Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
Álgebra Lineal para Computación

Tiempo: 2 horas
Puntaje Total: 32 puntos
Octubre de 2015

Gr=
campo = Primero Abeliano - Distri
(C*,·) abeliano

II Examen Parcial

+ ≡ USUALES
· ≡

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, debe presentar todos los pasos y procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No son procedentes las apelaciones que se realicen sobre exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

Anillo
↓
Aso segundo
Primero grupo
Distri segundo

1. Sea $(G, *)$ algún grupo cuyo elemento neutro es e; para $a \in G$ se dice que a es un *elemento involutivo* de $(G, *)$ si $a^2 = e$. Si se sabe que $(\mathbb{Z}_4, +)$ es grupo abeliano:
   (a) Halle x', $\forall x \in \mathbb{Z}_4$. (3 pts)
   (b) Detetermine todos los elementos involutivos de $(\mathbb{Z}_4, +)$. (3 pts)

2. Si se sabe que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \circledcirc)$ es grupo abeliano, tal que $\forall (x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,
$$(x, y) \circledcirc (z, w) = (-5xz, y + 3 + w)$$
   (a) Determine el elemento neutro de $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \circledcirc)$. (2 pts)
   (b) Determine el elemento simétrico de todo elemento (a, b) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. (2 pts)
   (c) Resuelva la ecuación $(-2, 3) \circledcirc (x, y) = (-1, 0)$. (2 pts)

3. Sea $(G, *)$ algún grupo cuyo elemento neutro es e; demuestre que:
   (a) e es único. (3 pts)
   (b) $\forall a, b \in G,\ (a * b)' = b' * a'$. (3 pts)

4. Sea $(H, *)$ algún grupo cuyo elemento neutro es e. Demuestre que si $\forall a \in H,\ a = a'$ entonces $(H, *)$ es abeliano. (3 pts)

5. Sea $(F, \oslash, \ominus)$ una estructura algebraica, tal que F es cerrado bajo $\oslash$ y bajo $\ominus$. Si además $(F, \oslash)$ es grupo, $\ominus$ es conmutativa en F y F^* posee elemento simétrico para cada uno de sus elementos bajo $\ominus$, determine cuáles propiedades hacen falta para que $(F, \oslash, \ominus)$ sea campo. (4 pts)

6. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \Big/ x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Si se sabe que $(H, +)$ es subgrupo de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$, conteste lo que se pide en cada caso:
   (a) Demuestre que $(H, +, \cdot)$ es anillo conmutativo con unidad. (4 pts)
   (b) ¿Posee $(H, +, \cdot)$ divisores de cero? Justifique. (3 pts)

OPCIONAL Si se sabe que $(G, *)$ es algún grupo cuyo elemento neutro es e y $m \in G$, con m fijo, demuestre que H es subgrupo de G, donde $H = \{w \in G \ / \ w * m = m * w\}$. (4 pts)