

### TERCER EXAMEN PARCIAL

**Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.**

1. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que la igualdad

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n + 2) = \frac{n(n + 1)(2n + 7)}{6}$$

es válida para todo  $n \geq 1$ , con  $n$  número natural. Además, utilice esta fórmula para calcular el valor exacto de

$$151 \cdot 153 + 152 \cdot 154 + 153 \cdot 155 + \cdots + 201 \cdot 203$$

(6 puntos)

2. Utilice el método de inducción matemática para demostrar la validez de la desigualdad

$$\frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

para  $n \geq 2$  con  $n$  número natural.

(4 puntos)

3. Considere  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$ , si  $n \geq 3$ , con  $a_0 = 6$ ,  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 12$

(a) Utilice ésta fórmula para encontrar el valor de  $a_5$ . (1 punto)

(b) Determine la fórmula explícita para esta relación y utilice esta fórmula para encontrar el valor de  $a_5$ . (4 puntos)

4. Suponga que la fórmula explícita asociada a la relación de recurrencia homogénea  $a_n$ , para  $n \geq 1$ , es:

$$a_n = 3^n + n3^n + 3$$

Determine la fórmula recursiva de esta sucesión. (3 puntos)

5. En el conjunto  $\mathbb{R} - \{-1\}$  se define la operación  $*$  como

$$a * b = a + b + ab$$

- (a) Pruebe que  $(\mathbb{R} - \{-1\}, *)$  es grupo abeliano. (4 puntos)

- (b) Calcule  $(5 * 3^{-1})^2 * \left[ 7^{-3} * 2 * (-3) \right]$  (2 puntos)

6. Considere el conjunto  $\mathbb{Z}_{13}^*$ , con la operación interna  $\odot$  como la multiplicación usual de clases de equivalencia.

(6 puntos)

- (a) Determine el elemento neutro y los inversos de cada elemento del grupo

- (b) Efectue las operaciones  $\left[ (\overset{\bullet}{8})^6 \odot (\overset{\bullet}{3}) \right]^{-4} \odot \left[ (\overset{\bullet}{9}) \odot (\overset{\bullet}{2})^{-5} \right]^3$

- (c) Determine todos los subgrupos del grupo  $(\mathbb{Z}_{13}^*, \odot)$