INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *Verano de 2010-11*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 37 puntos*
ÁLGEBRA LINEAL PARA COMPUTACIÓN — *Tiempo: 2 h. 30 m.*

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (Práctica)

1. Considere el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_8, +)$.
   (a) Determine el elemento neutro, los inversos de cada elemento del grupo, los elementos involutivos y los elementos idempotentes. **(2 puntos)**
   (b) Calcule todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}_8, +)$. **(3 puntos)**

2. En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación $\otimes$ como:
$$(a, b) \otimes (c, d) = (a + c - 1, 2bd)$$
   Si se sabe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ es grupo abeliano.
   (a) Determine la fórmula explícita de $(a, b)^{-1}$ **(2 puntos)**
   (b) Calcule el valor exacto de $(3, -1)^{-2} \otimes (1, 2)^3$ **(2 puntos)**
   (c) Si $H = \left\{(1, t) \ / \ t \in \mathbb{R}^*\right\}$, pruebe que $(H, \otimes) < (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ **(2 puntos)**

3. Sea $W \subset \mathbb{R}^4$ el espacio solución del siguiente sistema lineal homogéneo:
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$
   Encuentre una base para W y determine la dimension de W. **(4 puntos)**

4. Sea $p(x) = -2x^2 + 3x + 1$ un vector del espacio vectorial P_2. Exprese a p como combinación lineal de los vectores $x^2 - 2x + 3$, $3x^2 - x + 1$, $-x + 2$. **(4 puntos)**

5. Sea $\{u, v, w\}$ una base para el espacio vectorial V. Determine si el conjunto $\{v + 2w - 2u, w + 2v + u, v + 3u - w\}$ es o no, base de V. **(4 puntos)**

6. Considere el subespacio de P_3 dado por $H = \{p \in P_3 \ / \ p''(1) = 0 \wedge p'(2) = 0\}$. Determine una base de H y calcule su dimensión. **(4 puntos)**

7. Sea $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} : a + c - 2d = 0 \wedge 3a + 2c + d = 0\right\}$
   (a) Pruebe que W es subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$. **(4 puntos)**
   (b) Determine una base de W y calcule su dimensión. **(2 puntos)**

8. Sean V algún espacio vectorial y $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un subconjunto de V, tal que S es linealmente independiente. Si $x \in V$, tal que $x \notin Gen(S)$, demuestre que el conjunto $H = \{x, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es, también, linealmente independiente. **(4 puntos)**