



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
PROBABILIDADES

TIEMPO 1 HORA 50 MIN
VALOR 50 PTS

SEGUNDO PARCIAL, I-2010

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Las preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con tempera (corrector) no podrán apelarse. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} k \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} & \text{si } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con k constante. Determine el valor de k . (6 puntos)

2. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f(x) = \frac{24}{25} \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(a) Determine $F_X(k)$, para $k \in \mathbb{N}$. (6 puntos)

(b) Sea $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, determine en términos de k el valor de $P(X \geq k)$. (4 puntos)

(c) Halle la $E(X)$. (Sugerencia: si $0 < p < 1$ entonces $\sum_{x=0}^k xp^x = \frac{p}{(1-p)^2}$) (4 puntos)

3. Sea X una variable aleatoria discreta con valor esperado μ_x tal que $Var(X)$ y $E((X - 3\mu_x)^2)$ existen. Pruebe que (5 puntos)

$$E((X - 3\mu_x)^2) = Var(X) + 4\mu_x^2.$$



4. El comité cívico de cierto pueblito, sortearán el próximo domingo 20 almuerzos, uno por rifa, de la siguiente forma: cada rifa consta de 100 números del 1 al 100, los cuales se venden a 100 colones cada uno, una vez vendidos todos los números se elige el número al azar del uno al 100 y el que lo tenga se gana un almuerzo y 1000 colones. Suponga que don Juan en cada rifa comprará 5 números.
- (a) ¿Cuál es aproximadamente la probabilidad de que don Juan se gane al menos 3 almuerzos? (6 puntos)
- (b) Al finalizar todas las rifas, ¿cuánto dinero se espera que dé don Juan al comité cívico? (4 puntos)
5. Las brujas se agrupan en clanes de 3 brujas, y el número total de verrugas en una bruja sigue una distribución de Poisson con un promedio de 5 verrugas. En el aquelarre anual, se comienza escogiendo al azar clanes, si el total de verrugas del clan es menor de 19, se expulsa al clan, la escogencia de clanes se detiene en el primer clan que no sea expulsado.
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un clan tomado al azar sea expulsado? (4 puntos)
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que se expulsen al menos 3 clanes? (4 puntos)
6. Una urna contiene 2 bolas blancas y 4 bolas negras. Suponga que se realizan extracciones de la urna sin reposición y se define la variable aleatoria X como el número de extracciones hasta obtener una bola blanca y una bola negra consecutivas (no importa el orden). Determine el rango y la función de distribución de probabilidad de X . (7 puntos)