$\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemáticas
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación

$\mathcal{T}$iempo: 2 horas y 15 minutos
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 35 puntos
$\mathcal{M}$ayo de 2012

$\mathcal{II}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Considere los grupos $\Big(\mathbb{Z}_3, +\Big)$ y $\Big(\mathbb{Z}_2, +\Big)$ y sea $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$. $\forall\, (a, b), (c, d) \in \mathcal{G}$ se define:

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$$

   Si se sabe que $(\mathcal{G}, *)$ es grupo:

   (a) Determine la tabla de operación binaria para $(\mathcal{G}, *)$ (3 pts)

   (b) Encuentre el simétrico de cada uno de los elementos de $\mathcal{G}$ (3 pts)

2. Si $(\mathcal{G}, *)$ es algún grupo con elemento neutro e y $x \in \mathcal{G}$, se dice que x es un elemento *involutivo* de $\mathcal{G}$ si, y solo si, $x^2 = e$.

   (a) Determine todos los elementos *involutivos* del grupo $\Big(\mathbb{Z}_4, +\Big)$ (2 pts)

   (b) Determine todos los elementos *involutivos* del grupo $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ (2 pts)

3. Considere la estructura $(\mathbb{R}, \otimes)$, donde se define $\otimes$ de la manera siguiente:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \;\; a \otimes b = 5b^2 - ab + a^2 - b$$

   (a) Determine si la estructura $(\mathbb{R}, \otimes)$ posee elemento neutro o no. (2 pts)

   (b) Se dice que un elemento z de $\mathbb{R}$ es idempotente si $z \otimes z = z$. Determine todos los elementos idempotentes de $(\mathbb{R}, \otimes)$. (2 pts)

4. Demuestre que $\mathcal{H} = \Big\{x \in \mathbb{R}^* \Big/ x = 3^m, \; m \in \mathbb{Z}\Big\}$ es subgrupo de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ (4 pts)

5. Sea $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Si se sabe que $(\mathcal{D}, +, \cdot)$ es anillo, verifique que es conmutativo con elemento unidad. ¿Posee divisores de cero? (3 pts)

6. Si se sabe que $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial real, determine en cada uno de los casos si $\mathcal{W}$ es subespacio de $\mathcal{V}$ o no lo es. Justifique. (3 pts c/u)

   (a) $\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Big/ a = 0, b = c, d \geq 0 \right\}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

   (b) $\mathcal{W} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 3y = 0 \right\}, \quad \mathcal{V} = \mathbb{R}^2$

7. Sea $\mathcal{B} = \{u, w, x, z\}$ algún subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial real $\mathcal{V}$. Si se definen $y = 2u - x - 3z$, $m = 2x + 3w - 4u$, $t = w - 2z$, determine si $\mathcal{H} = \{y, m, t\}$ es linealmente depediente o linealmente independiente. (4 pts)

8. Sea $\mathcal{W} = \left\{ p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) / a + b + c + d = 0, p'(1) = 0 \right\}$. Determine un conjunto $\mathcal{S}$ de manera que $\mathcal{G}en(\mathcal{S}) = \mathcal{W}$. (4 pts)