

PRIMER PARCIAL, I-2012

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Las preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con tempera (corrector) no podrán apelarse. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. En la Universidad *TECNO* se tiene que: El 30% de los alumnos son de primer año de ingreso, de los cuales el 10% tienen automóvil. El 40% de los alumnos son de segundo año, de los cuales el 20% tienen automóvil. El 20% de los alumnos son de tercer año, de los cuales el 40% tienen automóvil. Y el resto son de cuatro años o más, de los cuales el 60% tienen automóvil. Se elige al azar un estudiante del *TECNO*

- (a) Halle la probabilidad de que el estudiante elegido tenga automóvil (4 puntos)

$$\begin{aligned}P(V) &= P(P \cap V) + P(S \cap V) + P(T \cap V) + P(C \cap V) \\&= 0.3 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.6 \\&= 0.25\end{aligned}$$

\therefore El 25% de los estudiantes del *TECNO* tienen automóvil

- (b) Si el estudiante elegido resultó que tiene automóvil, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tercer año? (3 puntos)

$$\begin{aligned}P(T | V) &= \frac{P(T \cap V)}{P(V)} \\&= \frac{P(T) P(V | T)}{P(V)} \\&= \frac{0.2 \cdot 0.4}{0.25} = 0.32\end{aligned}$$

\therefore Hay una probabilidad del 32%, de ser de tercer año dado que tiene vehículo

2. Considere el conjunto $S_{25} = \{1, 2, 3, \dots, 25\}$. Recuerde que los múltiplos de 3 son 0, 3, 6, 9, ... Determine el número de subconjuntos de S_{25} de seis elementos que tienen

- (a) exactamente dos múltiplos de tres. (3 puntos)

$$C(8, 2) C(17, 4) = 66\,640$$

:

- (b) al menos un múltiplo de tres. (3 puntos)

$$C(25, 6) - C(17, 6) = 164\,724$$

- (c) exactamente dos múltiplos de cinco y exactamente dos múltiplos de tres. (4 puntos)

$$C(4, 1) C(7, 1) C(13, 3) + C(4, 2) C(7, 2) C(13, 2) = 17\,836$$

: 17 836

3. Considere la palabra “*PRESENTIMIENTO*”.

- (a) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra ? (2 puntos)

$$1P, 1R, 3E, 1S, 2N, 2T, 2I, 1M, 1O : \frac{14!}{3!2!2!2!} = 1816\,214\,400$$

- (b) ¿Cuántos anagramas existen de esta palabra en los cuales las vocales se encuentran en los primeros 9 lugares? (4 puntos)

$$C(9, 6) \frac{6!}{3!2!} \frac{8!}{2!2!} = 50\,803\,200$$

- (c) ¿Cuántos anagramas de esta palabra existen que tienen al menos dos letras iguales en los primeros tres lugares (no necesariamente juntas)? (5 puntos)

$$\frac{11!}{2!2!2} + C(3, 2) C(11, 1) \frac{11!}{2!2!2} + C(3, 2) C(3, 2) \frac{12!}{3!2!2} = 33\,264\,000$$

4. Se desea distribuir 17 lapiceros idénticos y 5 lápices de color distinto en cinco cartucheras distintas. Determine el número de maneras distribuir estos objetos en las cartucheras si

- (a) no hay restricciones. (2 puntos)

$$C(17 + 5 - 1, 17) 5^5 = 18\,703\,125$$

- (b) cada cartuchera debe tener al menos un lapicero y al menos un lápiz de color.
(3 puntos)

$$C(12 + 5 - 1, 12) 5! = 218\,400$$

- (c) al menos una cartuchera tiene más de 4 lapiceros. (6 puntos)

$$\begin{aligned} U : & \text{ conjunto de maneras de distribuir las computadoras} \\ P_i = & \{x \in U \mid \text{la cartuchera } \#i \text{ tiene más de 4 lapiceros}\} \\ & \text{con } i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

Por el principio de inclusión-exclusión se tiene que

$$\begin{aligned} x &= |P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5| \\ &= 5|P_1| - C(5, 2)|P_1 \cap P_2| + C(5, 3)|P_1 \cap P_2 \cap P_3| - C(5, 4)|P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4| \\ &\quad + |P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap P_5| \\ &= 5C(12 + 5 - 1, 12) - C(5, 2)C(7 + 5 - 1, 7) + C(5, 3)C(2 + 5 - 1, 2) - 0 \\ &= 5950 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$5950 \cdot 5^5 = 18\,593\,750.$$

5. En una bolsa se tiene 10 bolas blancas, 6 bolas verdes y 4 bolas rojas. Considere el experimento en que se extrae una bola al azar, se anota su color y se devuelve la bola extraída con 3 bolas del mismo color al de las bola extraída. Suponga que el experimento se repite hasta obtener 2 bolas rojas. ¿Determine la probabilidad de que se realicen exactamente 3 extracciones? (6 puntos)

$$\begin{aligned} & RBR, RVR, BRR, VRR \\ & \frac{4}{20} \frac{10}{23} \frac{7}{26} + \frac{4}{20} \frac{6}{23} \frac{7}{26} + \frac{10}{20} \frac{4}{23} \frac{7}{26} + \frac{6}{20} \frac{4}{23} \frac{7}{26} = \frac{112}{1495} = 0.0749 \\ & \quad \frac{7}{299} + \frac{21}{1495} + \frac{7}{299} + \frac{21}{1495} \end{aligned}$$

$$: : : : 7.4916 \times 10^{-2} : 7.4916 \times 10^{-2}$$

6. Sean A , B y C eventos no nulos tales que: A y C son disjuntos, A y B son independientes y además $P(B \cup C) = \frac{1}{5}P(A)$. Pruebe que (5 puntos)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) \left(\frac{1}{5} + P(\overline{B}) \right)$$

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\
&\quad - P(C \cap B) + P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(C \cap B) \\
&= P(A) + \frac{1}{5}P(A) - P(A)P(B) \\
&= \frac{1}{5}P(A) + P(A)P(\overline{B})
\end{aligned}$$