$\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica	$\mathcal{T}$iempo: 2 horas
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática	$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 33 puntos
$\mathcal{Á}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación	$\mathcal{J}$unio de 2013

$\mathcal{III}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial (Solución)

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo; por lo tanto, debe presentar **todos** los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes apelaciones sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Sea $\mathcal{T} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{T}\left(a + bx + cx^2\right) = (2b - c, a, c - 2a - 2b)$

   (a) Verifique que $\mathcal{T}$ es una transformación lineal. (3 pts)

   Solución

   Sean $a + bx + cx^2, a_1 + b_1x + c_1x^2 \in P_2(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{T}\left(\alpha\left(a + bx + cx^2\right) + a_1 + b_1x + c_1x^2\right) \\
= \ & \mathcal{T}\left(\alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2 + a_1 + b_1x + c_1x^2\right) \\
= \ & \mathcal{T}\left((\alpha a + a_1) + (\alpha b + b_1)x + (\alpha c + c_1)x^2\right) \\
= \ & \left(2(\alpha b + b_1) - (\alpha c + c_1), \alpha a + a_1, (\alpha c + c_1) - 2(\alpha a + a_1) - 2(\alpha b + b_1)\right) \\
= \ & (2\alpha b + 2b_1 - \alpha c - c_1, \alpha a + a_1, \alpha c + c_1 - 2\alpha a - 2a_1 - 2\alpha b - 2b_1) \\
= \ & (2\alpha b - \alpha c, \alpha a, \alpha c - 2\alpha a - 2\alpha b) + (2b_1 - c_1, a_1, c_1 - 2a_1 - 2b_1) \\
= \ & \alpha(2b - c, a, c - 2a - 2b) + (2b_1 - c_1, a_1, c_1 - 2a_1 - 2b_1) \\
= \ & \alpha\mathcal{T}\left(a + bx + cx^2\right) + \mathcal{T}\left(a_1 + b_1x + c_1x^2\right)
\end{aligned}
$$

   (b) Obtenga el núcleo de $\mathcal{T}$ y la nulidad de $\mathcal{T}$. (4 pts)

   Solución

   Sea $a + bx + cx^2 \in Nucl(\mathcal{T})$

   Como $a + bx + cx^2 \in Nucl(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{T}\left(a + bx + cx^2\right) = (0, 0, 0)$

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{T}\left(a + bx + cx^2\right) = 0 \\
\Rightarrow \ & (2b - c, a, c - 2a - 2b) = (0, 0, 0) \\
\Rightarrow \ & \begin{cases} 2b - c = 0 \\ a = 0 \\ c - 2a - 2b = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow \ & c = 2b
\end{aligned}
$$

De esta manera, $Nucl\left(\mathcal{T}\right)=\left\{bx+2bx^2/b\in\mathbb{R}\right\}$
Una base de $Nucl\left(\mathcal{T}\right)$ es el conjunto $\mathcal{B}=\{x+2x^2\}$; así, nulidad de $\mathcal{T}$ es 1.

(c) Obtenga el rango de $\mathcal{T}$ y una base de la imagen de $\mathcal{T}$. (4 pts)

Solución

Como la nulidad de $\mathcal{T}$ es 1, se tiene que el rango de $\mathcal{T}$ es igual a 2 (note que la dimensión del dominio es 3).

Dado que una base del núcleo de $\mathcal{T}$ es $\mathcal{B}=\{x+2x^2\}$, a partir de esta se puede obtener una base para el dominio.

El conjunt$\mathcal{B}_1=\{x+2x^2,1,x\}$ es una base del domio (fueron agregados los vectores 1 y x). El conjunto $\mathcal{B}_2=\{\mathcal{T}\left(1\right),\mathcal{T}\left(x\right)\}=\{(0,1,-2),(2,0,-2)\}$ es una base de la imagen de $\mathcal{T}$.

2. Sea $\mathcal{T}:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ una transformación lineal. Demuestre que si el núcleo de $\mathcal{T}$ es $\left\{\mathbf{0}_{\mathcal{V}}\right\}$ entonces $\mathcal{T}$ es inyectiva. (3 pts)

Solución

Para probar que $\mathcal{T}$ es inyectiva, hay que demostrar que si $\mathcal{T}\left(x\right)=\mathcal{T}\left(y\right)$, entonces $x=y$.

Se tiene como hipótesis que la única preimagen de $0_{\mathcal{W}}$ es $0_{\mathcal{V}}$

Veamos: sean $x,y\in\mathcal{V}$, tales que $\mathcal{T}\left(x\right)=\mathcal{T}\left(y\right)$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{T}\left(x\right)=\mathcal{T}\left(y\right)\\
\Rightarrow\ & \mathcal{T}\left(x\right)-\mathcal{T}\left(y\right)=0_{\mathcal{W}}\\
\Rightarrow\ & \mathcal{T}\left(x-y\right)=0_{\mathcal{W}}\\
\Rightarrow\ & x-y=0_{\mathcal{V}}\\
\Rightarrow\ & x=y
\end{aligned}$$

3. Sea $\mathcal{T}:\mathcal{P}_2\left(\mathbb{R}\right)\to\mathcal{P}_2\left(\mathbb{R}\right)$, tal que $\mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right)=\left(3b+a\right)+\left(a+b-c\right)x+\left(c+2b\right)x^2$ una transformación lineal.

(a) Determine si $\mathcal{T}$ es inyectiva o no lo es. Justifique. (2 pts)

Solución

Hay que recordar que $\mathcal{T}$ es inyectiva si, y solo si, su núcleo está conformado únicamente por el vector nulo.

Sea $a+bx+cx^2\in Nucl\left(\mathcal{T}\right)$

Como $a+bx+cx^2\in Nucl\left(\mathcal{T}\right)\Rightarrow\mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right)=0$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{T}\left(a+bx+cx^2\right)=0\\
\Rightarrow\ & \left(3b+a\right)+\left(a+b-c\right)x+\left(c+2b\right)x^2=0
\end{aligned}$$

Si $x = 0$ se tiene que $3b + a = 0$
Al derivar en ambos miembros de la igualdad $(3b + a)+(a + b - c)\, x+(c + 2b)\, x^2 = 0$, se obtiene $a + b - c + 2\,(c + 2b)\, x = 0$
Evaluando nuevamente en $x = 0$ se tiene $a + b - c = 0$
Al derivar en ambos miembros de la igualdad $a + b - c + 2\,(c + 2b)\, x = 0$, se obtiene $2\,(c + 2b) = 0$

Así, debe cumplirse que $\begin{cases} 3b + a = 0 \\ a + b - c = 0 \\ 2\,(c + 2b) = 0 \end{cases}$

Utilizando el método de Gauss–Jordan, se tiene que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3c}{2} \\ \\ b = \dfrac{-c}{2} \end{cases}$$

De esta manera, $Nucl\,(\mathcal{T}) = \left\{ \dfrac{3c}{2} - \dfrac{c}{2}x + cx^2 / c \in \mathbb{R} \right\}$ y se concluye que $\mathcal{T}$ no es inyectiva.

(b) Calcule todas las preimágenes de $p\,(x) = 2 + 2x^2$ (3 pts)
Sea $a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2\,(\mathbb{R})$, tal que $\mathcal{T}\left(a + bx + cx^2\right) = 2 + 2x^2$

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}\left(a + bx + cx^2\right) = 2 + 2x^2 \\ \Rightarrow\ & (3b + a) + (a + b - c)\, x + (c + 2b)\, x^2 = 2 + 2x^2 \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} 3b + a = 2 \\ a + b - c = 0 \\ c + 2b = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Utilizando el método de Gauss–Jordan, se tiene que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 + \dfrac{3c}{2} \\ \\ b = 1 + \dfrac{-c}{2} \end{cases}$$

Luego, todas las preimágenes del vector $2 + 2x^2$ son los polinomios de la forma $-1 + \dfrac{3c}{2} + \left(1 + \dfrac{-c}{2}\right) x + cx^2$, con $c \in \mathbb{R}$.

4. Sean $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to P_1(\mathbb{R})$ una transformación lineal, tal que $\mathcal{T}(a,b,c) = (b+c) + (a+b)x$, $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}_2 = \{1-x, x\}$ una base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ y w un vector de $\mathbb{R}^3$, tal que $[w]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   (a) Obtenga la matriz para $\mathcal{T}$ asociada a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$; es decir, $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ (4 pts)

   Solución

   $\mathcal{T}(1,0,1) = 1 + x = 1 \cdot (1-x) + 2 \cdot x$

   $\mathcal{T}(1,1,0) = 1 + 2x = 1 \cdot (1-x) + 3 \cdot x$

   $\mathcal{T}(1,0,0) = x = 0 \cdot (1-x) + 1 \cdot x$

   Luego, se tiene que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) Calcule $\mathcal{T}(w)$ sin utilizar la matriz $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ (2 pts)

   Solución

   Como $[w]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ se tiene que $w = -1 \cdot (1,0,1) + 2 \cdot (1,1,0) + 3 \cdot (1,0,0)$; así, $w = (4,2,-1) \Rightarrow \mathcal{T}(w) = \mathcal{T}(4,2,-1) = 1 + 6x$.

   (c) Calcule $\mathcal{T}(w)$ utilizando la matriz $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ (2 pts)

   Solución

   Se tiene que $[\mathcal{T}(w)]_{B_2} = [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \cdot [w]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

   Luego, $\mathcal{T}(w) = 1 \cdot (1-x) + 7 \cdot x = 1 - x + 7x = 1 + 6x$.

5. Considere la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Compruebe que $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ son los únicos valores propios de A. (3 pts)

   Solución

   Si λ es un valor propio de la matriz A se cumple que:

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)\cdot[-\lambda(3-\lambda)-1\cdot -2]=0\\
&\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1)=0
\end{aligned}$$

De esta manera, los únicos valores propios de A son $\lambda = 2$ y $\lambda = 1$.

(b) Determine una base del espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$. (3 pts)

Solución

Sea $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 2$.

Se busca u de manera que se satisfaga $Au = \lambda u$

$$\begin{aligned}
&Au = \lambda u\\
\Rightarrow \quad &\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\\
\Rightarrow \quad &\begin{pmatrix} -2c \\ a+2b+c \\ a+3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix}\\
\Rightarrow \quad &\begin{cases} -2c = 2a \\ a+2b+c = 2b \\ a+3c = 2c \end{cases}\\
\Rightarrow \quad &\begin{cases} -2a-2c = 0 \\ a+c = 0 \\ a+c = 0 \end{cases}\\
\Rightarrow \quad &a = -c
\end{aligned}$$

Así, E_2 (el espacio propio de A asociado al valor propio $\lambda = 2$) está dado por $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -c \\ b \\ c \end{pmatrix} / b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de E_2 (note que son dos vectores no múltiplos que generan a dicho espacio).