INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

10 de octubre de 2005
Total: 34 puntos
Tiempo: 2 h. 15 min.

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Sea $A = \{0, 1, 3, 4\}$, sea $\mathcal{R}$ una relación sobre A, cuya matriz asociada satisface

$$M_{\mathcal{R}}[i, j] = 1 \Leftrightarrow [2i = j \ \vee \ j = 1 \ \vee \ i = 4]$$

   y sea $\mathcal{S}$ otra relación sobre A, definida por

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow a - b \in A$$

   (a) Determine la matriz $M_{\mathcal{R}}$, el gráfico $G_{\mathcal{R}}$ y el gráfico de $\overline{\mathcal{R}} - \mathcal{R}^{-1}$

   (3 puntos)

   (b) Determine la matriz de y el gráfico de $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}^{-1}$

   (3 puntos)

2. En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow [3(a - c) = 2(b - d)]$$

   Analice qué propiedades satisface la relación $\mathcal{R}$ y clasifique esta relación.

   (4 puntos)

3. En una academia de lenguas, Juan, Ana, Mario, Pedro, Inés y María estudian francés y Marco, Cindy, Emily, Tomás, Carlos, Manuel, Felipe y Héctor estudian Inglés. Sobre el conjunto U formado por los estudiantes de esta academia se definen dos relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$, de manera que $a\mathcal{R}b$ si y solo si a y b estudian el mismo idioma y $a\mathcal{S}b$ si y solo si a y b son del mismo sexo. Si ambas relaciones son de equivalencia, determine el conjunto cociente determinado por la relación $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.

   (2 puntos)

4. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida sobre A, con A no vacío, demuestre que si $\mathcal{R}$ es transitiva, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ es transitiva. Además, verifique que el recíproco de la proposición anterior no es verdadero.

   (3 puntos)

5. Considere la función $f\colon \mathbb{R}-\left\{\frac{-2}{3}\right\} \to \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ definida por $f(x) = \dfrac{3x-7}{9x+6}$

   (a) Pruebe que f es una función biyectiva. (4 puntos)

   (b) Compruebe que $f^{-1}(x) = (f \circ f)(x)$.

   (2 puntos)

6. Sea $A = \{2, 3, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, considere la función

$$f\colon A \times B \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

definida por

$$f((a,b)) = \begin{cases} 2a & \text{si } a < b \\ b & \text{si } a > b \\ 3a - b & \text{si } a = b \end{cases}$$

   (a) Determine si f es inyectiva y si f es sobreyectiva.

   (b) Determine $f^{-1}(\{1,3,5\})$, $f^{-1}(\{7\})$, $f(f^{-1}(\{4\}))$

   (c) Si $C = \{(a,b) \in A \times B \ / \ \ a + b = 6\}$, calcule $f^{-1}(f(C))$

   (d) Calcule $f(f(3,2), f(f(3,2), f(3,2)))$

   (6 puntos)

7. Encuentre las funciones lineales f tales que $(f \circ f \circ f)(x) = -8x + 5$.
   (2 puntos)

8. Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 4 - 2x$, calcule $(f^{-1} \circ g \circ f)^{-1}(x)$.
   (2 puntos)

9. Sean A, B y C conjuntos no vacíos, suponga que h es una función de A en B y f una función de B en C.
   Demuestre que si $f \circ h$ es inyectiva y h es sobreyectiva, entonces f es inyectiva.
   (3 puntos)