$\mathcal{I}$nstituto $\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación

$\mathcal{T}$iempo: 2 horas 40 minutos
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 37 puntos
$\mathcal{J}$unio de 2010

$\mathcal{III}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Sea $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\mathcal{T}\left(a + bx + cx^2\right) = (a - b, a - c, 0, a - b)$, $\forall p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

   (a) Verifique que $\mathcal{T}$ es una transformación lineal. (3 pts)

   (b) Determine una base para $Nucl(\mathcal{T})$ (3 pts)

   (c) Determine una base para $Im(\mathcal{T})$ (3 pts)

   (d) ¿Es $\mathcal{T}$ inyectiva? ¿Es $\mathcal{T}$ sobreyectiva? Justifique. (2 pts)

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

   (a) Determine todos los valores propios de A (3 pts)

   (b) Halle una base para E_2 (4 pts)

3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, encuentre una base para el espacio de las soluciones del sistema homogéneo $Ax = 0$ (4 pts)

4. Si se sabe que $B = \left\{1 + 2x, x - x^2, 1 + 3x^2\right\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, C_1 es la base estándar (canónica) de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, C_2 es la base estándar (canónica) de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal, tal que $\mathcal{T}(1 + 2x) = (2, -4)$, $\mathcal{T}\left(x - x^2\right) = (-1, 2)$ y $\mathcal{T}\left(1 + 3x^2\right) = (1, -2)$, determine $[\mathcal{T}]_{C_1}^{C_2}$ (5 pts)

5. Sea $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una transformación lineal, tal que $Nucl(\mathcal{T}) = \left\{0\right\}$. Demuestre que si $\left\{v_1, v_2, \ldots, v_n\right\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{V}$, entonces $\left\{\mathcal{T}(v_1), \mathcal{T}(v_2), \ldots, \mathcal{T}(v_n)\right\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{W}$. (3 pts)

6. Sean $B = \{v_1, v_2\}$ y $D = \{w_1, w_2\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, tales que $w_1 = v_1 - v_2$ y $w_2 = 3v_1$. Si se sabe que $[T]_B^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, para alguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

   (a) Calcule $[T(2v_1 - v_2)]_D$ (2 pts)

   (b) Encuentre $[T]_B$ (2 pts)

   (c) Calcule $[I]_B^D$, donde $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación identidad. (3 pts)