III Examen Parcial

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Las preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones en que se utilizó corrector no podrán apelarse. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Sea X una v.a.c., y $f_X(x)$ definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^{-3} & \text{si } 1/3 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   a) Determine el valor de k de manera que la función f_X sea una función de densidad de probabilidad para la variable X. (4 pts)

   b) Encuentre $\mathrm{E}(X)$. (4 pts)

   c) Encuentre la función de distribución de probabilidad acumulada F_X. (4 pts)

2. Sea X una v.a.c. cuya función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 5e^{15-5x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

   Determine la función generadora de momentos $m_X(t)$. (5 pts)

3. Sea X una v.a.c., cuya función generadora de momentos está dada por:

$$m_X(t) = \frac{\alpha e^t}{\alpha - t}; \quad t < \alpha$$

   donde α es una constante positiva. Se tiene que:

$$m'_X(t) = \frac{\alpha e^t[\alpha - t + 1]}{(\alpha - t)^2}$$
$$m''_X(t) = \frac{\alpha e^t[(\alpha - t)^2 + 2(\alpha - t) + 2]}{(\alpha - t)^3}$$

   a) Determine $\mathrm{E}(X)$. (2 pts)

   b) Determine $\mathrm{Var}(X)$. (3 pts)

TEC
Tecnológico de Costa Rica

4. El tiempo que dura un empacador para empacar una caja de bananos sigue una distribución exponencial con media 90 s. La bananera ha decidido despedir a aquellos que en una inspección sorpresa duren más de 2 minutos.

   a) Determine la probabilidad de que un empacador sea despedido. (3 pts)

   b) La empresa tiene distribuidas empacadoras, y cada una cuenta con 35 empacadores. La empresa ha decidido además cerrar empacadoras, en las que el promedio por empacador sea mayor a 100 s. Determine la probabilidad de que una empacadora sea cerrada. (3 pts)

5. El gasto diario de cierta oficina sigue una distribución Gamma, con media 20 y desviación estándar de $2\sqrt{10}$ (en miles de colones).

   a) Determine la probabilidad de que en un día se gasten menos de 22 mil colones. (3 pts)

   b) Determine la probabilidad de que en un mes (30 días) se gasten más de medio millón de colones. (3 pts)

6. En un juego se utiliza una máquina que genera un número aleatorio, siguiendo una distribución normal con media 0 y varianza 1. El juego se gana si el número es menor que $-2{,}5$ o mayor que $2{,}5$.

   a) Determine la probabilidad de ganar el juego. (2 pts)

   b) La probabilidad de que en 1000 juegos, se ganen al menos k, es aproximadamente de 0,2743. Determine el valor de k. (4 pts)

7. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias continuas, tales que $X_i \sim N(i, 1/n)$. Sea $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Determine el valor de n, de manera que $P(S_n > 10n) = 0{,}75$. [Recuerde que $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.] (4 pts)