INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *I Semestre del 2011*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 29 puntos*
ALGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN — *Tiempo: 2 horas y 15 minutos.*

TERCER EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Trabaje en forma ordenada y clara en su cuaderno de examen. Escriba todos los procedimientos que utilice para resolver los ejercicios propuestos. Se permite el uso de calculadora científica o de menor potencia. Apague el celular.

1. Sea $T : P_2 \longrightarrow \mathrm{IR}^2$ una transformación lineal tal que
   $T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a - b \\ c \end{pmatrix}$.

   (a) Halle la matriz de la transformación.
   (3 puntos)

   (b) Halle una base para el núcleo de la transformación.
   (2 puntos)

   (c) De explícitamente dos elementos del núcleo de la transformación.
   (2 puntos)

   (d) Calcule la dimensión del subespacio de imágenes de la transformación.
   (2 puntos)

2. Halle el criterio $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de la transformación lineal $T : \mathrm{IR}^3 \longrightarrow \mathrm{IR}^2$ tal que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5 puntos)

3. Considere la transformación $T : \mathrm{IR}^3 \longrightarrow \mathrm{IR}^3$, tal que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ en donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Justifique si T es o no inyectiva. **(2 puntos)**

   (b) Justifique si T es o no sobreyectiva. **(2 puntos)**

4. Suponga que el conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente de un espacio vectorial V, además suponga que $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal inyectiva. Entonces, demuestre que $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente de W. **(4 puntos)**

5. Halle todos los vectores y valores propios de la matriz
$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ **(4 puntos)**

6. Sea A una matriz invertible y λ un valor propio de A. Demuestre que λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}. **(3 puntos)**