INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

II Semestre 2013
Total: 35 puntos
Tiempo: 2 horas 30 minutos

Segundo Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, se deben presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de celular durante el desarrollo de la prueba. Este es un examen de desarrollo, por tanto, debe aparecer todos los pasos, y sus respectivas justificaciones, que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones definidas de $A = \{x, y, z\}$ en $B = \{0, 1, 2, 3\}$. La matriz de $\mathcal{R}$ cumple que $M_{\mathcal{R}}[i, j] = 1 \Leftrightarrow [\ i = j \ \vee \ j = 4\ ]$, y la matriz de $\mathcal{S}$ es

$$M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine:

   (a) La matriz asociada a la relación $\mathcal{R}$ y los gráficos de las relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$. **(3 puntos)**

   (b) El gráfico de las relación $\mathcal{R} \cap \overline{\mathcal{S}}$. **(1 punto)**

   (c) El a matriz asociada a la relación $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}$. **(2 puntos)**

2. Si $\mathcal{R}$ es una relación definida sobre un conjunto A, con A no vacío. Demuestre que si $\mathcal{R}$ es transitiva, entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es transitiva. **(3 puntos)**

3. Considere la relación $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ \text{ tal que } \ x^2 - y^2 = 9k$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. **(6 puntos)**

4. En $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ se define la relación $\mathcal{R}$ como

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

Si se sabe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia (No lo demuestre), calcule la clase de equivalencia de $(1, 9)$. **(2 puntos)**

5. Considere los conjuntos $A = \{3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ y la función $f\colon A \times B \to [1, 6]$ por $f\Big((a, b)\Big) = \frac{a}{b}$.

   (a) Determine si f es inyectiva y si es sobreyectiva. **(2 puntos)**

   (b) Calcule $f(C)$ donde $C = \{(a, b) \in A \times B \ / \ \ a + b = 6\}$. **(2 puntos)**

   (c) Calcule $f^{-1}(\{2, 3\})$. **(1 punto)**

6. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 2$,

   (a) Demuestre que f es una función biyectiva. **(4 puntos)**

   (b) Determine el criterio $f^{-1}(x)$. **(1 punto)**

7. Sean A, B y C conjuntos no vacíos, y las funciones de $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$.
   Si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, demuestre que g es inyectiva.

   (4 puntos)

8. Sea $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función biyectiva que cumple que

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

   y sea $g\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ otra función tal que

$$g(x + y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

   Determine $(g \circ f)(x \cdot y)$. **(2 puntos)**

9. Sean A, B conjuntos no vacíos, la función de $f\colon A \to B$ y B_1 y B_2 subconjuntos de B.
   Demuestre que $B_1 \subseteq B_2$, entonces $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

   (2 puntos)