Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Álgebra Lineal para Computación

Tiempo: 2 horas 30 minutos
Puntaje Total: 33 puntos
II semestre 2017

II Examen Parcial
Sábado 21 de octubre

SOLUCIONARIO

---

1. En $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^*$ se define la operación $\oplus$ como:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c + 2, 3bd)$$

Si se sabe que ($\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$, $\oplus$) es un grupo abeliano.

(a) Determine la fórmula explícita de $(a, b)^{-1}$. *(4 pts)*

Solución

Primero se busca el elemento neutro.
Sea (m, n) el elemento neutro de $(a, b) \in \mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
(a, b) \oplus (m, n) = (a, b) \quad &\Rightarrow \quad (a + m + 2, 3bm) = (a, b) \\
&\Rightarrow \quad a + m + 2 = a \;\; \wedge \;\; 3bn = b \\
&\Rightarrow \quad m = 2 \;\; \wedge \;\; n = \frac{1}{3} \;\; (note \;\; que \;\; b \neq 0) \\
&\Rightarrow \quad (m, n) = \left(-2, \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Ahora, se calcula el inverso de (a, b) con $(a, b) \in \mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
(a, b) \oplus (c, d) = (-2, \frac{1}{3}) \quad &\Rightarrow \quad (a + c + 2, 3bd) = (-2, \frac{1}{3}) \\
&\Rightarrow \quad a + c + 2 = -2 \;\; \wedge \;\; 3bd = \frac{1}{3} \\
&\Rightarrow \quad c = -4 - a \;\; \wedge \;\; d = \frac{1}{9b} \;\; (note \;\; que \;\; b \neq 0) \\
&\Rightarrow \quad (c, d) = \left(-4 - a, \frac{1}{9b}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $(a, b)^{-1} = \left(-4 - a, \frac{1}{9b}\right)$

♦

(b) Resuelva la ecuación $(x,y)\oplus(2,-3)=(1,2)^2$. *(3 pts)*

Solución

$$\begin{aligned}(x,y)\oplus(2,-3)=(1,2)^2 \quad &\Rightarrow \quad (x,y)=[(1,2)\oplus(1,2)]\oplus(2,-3)^{-1}\\ &\Rightarrow \quad (x,y)=(4,12)\oplus\left(-6,\frac{-1}{27}\right)\\ &\Rightarrow \quad (x,y)=\left(0,\frac{-4}{3}\right)\end{aligned}$$

♦

2. Sea $(G,*)$ algún grupo cuyo elemento neutro es e; $H\subseteq G$ definido por

$$H=\{w\in G\ /\ w*m=m*w\}$$

donde $m\in G$, con m fijo. Demuestre que $(H,*)$ es subgrupo de $(G,*)$. *(5 pts)*

Solución

Primero, $H\neq\varnothing$ pues $e\in H$ (e satisface la condición enunciada en H, ya que $e*m=m*e$, en ambos miembros de la igualdad se obtiene m como resultado).
Así, H es subgrupo de G sí, y solo sí :

$$\forall x,y\in H,\quad x*y\in H\quad\wedge\quad x'\in H$$

Sean $x,y\in H$, por tanto $x*m=m*x\quad\wedge\quad y*m=m*y$
Ahora, $x*y\in H$ si $(x*y)*m=m*(x*y)$
Veamos:

$$\begin{aligned}(x*y)*m &= x*(y*m) && \text{asociatividad}\\ &= x*(m*y) && \text{pues } y\in H\\ &= (x*m)*y && \text{asociatividad}\\ &= (m*x)*y && \text{pues } x\in H\\ &= m*(x*y) && \text{asociatividad}\end{aligned}$$

Por otra parte, $x'\in H$ si $x'*m=m*x'$
Dado que $x\in H$ se tiene que $x*m=m*x$, luego:

$$\begin{aligned}x*m=m*x \quad &\Rightarrow \quad x'*(x*m)=x'*(m*x)\\ &\Rightarrow \quad \big(x'*x\big)*m=\big(x'*m\big)*x\\ &\Rightarrow \quad e*m=\big(x'*m\big)*x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad m = \big(x' * m\big) * x \\
&\Rightarrow \quad m * x' = \big(\big(x' * m\big) * x\big) * x' \\
&\Rightarrow \quad m * x' = \big(x' * m\big) * \big(x * x'\big) \\
&\Rightarrow \quad m * x' = \big(x' * m\big) * e \\
&\Rightarrow \quad m * x' = x' * m
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall x, y \in H, \quad x * y \in H \quad \wedge \quad x' \in H$ y con esto queda demostrado que H es sugrupo de G.

♦

3. Sea $(G; *)$ algún grupo con elemento neutro e. Demuestre que si $x^2 = x$, para algún $x \in G$, entonces $x = e$ *(3 pts)*

   Solución

   Por hipótesis se tiene que:

$$\begin{aligned}
x^2 = x \quad &\Rightarrow \quad x * x = x * e \quad \text{(definición de pontencia)} \\
&\Rightarrow \quad x = e \quad \text{(ley de cancelación)}
\end{aligned}$$

   Otra forma es, a partir de la ecuación $x * x = x * e$ se aplica x' a ambos lados de la ecuación.

♦

4. Considere el subconjunto $S = \{(1,2,3), (2,3,4), (3,4,5)\}$ del espacio $\mathbb{R}^3$. Determine si S es linealmente independiente, o linealmente dependiente. *(2 pts)*

   Solución

   Considerando los vectores de S como columnas de una matriz, y luego de aplicar operaciones elementales por fila se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto S es ld.

♦

5. Sea $H = \big\{2x + 3, x^2 - 4, x - 5\big\}$ subconjunto de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Demuestre que $\text{Gen}\{H\} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. *(5 pts)*

   Solución

   Sea $ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tal que: $ax^2 + bx + c = \alpha(2x + 3) + \beta(x^2 - 4) + \theta(x - 5)$, igualando término a término se tiene: $a = \beta, b = 2\alpha + \theta, c = 3\alpha - 4\beta - 5\theta$ con solución: $\beta = a, \theta = b - 2\alpha, \alpha = \dfrac{c + 4a + 5b}{13}$

♦

(b) Determine $\left[2x^2-3x+5\right]_H$ *(2 pts)*

Solución

Se tiene $\left[2x^2-3x+5\right]_H = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \theta \end{pmatrix}$ tal que:

$$2x^2-3x+5 = \alpha(2x+3)+\beta(x^2-4)+\theta(x-5)$$

sustituyendo en el resultado obtenido en la parte a, se tiene:

$$\left[2x^2-3x+5\right]_H = \begin{pmatrix} \frac{-2}{13} \\ 2 \\ \frac{-35}{13} \end{pmatrix}$$

♦

6. Sea $S \subset \mathbb{R}^4$, donde S es el subespacio formado por el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} -3x+y+w &= 0 \\ x-z &= 0 \end{cases}$$

Determine la dimensión de S. *(5 pts)*

Solución

Despejando z, w se tiene: $z = x$ y $w = 3x - y$ así el conjunto solución S del sistema es:

$$S = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z = x, w = 3x-y\right\} = \{(x,y,x,3x-y) : x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto la dimensión es 2.

♦

7. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V, demuestre que $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V. (4 pts)

Solución

Sean $x, y \in W_1 \cap W_2$ vectores arbitrarios y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned} x,y \in W_1 \cap W_2 &\Rightarrow x,y \in W_1 \wedge x,y \in W_2 \quad \text{(definición de intersección)} \\ &\Rightarrow \alpha x + y \in W_1 \wedge \alpha x + y \in W_2 \quad \text{(definición de subespacios)} \\ &\Rightarrow \alpha x + y \in W_1 \cap W_2 \quad \text{(definición de intersección)} \end{aligned}$$

♦