$\mathcal{I}$nstituto $\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación

$\mathcal{T}$iempo: 2 horas
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 28 puntos
$\mathcal{I}$ $\mathcal{S}$emestre 2 007

$\mathcal{II}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Determine, para cada uno de los siguientes casos, si el enunciado es falso o verdadero. Justifique.

   (a) $\left(\mathcal{H},\cdot\right)$ es subgrupo de $\left(\mathbb{R}^*,\cdot\right)$, donde $\mathcal{H}=\left\{x\in\mathbb{R}^* \big/ x=2^t,\ t\in\mathbb{Z}\right\}$. (4 pts)

   (b) Si $\mathcal{H}=\left\{x\in\mathcal{G}\big/ x*t=t*x,\ t \text{ es un elemento fijo de } \mathcal{G}\right\}$, entonces $\left(\mathcal{H},*\right)$ es subgrupo de $\left(\mathcal{G},*\right)$, donde e es el elemento neutro de $\mathcal{G}$. (4 pts)

   (c) $\left(\mathbb{Z}_4,+,\cdot\right)$ es una estructura de campo. (4 pts)

2. Sea $\left(\mathcal{G},*\right)$ algún grupo con elemento neutro e. Demuestre que $\left(\mathcal{G},*\right)$ es abeliano si, y sólo si, $\forall x,y\in\mathcal{G},\ \ (x*y)^2=x^2*y^2$. (4 pts)

3. Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real. Demuestre que $\delta\,\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $\forall\delta\in\mathbb{R}$. (2 pts)

4. Determine, para cada uno de los siguientes casos, si el enunciado es falso o verdadero. Justifique.

   (a) $\mathcal{H}=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\big/ ax+by-cw=0,\ \text{con } a,b,c \text{ constantes}\right\}$ es subespacio vectorial real de $\mathbb{R}^4$. (3 pts)

   (b) $\mathcal{H}=\left\{p(x)\in\mathcal{P}_n\big/ p(x) \text{ es un polinomio de grado par}\right\}$ es subespacio vectorial real de $\mathcal{P}_n$. (3 pts)

   (c) $\mathcal{H}=\left\{\mathcal{A}\in\mathcal{M}_{n\times n}\big/ \mathcal{A}=-\mathcal{A}^t\right\}$ es subespacio vectorial real de $\mathcal{M}_{n\times n}$. (4 pts)