda \cdot A$, como la matriz de tamaño $m \times n$ dada por

$$\langle \lambda \cdot A \rangle_{ij} = \lambda \cdot \langle A \rangle_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Así, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ entonces[3]

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.8

Si $k, r \in \mathbb{R}$

$$-5 \begin{pmatrix} -1 & 3 & r \\ 0 & 2+k & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & -5r \\ 0 & -10-5k & 25 \end{pmatrix}$$

Definición 2.14 (Sustracción de matrices)

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se define la resta de A y B, denotada como $A - B$, como la matriz de tamaño $m \times n$ dada por $A - B = A + (-1 \cdot B)$

En términos generales, $\langle A - B \rangle_{ij} = \langle A \rangle_{ij} - \langle B \rangle_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$; de esta manera, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ entonces

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

[3]Usualmente, se escribre λA en vez de $\lambda \cdot A$.

Ejercicio 2.6

Considere las matrices y realice, si está definida, la operación que se indica en cada caso.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 11 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

1. $A+D$
2. $D+A$
3. $A+D+2C$
4. $A-5I_3$
5. $O_{3\times 2}+C$
6. $O_{3\times 2}+A$
7. $(A+D)^t$
8. A^t+D^t
9. $D-D$
10. $D-2I_3$
11. $B-B$
12. $2D-D$
13. $3B+C$
14. $5B-2B$
15. $B-2C^t$
16. $(3A)^t+D$
17. $-2(A+D)$
18. $-2A-2D$
19. $C-I_2$
20. B^t-C
21. $C-B^t$

Teorema 2.1

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces:

1. $A+B=B+A$ — la adición es conmutativa en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ — la adición es asociativa en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
3. $A+O_{m\times n}=O_{m\times n}+A=A$ — $O_{m\times n}$ es el elemento neutro aditivo en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
4. $A+(-A)=(-A)+A=O_{m\times n}$ — en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ toda matriz posee matriz opuesta aditiva
5. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$
6. $\alpha A+\alpha B=\alpha(A+B)$
7. $\alpha A+\beta A=(\alpha+\beta)A$
8. $1A=A$

Demostración resultado (1)

Para demostrar que $A+B=B+A$ basta probar que, entrada por entrada,

$$\langle A+B\rangle_{ij} = \langle B+A\rangle_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Veamos:
$\forall i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ se tiene que

Demostración resultado (1) - continuación

$$
\begin{aligned}
\langle A+B\rangle_{ij} &= \langle A\rangle_{ij}+\langle B\rangle_{ij} && \text{definición 2.12}\\
&= \langle B\rangle_{ij}+\langle A\rangle_{ij} && \text{conmutatividad de la adición en } \mathbb{R}\\
&= \langle B+A\rangle_{ij} && \text{definición 2.12}\\
\\
\text{Así, } \langle A+B\rangle_{ij} &= \langle B+A\rangle_{ij}, \forall i,j\in\mathbb{N} \text{ con } 1\le i\le m, 1\le j\le n
\end{aligned}
$$

$\therefore A+B=B+A$

Demostración resultado (6)

Para demostrar que se cumple la igualdad $\alpha A+\alpha B=\alpha(A+B)$ basta probar que, entrada por entrada,

$$\langle \alpha A+\alpha B\rangle_{ij}=\langle \alpha(A+B)\rangle_{ij}, \forall i,j\in\mathbb{N} \text{ con } 1\le i\le m, 1\le j\le n$$

Veamos:
$\forall i,j\in\mathbb{N}$ con $1\le i\le m, 1\le j\le n$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha(A+B)\rangle_{ij} &= \alpha\langle A+B\rangle_{ij} && \text{definición 2.13}\\
&= \alpha\Big(\langle A\rangle_{ij}+\langle B\rangle_{ij}\Big) && \text{definición 2.12}\\
&= \alpha\langle A\rangle_{ij}+\alpha\langle B\rangle_{ij} && \text{distributividad de } \cdot \text{ respecto de } + \text{ en } \mathbb{R}\\
&= \langle \alpha A\rangle_{ij}+\langle \alpha B\rangle_{ij} && \text{definición 2.13}\\
&= \langle \alpha A+\alpha B\rangle_{ij} && \text{definición 2.12}\\
\\
\text{Así, } \langle \alpha(A+B)\rangle_{ij} &= \langle \alpha A+\alpha B\rangle_{ij}, \forall i,j\in\mathbb{N} \text{ con } 1\le i\le m, 1\le j\le n
\end{aligned}
$$

$\therefore \alpha A+\alpha B=\alpha(A+B)$

Ejercicio 2.7

Demuestre los demás resultados del teorema 2.1.

Ejercicio 2.8

Sean $A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\alpha\in\mathbb{R}$. Demuestre las propiedades siguientes.

1. $A-B=-B+A$
2. $\alpha A-\alpha B=\alpha(A-B)$
3. $(\alpha A)^t=\alpha A^t$
4. $(A+B)^t=A^t+B^t$
5. $(A-B)^t=A^t-B^t$

Definición 2.15 (Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna)

Sean $A \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Se define el producto de A y B, denotado como $A \cdot B$, como el número real dado por

$$AB = \sum_{k=1}^{n} \langle A\rangle_{1k} \langle B\rangle_{k1}$$

En términos generales, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ entonces[4]

$$AB = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

Ejemplo 2.9

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $AB = -27$, ya que

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (2)(3) + (-7)(5) + (0)(15) + (-1)(-2) + (4)(0) \\ &= 6 - 35 + 0 + 2 + 0 \\ &= -27 \end{aligned}$$

Definición 2.16 (Multiplicación de matrices)

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$. Se define el producto de A y B, denotado como $A \cdot B$, como la matriz de tamaño $m \times n$ dada por

$$\langle AB\rangle_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \langle A\rangle_{ik} \langle B\rangle_{kj}, \forall i,j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Como el elemento de AB que está en la fila i y columna j se obtiene multiplicando[5] la i-ésima fila de A con la j-ésima columna de B, el producto de estas dos matrices existe si, y solo si, el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

[4]Observe que la multiplicación de una matriz fila por una matriz columna (en ese orden) está definida, únicamente, cuando ambas matrices poseen el mismo número de elementos.

[5]Otra forma de escribir este resultado es $\langle AB\rangle_{ij} = A_{(i)}B^{(j)}, \forall i,j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

Ejemplo 2.10

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Como A tiene 3 columnas (A es de tamaño 2×3) y B tiene 3 filas (B es de tamaño 3×4), el producto AB está definido; además, AB es de tamaño 2×4 y se tiene que $AB = \begin{pmatrix} -2 & 23 & -6 & 16 \\ -16 & 15 & 17 & -28 \end{pmatrix}$ ya que

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{(1)}B^{(1)} & A_{(1)}B^{(2)} & A_{(1)}B^{(3)} & A_{(1)}B^{(4)} \\ \\ A_{(2)}B^{(1)} & A_{(2)}B^{(2)} & A_{(2)}B^{(3)} & A_{(2)}B^{(4)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6+0+4 & 8-9+24 & 2+0-8 & -2-2+20 \\ \\ -9+0-7 & 12+45-42 & 3+0+14 & -3+10-35 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 23 & -6 & 16 \\ -16 & 15 & 17 & -28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que el producto BA no está definido en este caso, ya que el número de columnas de B no es igual al número de filas de A.

Ejercicio 2.9

Considere las matrices y realice, si está definida, la operación que se indica en cada caso.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. $CF - 3G$
2. DI_2
3. I_2D
4. I_3D
5. $(AD)^t$
6. A^tD^t
7. D^tA^t
8. $G^tD + 2F$
9. $-2(BC)$
10. $(-2B)C$
11. $(C-D)F$
12. $CF - DF$
13. AG
14. $GA - B^t$
15. $2FA - (C+D)^t$
16. $AC + AD$
17. $(C+D)A$
18. $A(C+D)$

Axioma 1 Si $A, B, D \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ y $F \in \mathcal{M}_{r\times m}(\mathbb{R})$, entonces:

1. $A = B \Rightarrow A + D = B + D$
2. $A = B \Rightarrow FA = FB$
3. $A = B \Rightarrow AC = BC$

Teorema 2.2

Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}), D \in \mathcal{M}_{p\times s}(\mathbb{R})$ y $F \in \mathcal{M}_{r\times m}(\mathbb{R})$, entonces:

1. $FA + FB = F(A+B)$ — distributividad de $\cdot$ respecto de $+$ en matrices (por la izquierda)
2. $AC + BC = (A+B)C$ — distributividad de $\cdot$ respecto de $+$ en matrices (por la derecha)
3. $(AC)D = A(CD)$ — asociatividad de la multiplicación de matrices
4. $I_m A = A = A I_n$ — I es el elemento neutro multiplicativo en matrices

Demostración resultado (1)

Para demostrar que se cumple la igualdad $FA + FB = F(A+B)$ es suficiente probar que, entrada por entrada,

$$\langle FA + FB\rangle_{ij} = \langle F(A+B)\rangle_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \le i \le r, 1 \le j \le n$$

Veamos:
$\forall i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \le i \le r, 1 \le j \le n$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle FA + FB\rangle_{ij} &= \langle FA\rangle_{ij} + \langle FB\rangle_{ij} && \text{definición 2.12}\\
&= \sum_{k=1}^{m} \langle F\rangle_{ik}\langle A\rangle_{kj} + \sum_{k=1}^{m} \langle F\rangle_{ik}\langle B\rangle_{kj} && \text{definición 2.16}\\
&= \sum_{k=1}^{m} \left(\langle F\rangle_{ik}\langle A\rangle_{kj} + \langle F\rangle_{ik}\langle B\rangle_{kj}\right) && \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{m} b_k = \sum_{k=1}^{m} (a_k + b_k)\\
&= \sum_{k=1}^{m} \langle F\rangle_{ik}\left(\langle A\rangle_{kj} + \langle B\rangle_{kj}\right) && \text{dist. de } \cdot \text{ respecto de } + \text{ en } \mathbb{R}\\
&= \sum_{k=1}^{m} \langle F\rangle_{ik}\langle A + B\rangle_{kj} && \text{definición 2.12}\\
&= \langle F(A+B)\rangle_{ij} && \text{definición 2.16}
\end{aligned}$$

Así, $\langle FA + FB\rangle_{ij} = \langle F(A+B)\rangle_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \le i \le r, 1 \le j \le n$

$\therefore FA + FB = F(A+B)$

Ejercicio 2.10

Demuestre los demás resultados del teorema 2.2.

Ejercicio 2.11

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R}), D \in \mathcal{M}_{r\times m}(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre las propiedades siguientes.

1. $I_n^t = I_n$
2. $O_{r\times m}A = O_{r\times n}$
3. $A\,O_{n\times p} = O_{m\times p}$
4. $(AC)^t = C^t A^t$
5. $DA - DB = D(A - B)$
6. $AC - BC = (A - B)C$
7. $(\alpha A)C = A(\alpha C) = \alpha(AC)$

2.4 Matrices no singulares

Algunas matrices cuadradas cumplen con ciertas condiciones que nos dirigen hacia un estudio más detallado respecto de ellas y de algunas de las propiedades que satisfacen. Las matrices no singulares poseen una serie de aplicaciones sumamente importantes en el estudio de esta materia.

Definición 2.17 (Matriz no singular)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si existe alguna matriz A' de orden n, tal que $AA' = I_n$ y $A'A = I_n$, entonces se dice que A es una matriz no singular o invertible.

Si A es una matriz no singular de orden n, toda matriz A' que satisfaga $AA' = I_n$ y $A'A = I_n$ es llamada *una inversa de* A y denotada como A^{-1}; de esta manera, si A es una matriz no singular de orden n se cumple que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
Si A no posee matriz inversa alguna, se dice que A es *singular*.

Ejemplo 2.11

Si se tiene que $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz inversa de A, ya que

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0+3-2 & -3+0+3 & 3-3+0 \\ 0+2-2 & -2+0+3 & 2-2+0 \\ 0+2-2 & -3+0+3 & 3-2+0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.11 - continuación

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

y, además

$$
\begin{aligned}
A^{-1}A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0-2+3 & 0-2+2 & 0+1-1 \\ 3+0-3 & 3+0-2 & -1+0+1 \\ 6-6+0 & 6-6+0 & -2+3+0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

es decir, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$

Teorema 2.3 (Unicidad de la matriz inversa de una matriz no singular)

Si A es una matriz no singular de orden n, entonces la matriz inversa de A es única.

Demostración

Como la matriz A es no singular de orden n, existe al menos una matriz de orden n que es inversa de A. Supongamos que B y C son dos matrices inversas de la matriz A, tales que $B \neq C$; es decir, se cumplen los resultados siguientes:

$$AB = BA = I_n \tag{2.1}$$

$$AC = CA = I_n \tag{2.2}$$

Por otra parte, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
B &= B\,I_n && I \text{ es el elemento neutro multiplicativo} \\
&= B\,(AC) && \text{resultado (2.2)} \\
&= (BA)\,C && \text{asociatividad de la multiplicación de matrices} \\
&= I_nC && \text{resultado (2.1)} \\
&= C && I \text{ es el elemento neutro multiplicativo}
\end{aligned}
$$

Demostración - continuación

$$\text{Así, } B \quad = \quad C \qquad\qquad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

$\therefore$ Si A es una matriz no singular, A^{-1} es única.

Ejemplo 2.12

Determine, en caso de existir, A^{-1} si se tiene que $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Solución

Supongamos que A es no singular y que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Como A es no singular, se debe cumplir que $AA^{-1} = I_2$ y que $A^{-1}A = I_2$
Veamos (considerando la primera de las igualdades):

$$\begin{aligned}
& AA^{-1} = I_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2a-2c & 2b-2d \\ 4c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} 2a-2c = 1 \\ 2b-2d = 0 \\ 4c = 0 \\ 4d = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{4} \\ c = 0 \\ d = \dfrac{1}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

De esta manera, si $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ entonces $AA^{-1} = I_2$

Solución - continuación

Ahora, es necesario determinar si con la matriz A^{-1} encontrada anteriormente se satisface la igualdad $A^{-1}A = I_2$ o no.
Veamos:

$$\begin{aligned}
A^{-1}A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(2) + \left(\frac{1}{4}\right)(0) & \left(\frac{1}{2}\right)(-2) + \left(\frac{1}{4}\right)(4) \\ (0)(2) + \left(\frac{1}{4}\right)(0) & (0)(-2) + \left(\frac{1}{4}\right)(4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+0 & -1+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I_2 \\
\text{Así, } A^{-1}A &= I_2
\end{aligned}$$

$\therefore A$ es no singular y, además, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.12

Determine, en caso de existir, la matriz inversa de cada una de las matrices siguientes.

1. $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
2. $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
3. $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Teorema 2.4

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tal que A y B son matrices no singulares, entonces AB es una matriz no singular y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Ejercicio 2.13

Demuestre el teorema 2.4.

El teorema que se enuncia a continuación simplifica el proceso de comprobación relacionado con la no singularidad de toda matriz que sea invertible; su demostración requiere temas que se analizan posteriormente y está desarrollada en el Ejemplo 5.16.

Teorema 2.5

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $BA = I_n$ necesariamente $AB = I_n$

Anteriormente, para determinar si alguna matriz cuadrada A es no singular se debía encontrar una matriz B del mismo orden que A tal que satisficiera las condiciones $AB = I$ y $BA = I$; con este teorema, esta comprobación se reduce a considerar cualquiera de las dos igualdades, ya que con una de ellas se garantiza la otra.

Teorema 2.6

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tal que A es una matriz no singular, entonces $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

Ejercicio 2.14

Demuestre el teorema 2.6.

Definición 2.18 (Matriz simétrica)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matriz A es una matriz simétrica si, y solo si, $A = A^t$

Definición 2.19 (Matriz antisimétrica)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matriz A es una matriz antisimétrica si, y solo si, $A = -A^t$

Ejercicio 2.15

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B, C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $D, F \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{R})$, tal que A es una matriz no singular. Demuestre las propiedades siguientes.

1. $I_n^{-1} = I_n$
2. $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$
3. $AB = AC \Rightarrow B = C$
4. $DA = FA \Rightarrow D = F$

Definición 2.20 (Potencia en matrices)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matriz A^k, con $k \in \mathbb{N}$, representa la k-ésima potencia de A y se define de la manera siguiente:

1. $A^0 = I_m$
2. $A^k = A \cdot A \cdot A \cdots A$ (k veces A)
3. $A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k$, siempre que A sea no singular

Definición 2.21 (Matriz periódica)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matriz A es una matriz periódica si, y solo si, $\exists p \in \mathbb{Z}^+$, tal que $A^{p+1} = A$

Si A es una matriz periódica, el menor entero positivo p con el que se satisfaga la igualdad $A^{p+1} = A$ se llama período de A

Definición 2.22 (Matriz idempotente)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matriz A es una matriz idempotente si, y solo si, $A^2 = A$

Definición 2.23 (Matriz nilpotente)

Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. La matriz A es una matriz nilpotente si, y solo si, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$, tal que $A^n = O_m$

Si A es nilpotente, el menor entero positivo n con el que se satisfaga la igualdad $A^n = O_m$ se llama índice de nilpotencia.

2.5 Matrices elementales

El procedimiento realizado en el ejemplo 2.12 para la obtención de la matriz inversa de alguna matriz no singular es, en muchas ocasiones, de manejo algebraico laborioso.
Se desarrollarán procedimientos que permiten obtener dicha matriz inversa de una forma más eficiente que la mencionada; además, se definirá el concepto de matriz equivalente que es de suma importancia en el desarrollo de temas posteriores.

Definición 2.24 (Operación elemental sobre las filas de una matriz)

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Una operación elemental sobre las filas de A es cualquiera de las tres siguientes:

1. $k\mathrm{F}_i$ — Modificar la fila i de A multiplicándola por un número real k, $k \neq 0$
2. $\mathrm{F}_i \leftrightarrow \mathrm{F}_j$ — Intercambiar las filas i y j de A
3. $k\mathrm{F}_j + \mathrm{F}_i$ — Modificar la i-ésima fila de A sumándole k veces la fila j

Definición 2.25 (Matrices equivalentes por filas)

Una matriz B es equivalente por filas con una matriz A, si B se obtiene a partir de A mediante una secuencia finita de operaciones elementales sobre sus filas.

Si la matriz B es equivalente por filas con la matriz A se escribe $A \sim B$.

Ejemplo 2.13

Considere la matriz P definida como

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Son equivalentes por filas con P las matrices siguientes:

- $R = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -10 \\ 2 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ Se realiza: $P \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \overset{-2F_2}{\sim} R$

- $Z = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Se realiza: $P \overset{4F_2}{\sim} \overset{\frac{1}{4}F_2}{\sim} P \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} Z = P$

- $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & -9 & 5 & -4 \\ 1 & 18 & -11 & 13 \end{pmatrix}$ Se realiza: $P \overset{2F_1+F_3}{\sim} \overset{-2F_3+F_2}{\sim} \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} B$

- $F = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Se realiza: $P \overset{3F_1+F_2}{\sim} \overset{-3F_1+F_2}{\sim} F = P$

- $H = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 9 & -28 \\ -3 & 0 & 3 & -15 \\ -2 & -19 & 13 & -40 \end{pmatrix}$ Se realiza: $P \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \overset{-3F_2}{\sim} \overset{2F_2+F_1}{\sim} \overset{4F_3}{\sim} \overset{F_1+F_3}{\sim} H$

Con base en las operaciones realizadas en la matriz P del ejemplo anterior para la obtención de las matrices Z y F, se puede definir un concepto importante para operaciones elementales: el concepto de operación elemental inversa.

Definición 2.26 (Operación elemental inversa)

Se dice que una operación elemental es inversa de otra si aplicando ambas operaciones a alguna matriz A, de manera secuencial, se obtiene como resultado la matriz A.

En general, para cada una de las operaciones elementales sobre las filas de alguna matriz su operación elemental inversa está definida, respectivamente, de la manera siguiente:

1. $k\mathrm{F}_i$ Operación elemental inversa: $\frac{1}{k}\mathrm{F}_i$, con $k \neq 0$

2. $\mathrm{F}_i \leftrightarrow \mathrm{F}_j$ Operación elemental inversa: $\mathrm{F}_i \leftrightarrow \mathrm{F}_j$

3. $k\mathrm{F}_j + \mathrm{F}_i$ Operación elemental inversa: $-k\mathrm{F}_j + \mathrm{F}_i$

Ejercicio 2.16

Considere las matrices R, B y H del ejemplo 2.13 y, a partir de estas, obtenga la matriz P del mismo ejemplo utilizando el resultado de la definición anterior.

Definición 2.27 (Matriz elemental)

Una matriz elemental de orden n, denotada como E, es toda matriz que se obtiene de la matriz I_n después de aplicarle una, y solo una, operación elemental.

Una *matriz elemental* de orden n se dice que es del *tipo a*, *tipo b* o *tipo c* si se realiza, respectivamente, a la matriz I_n la operación elemental a, b o c de la definición 2.24; asimismo, toda matriz elemental de orden n se denota, de manera más específica y basados en el tipo que sea, como E_a, E_b o E_c

Ejemplo 2.14

Son matrices elementales de orden 3 las matrices siguientes:

1. $E_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $E_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $E_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

4. $E_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $E_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$

6. $E_c = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema 2.7

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y B se obtiene de A luego de efectuarle una operación elemental sobre sus filas, entonces existe una matriz elemental E de orden m, tal que $B = EA$, donde E se obtiene de I_m después de efectuar la misma operación elemental realizada en A para la obtención de B.

Demostración

Para demostrar lo que se enuncia, basta probar que las igualdades mencionadas son válidas para cada uno de los tres únicos casos que existen; específicamente, se deben contemplar los tres tipos de operaciones elementales definidas y verificar, respectivamente, la igualdad entre la matriz B y la matriz EA.

Se desarrollará el caso que contempla la operación elemental $k\mathrm{F}_i$

Veamos:

Sean $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ y $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Suponga que la matriz B se obtiene de la matriz A después de realizar la operación $k\mathrm{F}_r$

En este caso, A y B difieren únicamente en su r-ésima fila; específicamente, $\forall i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, se tiene que $\langle B\rangle_{ij} = \begin{cases} \langle A\rangle_{ij} & \text{si } i \neq r \\ k\langle A\rangle_{ij} & \text{si } i = r \end{cases}$

Sea $E \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ la matriz elemental que se obtiene de I_m luego de efectuar la operación elemental $k\mathrm{F}_r$; en este caso, $\forall i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $\langle E\rangle_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, i \neq r \\ k & \text{si } i = j = r \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Se quiere probar que $\langle EA\rangle_{ij} = \langle B\rangle_{ij}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Partiendo del primer miembro de la igualdad, $\forall i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle EA\rangle_{ij} &= \sum_{t=1}^{m} \langle E\rangle_{it}\langle A\rangle_{tj} \\
&= \langle E\rangle_{i1}\langle A\rangle_{1j} + \langle E\rangle_{i2}\langle A\rangle_{2j} + \cdots + \langle E\rangle_{ii}\langle A\rangle_{ij} + \cdots + \langle E\rangle_{im}\langle A\rangle_{mj} \\
&= 0\cdot\langle A\rangle_{1j} + 0\cdot\langle A\rangle_{2j} + \cdots + \langle E\rangle_{ii}\langle A\rangle_{ij} + \cdots + 0\cdot\langle A\rangle_{mj} \\
&= \langle E\rangle_{ii}\langle A\rangle_{ij} \\
&= \begin{cases} 1\cdot\langle A\rangle_{ij} & \text{si } i \neq r \\ k\cdot\langle A\rangle_{ij} & \text{si } i = r \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle A\rangle_{ij} & \text{si } i \neq r \\ k\langle A\rangle_{ij} & \text{si } i = r \end{cases} \\
&= \langle B\rangle_{ij}
\end{aligned}$$

$$\text{Así, } \langle EA\rangle_{ij} = \langle B\rangle_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

$\therefore$ El resultado de efectuar la operación elemental $k\mathrm{F}_i$ sobre las filas de toda matriz A, es el mismo que realizar la multiplicación EA, donde E es la matriz elemental obtenida al aplicarle a I la operación elemental $k\mathrm{F}_i$

Ejercicio 2.17

Demuestre los dos casos restantes del teorema 2.7.

Ejercicio 2.18

Considere la matriz A definida como $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ y las matrices elementales de orden 3 E_a, E_b y E_c definidas por $E_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $E_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $E_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Determine las matrices P, Q y R que se obtienen a partir de A, después de realizar, respectivamente, la operación elemental $-4\mathrm{F}_3$, $\mathrm{F}_2 \leftrightarrow \mathrm{F}_3$ y $-3\mathrm{F}_3 + \mathrm{F}_1$

2. Verifique que se cumplen las igualdades siguientes:
   - $P = E_a A$
   - $Q = E_b A$
   - $R = E_c A$

3. Con base en el teorema anterior, obtenga la matriz U que se obtiene de A después de realizarle, secuencialmente, las operaciones elementales sobre filas siguientes: $A \overset{-3F_3+F_1}{\sim} \overset{-4F_3}{\sim} \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \overset{-2F_1+F_2}{\sim} U$.

Teorema 2.8

Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y B es equivalente por filas con A, entonces existe una matriz C de orden m, tal que $B = CA$, donde C es la matriz producto de un número finito de matrices elementales de orden m.

Ejercicio 2.19

Demuestre el teorema 2.8.

Teorema 2.9

Toda matriz elemental E de orden n es invertible y su inversa E^{-1} es una matriz elemental, que se obtiene aplicando a I_n la operación elemental inversa de la operación que le fue efectuada a I_n para determinar E.

Demostración

Si E es una matriz elemental de orden n, entonces E se obtiene de I_n después de efectuarle alguna operación elemental sobre sus filas.
Sea E' la matriz que se obtiene de I_n después de realizarle la operación elemental inversa de la efectuada en I_n para la obtención de E.

Demostración - continuación

Si a la matriz E' se le realiza la operación elemental efectuada en I_n para la obtención de E, el resultado sería esta matriz identidad, ya que el efecto de realizar de manera simultánea una operación elemental y su operación elemental inversa es la obtención de una matriz sin cambio alguno.
De esta manera y basados en el teorema 2.7, $EE' = I_n$, lo que nos indica que E' es la matriz inversa de E.
$\therefore$ Toda matriz elemental E posee como inversa la matriz elemental E^{-1} que se obtiene aplicando a la identidad la operación elemental inversa de la aplicada en dicha identidad para la obtención de E.

Ejemplo 2.15

Las matrices elementales de orden tres $E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $E'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son mutuamente inversas, ya que:

$$
\begin{aligned}
E'E'' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 3+0-3 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

Note que para obtener E'' se aplica a la matriz I_3 la operación elemental inversa de la aplicada a la misma identidad para la obtención de E'.

Ejercicio 2.20

Demuestre que *"es equivalente por filas con"* es una relación de equivalencia.

2.6 Reducción de matrices

Los conceptos y resultados enunciados anteriormente dan lugar a aplicaciones importantes dentro del estudio del álgebra matricial; el concepto de matriz reducida por filas contempla varios de los resultados mencionados y permite simplicidad en varios cálculos que se presentarán.

Definición 2.28 (Matriz escalonada reducida por filas)

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se dice que A es una matriz escalonada reducida por filas, si A cumple, simultáneamente, las condiciones siguientes:

- Cualquier fila que contenga entradas distintas de cero precede a toda fila nula (en caso de existir alguna).
- La primera entrada distinta de cero de cada fila es el único elemento no nulo de su columna.
- El primer elemento no nulo de cada fila es 1 y se encuentra en alguna columna posterior a la que contiene la primera entrada no nula de la fila que le precede.

Ejemplo 2.16

Son matrices escalonadas reducidas por filas las siguientes:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

El teorema que se enuncia a continuación muestra un resultado importante en el estudio del álgebra matricial; se garantiza que toda matriz se puede llevar, con base en operaciones elementales sobre sus filas, a una matriz escalonada reducida por filas.

Teorema 2.10

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces existe una única matriz escalonada reducida por filas R, tal que $A \sim R$.

Ejercicio 2.21

Demuestre el teorema 2.10.

Ejemplo 2.17

La matriz escalonada reducida por filas que es equivalente por filas con la matriz A definida como $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -7 & 5 \\ -6 & -12 & 0 & 1 & 19 & -4 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 1 & -8 \\ -8 & -16 & -6 & 3 & 3 & 22 \end{pmatrix}$ está dada por $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ya que:

$$
\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -7 & 5 \\ -6 & -12 & 0 & 1 & 19 & -4 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 1 & -8 \\ -8 & -16 & -6 & 3 & 3 & 22 \end{pmatrix}
& \underset{\substack{6F_1+F_2 \\ -2F_1+F_3 \\ 8F_1+F_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -23 & 26 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 15 & -18 \\ 0 & 0 & -14 & 3 & -53 & 62 \end{pmatrix} \\
& \underset{-\frac{1}{6}F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{23}{6} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 15 & -18 \\ 0 & 0 & -14 & 3 & -53 & 62 \end{pmatrix} \\
& \underset{\substack{F_2+F1 \\ -4F_2+F3 \\ 14F_2+F4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{19}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{23}{6} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\
& \underset{-3F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{19}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{23}{6} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\
& \underset{\substack{\frac{1}{6}F_3+F1 \\ \frac{1}{6}F_3+F2 \\ -\frac{2}{3}F_3+F4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2.22

Demuestre que la única matriz de orden n escalonada reducida por filas que posee inversa es la matriz I_n

Teorema 2.11

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces A es equivalente por filas con la matriz I_n si, y solo si, A es una matriz no singular.

Demostración

Sean $A, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tales que $A \sim R$, siendo R una matriz escalonada reducida por filas.
Como $A \sim R$, existe un número finito de matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$, tales que

$$E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = R$$

Con base en el teorema 2.9, las matrices $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son invertibles y sus inversas respectivas $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_k^{-1}$ son, también, matrices elementales; de esta manera:

$$\begin{aligned} & E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = R \\ \Rightarrow\ & E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1} \cdot E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1} \cdot R \\ \Rightarrow\ & A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1} \cdot R \end{aligned}$$

De la última implicación, se tiene que la matriz A es invertible si, y solo si, la matriz $E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1} \cdot R$ también lo es.
Con base en el teorema 2.4, dado que las matrices $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_k^{-1}$ son invertibles, el producto $E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1} \cdot R$ es envertible si, y solo si, R es invertible; luego, A es invertible si, y solo si, R lo es.
Como R es una matriz de orden n escalonada reducida por filas, R es no singular si, y solo si, R es la matriz I_n
$\therefore$ Si A es una matriz de orden n, A es no singular si, y solo si, $A \sim I_n$

Observe que:

$$\begin{aligned} & E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n \\ \Rightarrow\ & A^{-1} = E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \\ \Rightarrow\ & A^{-1} = E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot I_n \end{aligned}$$

De esta manera, para obtener la matriz A^{-1} se aplican a I_n las mismas operaciones elementales que se deben aplicar a A para la obtención de I_n
En el jemplo que se enuncia a continuación se muestra una estrategia, fundamentada en la demostración del teorema anterior, para determinar si alguna matriz es no singular y, simultáneamente, hallar su inversa (en caso de existir).

Ejemplo 2.18

Para determinar la matriz inversa, en caso de existir, de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ se pueden seguir procedimientos similares al siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{-2F_1+F_2 \\ -3F_1+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{-2F_2+F_1 \\ 5F_2+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{-F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Como la matriz A es equivalente por filas con la matriz I_3, entonces A es una matriz no singular y su inversa es la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & -3 & -4 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, matriz que se obtuvo de I_3 después de realizar las mismas operaciones elementales que las efectuadas en A para la obtención de I_3

Ejercicio 2.23

Utilizando operaciones elementales sobre filas determine, en caso de existir, la matriz inversa de cada una de las matrices siguientes.

1. $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.23 - continuación

3. $H = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -25 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

4. $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. $J = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

7. $G = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 16 \\ -1 & 3 & -3 & -7 \\ 1 & -2 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

8. $L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

9. $P = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

Definición 2.29 (Rango de una matriz)

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Si R es la matriz escalonada reducida por filas equivalente con A, se define el rango de A, denotado como $r(A)$, como el número de filas no nulas que posee la matriz R.

Ejemplo 2.19

Si A es la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -7 & 5 \\ -6 & -12 & 0 & 1 & 19 & -4 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 1 & -8 \\ -8 & -16 & -6 & 3 & 3 & 22 \end{pmatrix}$ se tiene que $r(A) = 3$, ya que su matriz escalonada reducida por filas equivalente por filas (ver ejemplo 2.17) está dada por

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.24

Verifique que $r(A) = 2$, si se tiene que $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -4 & 6 & -12 \\ -2 & 6 & 5 & -4 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Teorema 2.12

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces $r(A) \leq m$

Teorema 2.13

$A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})$ es no singular si, y solo si, $r(A) = n$

2.7 Ejercicios

2.25 *Considere las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

De las dos operaciones que se enuncian, realice la única que es posible efectuar y, además, justifique por qué la otra no está definida.

1. $-2C + A^t B$
2. $AB^t + 3C$

2.26 *Sea* $k \neq 0$ *y sean* A, B, C *y* D *matrices definidas por:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

De las operaciones que se enuncian, realice aquella que esté bien definida. Justifique por qué las otras tres no se pueden realizar.

1. $(AC)^t + B^{-1}$
2. $(CB)^t - D^{-1}$
3. $(BA)^{-1} + C^t$
4. $(CA)^{-1} - D^t$

2.27 *Encuentre dos matrices cuadradas* A *y* B *no nulas de orden 2 tales que* $AB = O_2$

2.28 *Considere las matrices siguientes:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 17 & 11 & -24 \\ -15 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & -9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -11 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

1. *Calcule* $2A - C$
2. *Si se sabe que* $(2A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & -27 \\ 5 & 4 & -11 \\ -4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, *determine una matriz* X *de tamaño* 3×3 *con entradas reales, tal que* $2AX - B = CX$

2.29 *Considere las matrices siguientes:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcule:

1. $B - 2C^t$
2. AB
3. $(AB)C$
4. $A(BC)$
5. AC^t
6. $\frac{2}{3}A$

2.30 *Encuentre la matriz X que satisface la ecuación $A\left(X^t + C\right) = D$, donde:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.31 *Para cada una de las matrices que se enuncian determine su inversa (si existe):*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *con* $ad - cb \neq 0$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$
10. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
11. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2.32 *Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que $A^2 = O_{n\times n}$, demuestre que $I_n - A$ es una matriz no singular.*

2.33 *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$, tal que $A^2 = A$, demuestre que $\forall k \in \mathbb{N}$,*

$$\left(A + I_m\right)^k = I_m + \left(2^k - 1\right)A$$

2.34 *Determine si* $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ *es involutiva o no.*

2.35 *Pruebe que* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ *es nilpotente y determine su índice de nilpotencia.*

2.36 *Verifique que las matrices* M *y* N *son idempotentes, con:*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2.37 *Dé un ejemplo de una matriz cuadrada de orden 3 que sea antisimétrica.*

2.38 *En* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *se define una relación* $\mathcal{R}$ *de la siguiente manera:*

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ tal que } A = P^{-1}BP$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ *es una relación de equivalencia.*

2.39 *Sean* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$*, tales quee* A *y* B *son simétricas. Demuestre que:*

1. $A + B$ *es simétrica.*
2. AB *no siempre es simétrica.*
3. A^2 *es simétrica.*
4. A^n *es simétrica para todos los valores enteros de* n *posibles.*

3 Determinantes

Un concepto importante asociado con las matrices cuadradas es el concepto de determinante, concepto de mucha utilidad por sus variadas aplicaciones: cálculo de áreas, cálculo de matrices inversas, cálculo de volúmenes y en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, entre otros. Dado que cada matriz cuadrada está relacionada con un único número real, el determinante puede ser considerado como una función que tiene como dominio el conjunto de la matrices cuadradas y cuyo codominio es el conjunto de los números reales.

3.1 Definiciones básicas

Algunos de los conceptos más relevantes en el estudio de los determinantes son enunciados a continuación. Las definiciones que se consideran son de suma importancia para el desarrollo de contenidos posterios, relacionados con ciertas propiedades que se cumplen cuando se calculan determinantes.

Definición 3.1 (Determinante de una matriz de orden 1)

Si A es una matriz de orden 1, tal que $A = (a_{11})$, su determinante, denotado como $|A|$, $det\,(A)$ o $|a_{11}|$, se define como $|A| = a_{11}$

Definición 3.2 (Menor de un elemento)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se define el menor del elemento a_{ij} de A, denotado por M_{ij}^A, como el determinante de la matriz que se obtiene a partir de A luego de eliminar su i-ésima fila y su j-ésima columna.

Ejemplo 3.1

Considere la matriz A definida como $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Para la matriz A se tiene que:

- $M_{11}^A = |d| = d$
- $M_{12}^A = |c| = c$
- $M_{21}^A = |b| = b$
- $M_{22}^A = |a| = a$

Definición 3.3 (Cofactor de un elemento)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se define el cofactor del elemento a_{ij} de A, denotado por A_{ij}, como el número dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}^A$$

Definición 3.4 (Matriz de cofactores)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se define la matriz de cofactores de A, denotada como $\overline{A}$, como la matriz de orden n dada por

$$\langle \overline{A} \rangle_{ij} = A_{ij}, \forall i, j, \text{ con } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

Ejemplo 3.2

Con base en la matriz del ejemplo 3.1, se tiene que:

- $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}^A = (-1)^2 d = 1 \cdot d = d$
- $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}^A = (-1)^3 c = -1 \cdot c = -c$
- $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}^A = (-1)^3 b = -1 \cdot b = -b$
- $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22}^A = (-1)^4 a = 1 \cdot a = a$

De esta manera, $\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Definición 3.5 (Determinante de una matriz de orden n)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $n \geq 2$, el determinante de A se define, de manera recursiva, como el número real dado por

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} \langle A \rangle_{1j} A_{1j}$$

Ejemplo 3.3

Considere la matriz del ejemplo 3.1 y verifique que el determinante de toda matriz de orden dos está dado por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Solución

Con base en la definición 3.5 se tiene que:

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{j=1}^{2} \langle A\rangle_{1j} A_{1j} \\ &= \langle A\rangle_{11} A_{11} + \langle A\rangle_{12} A_{12} \\ &= a\cdot d + b\cdot -c \\ &= ad - bc\end{aligned}$$

De esta manera, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Ejemplo 3.4

Considere las matrices A y B definidas por $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Para estas matrices se cumple que:

$$\begin{aligned} & |A| = 2\cdot 5 - 1\cdot 3 \\ \Rightarrow \quad & |A| = 7\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & |B| = 6\cdot 1 - 3\cdot 4 \\ \Rightarrow \quad & |B| = -6\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} & |A| + |B| = 7 + -6 \\ \Rightarrow \quad & |A| + |B| = 1\end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que:

$$\begin{aligned} & |A+B| = \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ \Rightarrow \quad & |A+B| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \\ \Rightarrow \quad & |A+B| = 8\cdot 6 - 4\cdot 7 \\ \Rightarrow \quad & |A+B| = 20\end{aligned}$$

Observe que, para estas matrices, $|A+B| \neq |A| + |B|$

Ejercicio 3.1

Para cada una de las matrices que se enuncian calcule, respectivamente, el valor de su determinante.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
8. $H = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$
9. $I = \begin{pmatrix} 7 & -13 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
10. $J = \begin{pmatrix} 2-x & -3 \\ 5 & 4-x \end{pmatrix}$
11. $K = \begin{pmatrix} 2\alpha & -3\alpha \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
12. $L = \begin{pmatrix} 2\alpha & -3\alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{pmatrix}$

Ejemplo 3.5

Considere la matriz A, definida por $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y obtenga el valor de $|A|$

Con base en la definición 3.5 se tiene que:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{j=1}^{3} \langle A \rangle_{1j} A_{1j} \\
&= \langle A \rangle_{11} A_{11} + \langle A \rangle_{12} A_{12} + \langle A \rangle_{13} A_{13} \\
&= 3 \cdot A_{11} + -6 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} \\
&= 3 \cdot A_{11} - 6 \cdot A_{12} \\
&= 3 \cdot (-1)^2 M_{11}^A - 6 \cdot (-1)^3 M_{12}^A \\
&= 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 6 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \\
&= 3\,(12+2) + 6\,(0-2) \\
&= 3 \cdot 14 + 6 \cdot -2 \\
&= 42 - 12 \\
&= 30
\end{aligned}
$$

$$\text{Así, } |A| = 30$$

Ejemplo 3.6

Considere la matriz B, definida por $B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -5 & -3 & -2 \\ -7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y obtenga el valor de $|B|$

Con base en la definición 3.5 se tiene que:

$$\begin{aligned}
|B| &= \sum_{j=1}^{3} \langle B \rangle_{1j} B_{1j} \\
&= \langle B \rangle_{11} B_{11} + \langle B \rangle_{12} B_{12} + \langle B \rangle_{13} B_{13} \\
&= -2 \cdot B_{11} + -6 \cdot B_{12} + 0 \cdot B_{13} \\
&= -2 \cdot B_{11} - 6 \cdot B_{12} \\
&= -2 \cdot (-1)^2 M_{11}^B - 6 \cdot (-1)^3 M_{12}^B \\
&= -2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 6 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} \\
&= -2\,(12+2) + 6\,(20-14) \\
&= -2 \cdot 14 + 6 \cdot 6 \\
&= -28 + 36 \\
&= 8
\end{aligned}$$

$$\text{Así, } |B| = 8$$

Ejemplo 3.7

Considere la matriz C, definida por $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \\ -1 & -7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y calcule $|C|$

Con base en la definición 3.5 se tiene que:

$$\begin{aligned}
|C| &= \sum_{j=1}^{4} \langle C \rangle_{1j} C_{1j} \\
&= \langle C \rangle_{11} C_{11} + \langle C \rangle_{12} C_{12} + \langle C \rangle_{13} C_{13} + \langle C \rangle_{14} C_{14} \\
&= -3 \cdot C_{11} + 2 \cdot C_{12} + 0 \cdot C_{13} + 0 \cdot C_{14} \\
&= -3 \cdot C_{11} + 2 \cdot C_{12} \\
&= -3 \cdot (-1)^2 M_{11}^C + 2 \cdot (-1)^3 M_{12}^C \\
&= -3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -5 & -3 & -2 \\ -7 & 1 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.7 - continuación

$$\begin{aligned} &= -3\cdot 8 - 2\cdot 30 && \text{(ver ejemplos 3.5 y 3.6)}\\ &= -24 - 60\\ &= -84\\ \\ \text{Así, } |C| &= -84 \end{aligned}$$

En el ejemplo 3.7 se observa que el cálculo de determinantes con base en la definición 3.5 puede ser, en gran número de casos, un proceso extremadamente tedioso; posteriormente, se estará enunciando un método más eficiente para la evaluación de determinantes.

Ejercicio 3.2

Demuestre que $|I_n| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Pista: utilice inducción matemática sobre n

3.2 Propiedades básicas

En el estudio de determinantes se presentan gran número de propiedades que, en la mayoría de los casos, ayudan en los cálculos de estos valores.
A continuación, se enuncian algunos de los resultados más relevantes para la evaluación de determinantes.
Tal y como se evidenció en el ejemplo 3.4, dadas dos matrices cualesquiera B y C del mismo orden y una matriz A, tal que $A = B + C$, no siempre se cumple que $|A| = |B| + |C|$.
La propiedad que se enuncia en el teorema 3.1, que posee cierta similitud con lo que enunció anteriormente, juega un papel sumamente importante en el estudio de algunas propiedades de los determinantes.

Teorema 3.1

Si $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tales que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,n} \\ b_{r,1}+\alpha c_{r,1} & b_{r,2}+\alpha c_{r,2} & \cdots & b_{r,n}+\alpha c_{r,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,n} \\ b_{r,1} & b_{r,2} & \cdots & b_{r,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,n} \\ c_{r,1} & c_{r,2} & \cdots & c_{r,n} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

con $r \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq r \leq n$, entonces $|A| = |B| + \alpha|C|$

Demostración

La demostración es por inducción matemática sobre n

Para $n = 1$ se tiene que $A = (b_{11} + \alpha c_{11})$, $B = (b_{11})$ y $C = (c_{11})$

De esta manera,

$$\begin{aligned} |A| &= |b_{11} + \alpha c_{11}| && \text{sustitución de } A \\ &= b_{11} + \alpha c_{11} && \text{definición 3.1} \\ &= |b_{11}| + \alpha |c_{11}| && \text{definición 3.1} \\ &= |B| + \alpha |C| && \text{sustitución de } B \text{ y } C \end{aligned}$$

$$\text{Así, } |A| = |B| + \alpha|C|$$

Asumamos que para $n = k$ el resultado es válido; es decir, que dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,k} \\ b_{r,1}+\alpha c_{r,1} & b_{r,2}+\alpha c_{r,2} & \cdots & b_{r,k}+\alpha c_{r,k} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,k} \\ b_{r,1} & b_{r,2} & \cdots & b_{r,k} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Demostración - continuación

y $C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,k} \\ c_{r,1} & c_{r,2} & \cdots & c_{r,k} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$ se cumple que $|A| = |B| + \alpha\,|C|$

Con base en esta suposición (hipótesis de inducción), se debe probar que el resultado es válido para $n = k+1$. Específicamente, se quiere demostrar que para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,k+1} \\ b_{r,1}+\alpha c_{r,1} & b_{r,2}+\alpha c_{r,2} & \cdots & b_{r,k+1}+\alpha c_{r,k+1} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,k+1} \\ b_{r,1} & b_{r,2} & \cdots & b_{r,k+1} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

y $C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,k+1} \\ c_{r,1} & c_{r,2} & \cdots & c_{r,k+1} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$ se cumple que $|A| = |B| + \alpha\,|C|$. Observe que si $r = 1$ las matrices A, B y C difieren solo en las entradas de la primera fila; en este caso, $A_{(1)} = B_{(1)} + \alpha C_{(1)}$, donde $B_{(1)} = (b_{11}\;\; b_{12}\;\; \cdots\;\; b_{1,k+1})$ y $C_{(1)} = (c_{11}\;\; c_{12}\;\; \cdots\;\; c_{1,k+1})$

De esta manera, si $r = 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{j=1}^{k+1} \langle A\rangle_{1j} A_{1j} && \text{definición 3.5} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \langle A\rangle_{1j} \cdot (-1)^{1+j} M^A_{1j} && \text{definición 3.3} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} (b_{1j} + \alpha c_{1j})\,(-1)^{1+j} M^A_{1j} && A_{(1)} = B_{(1)} + \alpha C_{(1)} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \left(b_{1j}\,(-1)^{1+j} M^A_{1j} + \alpha c_{1j}\,(-1)^{1+j} M^A_{1j}\right) && \text{distributividad de “}\cdot\text{” resp. de “}+\text{” en } \mathbb{R} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} b_{1j}\,(-1)^{1+j} M^A_{1j} + \sum_{j=1}^{k+1} \alpha c_{1j}\,(-1)^{1+j} M^A_{1j} && \text{prop. de sumas: } \sum_i (a_i + b_i) = \sum_i a_i + \sum_i b_i
\end{aligned}$$

Demostración - continuación

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k+1} b_{1j}(-1)^{1+j} M_{1j}^{A} + \alpha \sum_{j=1}^{k+1} c_{1j}(-1)^{1+j} M_{1j}^{A} && \text{prop. de sumas: } \sum_i \alpha a_i = \alpha \sum_i a_i \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} b_{1j}(-1)^{1+j} M_{1j}^{B} + \alpha \sum_{j=1}^{k+1} c_{1j}(-1)^{1+j} M_{1j}^{C} && A,B \text{ y } C \text{ difieren solo en la fila 1} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} b_{1j}B_{1j} + \alpha \sum_{j=1}^{k+1} c_{1j}C_{1j} && \text{definición 3.3} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \langle B\rangle_{1j} B_{1j} + \alpha \sum_{j=1}^{k+1} \langle C\rangle_{1j} C_{1j} && \text{sustitución de } b_{1j} \text{ y } c_{1j} \\
&= |B| + \alpha |C| && \text{definición 3.5}
\end{aligned}$$

Así, $|A| = |B| + \alpha |C|$ para $r = 1$.

Ahora, si $r > 1$ las filas de las matrices A, B y C son las mismas a excepción de la fila r, tal y como se enuncian en el encabezado de esta parte de la demostración, donde son consideradas las matrices A, B y C de tamaño $(k+1) \times (k+1)$
Con lo anterior, $\forall j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq j \leq k$, los determinantes M_{1j}^{A}, M_{1j}^{B} y M_{1j}^{C} contemplan matrices de tamaño $k \times k$ que, exceptuando la fila $r-1$, contienen las mismas filas. Específicamente, se tiene que $A_{(r-1)} = B_{(r-1)} + \alpha C_{(r-1)}$
De acuerdo con nuestra hipótesis de inducción, se puede asegurar que

$$M_{1j}^{A} = M_{1j}^{B} + \alpha M_{1j}^{C}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{j=1}^{k+1} \langle A\rangle_{1j} A_{1j} && \text{definición 3.5} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \langle A\rangle_{1j} \cdot (-1)^{1+j} M_{1j}^{A} && \text{definición 3.3} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \langle A\rangle_{1j} (-1)^{1+j} \left(M_{1j}^{B} + \alpha M_{1j}^{C}\right) && \text{resultado 3.1: hipótesis de inducción} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \left(\langle A\rangle_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j}^{B} + \langle A\rangle_{1j} (-1)^{1+j} \alpha M_{1j}^{C}\right) && \text{dist. de ``}\cdot\text{'' resp. de ``}+\text{'' en } \mathbb{R} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \left(\langle A\rangle_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j}^{B} + \alpha \langle A\rangle_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j}^{C}\right) && \text{conmutatividad de ``}\cdot\text{'' en } \mathbb{R} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \left(\langle A\rangle_{1j} B_{1j} + \alpha \langle A\rangle_{1j} C_{1j}\right) && \text{definición 3.3} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \langle A\rangle_{1j} B_{1j} + \sum_{j=1}^{k+1} \alpha \langle A\rangle_{1j} C_{1j} && \text{prop. de sumas: } \sum_i (a_i + b_i) = \sum_i a_i + \sum_i b_i \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \langle A\rangle_{1j} B_{1j} + \alpha \sum_{j=1}^{k+1} \langle A\rangle_{1j} C_{1j} && \text{prop. de sumas: } \sum_i \alpha a_i = \alpha \sum_i a_i \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \langle B\rangle_{1j} B_{1j} + \alpha \sum_{j=1}^{k+1} \langle C\rangle_{1j} C_{1j} && A,B \text{ y } C \text{ poseen la misma fila 1}
\end{aligned}$$

Demostración - continuación

$$= \quad |B| + \alpha |C| \qquad \text{definición 3.5}$$

$$\text{Así, } |A| \quad = \quad |B| + \alpha |C| \text{ para } r > 1.$$

Por lo tanto, queda demostrado que lo que se enuncia en el teorema es válido para matrices cuadradas de cualquier orden.

Corolario 3.1 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ posee alguna fila nula, entonces $|A| = 0$*

Ejercicio 3.3

Demuestre el corolario 3.1 del teorema 3.1.

Teorema 3.2

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\forall i \in \mathbb{N}$, con $1 \leq i \leq n$, se cumple que $|A| = \sum_{j=1}^{n} \langle A \rangle_{ij} A_{ij}$ y, también, se cumple que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \text{ con } 1 \leq j \leq n, |A| = \sum_{i=1}^{n} \langle A \rangle_{ij} A_{ij}$$

El teorema 3.2 es de gran utilidad en la evaluación de determinantes, ya que garantiza simplicidad de cálculos al poderse *fijar* cualquier fila o cualquier columna para calcular el determinante de toda matriz cuadrada.

Corolario 3.2 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tal que A posee dos filas idénticas, entonces $|A| = 0$*

Ejercicio 3.4

Demuestre el corolario 3.2 del teorema 3.2. Pista: utilice inducción matemática.

Ejemplo 3.8

Calcule $|A|$ si se tiene que $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Con base en el teorema 3.2 y *fijando* la segunda columna de A, se tiene que:

Ejemplo 3.8 - continuación

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{i=1}^{4} \langle A\rangle_{i2} A_{i2} \\
&= \langle A\rangle_{12} A_{12} + \langle A\rangle_{22} A_{22} + \langle A\rangle_{32} A_{32} + \langle A\rangle_{42} A_{42} \\
&= 3\cdot A_{12} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{32} + 0\cdot A_{42} \\
&= 3\cdot A_{12} \\
&= 3\cdot (-1)^3 M_{12}^{A} \\
&= 3\cdot -1\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -3\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -3\cdot -2 \qquad \text{(conviene fijar la columna 3 en el cálculo del último determinante)} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3.5

Para cada una de las matrices que se enuncian calcule, respectivamente, el valor de su determinante.

1. $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 15 & -10 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4\alpha \\ 0 & 3 & -2\alpha \\ -1 & 0 & -4\alpha \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 4\alpha \\ 0 & 3\alpha & -2\alpha \\ -\alpha & 0 & -4\alpha \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
8. $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.5 - continuación

9. $I = \begin{pmatrix} 7 & -\alpha & 4 & -2 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

10. $J = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 8 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

11. $K = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

12. $L = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

En evaluación de determinantes, es posible realizar cálculos de manera más eficiente si se utilizan operaciones elementales sobre las filas de la matriz en estudio; en este sentido, interesa saber las consecuencias que surgen en el valor del determinante de una matriz si se le aplica alguna de las tres operaciones elementales sobre las filas de dicha matriz.

Teorema 3.3

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y B es una matriz que se obtiene de A luego de multiplicar alguna fila de A por un número real $\alpha \neq 0$, entonces $|B| = \alpha|A|$

Demostración

Aunque el resultado es inmediato si se considera el teorema 3.1, la demostración que se enuncia está basada en el teorema 3.2.
Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y B la matriz que se obtiene de A luego de multiplicar la fila r de A por α, con $1 \leq r \leq n$; es decir, $\langle B\rangle_{rj} = \alpha\langle A\rangle_{rj}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, con $1 \leq j \leq n$ es nuestra hipótesis. Se puede asegurar que:

$$\begin{aligned}
|B| &= \sum_{j=1}^{n} \langle B\rangle_{rj} B_{rj} && \text{teorema 3.2 (fijando fila } r \text{ de } B\text{)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle B\rangle_{rj} \cdot (-1)^{r+j} M_{rj}^{B} && \text{definición 3.3} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha\langle A\rangle_{rj} \cdot (-1)^{r+j} M_{rj}^{B} && \text{hipótesis} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha\langle A\rangle_{rj} \cdot (-1)^{r+j} M_{rj}^{A} && M_{rj}^{B} = M_{rj}^{A} \text{ (no se contempla la fila } r\text{)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha\langle A\rangle_{rj} A_{rj} && \text{definición 3.3} \\
&= \alpha\sum_{j=1}^{n} \langle A\rangle_{rj} A_{rj} && \text{propiedad } \sum_i \alpha a_i = \alpha\sum_i a_i
\end{aligned}$$

Demostración - continuación

$$= \quad \alpha\,|A| \qquad \text{teorema 3.2 (fijando fila } r \text{ de } A)$$

$$\text{Así, } |B| \quad = \quad \alpha\,|A|$$

El teorema 3.3 evidencia la consecuencia que surge en la evaluación del determinante de alguna matriz en la que se ha aplicado una operación elemental sobre filas del *tipo a*.

Corolario 3.3 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, entonces $|\alpha A| = \alpha^n\,|A|$*

Ejercicio 3.6

Demuestre el corolario 3.3 del teorema 3.3.

Ejercicio 3.7

1. Considere la matriz del ejemplo 3.7 y la matriz B, dada por $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ -15 & 10 & 30 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \\ -1 & -7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y verifique que $|B| = -5 \cdot -84 = 420$.
2. ¿Cuál operación elemental se aplicó sobre las filas de la matriz del ejemplo 3.7 para la obtención de la matriz B?

Si la operación elemental sobre filas de alguna matriz es del *tipo b*, la implicación en el resultado de la evaluación de su determinante se enuncia en el teorema 3.4 que detalla a continuación.

Teorema 3.4

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y B es una matriz que se obtiene de A luego de intercambiar dos filas cualesquiera de A, entonces $|B| = -\,|A|$

Ejercicio 3.8

Demuestre el teorema 3.4.

Pista: utilice el corolario 3.2 del teorema 3.2 y el teorema 3.1.

Ejercicio 3.9

1. Considere la matriz del ejemplo 3.7 y la matriz B, dada por $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ y verifique que $|B| = -(-84) = 84$.
2. ¿Cuál operación elemental se aplicó sobre las filas de la matriz del ejemplo 3.7 para la obtención de la matriz B?

Solo falta enunciar la consecuencia que se presenta en la evaluación de determinantes de matrices si se realiza alguna operación elemental sobre filas del *tipo c*.

Teorema 3.5

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y B es una matriz que se obtiene de A sumando algún múltiplo de alguna de las filas de A a otra de las filas de A, entonces $|B| = |A|$

Corolario 3.4 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es de rango menor que n, entonces $|A| = 0$.*

Ejercicio 3.10

Demuestre el teorema 3.5.

Pista: puede basarse en la demostración del teorema 3.3.

Ejercicio 3.11

1. Considere la matriz del ejemplo 3.7 y la matriz B, dada por $B = \begin{pmatrix} -7 & -26 & 4 & -16 \\ 3 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -2 \\ -1 & -7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y verifique que $|B| = 84$.
2. ¿Cuál operación elemental se aplicó sobre las filas de la matriz del ejemplo 3.7 para la obtención de la matriz B?

Las reglas que se enuncian a continuación resumen el efecto que provoca la aplicación de alguna operación elemental sobre el determinante de una matriz A de orden n (lo expuesto en los teoremas 3.3, 3.4 y 3.5).

1. Si B es la matriz obtenida al multiplicar alguna fila de A por algún número real no nulo α, entonces $|B| = \alpha |A|$

2. Si B es la matriz obtenida al intercambiar dos filas cualesquiera de A, entonces $|B| = -|A|$

3. Si B es la matriz obtenida al sumar algún múltiplo de alguna fila de A a otra fila de A, entonces $|B| = |A|$

Considerar el efecto que provoca cada una de las operaciones elementales sobre filas en la evaluación de determinantes, puede simplificar el procedimiento que se realiza en dichas evaluaciones.

Ejemplo 3.9

Considere la matriz A del ejemplo 3.5, definida por $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y determine, utilizando propiedades de determinantes, el valor de $|A|$

Solución

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ se tiene que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}F_1+F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} = A'$$

$$\overset{\frac{-1}{3}F_2+F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} = A''$$

Dado que A' fue obtenida aplicando a la matriz A una operación elemental del *tipo c*, según el teorema 3.5 se tiene que $|A| = |A'|$
Asimismo, con base en dicho teorema, se cumple que $|A'| = |A''|$, por lo que $|A| = |A''|$
Por otra parte, aplicando el teorema 3.2 y fijando la tercera fila de A'', se tiene que:

$$\begin{aligned} |A''| &= \sum_{j=1}^{3} \langle A'' \rangle_{3j} A''_{3j} \\ &= \langle A'' \rangle_{31} A''_{31} + \langle A'' \rangle_{32} A''_{32} + \langle A'' \rangle_{33} A''_{33} \\ &= 0 \cdot A''_{31} + 0 \cdot A''_{32} + \frac{-10}{3} \cdot A''_{33} \\ &= \frac{-10}{3} \cdot (-1)^6 M_{33}^{A''} \\ &= \frac{-10}{3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Solución - continuación

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-10}{3}(-3\cdot 3 - 0\cdot -6)\\
&= \frac{-10}{3}\cdot 3\cdot -3\\
&= 30
\end{aligned}
$$

El desarrollo anterior, muestra un resultado importante y de mucha utilidad en la evaluación de determinantes “el determinante de toda matriz triangular superior está dado por el producto de los elementos de su diagonal", (ver teorema 3.7).

Teorema 3.6

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se cumple que $\left|A^t\right| = |A|$

Demostración

Si A es una matriz de orden n, A^t también es de orden n; así, para cualquier valor entero de j, con $1 \leq j \leq n$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|A^t\right| &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle A^t\right\rangle_{ij} A^t_{ij} && \text{teorema 3.2 (fijando la columna } j\text{)}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle A\rangle_{ji} A_{ji} && \text{definición 2.3}\\
&= |A| && \text{teorema 3.2 (fijando la fila } j\text{)}
\end{aligned}
$$

$$\text{Así, } \left|A^t\right| = |A|$$

Teorema 3.7

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A es triangular superior, entonces $|A| = \langle A\rangle_{11}\langle A\rangle_{22}\langle A\rangle_{33}\cdots\langle A\rangle_{nn}$

Corolario 3.5 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A es triangular inferior, entonces $|A| = \langle A\rangle_{11}\langle A\rangle_{22}\langle A\rangle_{33}\cdots\langle A\rangle_{nn}$*

Ejercicio 3.12

Demuestre el teorema 3.7.

Pista: utilice inducción matemática sobre n.

Ejercicio 3.13

Demuestre el corolario 3.5 del teorema 3.7.

Basados en operaciones elementales sobre filas del *tipo b* y del *tipo c*, toda matriz cuadrada se puede transformar en una matriz triangular superior o triangular inferior; de esta manera, fácilmente se puede evaluar el determinante para cualquier matriz cuadrada.

Ejemplo 3.10

Si la matriz A está definida por $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, se tiene que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A'$$

Por otra parte:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{-4F_1+F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 11 \end{pmatrix} \overset{-4F_2+F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A''$$

Con base en el teorema 3.5 se tiene que $|A''| = |A'|$; como A'' es una matriz triangular superior, su determinante está dado por el producto de los elementos de su diagonal (teorema 3.7); así, $|A''| = |A'| = 2 \cdot -1 \cdot -5 = 10$.
Por otra parte, de acuerdo con el teorema 3.4, se tiene que: $|A'| = -|A|$
Así, $|A| = -|A'| = -(10) = -10$.

Ejercicio 3.14

Con base en la técnica implementada en el ejemplo 3.10, calcule el valor del determinante de la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Respuesta: $|A| = -906$

Ejercicio 3.15

Para cada uno de los casos, encuentre el valor de α que satisfaga la ecuación que se enuncia:

1. $\begin{vmatrix} 4b_1 & 4b_2 & 4b_3 \\ 4a_1 & 4a_2 & 4a_3 \\ 4c_1 & 4c_2 & 4c_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Ejercicio 3.15 - continuación

2. $\begin{vmatrix} -5a_1 & -5a_2 & -5a_3 \\ 6b_1+2c_1 & 6b_2+2c_2 & 6b_3+2c_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

El teorema 3.8, cuya demostración se omite por involucrar contenidos que no forman parte de los objetivos del curso, enuncia un resultado de gran importancia en evaluación de determinantes.

Teorema 3.8

Para cualesquiera matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se cumple que $|AB| = |A| \cdot |B|$

3.3 Determinantes e inversas

El determinante de alguna matriz está directamente relacionado con la inversa de dicha matriz; se enunciarán algunos resultados que evidencian este hecho, como lo es una aplicación de los determinantes para la obtención de la inversa de alguna matriz no singular.

Teorema 3.9

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es no singular si, y solo si, $|A| \neq 0$.

Demostración

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz singular, de acuerdo con el teorema 2.13 se cumple que $r(A) < n$; de esta manera, basados en el corolario 3.4 del teorema 3.5, $|A| = 0$.
Por otra parte, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz no singular, existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I_n$; así, con base en el ejercicio 3.2 y el teorema 3.8, se cumple que: $|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I_n| = 1$
Si se tuviera que $|A| = 0$, la igualdad enunciada sería siempre falsa.
Por lo tanto, A es no singular si, y solo si, $|A| \neq 0$.

Corolario 3.6 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es no singular, entonces* $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

Ejercicio 3.16

Demuestre el corolario 3.6 del teorema 3.9.

Teorema 3.10

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall i \neq j$, con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$, se cumple que $\sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ik} A_{jk} = 0$.

Demostración

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y B la matriz que se obtiene de A al cambiar la fila j de A por su i-ésima fila; es decir, la matriz B posee dos filas idénticas (las filas i y j), difiriendo de la matriz A únicamente en la j-ésima fila (específicamente, la j-ésima fila de B es igual a la i-ésima fila de A).
Por una parte, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|B| &= \sum_{k=1}^{n} \langle B \rangle_{jk} B_{jk} && \text{teorema 3.2 (fijando fila } j\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ik} B_{jk} && \text{hipótesis } \left(B_{(j)} = A_{(i)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ik} \cdot (-1)^{j+k} M_{jk}^{B} && \text{definición 3.3} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ik} \cdot (-1)^{j+k} M_{jk}^{A} && A \text{ y } B \text{ difieren solo en la fila } j \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ik} A_{jk} && \text{definición 3.3} \\
\text{Así, } |B| &= \sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ik} A_{jk}
\end{aligned}$$

Por otra parte, dado que B posee dos filas iguales, de acuerdo con el corolario 3.2 del teorema 3.2 se cumple que $|B| = 0$.
Por lo tanto, $\forall i \neq j$, con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$, se cumple que $\sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ik} A_{jk} = 0$.

Definición 3.6 (Matriz adjunta de alguna matriz)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matriz adjunta de A, denotada como $Adj(A)$, es la matriz dada por $Adj(A) = \overline{A}^{\,t}$

Teorema 3.11

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces $A \cdot Adj(A) = |A|\, I_n$

Demostración

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Para demostrar que $A \cdot Adj(A) = |A|\, I_n$, basta probar que, entrada por entrada,

$$\forall i, j, \text{ con } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, \langle A \cdot Adj(A) \rangle_{ij} = \langle |A|\, I_n \rangle_{ij}$$

Demostración - continuación

Veamos:
$\forall i, j$, con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle A \cdot Adj(A) \rangle_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ik} \langle Adj(A) \rangle_{kj} && \text{definición 2.16} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ik} \left\langle \overline{A}^{t} \right\rangle_{kj} && \text{definición 3.6} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ik} \left\langle \overline{A} \right\rangle_{jk} && \text{definición 2.3} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ik} A_{jk} && \text{definición 3.4} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ |A| & \text{si } i = j \end{cases} && \text{teoremas 3.10 y 3.2 (fijando fila } i\text{)} \\
&= |A| \cdot \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} && \text{ley absorbente del cero y elemento neutro multiplicativo en } \mathbb{R} \\
&= |A| \langle I_n \rangle_{ij} && \text{definición 2.7} \\
&= \langle |A|\, I_n \rangle_{ij} && \text{definición 2.13}
\end{aligned}$$

$$\text{Así, } \langle A \cdot Adj(A) \rangle_{ij} = \langle |A|\, I_n \rangle_{ij}, \ \forall i, j, \text{ con } 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq n$$

Por lo tanto, $A \cdot Adj(A) = |A|\, I_n$

Corolario 3.7 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz no singular, entonces* $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$

Ejercicio 3.17

Demuestre el corolario 3.7 del teorema 3.11.

Ejercicio 3.18

Utilizando el corolario 3.7 del teorema 3.11 determine, para cada una de las matrices que se enuncian, su matriz inversa (en caso de existir).

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.18 - continuación

5. $E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

6. $F = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

7. $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

8. $H = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3.4 Ejercicios

3.19 *Calcule cada uno de los determinantes*

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

3.20 *Si se sabe que* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 12$, *calcule:*

1. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

3.21 *Determine los valores de x para los cuales se cumplen las igualdades siguientes:*

1. $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -2 & x+2 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} 3 & x & 2x \\ 0 & x & 99 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 60$

3.22 *En cada uno de los casos siguientes calcule los valores de x para los cuales la matriz correspondiente no posee inversa:*

1. $\begin{pmatrix} x & -3 \\ 4 & 1-x \end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix} -x & x-1 & x+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-x & x+3 & x+7 \end{pmatrix}$

3.23 *Una matriz cuadrada A, se dice que es ortogonal si es no singular y, además, $A^{-1} = A^t$*
Demuestre que si A es una matriz ortogonal entonces $|A| = 1$ o $|A| = -1$

3.24 *Si A es una matriz idempotente, ¿cuáles son los valores posibles para $|A|$?*

3.25 *Si A es una matriz cuadrada de orden n antisimétrica, demuestre que $|A| = (-1)^n \cdot |A|$*

3.26 *Demuestre que si A es una matriz cuadrada de orden n, n impar y A es antisimétrica entonces $|A| = 0$*

3.27 *En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se define una relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:*

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \textit{tal que } A = P^{-1}BP$$

Demuestre que si $A\mathcal{R}B$ entonces $|A| = |B|$

4 Sistemas lineales

Hallar el valor de incógnitas con la finalidad que se satisfagan, simultáneamente, determinado número de condiciones será una de las tareas que se presentan con mayor frecuencia en contenidos propios de álgebra lineal; al abordar este tipo de problemas, resulta pertinente el uso de matrices en procesos de solución.

4.1 Definiciones básicas

Se definen conceptos relacionados con sistemas lineales que permitan el desarrollo de métodos matriciales para hallar su conjunto solución.

Definición 4.1 (Sistemas lineales)

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es todo conjunto de m ecuaciones, que restringen valores que pueden asumir las n variables y para el que se desea determinar los valores de dichas incógnitas para los que satisfacen, simultáneamente, todas las ecuaciones; un sistema de ecuaciones es de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son las incógnitas y $b_i, a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Observe que el elemento a_{ij} representa el coeficiente de la incógnita j de la i-ésima ecuación.

Ejemplo 4.1

Un sistema de dos ecuaciones con x_1, x_2 y x_3 como incógnitas es el siguiente: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

Definición 4.2 (Matriz asociada de algún sistema de ecuaciones lineales)

La matriz asociada de todo sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

es la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2

La matriz asociada del sistema de ecuaciones del ejemplo 4.1 está dada por $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Definición 4.3 (Representación matricial de sistemas de ecuaciones lineales)

Si A es la matriz asociada del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

su representación matricial se define como $Ax = b$, donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.3

Una representación matricial del sistema ecuaciones del ejemplo 4.1 está dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observe que estas representaciones son equivalentes, ya que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} (2)(x_1) + (-3)(x_2) + (1)(x_3) \\ \\ (1)(x_1) + (0)(x_2) + (-1)(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Definición 4.4 (Sistema de ecuaciones lineales homogéneo)

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo si es de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Definición 4.5 (Matriz aumentada de algún sistema de ecuaciones lineales)

Si $Ax = b$ es representación matricial de algún sistema de ecuaciones lineales, la matriz aumentada correspondiente con dicho sistema se define como la matriz $(A|b)$

Ejemplo 4.4

Considerando la representación matricial del ejemplo 4.3 para el sistema de ecuaciones lineales del ejemplo 4.1, la matriz aumentada de dicho sistema está dada por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Definición 4.6 (Solución de sistemas de ecuaciones lineales)

Si $Ax = b$ es la representación de algún sistema de m ecuaciones con n incógnitas, una solución de dicho sistema es toda matriz de la forma $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}^t$, donde $k_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$ con $1 \leq i \leq n$, si al sustituir x por $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}^t$ se satisface la igualdad $Ax = b$.

Al conjunto conformado por todas las soluciones del sistema[a] se le llama conjunto solución[b] del sistema y, usualmente, es denotado con la letra S.

[a] Si se considera la representación de la definición 4.1, las soluciones del sistema también se pueden representar como n-tuplas de la forma $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$

[b] Resolver un sistema de ecuaciones será *hallar su conjunto solución*.

Nota: Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es *consistente* si su conjunto solución S no es vacío; en caso contrario, se dice que el sistema de ecuaciones es *inconsistente*.

Ejemplo 4.5

Una solución del sistema de ecuaciones del ejemplo 4.1 está dada por $\begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}^t$ ya que

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (2)(2) + (-3)\left(\frac{4}{3}\right) + (1)(2) \\ (1)(2) + (0)\left(\frac{4}{3}\right) + (-1)(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 - 4 + 2 \\ 2 + 0 - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6

1. Considere el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=3 \end{cases}$

   Despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo esta variable en la primera ecuación se obtiene que $y=-2$. Con base en este resultado se obtiene que $x=1$; de esta manera, para el sistema $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ se tiene que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es una solución (la única).

2. Considere el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ y-2z=3 \end{cases}$

   Una representación matricial para este sistema de ecuaciones lineales está dada por $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Este sistema de ecuaciones lineales posee muchas soluciones; tres de estas están dadas por $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Considere el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} x+y=-2 \\ x+y=3 \end{cases}$

   Este sistema de ecuaciones es inconsistente, ya que no hay alguna pareja de números reales que sumados den como resultado dos números distintos.

Los tres ejemplos anteriores dan evidencia de que todo sistema de ecuaciones lineales puede tener una única solución, tener muchas soluciones o, simplemente, no poseer solución alguna (ser inconsistente).
Para el caso de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos, se pueden presentar únicamente dos posibilidades: que posean solución única (la solución trivial) o que posean infinito número de soluciones.

Ejercicio 4.1

Para cada uno de los sistemas de ecuaciones que se enuncian, determine su representación matricial $Ax=b$, considerando la matriz x que se indica, y verifique que la matriz u dada es una solución de la ecuación $Ax=b$

1. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+x_3=11 \end{cases}$ $\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad u=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.1 - continuación

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix}$

Definición 4.7 (Sistemas de ecuaciones equivalentes)

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si poseen el mismo conjunto solución.

Teorema 4.1

Sean $Ax = b$ la representación matricial de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y C una matriz invertible, tal que $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. El sistema $(CA)x = Cb$ es equivalente con el sistema $Ax = b$.

Demostración

Para demostrar que los sistemas $(CA)x = Cb$ y $Ax = b$ son equivalentes, se debe probar que ambos sistemas de ecuaciones lineales poseen el mismo conjunto solución.
Si S es el conjunto solución del sistema de ecuaciones $Ax = b$ y S' es el conjunto solución del sistema de ecuaciones $(CA)x = Cb$, se demostrará que $S = S'$; específicamente, se demostrará que $S \subseteq S'$ y que $S' \subseteq S$
Por una parte, si $u \in S$ es claro que $Au = b$; luego,

$$\begin{aligned} Au = b \quad &\Rightarrow \quad C(Au) = Cb \\ &\Rightarrow \quad (CA)u = Cb \end{aligned}$$

Así, $u \in S'$; de esta manera, $S \subseteq S'$.
Por otra parte, si $u \in S'$ es claro que $(CA)u = Cb$; luego,

$$\begin{aligned} (CA)u = Cb \quad &\Rightarrow \quad C^{-1}((CA)u) = C^{-1}(Cb) \\ &\Rightarrow \quad C^{-1}(C(Au)) = C^{-1}(Cb) \\ &\Rightarrow \quad \left(C^{-1}C\right)(Au) = \left(C^{-1}C\right)b \\ &\Rightarrow \quad I_m(Au) = I_m b \\ &\Rightarrow \quad Au = b \end{aligned}$$

Así, $u \in S$; de esta manera, $S' \subseteq S$.
Como $S \subseteq S'$ y $S' \subseteq S$, se concluye que $S = S'$; es decir, los sistemas de ecuaciones lineales $(CA)x = Cb$ y $Ax = b$ son equivalentes (poseen el mismo conjunto solución).

Corolario 4.1 *Sea $Ax = b$ la representación matricial de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si $\left(A'|b'\right)$ se obtiene de $(A|b)$ después de aplicarle un finito número de operaciones elementales sobre sus filas, entonces el sistema representado por $A'x = b'$ es equivalente con el sistema $Ax = b$.*

Ejercicio 4.2

Demuestre el corolario 4.1 del teorema 4.1.

4.2 Método de Gauss–Jordan

A continuación se describe una técnica basada en el corolario 4.1 que permite resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales; dicha técnica se podría enunciar, en términos generales, de la manera siguiente:

1. Representar el sistema de ecuaciones en la forma matricial $Ax = b$.

2. A partir de la matriz aumentada $(A|b)$, obtener la matriz $\left(A'|b'\right)$ en la que A' es la matriz escalonada reducida por filas equivalente con A.

3. Resolver el sistema de ecuaciones representado por $A'x = b'$.

4. Enunciar el conjunto solución del sistema de ecuaciones original (dado que los sistemas representados por $Ax = b$ y $A'x = b'$ son equivalentes, este conjunto es el mismo conjunto solución encontrado en el paso anterior).

Ejemplo 4.7

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $\begin{cases} -3x + y - 5z - w = 4 \\ x + 2y + 11z = 2 \\ -2x + 2y + 2z = -4 \end{cases}$

Una representación matricial para dicho sistema de ecuaciones lineales está dada por

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 11 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.7 - continuación

Considerando la matriz aumentada del sistema $\left(\begin{array}{rrrr|r} -3 & 1 & -5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right)$ (basada en la representación matricial anterior) se tiene que:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -3 & 1 & -5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -5 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{3F_1+F_2 \\ 2F_1+F_3}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 28 & -1 & 10 \\ 0 & 6 & 24 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{-F_3+F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 6 & 24 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{-2F_2+F_1 \\ -6F_2+F_3}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 2 & -18 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -60 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\frac{1}{6}F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 2 & -18 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{-2F_3+F_1 \\ F_3+F_2}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right)$$

De esta manera, $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 11 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ tiene la misma solución que el sistema de ecuaciones representado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} x+3z=2 \\ y+4z=0 \\ w=-10 \end{cases}$ se tiene que $\begin{cases} x=2-3z \\ y=-4z \\ w=-10 \end{cases}$ con $z \in \mathbb{R}$.

O bien, tomando $z=t$ se podría escribir $\begin{cases} x=2-3t \\ y=-4t \\ w=-10 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

Así, el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -3x+y-5z-w=4 \\ x+2y+11z=2 \\ -2x+2y+2z=-4 \end{cases}$ está dado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2-3t \\ -4t \\ t \\ -10 \end{pmatrix} \Big/ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejemplo 4.7 - continuación

Observe que dicho sistema de ecuaciones lineales posee infinito número de soluciones.
El conjunto S recibe el nombre *solución general*; si se asignan valores arbitrarios al parámetro t se obtiene lo que se denominan *soluciones particulares*; por ejemplo, si $t = 0$, entonces $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema de ecuaciones en cuestión; si $t = 1$, entonces $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$ es otra solución particular de dicho sistema de ecuaciones; si $t = -8$, entonces $\begin{pmatrix} 26 \\ 32 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}$ es, también, solución particular del sistema de ecuaciones lineales en estudio.

El procedimiento seguido para la obtención de la solución del sistema de ecuaciones del ejemplo 4.7 es conocido como *método de Gauss–Jordan*, método que se considera en el ejemplo 4.8 para la resolución del sistema de ecuaciones que se enuncia.

Ejemplo 4.8

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $\begin{cases} 5x - 15y + 4z = 7 \\ 2x - 6y + 4z = 12 \\ 3x - 9y + 4z = 11 \end{cases}$

Solución

Una representación matricial para dicho sistema de ecuaciones lineales está dada por $\begin{pmatrix} 5 & -15 & 4 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}$

Considerando la matriz aumentada del sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -15 & 4 & 7 \\ 2 & -6 & 4 & 12 \\ 3 & -9 & 4 & 11 \end{array}\right)$ (basada en la representación matricial anterior) se tiene que:

Ejemplo 4.8 - continuación

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -15 & 4 & 7 \\ 2 & -6 & 4 & 12 \\ 3 & -9 & 4 & 11 \end{array}\right) \underset{\sim}{-2F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -17 \\ 2 & -6 & 4 & 12 \\ 3 & -9 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{-2F_1+F_2 \\ -3F_1+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 12 & 46 \\ 0 & 0 & 16 & 62 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\frac{1}{12}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{23}{6} \\ 0 & 0 & 16 & 62 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{4F_2+F_1 \\ -16F_2+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -\dfrac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{23}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{2}{3} \end{array}\right)$$

De esta manera, $\begin{pmatrix} 5 & -15 & 4 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}$ tiene la misma solución que el sistema de ecuaciones representado por $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{23}{6} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$

Dado que el sistema $\begin{cases} x - 3y = -\dfrac{5}{3} \\ z = \dfrac{23}{6} \\ 0 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ es inconsistente, ya que $0 = \dfrac{2}{3}$ es una igualdad que nunca se cumplirá (siempre falsa), se tiene que el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 5x - 15y + 4z = 7 \\ 2x - 6y + 4z = 12 \\ 3x - 9y + 4z = 11 \end{cases}$ está dado por $S = \varnothing$.

Ejercicio 4.3

Utilizando el método de Gauss–Jordan, resuelva los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

1. $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+8z=4 \\ 3x+2y+17z=1 \end{cases}$ Pista: dependencia de un parámetro.

2. $\begin{cases} 4x+y-z+w=3 \\ x+y+w=5 \\ 3x-z=-2 \end{cases}$ Pista: dependencia de dos parámetro.

3. $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ x+2y-z=3 \\ 3x+y+2z=-1 \end{cases}$ Pista: solución única.

4. $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+y-2z=4 \\ x-5z=15 \end{cases}$ Pista: sistema inconsistente.

5. $\begin{cases} 4x+y-z+w=3 \\ x+y+w=5 \\ -2x+z-w=4 \end{cases}$ Pista: dependencia de un parámetro.

Ejercicio 4.4

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $\begin{cases} 2x+3y+z+2w=3 \\ 4x+6y+3z+4w=5 \\ 6x+9y+5z+6w=7 \\ 8x+12y+7z+\alpha w=9 \end{cases}$

Con base en el método de Gauss–Jordan, determine el(los) valor(es) para el parámetro α, en caso de existir, de manera que dicho sistema de ecuaciones lineales:

1. Posea solución única.
2. Sea inconsistente.
3. Posea infinito número de soluciones que dependan de un parámetro.
4. Posea infinito número de soluciones que dependan de dos parámetros.

Pista: con $\alpha \neq 8$ dependencia de un parámetro; con $\alpha = 8$ dependencia de dos parámetros.

4.3 Regla de Cramer

En la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con igual número de ecuaciones y de incógnitas, surge otra aplicación del determinante de una matriz.
Si $Ax = b$ es la representación matricial de algún sistema de ecuaciones, tal que la matriz A es de orden n, el teorema 3.9 permite demostrar que dicho sistema posee solución única si, y solo si, $|A| \neq 0$.
Lo anterior se puede asegurar ya que, por una parte, si $|A| \neq 0$, entonces A es no singular; de esta manera:

$$\begin{aligned}
& Ax = b \\
\Rightarrow\ & A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \\
\Rightarrow\ & \left(A^{-1}A\right)x = A^{-1}b \\
\Rightarrow\ & I_n x = A^{-1}b \\
\Rightarrow\ & x = A^{-1}b
\end{aligned}$$

Así, la solución única del sistema $Ax = b$ está dada por $x = A^{-1}b$ (para el caso en que A es no singular). Se omite la demostración de la otra dirección del enunciado.

Teorema 4.2 (Regla de Cramer)

Sea $Ax = b$ la representación matricial de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, donde $x = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_n)^t$. Si $|A| \neq 0$, entonces la solución única del sistema $Ax = b$ está dada por $x_i = \dfrac{\left|M_i^A\right|}{|A|}$, $\forall i$ con $1 \leq i \leq n$, donde M_i^A es la matriz de orden n que se obtiene de A luego de cambiar la i-ésima columna de A por b.

Demostración

Como $|A| \neq 0$, el sistema $Ax = b$ posee solución única dada por $x = A^{-1}b$.
Luego, $\forall i$ con $1 \leq i \leq n$, se tiene que $\langle x \rangle_{i1} = \left\langle A^{-1}b \right\rangle_{i1}$
De esta manera:

$$\begin{aligned}
x_i &= \left\langle A^{-1}b \right\rangle_{i1} && \text{sustitución del elemento } i\text{-ésimo de la matriz } x \\
&= \left\langle \left(\frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) \right) b \right\rangle_{i1} && \text{corolario 3.7 del teorema 3.11} \\
&= \left\langle \frac{1}{|A|} \left(Adj(A) \cdot b \right) \right\rangle_{i1} && \text{enunciado (g) del ejercicio 2.11} \\
&= \frac{1}{|A|} \cdot \langle Adj(A) \cdot b \rangle_{i1} && \text{definición 2.13} \\
&= \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} \langle Adj(A) \rangle_{ik} \langle b \rangle_{k1} && \text{definición 2.16} \\
&= \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} \left\langle \overline{A}^t \right\rangle_{ik} \langle b \rangle_{k1} && \text{definición 3.6}
\end{aligned}$$

Demostración - continuación

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}\left\langle \overline{A}\right\rangle_{ki}\langle b\rangle_{k1} && \text{definición 2.3}\\
&= \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}A_{ki}\langle b\rangle_{k1} && \text{definición 3.4}\\
&= \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}\langle b\rangle_{k1}A_{ki} && \text{conmutatividad de la multiplicación en } \mathbb{R}\\
&= \frac{1}{|A|}\cdot\left|M_i^A\right| && \text{definición 3.2 (fijando columna } i\text{)}\\
&= \frac{\left|M_i^A\right|}{|A|} && \text{realizando la multiplicación}
\end{aligned}
$$

$$\text{Así, } x_i = \frac{\left|M_i^A\right|}{|A|}, \forall i \text{ con } 1 \leq i \leq n, \text{ es la solución única del sistema } Ax = b.$$

Ejemplo 4.9

Con base en la regla de Cramer, determine la solución única del sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 2x - 3y - 8z = 4 \\ -3x + z = 3 \end{cases}$$

Una representación matricial del sistema de ecuaciones anterior está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -8 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = -74$, dicho sistema de ecuaciones lineales posee solución única.

Los valores respectivos de las incógnitas están dados por: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{74}{-74} = -1,$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -8 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{148}{-74} = -2$ y $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{0}{-74} = 0.$

De esta manera, el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales en estudio está dado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 4.5

Considere la representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales dada por:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2 & -2 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Con base en la regla de Cramer, determine todos los valores de α, de manera que el sistema:

- Posea solución única.
- Sea inconsistente.
- Tenga infinito número de soluciones.

Ejercicio 4.6

Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 & 1 & 4 \\ -2 & \lambda & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada de un sistema de ecuaciones homogéneo, determine todos los valores de λ, de manera que el sistema:

- Posea solución única.
- Sea inconsistente.
- Tenga infinito número de soluciones.

4.4 Ejercicios

4.7 *Resuelva, usando el método de Gauss–Jordan, los siguientes sistemas de ecuaciones:*

1. $\begin{cases} -x - y + 2z + w = 3 \\ -3x - 3y + 8z + 4w = 14 \\ -4x - 4y + 2z + w + v = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 5y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x + 4y + z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x+2y-3z-w=-1 \\ x-y+2z+3w=10 \\ z+7w=1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-2y+4z-2w=1 \\ -2x+5y-3z+w=-5 \\ 9x+5y+11z-7w=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+4w=5 \\ x-z+2w=3 \\ -2x-y+2z-5w=-8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-3y+9z-w=17 \\ x+z-2w=2 \\ y-2z+w=-2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-2y-3z+8w=0 \\ -x+5y+9z-17w=6 \\ x-z+2w=5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ 3x+6y=15 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-y+3z=0 \\ 2x+5y+6z=0 \end{cases}$

4.8 *Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde m es un valor constante*

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2 \\ -x_1+mx_2-x_3=-4 \\ 2x_1+4x_2+(m+3)x_3=3 \end{cases}$$

Utilice determinantes para establecer el valor o los valores de m, para los cuales el sistema tiene solución única.

4.9 *Resuelva cada uno de los siguientes sistemas usando la regla de Cramer.*

1. $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ 3x+2y=-1 \\ 4x+y+2z=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 3x+2y-2z=1 \\ x-3y+z=-2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ 3x+2y-2z=5 \\ 5x-3y-z=16 \end{cases}$

4.10 *En cada uno de los casos siguientes, determine el valor de la constante k de manera que el sistema:*

- *Tenga solución única.*
- *Tenga infinito número de soluciones.*
- *No tenga soluciones.*

1. $\begin{cases} x+y+kz=2 \\ 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+kz=0 \\ x+ky+z=1 \\ kx+y+z=2 \end{cases}$

5 Ejemplos (ejercicios resueltos)

En esta sección, se resuelven varios ejercicios relacionados con los temas que se han desarrollado.

Ejemplo 5.1

Sea $k \neq 0$ y sean A, B, C y D matrices definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

De las operaciones que se enuncian, realice aquella que esté bien definida. Justifique por qué las otras tres no se pueden realizar.

1. $(AC)^t + B^{-1}$
2. $(CB)^t - D^{-1}$
3. $(BA)^{-1} + C^t$
4. $(CA)^{-1} - D^t$

Solución

La operación del enunciado (a) no se puede realizar; la matriz $(AC)^t$ es de tamaño 3×3, la matriz B también es de tamaño 3×3 pero no es invertible porque posee dos filas idénticas (su determinante es cero y, por lo tanto, es singular).
La operación del enunciado (b) no se puede realizar; la matriz $(CB)^t$ es de tamaño 3×2 y a esta matriz no se le puede restar la matriz D^{-1} (que existe porque $|D| = -3k \neq 0$), ya que dicha matriz es de tamaño 2×2 (diferente del tamaño de la primera matriz).
La operación del enunciado (c) no se puede realizar; la matriz BA no es invertible, ya que no es una matriz cuadrada (es de tamaño 3×2).
La operación del enunciado (d) sería la única que se puede realizar; observe que la matriz $(CA)^{-1}$, en caso de existir, es de tamaño 2×2 y a esta matriz se le puede restar la matriz D^t porque también es de tamaño 2×2. A continuación se resuelve la operación en cuestión.

Solución - continuación

Primero, se determina la matriz CA
Veamos:

$$
\begin{aligned}
CA &= \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k+0+0 & 0+2+0 \\ -1+0+9 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{Así, } CA &= \begin{pmatrix} k & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Como $|CA| = -16 \neq 0$, entonces CA es no singular.
Hay que determinar la matriz $(CA)^{-1}$
Para lo anterior, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left(CA \middle| I_2\right) &= \left(\begin{array}{cc|cc} k & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{8}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} k & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{array}\right) \\
&\overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ k & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-kF_1+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{k}{8} \end{array}\right) \\
&\overset{\frac{1}{2}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{k}{16} \end{array}\right) = \left(I_2 \middle| (CA)^{-1}\right) \\
\text{Así, } (CA)^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{k}{16} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Solución - continuación

Por último, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(CA)^{-1} - D^t &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{k}{16} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{k}{16} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0+k & \frac{1}{8}-0 \\ \frac{1}{2}-1 & -\frac{k}{16}-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{-k-48}{16} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(CA)^{-1} - D^t = \begin{pmatrix} k & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{-k-48}{16} \end{pmatrix}$

Ejemplo 5.2

Determine todas las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

Si A y B son matrices cualesquiera, se dice que A conmuta con B si, y solo si, $AB = BA$

Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y B la matriz que conmuta con A. Si $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ es la matriz que conmuta con A (note que B debe ser de orden tres), entonces:

$$\begin{aligned}
AB = BA \quad &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1+x_4 & 3x_2+x_5 & 3x_3+x_6 \\ 3x_4+x_7 & 3x_5+x_8 & 3x_6+x_9 \\ 3x_7 & 3x_8 & 3x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 & x_1+3x_2 & x_2+3x_3 \\ 3x_4 & x_4+3x_5 & x_5+3x_6 \\ 3x_7 & x_7+3x_8 & x_8+3x_9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Solución - continuación

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1+x_4=3x_1 \\ 3x_2+x_5=x_1+3x_2 \\ 3x_3+x_6=x_2+3x_3 \\ 3x_4+x_7=3x_4 \\ 3x_5+x_8=x_4+3x_5 \\ 3x_6+x_9=x_5+3x_6 \\ 3x_7=3x_7 \\ 3x_8=x_7+3x_8 \\ 3x_9=x_8+3x_9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4=0 \\ x_5=x_1 \\ x_6=x_2 \\ x_7=0 \\ x_8=x_4 \\ x_9=x_5 \\ 0=0 \\ 0=x_7 \\ 0=x_8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4=0 \\ x_5=x_1 \\ x_6=x_2 \\ x_7=0 \\ x_8=0 \\ x_9=x_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=a \\ x_2=b \\ x_3=c \\ x_4=0 \\ x_5=a \\ x_6=b \\ x_7=0 \\ x_8=0 \\ x_9=a \end{cases} \Leftrightarrow B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

De esta manera, las matrices que conmutan con la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ son todas las matrices con entradas reales de la forma $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Ejemplo 5.3

Si A es la matriz dada por $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, con $\alpha \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, demuestre utilizando inducción matemática que $A^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

Solución

Utilizando inducción matemática sobre n (la potencia de la matriz A), se tiene lo siguiente:

1. Para $n=1$ el resultado se cumple; esto porque del primer miembro de la igualdad se tiene que $A^1=A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ y del segundo miembro de la igualdad se tiene que

Solución - continuación

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 & 1\cdot\alpha^{1-1} \\ 0 & \alpha^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

2. Asumiendo que para algún entero $n \geq 2$ se cumple que $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ se debe probar que también es válido el resultado $A^{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & (n+1)\alpha^n \\ 0 & \alpha^{n+1} \end{pmatrix}$

   Veamos:

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^nA^1 = A^nA = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha^n\cdot\alpha + n\alpha^{n-1}\cdot 0 & \alpha^n\cdot 1 + n\alpha^{n-1}\cdot\alpha \\ 0\cdot\alpha+\alpha^n\cdot 0 & 0\cdot 1+\alpha^n\cdot\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha^{n+1}+0 & \alpha^n+n\alpha^n \\ 0+0 & 0+\alpha^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & (1+n)\alpha^n \\ 0 & \alpha^{n+1} \end{pmatrix} \\
\text{Así, } A^{n+1} &= \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & (n+1)\alpha^n \\ 0 & \alpha^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Esto muestra que el resultado también es válido para la potencia $n+1$ y, de esta manera, para $\alpha \neq 0$ y todo valor $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ por inducción matemática.

Ejemplo 5.4

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que si A es idempotente, entonces $B = 2A - I_n$ es involutiva.

Solución

Si A una matriz de orden n, se dice que A es *idempotente* si, y solo si, $A^2 = A$; por otra parte, se dice que A es *involutiva* si, y solo si, $A^2 = I_n$

Como A es una matriz idempotente, se cumple que $A^2 = A$. Se quiere demostrar que la matriz $B = 2A - I_n$ es involutiva; es decir, se desea probar que $B^2 = I_n$

Veamos:

$$\begin{aligned}
B^2 &= BB = (2A - I_n)(2A - I_n) \\
&= 2A(2A - I_n) - I_n(2A - I_n) \\
&= (2A)(2A) - (2A)I_n - I_n(2A) + I_n\cdot I_n
\end{aligned}$$

Solución - continuación

$$\begin{aligned} &= 4A^2 - 2A - 2A + I_n = 4A^2 - 4A + I_n \\ &= 4A - 4A + I_n = O_n + I_n = I_n \end{aligned}$$

$$\text{Así, } B^2 = I_n$$

Por lo tanto, si A es idempotente, entonces $B = 2A - I_n$ es involutiva.

Ejemplo 5.5

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sin resolver sistemas de ecuaciones, determine la matriz X que satisface la ecuación matricial siguiente: $XAB^t = AB^t + XC^2$

Solución

Un detalle importante es que la matriz X debe ser, necesariamente, de orden tres; para su cálculo, se tiene que:

$$\begin{aligned} & XAB^t = AB^t + XC^2 \\ \Rightarrow\ & XAB^t - XC^2 = AB^t + XC^2 - XC^2 \\ \Rightarrow\ & XAB^t - XC^2 = AB^t + O_3 \\ \Rightarrow\ & XAB^t - XC^2 = AB^t \\ \Rightarrow\ & X\left(AB^t - C^2\right) = AB^t \end{aligned}$$

Note que la matriz $AB^t - C^2$ es de orden tres; la matriz X existe solo si la matriz $AB^t - C^2$ es no singular; suponiendo que dicha matriz se invertible, se tiene que:

$$\begin{aligned} & X\left(AB^t - C^2\right) = AB^t \\ \Rightarrow\ & X\left(AB^t - C^2\right)\left(AB^t - C^2\right)^{-1} = \left(AB^t\right)\left(AB^t - C^2\right)^{-1} \\ \Rightarrow\ & X I_3 = \left(AB^t\right)\left(AB^t - C^2\right)^{-1} \\ \Rightarrow\ & X = \left(AB^t\right)\left(AB^t - C^2\right)^{-1} \end{aligned}$$

Ahora, se calculan las matrices necesarias para resolver la operación $\left(AB^t\right)\left(AB^t - C^2\right)^{-1}$

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución - continuación

$$
\begin{aligned}
C^2 &= CC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
AB^t - C^2 &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La matriz $\left(AB^t - C^2\right)^{-1}$ existe, ya que $\left|AB^t - C^2\right| = -3 \cdot -3 \cdot 2 = 18 \neq 0$; para su cálculo, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left(AB^t - C^2 \middle| I_3\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\substack{\frac{1}{2}F_3 \\ -\frac{1}{3}F_2 \\ F_2+F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{array}\right) \\
&\underset{\substack{-F_3+F_2 \\ F_3+F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{array}\right) \\
&\underset{-\frac{1}{3}F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{array}\right) \\
&= \left(I_3 \middle| \left(AB^t - C^2\right)^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

Es decir, $\left(AB^t - C^2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{6} \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$; de esta manera, se tiene que:

$$
X = \left(AB^t\right)\left(AB^t - C^2\right)^{-1}
$$

Solución - continuación

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz X está dada por $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Ejemplo 5.6

Si se tiene que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, demuestre los resultados siguientes:

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(AB) = tr(BA)$

Solución

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se define la traza de A, denotada como $tr(A)$, como el número real dado por $tr(A) = \sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{kk}$

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1.

$$\begin{aligned} tr(A+B) &= \sum_{k=1}^{n} \langle A+B \rangle_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \left(\langle A \rangle_{kk} + \langle B \rangle_{kk} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{kk} + \sum_{k=1}^{n} \langle B \rangle_{kk} = tr(A) + tr(B) \\ \text{Así, } tr(A+B) &= tr(A) + tr(B) \end{aligned}$$

Solución - continuación

2

$$\begin{aligned}
tr(AB) &= \sum_{k=1}^{n} \langle AB \rangle_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{n} \langle A \rangle_{kt} \langle B \rangle_{tk} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{n} \langle B \rangle_{tk} \langle A \rangle_{kt} \right) = \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \langle B \rangle_{tk} \langle A \rangle_{kt} \right) \\
&= \sum_{t=1}^{n} \langle BA \rangle_{tt} = tr(BA) \\
\text{Así, } tr(AB) &= tr(BA)
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.7

Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Demuestre que $\det(I_2 + A) = 1 + \det(A) \Leftrightarrow tr(A) = 0$

Solución

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tal que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Con base en esta matriz, se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \det(I_2 + A) = 1 + \det(A) \\
\Leftrightarrow\ & \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = 1 + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{vmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{vmatrix} = 1 + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & (1+a)(1+d) - bc = 1 + ad - bc \\
\Leftrightarrow\ & 1 + d + a + ad - bc = 1 + ad - bc \\
\Leftrightarrow\ & d + a = 0 \\
\Leftrightarrow\ & tr \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & tr(A) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, entonces $\det(I_2 + A) = 1 + \det(A) \Leftrightarrow tr(A) = 0$.

Ejemplo 5.8

Considere el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} -4a+8b+c-11d-2e=-10 \\ 2a-4b+4d+2e=8 \\ a-2b+c-d+2e=10 \end{cases}$
Represente matricialmente dicho sistema y determine su solución utilizando el método de Gauss–Jordan.

Solución

Una representación matricial del sistema está dada por:

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & 1 & -11 & -2 \\ 2 & -4 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Basados en el método de Gauss–Jordan, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -4 & 8 & 1 & -11 & -2 & -10 \\ 2 & -4 & 0 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 10 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 10 \\ 2 & -4 & 0 & 4 & 2 & 8 \\ -4 & 8 & 1 & -11 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{-2F_1+F_2 \\ 4F_1+F_3}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & 6 & 30 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{-\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & 6 & 30 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{-F_2+F_1 \\ -5F_2+F_3}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{-F_3+F_1 \\ -F_3+F_2}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

De esta manera, si $b, d \in \mathbb{R}$, se tiene que $a = 4+2b-2d, c = 6+3d$ y $e = 0$.
Por lo tanto, el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales está dado por

Solución - continuación

$$S=\left\{\left(\begin{array}{c}4+2b-2d\\ b\\ 6+3d\\ d\\ 0\end{array}\right)\Big/ b,d\in\mathbb{R}\right\}$$

Ejemplo 5.9

Considere el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases}2\alpha x+\alpha y=\beta\\ \alpha x-3y=1\end{cases}$

Si $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, determine el valor o los valores (en caso de existir) que deben tomar α y β, respectivamente, para que dicho sistema de ecuaciones:

1. Tenga solución única.
2. No tenga solución.
3. Posea infinito número de soluciones.

Solución

Se puede observar que el sistema de ecuaciones en estudio posee dos ecuaciones con dos incógnitas. Una representación matricial para dicho sistema de ecuaciones está dada por:

$$\begin{pmatrix}2\alpha & \alpha\\ \alpha & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\ 1\end{pmatrix}$$

Con base en lo que se enuncia en la regla de Cramer, el sistema de ecuaciones en estudio posee solución única si $\begin{vmatrix}2\alpha & \alpha\\ \alpha & -3\end{vmatrix}\neq 0$.

$0=\begin{vmatrix}2\alpha & \alpha\\ \alpha & -3\end{vmatrix}=2\alpha\cdot -3-\alpha\cdot\alpha=-6\alpha-\alpha^2=-\alpha(6+\alpha)\Leftrightarrow\alpha=0\vee\alpha=-6.$

Si $\alpha=0$ o $\alpha=-6$ el sistema de ecuaciones podría tener infinito número de soluciones o ser inconsistente. Se resolverá el sistema considerando estos dos casos.

Con $\alpha=0$ se tendría el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases}0=\beta\\ -3y=1\end{cases}$

Este sistema de ecuaciones es inconsistente si $\beta\neq 0$, pero posee infinito número de soluciones si $\beta=0$.

Si $\alpha=-6$ se tendría el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases}-12x-6y=\beta\\ -6x-3y=1\end{cases}$

Dicho sistema de ecuaciones es equivalente (multiplicando la segunda ecuación por dos) con el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases}-12x-6y=\beta\\ -12x-6y=2\end{cases}$

Solución - continuación

Este sistema de ecuaciones es inconsistente si $\beta \neq 2$, pero posee infinito número de soluciones si $\beta = 2$.
Por lo tanto,

1. El sistema de ecuaciones lineales posee solución única si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-6, 0\}$ y $\beta \in \mathbb{R}$.
2. El sistema de ecuaciones lineales es inconsistente en cualquiera de los dos casos siguientes: para $\alpha = -6$ y $\beta \in \mathbb{R} - \{2\}$; o bien, para $\alpha = 0$ y $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$.
3. El sistema de ecuaciones lineales posee infinito número de soluciones en cualquiera de los dos casos siguientes: para $\alpha = -6$ y $\beta = 2$; o bien, para $\alpha = 0$ y $\beta = 0$.

Ejemplo 5.10

Si $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{P}$ son matrices dadas por $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, determine $\left(\mathcal{P}\mathcal{Q}\right)^{-1}$

Solución

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+0+0 & 0-3+0 \\ -1+0+4 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Para determinar $\left(\mathcal{P}\mathcal{Q}\right)^{-1}$ se tiene que:

$$\left(\mathcal{P}\mathcal{Q} \middle| I_2\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{3}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \lambda & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\lambda F_1 + F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 1 & -\frac{\lambda}{3} \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{3}F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{\lambda}{9} \end{array}\right) = \left(I_2 \middle| (\mathcal{P}\mathcal{Q})^{-1}\right)$$

Por lo tanto, $\left(\mathcal{P}\mathcal{Q}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{\lambda}{9} \end{pmatrix}$

Ejemplo 5.11

Determine, en caso de existir, A^{-1} si se tiene que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

Para determinar A^{-1} se tiene que:

$$\left(A \middle| I_3\right) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{-5F_1+F_2 \\ 4F_1+F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{3F_2+F_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-2F_3+F_1 \\ 2F_3+F_2 \\ -F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right) = \left(I_3 \middle| A^{-1}\right)$$

Por lo tanto, A^{-1} existe y está dada por $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -8 \\ 1 & 7 & 9 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Ejemplo 5.12

Sin calcular determinante alguno (solo con propiedades de determinantes), determine el valor de $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ x-1 & y-2 & z-3 \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}$ si se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7$

Solución

Las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ x-1 & y-2 & z-3 \\ 3x & 3y & 3z \end{pmatrix}$ son equivalentes por filas; ya que:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{2F_1 \\ -F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ x & y & z \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución - continuación

$$\overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -1 & -2 & -3 \\ x & y & z \end{pmatrix} \overset{\substack{F_3+F_2 \\ 3F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ x-1 & y-2 & z-3 \\ 3x & 3y & 3z \end{pmatrix} = B$$

Con base en las operaciones elementales sobre filas realizadas sobre la matriz A para la obtención de la matriz B, se tiene que $|B| = |A| \cdot 2 \cdot -1 \cdot -1 \cdot 3 = -7 \cdot 6 = -42$.
Por lo tanto, $|B| = -42$.

Ejemplo 5.13

Utilizando el método de Gauss-Jordan, determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} a+2b+2c=-1 \\ -2a-2b-2c+2d+e=3 \\ -3a-6b-6c+e=6 \end{cases}$$

Solución

Una representación matricial para dicho sistema de ecuaciones lineales está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & -6 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Basados en el método de Gauss–Jordan, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -6 & -6 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \overset{\substack{2F_1+F_2 \\ 3F_1+F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-F_2+F_1 \\ \frac{1}{2}F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{F_3+F_1 \\ -\frac{1}{2}F_3+F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

De esta manera, si $c, d \in \mathbb{R}$, se tiene que $a = 1+2d, b = -1-c-d$ y $e = 3$.

Solución - continuación

Por lo tanto, el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales está dado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2d \\ -1-c-d \\ c \\ d \\ 3 \end{pmatrix} \Big/ c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejemplo 5.14

Verifique que la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ es *antisimétrica*.

Solución

La matriz B es, efectivamente, una matriz *antisimétrica*[a], ya que:

$$\begin{aligned} B^t &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -B \\ \text{Así, } B^t &= -B \end{aligned}$$

[a] Se dice que una matriz cuadrada A es *antisimétrica* si A cumple que $A^t = -A$

Ejemplo 5.15

Demuestre que si A es alguna matriz *antisimétrica*, entonces A^2 es *simétrica*.

Solución

Como A es una matriz *antisimétrica*, se cumple que $A^t = -A$
Para demostrar que la matriz A^2 es *simétrica*[a], se debe probar que $\left(A^2\right)^t = A^2$
Veamos:

$$\begin{array}{rcll} \left(A^2\right)^t & = & (A \cdot A)^t & \text{definición de potencia de matrices} \\ & = & A^t A^t & \text{propiedad: } (AB)^t = B^t A^t \\ & = & -A \cdot -A & A \text{ es antisimétrica} \\ & = & A \cdot A & \text{propiedad: } (\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB) \\ & = & A^2 & \text{definición de potencia} \\ \text{Así, } \left(A^2\right)^t & = & A^2 & \end{array}$$

Por lo tanto, si A es alguna matriz *antisimétrica*, entonces A^2 es *simétrica*.

[a]Se dice que una matriz cuadrada A es *simétrica* si A cumple que $A^t = A$

Ejemplo 5.16

Demuestre el teorema 2.5 que indica: dadas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $AB = I_n$ necesariamente $BA = I_n$

Solución

La matriz A solo tiene dos opciones: es invertible o no posee inversa.
Para la primera posibilidad, si A posee inversa A^{-1}, entonces:

$$\begin{array}{rcll} & & AB = I & \\ & \Rightarrow & A^{-1}(AB) = A^{-1}I & \text{axioma 1} \\ & \Rightarrow & \left(A^{-1}A\right)B = A^{-1}I & \text{asociatividad de la multiplicación} \\ & \Rightarrow & IB = A^{-1}I & \text{definición de matriz no singular} \\ & \Rightarrow & B = A^{-1} & I \text{ es el neutro de la multiplicación} \\ & \Rightarrow & BA = A^{-1}A & \text{axioma 1} \\ \text{Así, } BA & = & I & \text{definición de matriz no singular} \end{array}$$

De esta manera, si $AB = I_n$ y A es no singular, necesariamente $BA = I$

Para la segunda posibilidad, si A no posee inversa, entonces el rango de A no es n (por el corolario 3.4 y el teorema 3.9).
Lo anterior indica que A es equivalente por filas con una matriz escalonada reducida por filas que posee alguna fila nula y, además, $|A| = 0$.
Luego, si $AB = I$ se tiene que:

Solución - continuación

$$
\begin{aligned}
& AB = I \\
\Rightarrow\ & |AB| = |I| && \text{axioma 1} \\
\Rightarrow\ & |A| \cdot |B| = |I| && \text{axioma 1} \\
\Rightarrow\ & |A| \cdot |B| = 1 && \text{axioma 1} \\
\Rightarrow\ & 0 \cdot |B| = 1 && \text{axioma 1} \\
\Rightarrow\ & 0 = 1 && (\Rightarrow\Leftarrow)
\end{aligned}
$$

De esta manera, no puede darse el caso que A sea singular.
Por lo tanto, dadas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $AB = I_n$ necesariamente A posee inversa y $BA = I_n$

6 Bibliografía

Anton, H. (2004). *Introducción al álgebra lineal*. Tercera edición, México: LIMUSA.

Arce, C; **Castillo**, W. y **González**, J. (2002). *Álgebra Lineal*. Segunda edición, segunda reimpresión, San José, Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Arce, C. (2003). *Ejercicios resueltos de álgebra lineal*. San José, Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Ayres, F. (2001). *Matrices*. México: McGraw-Hill.

Barrantes, H. (1998). *Elementos de álgebra lineal*. Primera reimpresión, San José, Costa Rica: Editorial de la Universidad Estatal a Distancia.

Beezer, R. (2005). *A first course in linear algebra*. Department of mathematics and computer science: University of Puget Sound. http://linear.ups.edu/

Connell, E. (2004). *Elements of abstract and linear algebra*. Department of mathematics: University of Miami. http://www.math.miami.edu/

Friedberg, S; **Insel**, A. y **Spence**, L. (2003). *Linear algebra*. Cuarta edición, New Jersey, United States of America: Pearson Education, Inc.

Kuttler, K. (2008). *An introduction to linear algebra*. http://www.math.byu.edu

Lipschutz, S. (1992). *Álgebra lineal*. Segunda edición, España: McGraw-Hill.

Matthews, K. (2005). *Elementary linear algebra*. Department of mathematics: University of Queensland. http://www.numbertheory.org/book/

Rodríguez, J. (2000). *Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales*. Escuela de Matemática: Publicaciones del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Santos, D. (2006). *Linear algebra notes*. http://scipp.ucsc.edu/