# $\mathcal{P}$ráctica $\mathcal{G}$eneral
## $\mathcal{M}$atrices, $\mathcal{D}$eterminantes y $\mathcal{S}$istemas de $\mathcal{E}$cuaciones $\mathcal{L}$ineales

1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

De las dos operaciones que se enuncian, realice la única que es posible efectuar y, además, justifique por qué la otra no está definida.

(a) $-2C + A^tB$ (b) $AB^t + 3C$

2. Sea $k \neq 0$ y sean $A, B, C$ y $D$ matrices definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

De las operaciones que se enuncian, realice aquella que esté bien definida. Justifique por qué las otras tres no se pueden realizar.

(a) $(AC)^t + B^{-1}$ (c) $(BA)^{-1} + C^t$
(b) $(CB)^t - D^{-1}$ (d) $(CA)^{-1} - D^t$

3. Considere las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcule:

(a) $B - 2C^t$ (c) $(AB)C$ (e) $AC^t$
(b) $AB$ (d) $A(BC)$ (f) $\frac{2}{3}A$

4. Encuentre dos matrices cuadradas $A$ y $B$ no nulas de orden 2 tales que $AB = \mathcal{O}_{2\times 2}$

5. Considere las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 17 & 11 & -24 \\ -15 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & -9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -11 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule $2A - C$

(b) Si se sabe que $(2A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & -27 \\ 5 & 4 & -11 \\ -4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, determine una matriz $X$ de tamaño $3\times 3$ con entradas reales, tal que $2AX - B = CX$

6. Encuentre la matriz $X$ que satisface la ecuación $A(X^t + C) = D$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Para cada una de las matrices que se enuncian determine su inversa (si existe):

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Suponga que $ad - cb \neq 0$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(g) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

(j) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

(k) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

(l) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(m) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Calcule:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

9. Si se sabe que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 12$. Calcule:

(a) $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

10. Determine los valores de $x$ para los cuales se cumplen las igualdades siguientes:

(a) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -2 & x+2 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2x \\ 0 & x & 99 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 60$

11. Sea $A$ una matriz cuadrada de orden $n$ tal que $A^2 = \mathcal{O}_{n\times n}$, demuestre que $\mathcal{I}_n - A$ es una matriz no singular.

12. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$, tal que $A^2 = A$, demuestre que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\left(A + \mathcal{I}_m\right)^k = \mathcal{I}_m + \left(2^k - 1\right) A$$

13. En cada uno de los casos siguientes calcule los valores de $x$ para los cuales la matriz correspondiente no posee inversa:

(a) $\begin{pmatrix} x & -3 \\ 4 & 1-x \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -x & x-1 & x+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-x & x+3 & x+7 \end{pmatrix}$

14. Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde $m$ es un parámetro

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 2 \\ -x_1 + m\,x_2 - x_3 = -4 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 + (m+3)\,x_3 = 3 \end{cases}$$

Utilice determinantes para establecer el valor o los valores de $m$, para los cuales el sistema tiene solución única.

15. Resuelva, usando el método de Gauss-Jordan, los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a) $\begin{cases} -x - y + 2z + w = 3 \\ -3x - 3y + 8z + 4w = 14 \\ -4x - 4y + 2z + w + v = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x + 5y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x + 4y + z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} -2x + 2y - 3z - w = -1 \\ x - y + 2z + 3w = 10 \\ z + 7w = 1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z - 2w = 1 \\ -2x + 5y - 3z + w = -5 \\ 9x + 5y + 11z - 7w = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x + 2y + 4w = 5 \\ x - z + 2w = 3 \\ -2x - y + 2z - 5w = -8 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 2x - 3y + 9z - w = 17 \\ x + z - 2w = 2 \\ y - 2z + w = -2 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x - 2y - 3z + 8w = 0 \\ -x + 5y + 9z - 17w = 6 \\ x - z + 2w = 5 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$

16. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas usando la regla de Cramer.

(a) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y = -1 \\ 4x + y + 2z = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ x - 3y + z = -2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x + 2y - 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$

17. Se dice que una matriz cuadrada $A$ de orden $n$ es involutiva si $A^2 = \mathcal{I}_n$
Determine si $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ es involutiva.

18. Se dice que una matriz cuadrada $A$ de orden $n$ es nilpotente si existe un entero positivo $m$ tal que $A^m = \mathcal{O}_{n\times n}$ Al menor entero $m$ que lo cumple se le llama índice de nilpotencia.
Pruebe que $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ es nilpotente y determine su índice de nilpotencia.

19. Una matriz cuadrada $A$, se dice que es ortogonal si es no singular y, además, $A^{-1} = A^t$
Demuestre que si $A$ es una matriz ortogonal entonces $|A| = 1$ o $|A| = -1$

20. En cada uno de los casos siguientes, determine el valor de $k$ de manera que el sistema dado tenga:

   I. Solución única
   II. Infinito número de soluciones
   III. No tenga soluciones

   (a) $\begin{cases} x+y+kz=2 \\ 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y+kz=0 \\ x+ky+z=1 \\ kx+y+z=2 \end{cases}$

21. Una matriz cuadrada $A$ se llama idempotente si $A^2=A$

   (a) Verifique que las matrices $M$ y $N$ dadas por:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

   son idempotentes.

   (b) Si $A$ es una matriz idempotente ¿Cuáles son los valores posibles para $|A|$?

22. Una matriz cuadrada $A$ se dice que es antisimétrica si se cumple que $A^t=-A$

   (a) Dé un ejemplo de una matriz cuadrada de orden 3 que sea antisimétrica.
   (b) Si $A$ es una matriz cuadrada de orden $n$ antisimétrica, demuestre que $|A|=(-1)^n \cdot |A|$
   (c) Demuestre que si $A$ es una matriz cuadrada de orden $n$, $n$ impar y $A$ es antisimétrica entonces $|A|=0$

23. En $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se define una relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:
$\forall A,B\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\ A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists P\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tal que $A=P^{-1}BP$

   (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
   (b) Demuestre que si $A\mathcal{R}B$ entonces $|A|=|B|$

24. Sean $A,B\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tales quee $A$ y $B$ son simétricas. Demuestre que:

   (a) $A+B$ es simétrica.
   (b) $AB$ no siempre es simétrica.
   (c) $A^2$ es simétrica.
   (d) $A^n$ es simétrica para todos los valores enteros de $n$ posibles.