INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN

15 de junio de 2015
Total: 33 puntos
Tiempo: 2 h. 15 m.

Tercer Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios o procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes la apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono móvil.

1. Sea $T\colon P_1 \to \mathbb{R}^2$ una función con criterio $T(ax+b) = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a-b \end{pmatrix}$. Pruebe que T es una tranformación lineal. **(3 puntos)**

2. Sea $T\colon P_2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Si se sabe que $T(1-x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T(2x^2-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $T(x+2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, calcule el criterio de T. **(4 puntos)**

3. Considere $T\colon \mathbb{R}^3 \to M_2$ una transformación lineal tal que
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z-2y & 2y-3z \\ 5x & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Obtenga el núcleo de T y una base de este. **(3 puntos)**
   (b) Obtenga la imagen de T y una base de esta. **(3 puntos)**
   (c) Calcule el rango de T y determine si T es sobreyectiva. **(2 puntos)**

4. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to P_2$ una transformación lineal tal que
$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a-b)x^2 + (a+b+3c)x + a + 2c$$
   (a) Pruebe que T es biyectiva. **(3 puntos)**
   (b) Calcule el criterio de T^{-1}, es decir, $T^{-1}(ax^2+bx+c)$. **(3 puntos)**

5. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Pruebe que si $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$ entonces T es inyectiva.

(3 puntos)

6. Considere la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcule su polinomio característico y sus valores propios. **(3 puntos)**

   (b) Encuentre una base para el espacio propio asociado a $\lambda = 4$. **(2 puntos)**

7. Si A es una matriz de $n \times n$ invertible y λ un valor propio de A.

   (a) Pruebe que $\lambda \neq 0$. **(2 puntos)**

   (b) Pruebe que $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1}. **(2 puntos)**