INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

9 de junio de 2008
Total: 29 puntos
Tiempo: 2 h. 20 m.

TERCER EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que la igualdad

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

es válida para todo $n \geq 3$, con n número natural. Además, utilice esta fórmula para calcular el valor exacto de

$$10 \cdot 11 + 11 \cdot 12 + 12 \cdot 13 + \cdots + 1190$$

(6 puntos)

2. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $7^{2n} + 16n - 1$ es divisible por 64, para todo $n \geq 1$, con n número natural. (4 puntos)

3. Considere la sucesión a_n definida por $a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} - 8a_{n-3}$, si $n \geq 3$, con $a_0 = 8$, $a_1 = -6$, $a_2 = 24$

   (a) Utilice ésta fórmula para encontrar el valor de a_4. (1 punto)

   (b) Determine la fórmula explícita para esta relación y utilice esta fórmula para encontrar el valor de a_4. (4 puntos)

4. Suponga que la fórmula explícita asociada a la relación de recurrencia homogénea a_n, para $n \geq 1$, es:

$$a_n = 3(-1)^n - n(-1)^n - 4$$

Determine la fórmula recursiva de esta sucesión. (3 puntos)

5. En $\mathbb{R}^*$ se define la operación $\otimes$ como:

$$a \otimes b = 5ab$$

   (a) Pruebe que $(\mathbb{R}^*, \otimes)$ es un grupo abeliano. (4 puntos)

   (b) Calcule el valor exacto de $[3^{-2} \otimes 1^3] \otimes 4^2$ (2 puntos)

6. Considere el conjunto $\mathbb{Z}_7^*$, con la operación interna $\odot$ como la multiplicación usual de clases de equivalencia.

   (a) Determine el elemento neutro y los inversos de cada elemento del grupo $(\mathbb{Z}_7^*, \odot)$. (2 puntos)

   (b) Determine todos los subgrupos del grupo $(\mathbb{Z}_7^*, \odot)$. (3 puntos)