

Segundo Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios o procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas, además, cada paso debe contar con su respectiva justificación. Trabaje en forma ordenada, clara y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes la apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono móvil.

1. Considere las dos relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} definidas sobre el conjunto $A = \{3, 5, 6, 8\}$, donde \mathcal{R} está definida por

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + b \text{ es un número impar}$$

y la matriz de \mathcal{S} está definida por:

$$M_{\mathcal{S}}[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i + 1 = j \vee i = j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

(a) Calcule la matriz de \mathcal{R} y la matriz de \mathcal{S} . **(3 puntos)**

(b) Calcule el gráfico de $\overline{\mathcal{R} \circ \mathcal{S}^{-1}}$ **(4 puntos)**

2. Sobre \mathbb{Z} se define la relación \mathcal{R} , por:

$$a\mathcal{R}b \iff (\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - b = 5k)$$

(a) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia. **(5 puntos)**

(b) Calcule la clase de equivalencia de 2. **(1 punto)**

(c) Calcule el conjunto cociente \mathbb{Z}/\mathcal{R} . **(2 puntos)**

3. Considere las relaciones \mathcal{R} de A en B , \mathcal{S} de B en C y \mathcal{T} de A en C . Si se sabe que $(a, z) \in G_{\mathcal{R}}$ y $(y, z) \in G_{\mathcal{S}}$, y que \mathcal{S} es simétrica, demuestre que $(a, y) \in G_{(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \cup \mathcal{T}}$ **(4 puntos)**
4. Considere la función biyectiva $f: \mathbb{R} - \{4\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{5\}$ definida por $f(x) = \frac{5x-21}{x-4}$.
- (a) Verifique que $(f \circ f)(x) = f^{-1}(x)$. **(4 puntos)**
- (b) Calcule $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{92 \text{ veces}}(x)$. **(2 puntos)**
5. Sea $B = \{1, 5, 9\}$. Considere la función $f: P(B) \rightarrow \mathbb{Z}$ de manera que $f(X) = |X|$.
- (a) Determine si f es inyectiva y si es sobreyectiva. **(2 puntos)**
- (b) Calcule $f^{-1}(f(\{9, 5\}))$. **(2 puntos)**
6. Sean $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ dos funciones. Si se cumple que $\forall x \in A, (g \circ f)(x) = x$
- (a) Demuestre que f es inyectiva. **(2 puntos)**
- (b) Demuestre que g es sobreyectiva. **(2 puntos)**