$\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{A}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática

$\mathcal{P}$ráctica $\mathcal{G}$eneral
$\mathcal{E}$spacios $\mathcal{V}$ectoriales (Parte I)

1. Basados en las operaciones *adición* y *multiplicación escalar* que se definen, respectivamente, determine, para cada uno de los casos, si $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\mathbb{R}\right)$ es un espacio vectorial o no lo es.

   (a) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)\,;\quad \delta\,(x, y) = (\delta x, 0)$

   (b) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)\,;\quad \delta\,(x, y) = (\delta x, \delta y)$

   (c) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + y_1|\,, |x_2 + y_2|)\,;\quad \delta\,(x, y) = (|\delta x|\,, |\delta y|)$

2. Considere algún espacio vectorial $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R})$. Demuestre, $\forall x, y \in \mathcal{V}$, $\forall \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, cada una de las propiedades siguientes:

   (a) $0\,x = \mathbf{0}$

   (b) $\lambda\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$

   (c) $(-\lambda)\,x = -\,(\lambda\,x)$

   (d) $\lambda\,(-x) = -\,(\lambda\,x)$

   (e) $(-\lambda)\,(-x) = \lambda\,x$

   (f) $\alpha\,x - \lambda\,x = (\alpha - \lambda)\,x$

   (g) $\lambda\,x - \lambda\,y = \lambda\,(x - y)$

   (h) $\delta\,x = \mathbf{0} \Rightarrow \delta = 0 \ \vee\ x = \mathbf{0}$ (ó ambos)

   (i) $\delta\,x = \delta\,y \ \wedge\ \delta \neq 0 \Rightarrow x = y$

   (j) $\delta\,x = \lambda\,x \ \wedge\ x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \delta = \lambda$

3. Demuestre que un subconjunto $\mathcal{W}$ de algún espacio vectorial $(\mathcal{V}, + \cdot \mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ si, y sólo si, $\mathcal{W} \neq \varnothing$, $x + y \in \mathcal{W}$ y $\delta x \in \mathcal{W}$, $\forall x, y \in \mathcal{W}, \forall \delta \in \mathbb{R}$.

4. Sean $(\mathcal{V}, + \cdot \mathbb{R})$ algún espacio vectorial y $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Demuestre que $\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ si, y sólo si, $\mathbf{0} \in \mathcal{W}$ y $\delta x + y \in \mathcal{W}, \forall x, y \in \mathcal{W}, \forall \delta \in \mathbb{R}$.

5. Considere la *adición* y la *multiplicación escalar* definidas en $\mathbb{R}^n$ y determine, para cada uno de los casos, si $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R})$ corresponde con un espacio vectorial o no.

   (a) $\mathcal{V} = \left\{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \big/ a = b, a + c = 1, 2d - e = 0\right\}$

   (b) $\mathcal{V} = \left\{(a, 0, a + b, b, a - b) \big/ a, b \in \mathbb{R}\right\}$

   (c) $\mathcal{V} = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \big/ a + b - c = 0, -2a - b + 3c = 0\right\}$

6. Considere la *adición* y la *multiplicación escalar* definidas en $\mathcal{C}[a, b]$ y determine, para cada uno de los casos, si $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R})$ corresponde con un subespacio de $\mathcal{C}[a, b]$ o no.

   (a) $\mathcal{V} = \left\{f \in \mathcal{C}[a, b] \big/ f(a) = f(b)\right\}$

   (b) $\mathcal{V} = \left\{f \in \mathcal{C}[a, b] \big/ f(-x) = f(x), \forall x \in [a, b]\right\}$

   (c) $\mathcal{V} = \left\{f \in \mathcal{C}[a, b] \big/ \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0\right\}$

   (d) $\mathcal{V} = \left\{f \in \mathcal{C}[a, b] \big/ \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 1\right\}$

7. Considere la *adición* y la *multiplicación escalar* definidas en $\mathbb{R}^n$ y determine lo que se pide en cada caso:

   (a) Verifique que $\mathcal{W}_1 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \Big/ a - 4b - c = 0\right\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Verifique que $\mathcal{W}_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \Big/ 2a - 7b + c = 0\right\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Determine el conjunto $\mathcal{H} = \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ y verifique que $\mathcal{H}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

8. Sean $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ dos subespacios de $\mathbb{R}^3$, tales que $\mathcal{W}_1 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \Big/ a - b + 2c = 0\right\}$ y $\mathcal{W}_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \Big/ 2a - 3b + c = 0\right\}$. Responda a lo que se pide en cada caso:

   (a) Determine el conjunto $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ y verifique que $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   (b) ¿Si $u, v \in \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$, entonces $u + v \in \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$? Justifique.

9. Sea $\mathcal{V} = \left\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Big/ A \text{ es invertible}\right\}$. En $\mathcal{V}$ se definen las operaciones *adición* y *multiplicación escalar* de la manera siguiente: $\forall A, B \in \mathcal{V}, \forall \delta \in \mathbb{R}, A + B = AB, \delta \cdot A = \delta A$ ¿Es $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R})$ un espacio vectorial? Justifique.

10. Si $\mathcal{W} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ ax + by + cz = 0, \text{ con } a, b \text{ y } c \text{ números reales fijos}\right\}$, demuestre que $\mathcal{W}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

11. Sea $\mathcal{W} = \left\{(x, y, y - x) \in \mathbb{R}^3 \Big/ y \geq 0\right\}$ ¿Es $\mathcal{W}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? Justifique.

12. Si $\mathcal{W} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ ax + by = 1, \text{ con } a \text{ y } b \text{ constantes reales}\right\}$ ¿Es $\mathcal{W}$ subespacio de $\mathbb{R}^2$? Justifique.

13. Si $\mathcal{W} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ ax + by = 0, \text{ con } a \text{ y } b \text{ constantes reales}\right\}$ ¿Es $\mathcal{W}$ subespacio de $\mathbb{R}^2$? Justifique.

14. Demuestre que los únicos subespacios de $(\mathbb{R}, +, \cdot\mathbb{R})$ son $(\mathbb{R}, +, \cdot\mathbb{R})$ y $\left(\left\{0\right\}, +, \cdot\mathbb{R}\right)$.

15. Sea $\mathcal{W} = \left\{\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{R}\right\}$. Demuestre que $\mathcal{W}$ es subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Definición 1 (suma)
Si $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subconjuntos no vacíos de algún espacio vectorial $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R})$, la suma de $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$, denotada por $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$, está definida como: $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \left\{v_1 + v_2 \Big/ v_1 \in \mathcal{W}_1, v_2 \in \mathcal{W}_2\right\}$

16. Con base en la definición 1, demuestre que si $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subespacios de $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ también es un subespacio de $\mathcal{V}$.

Definición 2 (suma directa)
Un espacio vectorial $\mathcal{V}$ es llamado la suma directa de $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$, si $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subespacios de $\mathcal{V}$, tales que $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \left\{\boldsymbol{0}\right\}$ y $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{V}$; en este caso, se escribe $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.

17. Considere los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ que se enuncian y, con base en las definiciones 1 y 2, realice lo que se pide en cada caso.

$$\mathcal{W}_1 = \left\{(a, b, -a-b) \Big/ a, b \in \mathbb{R}\right\} \qquad \mathcal{W}_2 = \left\{(a, b, a) \Big/ a, b \in \mathbb{R}\right\} \qquad \mathcal{W}_3 = \left\{(0, 0, a) \Big/ a \in \mathbb{R}\right\}$$

   (a) Verifique que $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_3$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_3$ y $\mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3$.

(c) De las tres sumas realizadas en el inciso anterior ¿Cuál o cuáles corresponde(n) con suma directa?

18. Considere en $\mathbb{R}^3$ los vectores $u_1 = (1, -1, 3)$, $u_2 = (2, 4, 0)$, $u_3 = (4, 2, 6)$ y $u_4 = (1, 5, 6)$.

    (a) Exprese (si es posible) u_3 como combinación lineal de u_1 y u_2.

    (b) ¿$u_4 \in \mathcal{G}en\left(\{u_1, u_2\}\right)$?

19. Considere los vectores $p(x), q(x), r(x)$ y $s(x)$, definidos por:

$$p(x) = 4x^2 + x + 2,\ q(x) = 3x^2 - x + 1,\ r(x) = 5x^2 + 2x + 3 \text{ y } s(x) = 5x^2 + 9x + 5$$

    ¿$s(x) \in \mathcal{G}en\left(\{p(x), q(x), r(x)\}\right)$?

20. Considere los vectores A, B, C, D y E definidos por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$$

    (a) ¿$D \in \mathcal{G}en\left(\{A, B, C\}\right)$?

    (b) ¿$E \in \mathcal{G}en\left(\{A, B, C\}\right)$?

21. Para cada uno de los casos que se enuncian, determine si los vectores u, v y w generan $\mathbb{R}^3$ o no.

    (a) $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 2, 0)$ y $w = (3, 0, 0)$

    (b) $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ y $w = (1, 0, 1)$

    (c) $u = (2, -1, 3)$, $v = (4, 1, 2)$ y $w = (8, -1, 8)$

22. Considere el conjunto $\mathcal{B} = \{(k-2, 1, -1), (2, -k, 4), (8, -11, 1+k)\}$ ¿Para qué valor o valores de k se cumple que $\mathcal{B}$ es $l.d$?

23. Sean $\mathcal{S} = \{(1, 1, 9, -4), (2, -1, 3, 2), (-1, 1, 1, -3)\}$ y $u = (a, b, 0, -1)$. Determine el valor o los valores de los parámetros a y b, de manera que se cumpla que $u \in \mathcal{G}en(\mathcal{S})$.

24. Para cada uno de los casos que se enuncian, determine si el conjunto $\mathcal{B}$ es $l.d$ o $l.i$.

    (a) $\mathcal{B} = \{(1, -2, 3), (2, -2, 0), (0, 1, 7)\}$

    (b) $\mathcal{B} = \left\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\right\}$

    (c) $\mathcal{B} = \{(-1, 2), (2, 0), (0, 3)\}$

    (d) $\mathcal{B} = \{(1, -3, 0), (11, -6, 12)\}$

    (e) $\mathcal{B} = \left\{x - 2x^2, x^2 - 4x, 8x^2 - 7x\right\}$

    (f) $\mathcal{B} = \{(4, 4, 0, 0), (0, 0, 6, 6), (-5, 0, 5, 5)\}$

    (g) $\mathcal{B} = \left\{3 - x, 2x(x-1), x^2 - 1, 3\left(2 - x^2\right), x + 2\right\}$

25. Suponga que u, v y w son vectores $l.i$ de algún espacio vectorial $\mathcal{V}$. Determine si los vectores x, y y z definidos en cada caso son $l.d$ o $l.i$.

    (a) $x = u + v - 3w$, $y = u + 3v - w$ y $z = v + w$

    (b) $x = u + v - 2w$, $y = u - v - w$ y $z = u + w$

    (c) $x = u$, $y = u + v$ y $z = u + v + w$

26. Sean $(\mathcal{V}, +, \cdot\mathbb{R})$ algún espacio vectorial y $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un subconjunto de $\mathcal{V}$, tal que $\mathcal{S}$ es $l.i$. Si $v \in \mathcal{V}$, tal que $v \notin \mathcal{G}en(\mathcal{S})$, demuestre que el conjunto $\mathcal{S}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v\}$ es $l.i$.