

TERCER EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que la desigualdad

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

es válida para todo $n \geq 1$, con n número natural. Además, calcule el valor exacto de

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{399}$$

(5 puntos)

2. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $3^{2n} + 7^{2n} + 6$ es divisible por 8, para todo $n \geq 1$, con n número natural. (4 puntos)

3. Considere $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, si $n \geq 2$, con $a_0 = 3$, $a_1 = -8$

(a) Utilice ésta fórmula para encontrar el valor de a_5 . (1 punto)

(b) Determine la fórmula explícita para esta relación y utilice esta fórmula para encontrar el valor de a_5 . (4 puntos)

4. Determine la fórmula por recurrencia de la relacion a_n , cuya fórmula explícita es $a_n = 5 + (-2)^n - 2^n$ para $n \geq 0$.

(2 puntos)

5. Si $P(E)$ denota el conjunto de partes de E , con E no vacío. Sobre este conjunto se define la operación $A * B = A \cap B$, analice las propiedades que cumple $(P(E), *)$ e indique qué tipo de estructura es.

(3 puntos)

6. En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación \otimes como

$$(a, b) \otimes (c, d) = (a + c - 4, 2bd)$$

- (a) Pruebe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ es grupo abeliano. (4 puntos)

- (b) Calcule $(2, -1)^2 \otimes \left[\left(0, \frac{1}{3}\right) \otimes (1, -1)^{-1} \right]$ (2 puntos)

7. Construya la tabla de operación para el grupo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \odot)$ y determine el elemento neutro y los inversos de cada elemento del grupo. Además, determine todos los subgrupos del grupo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \odot)$.

(4 puntos)