

\mathcal{I} Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Verifique que $(AB - \mathcal{I}_2)^{-1} = AB$ (4 pts)

(b) Sin resolver sistema de ecuaciones alguno determine la matriz X tal que $ABX - A = X$ (3 pts)

2. Sean A y B matrices cuadradas de orden n . Se dice que A y B conmutan si $AB = BA$.

Determine todas las matrices Q que conmutan con la matriz $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (4 pts)

3. Considere las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} -3z_1 & z_1 - 2y_1 & x_1 \\ -3z_2 & z_2 - 2y_2 & x_2 \\ -3z_3 & z_3 - 2y_3 & x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

Si se sabe que $|B| = -6$, halle el valor de $|A(2B)^{-1}|$ (4 pts)

4. Considere las matrices $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$. Demuestre, entrada por entrada, que el siguiente resultado es válido: $(AC)^t = C^t A^t$ (3 pts)

5. Sea A alguna matriz de orden n ; si $A^2 = \mathcal{I}_n$, se dice que A es **involutiva** y si $A^2 = A$, se dice que A es **idempotente**.

(a) Determine si la matriz $H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ es **involutiva**, **idempotente** o si no es de alguno de los tipos mencionados. (2 pts)

(b) Demuestre que si B es alguna matriz de orden n , tal que B es **idempotente**, entonces la matriz $C = 2B - \mathcal{I}_n$ es **involutiva**. (4 pts)

(c) Si P es una matriz **involutiva** o una matriz **idempotente**, ¿cuáles son los posibles valores para $\det(P)$? (2 pts)

6. Utilizando el método de Gauss-Jordan, determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales siguiente: (4 pts)

$$\begin{cases} a - 2b + c - d + 2e = 10 \\ 2a - 4b + 4d + 2e = 8 \\ -4a + 8b + c - 11d - 2e = -10 \end{cases}$$

7. Determine A^{-1} (en caso de existir) si se tiene que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ (3 pts)