IC3002: Práctica de Examen #1

Entregar el Sin fecha, pero le conviene el martes 24, Marzo , 2015

tecDigital 12:pm

José Castro

Contents

Problema 1

¿Cual de las siguientes funciones crece más rápido?

1. $n!!$ o $(2^n)!$
2. 2^{2^n} o $2^{n!}$
3. $n!^2$ o 2^{2n}
4. $\sqrt{2^n}$ o $\sqrt{n!}$
5. n o $\log(n!)$

Problema 2

Ordene las siguientes funciones por su crecimiento asintótico:
$[\sqrt{n}] \ldots [2^{n!}] \ldots [\log^2 n] \ldots [n \log n] \ldots [2^{2^n}] \ldots [n^{1/10}] \ldots [\log \log n] \ldots [n!] \ldots [n^2]$

Problema 3

Dada la definición de límite como:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = k \iff (\forall \epsilon\, \exists n_0 \; tal\ que\ si\ n \geq n_0 \Rightarrow |f(n) - k| < \epsilon)$$

Utilícela para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = r \Longrightarrow f = O(g)$$

Problema 4

Demuestre que las siguientes recurrencias representan la misma función:

$$\begin{aligned}
f(n) &= \begin{cases} 2 & n = 1 \\ f(n-1) + 2 & n > 1 \end{cases} \\
f(n) &= \begin{cases} 2 & n = 1 \\ 4 & n = 2 \\ 2f(n-1) - f(n-2) & n > 2 \end{cases} \\
f(n) &= \begin{cases} 2 & n = 1 \\ 4 & n = 2 \\ 6 & n = 3 \\ f(n-1) + f(n-2) - f(n-3) & n > 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Problema 5

Suponga que $f = O(n)$

1. demuestre que
   (a) $f(n)/n = O(1)$
   (b) $f(n)/n^2 = o(1)$
2. caracterice $f(n)/n^3$ de la forma más exacta posible

Problema 6

Demuestre que:

$$[f = o(g)] \Longleftrightarrow [f = O(g) \wedge g \neq O(f)]$$

Problema 7

1. demuestre que: $2^{n+r} = O(2^n)$.
2. demuestre que: $2^{2n-r} \neq O(2^n)$.
3. ¿Es $2^{rn} = O(2^n)$?

Problema 8

Demuestre que:

1. n^r crece mas rápido que n^s para todo $r > s$.
2. r^n crece mas rápido que s^n para todo $r > s > 1$

Problema 9

Demuestre que:

1. $\lfloor \lfloor n/m \rfloor /l \rfloor = \lfloor \lfloor n/l \rfloor /m \rfloor = \lfloor n/lm \rfloor$
2. $\left\lfloor \frac{n + \lfloor n/2 \rfloor}{2} \right\rfloor = \lfloor \frac{3n}{4} \rfloor$
3. $\lfloor n/3 \rfloor + \lfloor (n+1)/3 \rfloor + \lfloor (n+2)/3 \rfloor = n$

Problema 10

1. Demuestre que si $\lfloor n/2^i \rfloor = 1 \Longleftrightarrow i = \lfloor \log n \rfloor$
2. ¿Si $\lceil n/2^i \rceil = 1$, cuál es el valor de i?
3. Demuestre que $\lceil \log(n+1) \rceil = \lfloor \log n \rfloor + 1$
4. Demuestre que $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$

Problema 11

Demuestre que

1. $\lfloor \log \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor \log x \rfloor$
2. $f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ f(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & n > 1 \end{cases} \iff f(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$

Problema 12

Demuestre que

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
2. $\lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1 \geq \left\lceil \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \right\rceil \geq \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 2$

Problema 13

Demuestre que

1. Demuestre que
   (a) $\lceil (n+1)/k \rceil = \lfloor n/k \rfloor + 1$.
   (b) $\lceil \log(n+1) \rceil = \lfloor \log n \rfloor + 1$.
   (c) $\lceil \sqrt{n+1} \rceil = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$
2. ¿Bajo qué condiciones debe cumplir una función f para poder afirmar que $\lceil f(n+1) \rceil = \lfloor f(n) \rfloor + 1$

Problema 14

Sea $f(n)$ el n^{esimo} número de fibonacci.

1. Demuestre que es posible encontrar x^n utilizando $O(\log n)$ multiplicaciones.
2. demuestre que f obedece a la relación de recurrencia para $n \geq 2$

$$\begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \end{pmatrix}$$

3. Demuestre que $f(n+m+2) = f(n+1)f(m+1) + f(n)f(m)$.
4. Escriba un algoritmo para generar f(n) en tiempo logarítmico.