INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
Álgebra Lineal para Computación (MA-2405)

Tiempo: 2 h. 20 m.
Total: 38 puntos
II Semestre de 2011

Segundo Examen Parcial

Instrucciones: Trabaje en forma ordenada y clara. Escriba todos los procedimientos que utilice para resolver los ejercicios propuestos.

1. En $\mathbb{R}^3$ se definen los conjuntos $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + 3z = 0\}$.
   (a) Calcule $H_1 \cap H_2$. **(4 puntos)**
   (b) Determine una base para $H_1 \cap H_2$ y la dimensión de $H_1 \cap H_2$. **(3 puntos)**
   (c) Demuestre que $H_1 \cap H_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. **(3 puntos)**
2. Demuestre que el conjunto de las matrices simétricas es un subespacio vectorial del espacio vectorial $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$. **(4 puntos)**
3. ¿Para cuál valor de k el vector $u = (1, -2, k)$ en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $v = (3, 0, -2)$ y $w = (2, -1, -5)$? **(3 puntos)**
4. Determine si el vector $q = 14x^3 + 15x$ pertenece al subespacio generado por $u = 2x^3 - 3x^2$ y $v = 5x - 2x^2$. Justifique. **(3 puntos)**
5. Si se sabe que los vectores $v_1 = (3, -4, 2)$ y $v_2 = (-2, 1, 5)$ son linealmente independientes pero no son base de $\mathbb{R}^3$. Encuentre un vector v_3, de tal manera que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$. **(3 puntos)**
6. En el grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5^*, \odot)$ donde $(a, b) \odot (c, d) = (a + c, bd)$.
   (a) Calcule los ocho elementos del grupo. **(2 puntos)**
   (b) Construya la tabla de operación. **(2 puntos)**
   (c) Determine el elemento neutro y el inverso de cada elemento del grupo. **(2 puntos)**
   (d) Calcule $(1, 2)^{-3} \odot (0, 3)^4$. **(2 puntos)**
7. Sea $D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ a^2 + b^2 \leq 1 \right\}$. Determine si $(D_2, +)$ es o no un grupo. **(4 puntos)**
8. Sea H un subconjunto no vacío de G, con $(G, \cdot)$ un grupo. Demuestre que si $a \cdot b^{-1} \in H, \forall a, b, \in H$, entonces H es subgrupo de G. **(3 puntos)**