INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *Tiempo: 2 horas*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 25 puntos*
Álgebra Lineal para Computación (MA-2405) — *II Semestre 2012*

II Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios o procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes la apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono móvil.

1. Si $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un anillo y $x \in \mathcal{A}$, se dice que x es *idempotente* si $x^2 = x$. Determine todos los elementos idempotentes de los anillos $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$. **(3 puntos)**

2. Si se sabe que $(\mathcal{G}, *)$ es algún grupo cuyo elemento neutro es e y $a \in \mathcal{G}$, con a fijo, demuestre que $\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{G} \ / \ x * a = a * x\}$ es subgrupo de $\mathcal{G}$. **(5 puntos)**

3. Sea $\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \ / \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Si se sabe que $(\mathcal{U}, +, \cdot)$ es un anillo, verifique que es conmutativo y con elemento unidad. ¿Posee divisores de cero? **(4 puntos)**

4. Si se sabe que $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial real, determine en cada uno de los casos si $\mathcal{W}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ o no lo es. Justifique.

   (a) $\mathcal{W} = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \ / \ p(0) = p(1)\}$, $\mathcal{V} = P_3(\mathbb{R})$. **(3 puntos)**

   (b) $\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ a \geq 0, \ b = c, \ d = 0 \right\}$, $\mathcal{V} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. **(3 puntos)**

5. Determine si los vectores $u = (2, -1, 0, -1)$, $w = (1, 0, 1, -1)$ y $z = (-1, 1, 1, 0)$ son linealmente dependientes o linealmente independientes. **(3 puntos)**

6. Considere el conjunto $\mathcal{B}$ definido como $\mathcal{B} = \{1+x, 1-x, 1-x^2, x^3+x^2+x+1\}$. Determine si el polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ se puede escribir como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$ o no. **(4 puntos)**