

Prácticas, soluciones y exámenes resueltos de Matemática General

Cristhian Páez Páez (edición final)

Índice

1	Presentación	2
2	Números Reales	3
3	Expresiones Algebraicas	7
4	Ecuaciones Algebraicas	14
5	Inecuaciones Algebraicas	20
6	Valor Absoluto	24
7	Geometría	26
8	Funciones Algebraicas	33
9	Ecuaciones y Funciones Exponenciales y Logarítmicas	44
10	Ecuaciones y Funciones Trigonométricas	49
11	Exámenes Resueltos	58
12	Soluciones	85
12.1	Números Reales	85
12.2	Expresiones Algebraicas	85
12.3	Ecuaciones Algebraicas	89
12.4	Inecuaciones Algebraicas	91
12.5	Valor Absoluto	93
12.6	Geometría	94
12.7	Funciones Algebraicas	96
12.8	Ecuaciones y Funciones Exponenciales y Logarítmicas	106
12.9	Ecuaciones y Funciones Trigonométricas	113

1 Presentación

Desde el primer semestre del año 2004 diferentes cátedras que han impartido el curso Matemática General han estado trabajando en la recopilación, creación y revisión de ejercicios y problemas relacionados con dicho curso.

Los ejercicios y problemas se presentan en nueve secciones: Números Reales, Expresiones Algebraicas, Ecuaciones Algebraicas, Inecuaciones Algebraicas, Valor Absoluto, Geometría, Funciones Algebraicas, Ecuaciones y Funciones Exponenciales y Logarítmicas y, por último, Ecuaciones y Funciones Trigonómicas.

La recopilación de ejercicios y problemas se ha realizado basados en el temario del curso y enfocados en los objetivos que en dicho curso se enuncian. Cada una de estas listas de ejercicios cuenta con las soluciones respectivas de los mismos; dichas soluciones, han sido verificadas por profesores de la Escuela de Matemática.

Quien ha tenido a cargo la edición y última revisión de los listados de ejercicios, problemas y soluciones ha sido el profesor Cristhian Páez Páez; sin embargo, es importante destacar la cooperación de otros profesores de la Escuela que han ayudado en este proceso.

Números Reales: Alexander Borbón Alpízar, Luis Carrera Retana y Geovanny Sanabria Brenes.

Expresiones Algebraicas: Alexander Borbón Alpízar y Luis Carrera Retana.

Ecuaciones Algebraicas: Félix Núñez Vanegas, Cristhian Páez Páez y Geovanny Sanabria Brenes.

Inecuaciones Algebraicas: Evelyn Agüero Calvo, Cristhian Páez Páez, Greivin Ramírez Arce y Geovanny Sanabria Brenes.

Valor Absoluto: Evelyn Agüero Calvo, Félix Núñez Vanegas, Cristhian Páez Páez, Greivin Ramírez Arce y Geovanny Sanabria Brenes.

Geometría: Isabel Aguilar Díaz, Randall Brenes Gómez, Cristhian Páez Páez, Sandra Schmidt Quesada y Marieth Villalobos Jiménez (quien fue asistente de la Revista Virtual Matemática Educación e Internet y colaboró con parte de la edición).

Funciones Algebraicas: Paulo García Delgado, Xenia Madrigal García, Cristhian Páez Páez y Rosalinda Sanabria Monge.

Funciones y Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas: Cristhian Páez Páez.

Funciones y Ecuaciones Trigonómicas: Paulo García Delgado, Xenia Madrigal García, Cristhian Páez Páez, Rosalinda Sanabria Monge y Marieth Villalobos Jiménez (quien fue asistente de la Revista Virtual Matemática Educación e Internet y colaboró con parte de la edición).

Es importante mencionar el aporte que los encargados del proyecto Revista Virtual Matemática Educación e Internet han dado, principalmente, la asignación de asistentes para la edición de algunas de las secciones.

También se agradece a los profesores Alexander Borbón, Jeffry Chavarría y José Luis Espinoza por sus sugerencias y aportes realizados a la pre-impresión del folleto.

2 Números Reales

I. Para cada demostración que se enuncia, identifique las propiedades de los números reales que se utilizan en cada renglón:

1) Demuestre que $\frac{a}{1 - \frac{1}{b}} = \frac{ab}{b - 1}$

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{1 - \frac{1}{b}} &= \frac{a}{1 + \frac{-1}{b}} \\
 &= \frac{a}{bb^{-1} + \frac{-1}{b}} \\
 &= \frac{a}{bb^{-1} + -1 \cdot \frac{1}{b}} \\
 &= \frac{a}{b \cdot b^{-1} + -1 \cdot b^{-1}} \\
 &= \frac{a}{(b + -1) b^{-1}} \\
 &= a \cdot \frac{1}{(b + -1) b^{-1}} \\
 &= a \left((b + -1) b^{-1} \right)^{-1} \\
 &= a \left((b - 1) b^{-1} \right)^{-1} \\
 &= a \left((b - 1)^{-1} (b^{-1})^{-1} \right) \\
 &= a \left((b - 1)^{-1} b \right) \\
 &= a \left(b (b - 1)^{-1} \right) \\
 &= ab \left(b - 1 \right)^{-1} \\
 &= ab \cdot \frac{1}{b - 1} \\
 &= \frac{ab}{b - 1}
 \end{aligned}$$

2) Pruebe que $\left(b^{-1}\right)^{-1} = b$

$$\begin{aligned}
 \left(b^{-1}\right)^{-1} &= b \\
 \Leftrightarrow \left(b^{-1}\right)^{-1} b^{-1} &= bb^{-1} \\
 \Leftrightarrow 1 &= 1
 \end{aligned}$$

3) Pruebe que $a(b + (a - b)) = a^2$

$$\begin{aligned}
 a(b + (a - b)) &= a(b + (a + -b)) \\
 &= a(b + (-b + a)) \\
 &= a((b + -b) + a) \\
 &= a(0 + a) \\
 &= aa \\
 &= a^2
 \end{aligned}$$

4) Demuestre que $a + (b(a \div b)) = a + a$

$$\begin{aligned}
 a + (b(a \div b)) &= a + (b(ab^{-1})) \\
 &= a + (b(b^{-1}a)) \\
 &= a + ((bb^{-1})a) \\
 &= a + (1a) \\
 &= a + a
 \end{aligned}$$

5) Demuestre que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

$$\begin{aligned}
 (ab)^{-1} &= a^{-1} \cdot b^{-1} \\
 \Leftrightarrow (ab)^{-1}ab &= (a^{-1}b^{-1})ab \\
 \Leftrightarrow 1 &= (a^{-1}b^{-1})ab \\
 \Leftrightarrow 1 &= (a^{-1}b^{-1})ba \\
 \Leftrightarrow 1 &= a^{-1}(b^{-1}(ba)) \\
 \Leftrightarrow 1 &= a^{-1}((b^{-1}b)a) \\
 \Leftrightarrow 1 &= a^{-1}(1a) \\
 \Leftrightarrow 1 &= a^{-1}a \\
 \Leftrightarrow 1 &= 1
 \end{aligned}$$

II. Efectúe las operaciones indicadas y simplifique al máximo los resultados:

$$1) \frac{\frac{3}{2} \cdot 2 - 3}{3 - 2 \div (1 + \frac{1}{4})}$$

$$2) \frac{\frac{1}{2} \div (\frac{3}{4} \div \frac{3}{2})}{(1 - \frac{1}{3}) \div (1 - \frac{1}{5})}$$

$$3) \frac{(3^4)^3 (3^2)^3}{(-3)^{15} 3^4}$$

$$4) \frac{1 + 4^2 - 2 \cdot 4^2}{6 \cdot 4^{-2} + 1 + 5 \cdot 4^{-1}}$$

$$5) \frac{(\frac{-3}{2})^2 - 3}{3 - 2 \cdot \frac{4}{5}}$$

$$6) \frac{3 \cdot 2^{-2} - 1}{2^{-2} + 1} (4^{-2} - 3)$$

$$7) \frac{4 \cdot 2^{-4} - 1}{2^{-2}} \div (2^2 4^{-2} - 3^{-1})^{-2}$$

$$8) \frac{1 - 3^{-1} - 2 \cdot 5^{-2}}{3^{-1} + 3^{-2}}$$

$$9) \frac{(3^{-2} - (-2)^{-2})^{-1}}{3 - \frac{3(-2)}{3-2}}$$

$$10) \frac{2 - (7 \cdot 5^{-2} - 3 \cdot 5^{-2})}{(3^{-1} 2)^2 - (-1)^3 - 2 \cdot 3^{-1}}$$

$$11) \frac{-3 \cdot 4^{-1} + 1 + 2 \cdot 4^{-2}}{4^{-1} - 2 \cdot 4^{-2}}$$

$$12) \frac{2^5 + 2^3 - (\frac{1}{6})^{-1}}{3 + 2^3 4} \left(\left(-\frac{3}{2} \right)^2 + 2^{-1} \right)$$

$$13) \left((-1)^2 - 2^{-3} \div \frac{1}{2} \right)^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{3} (2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) - 3^0 3^{-2}$$

$$14) \left((-3)^2 \div 9^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \right)^{-1} - \left(\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} \right) 2^{-\frac{1}{3}} - 4 \cdot 4^{-1}$$

$$15) \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}} \right)^{96} + \left(\left(\left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} \right)^2 \right)^3 \right)^9$$

$$16) \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{4096}}}$$

$$17) \frac{2 - (7 \cdot 5^{-2} - 3 \cdot 5^{-2})}{(3^{-1}2)^2 - (-1)^3 - 2 \cdot 3^{-1}}$$

$$18) \frac{5}{2} + \left(\frac{2 \cdot 3^{-2}}{2^{-1}} \right)^{-2} + \frac{-3 \cdot 4^{-1} + 1 + 2 \cdot 4^{-2}}{4^{-1} - 2 \cdot 4^{-2}}$$

$$19) \frac{1 - 3^{-1} - 2 \cdot 5^{-2}}{3^{-1} + 3^{-2}} + \frac{\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} \div \frac{3}{2}}{(1 - \frac{1}{3}) \div (1 - \frac{1}{5})}$$

$$20) \frac{\left(\frac{5}{18} - \frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2^3 + 1}}$$

$$21) \left| -2 + \frac{1}{7} \right| - \frac{3}{2} + |5^{-2} + 4| - 3^{-2}$$

$$22) \frac{(2 - 3)^3 - 3^{-1}}{2^3 4 + 1} \div \left(\left(-\frac{1}{8} \right)^{\frac{-1}{3}} - (-3)^{-3} \right)$$

III. Encuentre, en caso de existir alguno, los errores en los procedimientos siguientes:

$$1) \sqrt[20]{(-7)^{20}} - \sqrt[13]{(-2)^{13}} = -7 -^{-2} = -7 + 2 = -5$$

$$2) \frac{2^{-4} + 3^2}{4^{-2} + 2^3} = \frac{\frac{2}{4} + 9}{\frac{4}{2} + 8} = \frac{\frac{1}{2} + 9}{2 + 8} = \frac{1 + 18}{10} = \frac{19}{10}$$

$$3) 2 - 3(4 \cdot 2 + 8) = -1(16) = -16$$

$$4) \left(3^{-2} - (-2)^{-2} \right)^{-1} = 3^2 - (-2)^2 = 9 - 4 = 5$$

$$5) \frac{-2^2 + 4^{-1}}{-2^3 - 2^{-1}} = \frac{4 + \frac{1}{4}}{-8 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{17}{4}}{-\frac{17}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$6) \left(3^{-2} + (-2)^{-2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{(-2)^2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{4} \right)^{-1} = 9 + 4 = 13$$

$$7) \frac{\frac{1}{4} \div \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{-1}{3}} - 5 = \frac{\frac{12}{2}}{\frac{1}{6}} - 5 = \frac{12}{12} - 5 = 1 - 5 = -4$$

3 Expresiones Algebraicas

I. Determine el valor numérico de la expresión en cada caso:

- 1) $-2x^2 + ax - b$ si $x = -3$, $a = -2$ y $b = -7$
- 2) $3x^3 + \frac{ax}{c} + 3$ si $x = -1$, $a = 49$ y $c = 7$
- 3) $\frac{3}{5}x^3y^2z$ si $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{-3}{4}$ y $z = \frac{5}{3}$
- 4) $\frac{x^{-2} - y^{-1}}{y^{-2} + x^{-1}}$ si $x = -3$ y $y = 6$
- 5) $\frac{\left(\frac{2p+3}{p}\right)\left(1 - \frac{2}{q}\right)}{p^3 + \frac{p}{q}}$ si $p = -2$ y $q = \frac{1}{2}$
- 6) $y^{-2}z\sqrt[3]{x}$ si $x = -8$, $y = 2$ y $z = \frac{1}{4}$
- 7) $3x^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^4z - \frac{3}{4}y^2z^3$ si $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{8}$ y $z = -1$
- 8) $2\sqrt{9n} - 5\sqrt{4n} + 4\sqrt{n}$ si $n = 3$
- 9) $2\sqrt{a}\left(4\sqrt{5ab} - 5\sqrt{b}\right)$ si $a = 5$ y $b = 4$

II. Si se supone que $x > 0$, $y < 0$ y $z < 0$, determine el signo de las expresiones siguientes:

- | | | |
|----------------------|-------------------|-----------------------------|
| 1) $x - y$ | 6) $\frac{zy}{x}$ | 10) $\sqrt{-z}$ |
| 2) $y + z$ | 7) $x(y + z)$ | 11) x^{-1} |
| 3) $x - (y + z)$ | 8) $(-y)^3$ | 12) $(y + z)^{-2}$ |
| 4) $\frac{z}{y}$ | 9) $(y - x)^2$ | 13) $\sqrt[3]{-x + y}$ |
| 5) $\frac{z - x}{y}$ | | 14) $(x + z)^{\frac{2}{3}}$ |

III. Realice las operaciones indicadas y exprese el resultado en su forma más simplificada:

- 1) $(4xy - 10x^2y - 3xy^2) - (7x^2 - 5xy + 12xy^2)$
- 2) $3(x^2 - 2yz + y^2) - 4(x^2 - y^2 - 3yz) + x^2 + y^2$
- 3) $3x + 4y + x - [x - 2(y - x) - y]$
- 4) $3 - \{2x - [1 - (x + y)] + x - 2y\}$
- 5) $5a + \{3b + [6c - 2a - (a - c)]\} - [9c - (7b + c)]$
- 6) $\left(\frac{4ab}{5} + \frac{bc}{7} - \frac{2ac}{3}\right) - \left(-\frac{4ab}{5} + \frac{3bc}{14} - \frac{ac}{5}\right)$

- 7) $\frac{1}{2}(m^2 + m + 1) - (4m^2 - 4m + 2)$
- 8) $(-4xy^2w) \left(-\frac{3}{2}x^2y\right) (-5x^2y^3w)$
- 9) $6a^2 - a[2a^2 - 3(-2a - 4b)] - 3ab$
- 10) $(x + y)(x^2 - 1)$
- 11) $(2 + 3x^2b^2)(2 + 3x^2b^2)$
- 12) $(a + 4b - c)(a - 4b + c)$
- 13) $(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5)(x + a)$
- 14) $(x^2 - 5x + 6)(x - 3) - x(x^2 - 5x + 6)$
- 15) $(2a - b)[(4a + b)a + b(a + b)]$
- 16) $2(x - 3)^2 + 5(x - 3) + (x - 3)^2 - 3(x - 3)$
- 17) $3(x - y)^2(x + y) - 3(x + y)^2(x - y)$
- 18) $(a - b)^3 + (a + b)^3 + 3(a + b)(a - b)^2 + 3(a - b)(a + b)^2$
- 19) $(b^x - b^{x+1})b^{2x}$
- 20) $(x^{2-a} + x^{1+a} + 1)x^a$
- 21) $2a^x - 3a^{x-1}(a^x + 2a)$

IV. Utilice propiedades de los números reales, fórmulas notables y demás, para verificar las identidades siguientes:

- 1) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$
- 2) $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
- 3) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2]$
- 4) ¿Bajo qué condiciones se cumple que: $\frac{a^2 - m^2 + 2ab + b^2}{a^2 - m^2 + ab + mb} = \frac{a+b+m}{a+m}$?
- 5) $\frac{|a-b| - |b-a|}{2} = 0$ (Sug: Realice los casos $a > b$, $a < b$ y $a = b$)
- 6) Verifique que si $a > b > 0$ entonces: $\frac{|a-b| + |a+b|}{2} = a$
- 7) Verifique que si $b > a > 0$ entonces: $\frac{|a-b| + |a+b|}{2} = b$
- 8) Verifique que si $a - b > 0$ entonces: $\frac{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2} = -b$
¿Se cumple la identidad si $a - b < 0$?

9) Verifique que si $c - b < 0$ y $a + c - b > 0$, entonces: $\frac{|a - |c - b|| + b}{a + c} = 1$

V. Encuentre los errores en los procedimientos siguientes:

1) $(3^x + 1)(3^x - 1)(2 - w)^3 = ((3^x)^2 - (1)^2)((2)^3 - (w)^3) = (9^{2x} - 1)(8 - w^3)$
 $= 9^{2x} \cdot 8 - 9^{2x}w^3 - 8 + w^3 = 72^{2x} - 9^{2x}w^3 - 8 + w^3$

2) $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y} = \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}}{x + y} = \frac{x + y}{x + y} = 1$

3) $2^x(5^x + 1)(5^x - 1) = 2^x(25^{x^2} - 1) = 50^{x^3} - 2^x$

4) $xy^2 + x + z^2 + y^2z^2 = x(y^2 + 1)z^2(1 + y^2) = xz^2(y^2 + 1)$

5) $2a^x - 3a^{x-1}(a^x + 2a) = 2a^x \cdot a^x + 2a^x \cdot 2a - 3a^{x-1} \cdot a^x - 3a^{x-1} \cdot 2a$
 $= 2a^{2x} + 4a^{x+1} - 3a^{2x-1} - 6a^x$

6) $a^2b + a + ab + b = a(ab + 1) + b(a + 1) = (a + b)(ab + 1)(a + 1)$

VI. Efectúe las divisiones siguientes:

1) $(6a^4 + a^3 - 15a^2) \div 2a^2$

5) $(x^5 - 9x) \div (x^2 + 3)$

2) $(12x^2y - 3xy^2 - 8x^2y^2) \div 3xy$

6) $(3a^4 + 4a^3b - 31a^2b^2 - 56ab^3) \div (3a + 7b)$

3) $(4x^3 + 4x^2 - 29x + 21) \div (2x - 2)$

7) $(6x^2 - 2xy^2 - 28y^4) \div (2x + 4y^2)$

4) $(3x^3 - 2x^2 - \frac{3}{2}x + 1) \div (x^2 - \frac{1}{2})$

8) $(6a^4 + a^2x - 15x^2) \div (2a^2 - 3x)$

VII. Determine, utilizando división, si el valor dado es un cero del polinomio enunciado o no:

1) $P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 5x - 42, \quad x = 2$

2) $P(s) = s^4 + s^2 + 27s - 9, \quad s = -3$

3) $Q(t) = t^4 - 3t^3 + t + 4, \quad t = 2$

VIII. Sin efectuar división, muestre que $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 11x - 15$ es divisible por $x - 3$.

IX. Encuentre algún polinomio $P(x)$ de grado 3, si se sabe que -2 , 1 y -5 son los únicos ceros de dicho polinomio.

X. Construya un polinomio de grado 3 si se sabe que $x = -1$ es un cero del mismo.

XI. Si se sabe que $x = 2$ es un cero del polinomio $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$, encuentre su factorización completa.

XII. Factorice, completamente, $P(x) = x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 50x^2 + 9x - 45$, si se sabe que $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$ son ceros del polinomio.

XIII. Si se sabe que $x = \frac{1}{3}$ y $x = 2$ son ceros del polinomio $P(x) = x^4 - \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{2}{3}$, escriba la factorización completa de $P(x)$.

XIV. Efectúe las siguientes divisiones; use división sintética cuando sea posible. Exprese el resultado obtenido en la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, donde $Q(x)$ es el polinomio divisor, $C(x)$ es el polinomio cociente, $R(x)$ es el polinomio residuo y $P(x)$ es el polinomio dividendo:

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x + 1}$ | 5) $\frac{27x^3 - 64}{3x - 4}$ |
| 2) $\frac{x^3 + 3x^2 + x + 1}{x + 1}$ | 6) $\frac{2y^3 + y^5 - 3y - 2}{y^2 - 3y + 1}$ |
| 3) $\frac{3x - 3 + x^2}{1 - x}$ | 7) $\frac{4x^3y + 5x^2y^2 + x^4 + 2xy^3}{x^2 + 2y^2 + 3xy}$ |
| 4) $\frac{1 - x^2 + x^4}{1 - x}$ | |

XV. Efectúe la división indicada usando división sintética:

- | | |
|--|--|
| 1) $(x^2 - x - 3) \div (x - 2)$ | 5) $(4x^3 + 5x + 3) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$ |
| 2) $(x^3 + 125) \div (x + 5)$ | 6) $(x^2 - 8x^4 - 3x + x^3 + 9) \div (1 - x)$ |
| 3) $(2y^4 - y^3 + 2y^2 - 3y - 5) \div (y + 2)$ | 7) $(4x^3 + 20x^2 + 11x - 35) \div (2x + 1)$ |
| 4) $(x^6 + 3) \div (2 - x)$ | 8) $(6b^3 + 5b^2 - 4b + 3) \div (2b - 3)$ |

XVI. Factorice y simplifique al máximo las expresiones siguientes:

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1) $a^{10} - a^8 - a^6 + a^4$ | 16) $15m^2 + 11m - 14$ |
| 2) $m^2 + 2mb + b^2$ | 17) $8m^3 - 27y^6$ |
| 3) $a^2 + a - ab - b$ | 18) $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$ |
| 4) $x^2 - 36$ | 19) $c^4 - 4a^4$ |
| 5) $9x^2 - 6xy + y^2$ | 20) $(m + n)^2 - 6(m + n) + 9$ |
| 6) $1 + x^3$ | 21) $7x^2 + 31x - 20$ |
| 7) $27a^3 - 1$ | 22) $1 - m^2$ |
| 8) $x^5 - x^4 + x - 1$ | 23) $a^6 + 1$ |
| 9) $6x^2 - 19x - 20$ | 24) $16a^2 - 24ab + 9b^2$ |
| 10) $25x^4 - 81y^2$ | 25) $1 + 216x^9$ |
| 11) $1 - m^3$ | 26) $a^2 - d^2 + n^2 - c^2 - 2an + 2cd$ |
| 12) $a^3 - 5a^2b + 6ab^2$ | 27) $x^3 - 64$ |
| 13) $2xy - 6y + xz - 3z$ | 28) $49a^2b^2 + 14ab + 1$ |
| 14) $1 - 4b + 4b^2$ | 29) $(x + 1)^2 - 81$ |
| 15) $a^2 - a - 30$ | 30) $(x + 1)^4 - 81$ |
| | 31) $x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2$ |

- | | |
|--|---|
| 32) $1 - a^2b^4$ | 53) $a^2x^3 + 2ax^3 - 8a^2 - 16a$ |
| 33) $x^3 - 2$ | 54) $8a^2 - 22a - 21$ |
| 34) $x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 43x + 60$ | 55) $1 + 18ab + 81a^2b^2$ |
| 35) $a(x+1) - b(x+1) + x(x+1)$ | 56) $4a^6 - 1$ |
| 36) $a^2 + 12ab + 36b^2$ | 57) $x^3 - 4x^2 + x + 6$ |
| 37) $1 + (a - 3b)^3$ | 58) $2x^4 - 4x^2 - 6x - 4$ |
| 38) $343 + 8a^3$ | 59) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$ |
| 39) $6am + 4an - 2n - 3m$ | 60) $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$ |
| 40) $81a^6 - 4b^2c^8$ | 61) $6x^3 + 23x^2 + 9x - 18$ |
| 41) $16 - (2a + b)^2$ | 62) $2x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 6$ |
| 42) $20 - x - x^2$ | 63) $x^{2m+2} - x^2y^{2m}$ |
| 43) $n^2 + n - 42$ | 64) $2^{5x} - 2^{3x} + 2^{2x} - 1$ |
| 44) $ax + a - x - 1$ | 65) $3^{3m-2} + 2 \cdot 3^{2m} - 3^{m-2} - 2$ |
| 45) $a^2 - x^2 - a - x$ | 66) $\frac{5x^3 + 9x^2 - 7x + 1}{10x^2 + 13x - 3}$ |
| 46) $9m^2 + 4a^2 - 12am$ | 67) $\frac{x^4 - 8x^2 - 9}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$ |
| 47) $a^2 - (b + c)^2$ | 68) $\frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^5 + 2x^4 - x - 2}$ |
| 48) $9x^4 - 25t^6$ | 69) $\frac{x^4 + 2x^2 - x^3 - 2x}{x^4 - x}$ |
| 49) $x^2 + 3x - 18$ | 70) $\frac{8a^3 - 12a^2 + 6a - 1}{4a^3 + 8a^2 - 11a + 3}$ |
| 50) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ | |
| 51) $125a^6 + 1$ | |
| 52) $3a^2m + 9am - 30m + 3a^2 + 9a - 30$ | |

XVII. Utilizando la técnica de completación de cuadrados represente las siguientes expresiones como adición o sustracción de cuadrados:

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 1) $9x^2 + 6x - 8$ | 5) $x^4 + 4x^2 + 7$ |
| 2) $2x - x^2$ | 6) $25y^2 + 10y - 12$ |
| 3) $5 - 4x - x^2$ | 7) $x^2 + x + 1$ |
| 4) $24b - 16b^2 - 7$ | |

XVIII. Al resolver un ejercicio en que le pedían que expresara el polinomio $x^2 + 3x - 7$ como la diferencia de dos cuadrados, algún estudiante dio como respuesta: $\left(\sqrt{x^2 + 3x}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2$

- 1) ¿Por qué la respuesta del alumno es incorrecta?
- 2) Dé la respuesta correcta.

XIX. Realice las operaciones indicadas y simplifique al máximo:

- 1) $\frac{bx^2 - b - x^2 + 1}{b^2x - x + b^2 - 1}$
- 2) $\frac{5}{1+x} - \frac{3}{1-x} + \frac{6}{x^2-1}$
- 3) $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x-x^2} + \frac{1}{x^2-1}$
- 4) $\frac{m^2-6m}{3m^2-27} + \frac{3}{2m-6} - \frac{m}{4m+12}$
- 5) $\frac{x+1}{x^2-x-6} - \frac{3x-12}{3x^2-12x+9} + \frac{x+4}{x^2+x-2}$
- 6) $\frac{-3x+1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{2x+6} + \frac{7}{6x+24}$
- 7) $\frac{6}{x^2+x-2} - \frac{3}{x^2+2x-3} - \frac{x}{x^2+5x+6}$
- 8) $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$
- 9) $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{1-x}{x^2+2x+1} - \frac{4x}{x^3+x^2-x-1}$
- 10) $\frac{x^2-1}{x^2-3x-10} \div \frac{x^2+3x+2}{x^2-12x+35}$
- 11) $\frac{y^3+4y^2-5y}{y^2-2y+1} \div \frac{y^2+y-2}{y^4+8y} \cdot \frac{y-4}{y^2-2y+4}$
- 12) $\left(\frac{x+3}{x-1} - x\right) \left(2x - \frac{x^2}{x+1}\right) \div \left(\frac{2x}{x-1} - x\right)$
- 13) $\frac{x^4-1}{x^3-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{(x+1)^2}\right) \div \left(\frac{1}{x} + x\right)$
- 14) $\frac{xy^{-2} + x^{-2}y}{x^{-1} + y^{-1}}$
- 15) $\left(\frac{a^{-2} - 2b^{-1}}{a^{-4} - 4b^{-2}}\right)^{-1} \cdot (b - 2a)^{-1}$
- 16) $\frac{(a+b)^{-2}}{(ab)^{-2}} \div \frac{1}{b^{-2} - a^{-2}}$
- 17) $\frac{(x^{-1} + y^{-1})^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}} \div (x^{-2} - y^{-2})^{-1}$
- 18) $\frac{1 + \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{y - \frac{1}{1-y(y+x)^{-1}}}}$

$$19) \frac{x^{2n} - y^{2n}}{x^{3n-1} + 2x^{2n-1}y^n + x^{n-1}y^{2n}} \div \frac{x^{2n} - x^n y^n}{x^{2n}}$$

XX. Efectúe las operaciones que se indican y exprese la respuesta de manera que el denominador quede racionalizado. Suponga que todas las raíces están bien definidas:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt[15]{\frac{29x^{21}}{y^9}} & 3) \sqrt[6]{\frac{64x^2y^2}{4z^2}} - 2\sqrt[9]{\frac{512x^3y^3}{8z^3}} + \sqrt[12]{\frac{x^4y^4}{16z^4}} \\ 2) \sqrt[8]{\frac{81a^4}{16b^4}} - \sqrt[4]{\frac{729a^2}{4b^2}} + \sqrt{\frac{75a}{2b}} & 4) \sqrt[n^4]{\sqrt[n^3]{\sqrt[n^2]{\sqrt[n]{a^{n^{11}}}}}} \end{array}$$

XXI. En cada caso racionalice el denominador o el numerador, según corresponda, y simplifique al máximo la expresión que se obtiene:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{3x^3 - x^4y}{x^2 \cdot \sqrt[3]{3}} & 8) \frac{11 - 2x}{3 - 2\sqrt{x+1}} \\ 2) \frac{3x - 15}{4 + \sqrt{-4x + 36}} & 9) \frac{4x^3 - 12x}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + x - 3}} \\ 3) \frac{8x + 11}{2\sqrt[3]{x-2} + 3} & 10) \frac{\sqrt{8-10x} - 5x}{25x^2 - 4} \\ 4) \frac{2x^2 - 8}{3x - 2\sqrt{1-4x}} & 11) \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}{x^2y - 4xy^2} \\ 5) \frac{x^2 - x}{x - \sqrt{2x-1}} & 12) \frac{2 - \sqrt[3]{x}}{64 - 16x + x^2} \\ 6) \frac{2x + 14}{\sqrt{2-x} - 3} & 13) \frac{16x - 14}{2\sqrt[3]{x-1} + 1} \\ 7) \frac{2 \cdot \sqrt[5]{(3x-1)^2}}{3x-1} & 14) \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2-2}} \end{array}$$

4 Ecuaciones Algebraicas

I. Determine si los valores de x indicados son soluciones de la ecuación respectiva:

- 1) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$; $x = 2, x = -1$
- 2) $x + \sqrt[3]{x^3 + 1} = 2x + 1$; $x = -1, x = -2$
- 3) $\frac{11}{9}x - \frac{7}{3}x^2 + x^3 + \frac{1}{9} = 0$; $x = \frac{2 - \sqrt{5}}{3}, x = 1, x = -5$
- 4) $\frac{P(x)}{x^2 - 1} = 0$; $x = -1$ (donde $P(x)$ es un polinomio)
- 5) $P(x) = 0$; $x = 2, x = 3, x = 4$ (donde $P(x)$ es un polinomio que cumple:
 $P(2) = 2P(2)$; $P(3) = 1$ y $P(4) = 2P(4) + 1$)

II. Despeje la variable que se indica en cada caso:

- 1) $2mn = 3k$; m
- 2) $\frac{a+b}{bm-n} = \frac{3k-t}{m}$; n
- 3) $\frac{m-3}{2} - m = \frac{3am-1}{8} + \frac{1}{4}$; m
- 4) $\frac{1-3nw}{w-1} = \frac{3a-b}{4} + \frac{5}{3}$; w

III. Determine el conjunto solución de cada una de las ecuaciones siguientes:

- | | |
|---|--|
| 1) $x^2 + 3x - 5 = x(x - 8) + 9$ | 15) $(2x - 3)^3 + 8 = 0$ |
| 2) $3 - x(2 - x) = x^2 - 2(x + 3)$ | 16) $x^{-4} - 7x^{-2} - 36 = 0$ |
| 3) $(x - 3)(2x - 5) = (x - 3)(3 - 4x)$ | 17) $\frac{2x}{x+3} - \frac{1}{x-3} = \frac{-6}{x+3}$ |
| 4) $3 - 2(2x - 1) = 5 - 4x$ | 18) $\frac{6}{x+2} - \frac{3}{x^2 - x - 6} = \frac{20}{9 - x^2}$ |
| 5) $\frac{x^2 - 4x + 1}{x+1} = \frac{x(x-3) - (4x-1)}{x+1}$ | 19) $\frac{3x}{2x+1} = \frac{x-19}{2x^2+3x+1} + \frac{x+5}{x+1}$ |
| 6) $\frac{(x+1)(x+3)}{x+1} = \frac{x^2-1}{x-1}$ | 20) $\frac{1 + \frac{x}{x-1}}{1 - \frac{x}{x-1}} = -2x + 1$ |
| 7) $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$ | 21) $\sqrt[3]{x^2 + x - 4} = 2$ |
| 8) $5x^2 - 17x + 6 = 0$ | 22) $\sqrt{2\sqrt{x-4}} = \sqrt{12-x}$ |
| 9) $x^2 - 6\sqrt{2}x = -1$ | 23) $2\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = \sqrt{5+x}$ |
| 10) $(x+4)^2 + 7(x-2) = 2x(5x-1)$ | 24) $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[6]{7+3x}$ |
| 11) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ | 25) $\sqrt{x-2} - x = -4$ |
| 12) $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) = -12$ | 26) $x + \sqrt{x+7} = 13$ |
| 13) $25x^4 + 5x = 125x^3 + x^2$ | 27) $1 + \sqrt{x+7} = 2x$ |
| 14) $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0$ | |

- 28) $x\sqrt{x+1} - 3 = 3$
- 29) $2x = 2 - \sqrt{x^2 - 1}$
- 30) $x + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 2$
- 31) $5 + \sqrt{7 - x} = x$
- 32) $2\sqrt{7 - x} + 3\sqrt{2x - 3} = 11$
- 33) $\sqrt{15 + 2x} - 2 - \sqrt{6x + 1} = 0$
- 34) $x^4 - 8xb^3 = ax^3 - 8ab^3$
- 35) $(x - a)^2 - bx + ab = 0$
- 36) $x^2 - 9 - 6ax + 18a = 0$
- 37) $\frac{x+m}{x-n} = \frac{n+x}{m+x} \quad m \neq 0$
- 38) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$
- 39) $\left(\frac{4}{x+3} - 1\right)\left(1 + \frac{3}{x+4}\right) = 0$
- 40) $\frac{2}{3-x} - \frac{1}{4-x} = \frac{3}{4-x} - \frac{2}{x-3}$
- 41) $\frac{x+4}{3x+6} - \frac{x-6}{4x-8} = \frac{1+x}{2-x}$
- 42) $\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}\right) \div \frac{2}{x^2-1} = 5 + x$
- 43) $\frac{7+x^2}{x-3} = 3 + \frac{16}{x-3} + x$
- 44) $\frac{x^2-x+3}{x-3} = x-3 + \frac{18-x^2}{x-3}$
- 45) $\frac{-x}{x+4} + \frac{2x^2+5x-1}{x^2+7x+12} = \frac{2}{3+x}$
- 46) $\frac{2x+5}{49-x^2} + \frac{x-2}{x^2+8x+7} = \frac{2-x}{x^2-6x-7}$
- 47) $\frac{2x^2-3}{x-2} = x + \frac{1+2x}{x-2}$
- 48) $\frac{2x^2-5x-3}{(3+x)(x+4)} = \frac{-2}{3+x} + \frac{x}{4+x}$
- 49) $\frac{4x-4}{x} + \frac{1+x}{x^2} = \frac{4x}{1+x} + \frac{4}{x^2+x^3}$
- 50) $\frac{-2}{x-3} + \frac{5}{5+x} = \frac{6(1+x)}{15-2x-x^2}$

IV. Encuentre el valor o los valores de m para que se cumpla la condición que se le solicita:

- 1) $x^2 - 2(1+3m)x + 7(3+2m) = 0$ (tenga una única solución y encuéntrela)
- 2) $x^2 - 2(1+3m)x + 7(3+2m) = 0$ (tenga una raíz igual a -3)
- 3) $\frac{x+1}{2} - 6x + 4m = 2x - \frac{x+4}{3} + \frac{m}{2}$ (su solución sea $x = 5$)

V. Resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones siguientes:

- 1) $\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 6a - 5b = 7 \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 7a + 4b = 40 \\ 2a = 33 - 5b \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 2a + 7b = 13 \\ 5a + 15b = b - a + 12 \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} b - a = 6 \\ 2b - a = 12 + a \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} 9a - 7b = 15 \\ 12b - 3a = 14 \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} 2a + 5b = \sqrt{3} \\ 3a - 4b = \sqrt{27} \end{cases}$
- 7) $\begin{cases} \sqrt[4]{4a} - b = 7 \\ \sqrt{32a} + 3b = 14 \end{cases}$
- 8) $\begin{cases} \sqrt{2a} - \sqrt[3]{2b} = 8 \\ \sqrt{8a} + \sqrt[3]{16b} = -2 \end{cases}$
- 9) $\begin{cases} (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 12 + 2\sqrt{xy} \\ x - 2y = 27 \end{cases}$
- 10) $\begin{cases} a + b + c = 4 \\ a - 2b + c = 3 \\ a + b - 2c = 5 \end{cases}$
- 11) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 5y - 5z = -1 \end{cases}$

$$12) \begin{cases} 5x + 3y - 4t = 2 - 12t \\ x + y = 10 \\ 2t + 6y - 4x = 12 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 20 - x = 4y \\ 3x - 5z = 15 \\ y + z = 10 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} \sqrt{2}a - y + z = 8 \\ \sqrt{18}a + 2y - 4z = 2 \\ \sqrt{8}a + 3y - 3z = 5 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2z + y = 10 \\ 4x - 3y + 5z = 18 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

VI. Plantee y resuelva cada uno de los problemas siguientes:

- 1) Un cable de 42 *m* de longitud es dividido en dos partes, de modo que una parte es dos veces la longitud de la otra. Halle la longitud de cada pieza.
- 2) Después de 20% de descuento, un artículo se vendió en 9 600 colones. Determine el precio original del artículo.
- 3) El ganador de la lotería quiere invertir su premio de \$100 000 en dos inversiones, una al 8% la otra al 10% anuales. ¿Cuánto debería invertir en cada una de ellas si desea ingresos anuales por \$8 500?
- 4) El propietario de un edificio de departamentos puede rentar las 50 habitaciones si la renta es de \$150 al mes por habitación. Por cada incremento de \$5 en la mensualidad de la renta, un departamento quedará vacante sin posibilidad de rentarlo. ¿Qué renta deberá fijar el propietario para obtener un ingreso mensual de \$8 000?
- 5) Un granjero desea delimitar un terreno rectangular y tiene 200 metros de cerca disponible. Encuentre las dimensiones posibles del terreno, si su área debe ser de 2 100 *m*².
- 6) Una compañía fraccionadora compra una parcela en \$200 000. Después de vender todo excepto 20 hectáreas, con una ganancia de \$2000 por hectárea sobre su costo original, el costo total de la parcela se recuperó. ¿Cuántas hectáreas fueron vendidas?
- 7) Un grupo de personas fue encuestado y 20% de ellas (700) favoreció a un nuevo producto sobre la marca de mayor venta. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
- 8) Se rodea por un camino de ancho uniforme un terreno rectangular de dimensiones 26 *m* por 30 *m*. Si se sabe que el área del camino es de 240 *m*², determine el ancho del camino.
- 9) Un trozo de alambre de 100 pulgadas de largo se corta en dos y cada pedazo se dobla para que tome la forma de un cuadrado. Si la suma de las áreas formadas es 397 *pulg*², encuentre la longitud de cada pedazo.
- 10) Se quiere construir un barril de petróleo cilíndrico y cerrado con una altura de 4 *pies*, de manera que el área de la superficie sea de 10 π *pie*². Determine el diámetro del barril. NOTA: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$, con A el área, h la altura y r el radio.
- 11) El ancho de una página de un libro es de 2 pulgadas menos de lo que mide su largo. El área impresa es de 72 *pulg*², con márgenes de 1 *pulg* superior e inferior y márgenes de 0,5 *pulg* en los lados. Halle las dimensiones de la página.

- 12) Una caja sin tapa debe construirse cortando cuadrados de 3 pulgadas de una hoja rectangular cuya longitud es el doble de su ancho. ¿Qué tamaño de hoja producirá una caja con un volumen de 60 pulg^3 ?
- 13) El costo de instalación de aislantes en una casa particular de dos recámaras es de \$1 080. Los costos actuales de calefacción son, en promedio, de \$60 mensuales, pero se espera que el aislante reduzca los costos de calefacción en un 10%. ¿Cuántos meses se necesitarán para recuperar el costo del aislante?
- 14) La Editorial Tecnológica vendió cierto número de libros en 600 000 colones. Si hubiese vendido 12 libros más pidiendo 3 000 colones menos por revista, habría recibido 24 000 colones más. Determine el número de libros vendidos por dicha editorial y el precio de venta de cada uno.
- 15) A medida que sale arena de cierto recipiente forma una pila cónica circular recta, cuya altura siempre es la mitad del diámetro de la base. ¿Cuál es el diámetro de la base en el instante en que han salido del recipiente 144 cm^3 de arena? NOTA: El volumen de un cono circular recto esta dado por $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, donde h es la altura y r el radio de la misma.
- 16) Un granjero desea cercar un terreno rectangular y planea usar 180 pies de material y parte de la orilla de un río en vez de cercar en uno de los lados del rectángulo. Encuentre el área del terreno, si la longitud del lado paralelo a la orilla del río es:
 - (a) el doble de la longitud de uno de los lados adyacentes.
 - (b) la mitad de la longitud de un lado adyacente.
 - (c) la misma longitud de un lado adyacente.
- 17) Un estudiante de Matemática General obtiene notas de 75, 82, 71 y 84 en cuatro evaluaciones. ¿Qué calificación en su siguiente prueba elevará su promedio a 80?
- 18) Un trabajador percibe \$492 de salario después de restar deducciones (que corresponden a 40% del sueldo bruto). ¿Cuál es su sueldo bruto?
- 19) Una bola de beisbol es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 64 m/s . El número de metros m sobre el suelo después de t segundos está dado por la ecuación $m = -16t^2 + 64t$.
 - (a) ¿En cuánto tiempo alcanza la pelota una altura de 48 m sobre el suelo?
 - (b) ¿Cuándo regresará al piso?
- 20) La temperatura T (en $^{\circ}\text{C}$) a la que hierve el agua está relacionada con la elevación h (en m) sobre el nivel del mar por la fórmula $h = 1\,000(100 - T) + 580(100 - T)^2$ para $95 \leq T \leq 100$.
 - (a) ¿A qué elevación hierve el agua a una temperatura de 98°C ?
 - (b) La altura del Monte Everest es de alrededor de $8\,840 \text{ m}$. Calcule la temperatura a la que hierve el agua en la cima de esta montaña. SUGERENCIA: Utilice la fórmula cuadrática con $x = 100 - T$).
- 21) Un terreno rectangular de $26 \text{ m} \times 30 \text{ m}$ está rodeado por una acera de ancho uniforme. Si el área de la acera es de 240 m^2 , ¿cuál es su ancho?

- 22) Seiscientas personas asisten al estreno de una película. Los boletos para adultos cuestan \$5 y los de niños \$2. Si la taquilla recibe un total de \$2 400, ¿cuántos niños asistieron al estreno?
- 23) Hay que cercar una huerta cuadrada con un alambrado. Si la cerca cuesta \$1 por metro y el costo de preparar el terreno es de \$0,5 por metro cuadrado, determine el tamaño de la huerta que se puede cercar a un costo de \$120.
- 24) En cierta prueba médica diseñada para medir la tolerancia a los carbohidratos, un adulto ingiere 7 oz (onzas) de una solución de glucosa al 30%; cuando la prueba se aplica a un niño, la concentración de glucosa debe disminuirse al 20%. ¿Cuánta solución de glucosa al 30% y cuánta agua se necesita con el fin de preparar 7 oz de una solución de glucosa al 20%?
- 25) La plata británica Sterling es una aleación que contiene 7,5% de cobre en peso. ¿Cuántos gramos de cobre puro y cuántos gramos de plata Sterling deben emplearse para preparar 200 g de una aleación de cobre-plata con 10% de cobre en peso?
- 26) Dos niños, que se encuentran a 224 m entre sí, empiezan a caminar uno hacia el otro al mismo instante y a velocidades de 1,5 m/s y 2 m/s, respectivamente.
- (a) ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse desde que inician su recorrido?
- (b) ¿Cuánto habrá caminado cada uno al momento de encontrarse?
- 27) La velocidad de la corriente de un río es de 5 km/h. Un canoero tarda 30 minutos más en remar 1,2 km río arriba que remar la misma distancia a favor de la corriente. ¿Cuál es la velocidad del remero en aguas tranquilas?
- 28) Un muchacho puede remar a una velocidad de 5 km/h en aguas tranquilas. Si rema a contracorriente durante 15 minutos, luego corriente abajo regresando al punto de partida en 12 minutos, encuentre:
- (a) La velocidad de la corriente.
- (b) La distancia total que recorrió.
- 29) A las 6:00 am una máquina barrenieves, que avanza a una velocidad constante, empieza a despejar una carretera que conduce a las afueras de la ciudad. A las 8:00 am un automóvil toma esa carretera a una velocidad de 30 km/h y la alcanza 30 minutos después. Encuentre la velocidad de la máquina.
- 30) Un estudiante de Matemática General ha ganado \$100 000 en una lotería y desea depositarlos en cuentas de ahorros en dos instituciones financieras. Una cuenta paga 8% de interés simple, pero los depósitos se aseguran solo a \$50 000. La segunda cuenta paga 6,4% de interés simple pero los depósitos se aseguran hasta por \$100 000. Determine si el dinero se puede depositar de modo que esté asegurado totalmente y gane intereses anuales de \$7 500.

- 31) Un aeroplano vuela al norte a 200 km/h y pasa sobre cierto lugar a las $2:00 \text{ pm}$. Otra aeronave, que vuela hacia el este a la misma altitud y a 400 km/h , pasa sobre el mismo lugar a las $2:30 \text{ pm}$.
- (a) Si t denota el tiempo en horas después de las $2:30 \text{ pm}$, exprese la distancia d entre los aviones en términos de t .
- (b) ¿A qué hora, después de las $2:30 \text{ pm}$, estaban los aviones a 500 km uno del otro?

VII. Otros ejercicios:

- 1) Considere la siguiente afirmación: “Si la ecuación $P(x) = 0$ tiene n soluciones reales, entonces $P(x)$ es un polinomio de grado n ”. Dé un ejemplo que verifique que la anterior afirmación es falsa.
- 2) Determine una ecuación $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es de grado 7 y que tenga una única solución real.
- 3) En un determinado colegio, el profesor asignó 3 ecuaciones para que las realizarán de tarea; sin embargo, a Juan (por estar hablando) le borraron la pizarra y solo pudo ver lo siguiente de las tres ecuaciones:

$$x^3 + \dots = 0 \quad (1)$$

$$2x^4 + \dots = 0 \quad (2)$$

$$x^5 + \dots = 0 \quad (3)$$

Cuando Juan se dispuso a hacer la tarea, llamó a un compañero y este le dio la solución de cada ecuación, $S_1 = \left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$; $S_2 = \{1, 2, 6, 5\}$ y $S_3 = \{2, -2, 1\}$, respectivamente. Suponiendo que estas soluciones son las correctas, ayude a Juan a determinar las ecuaciones (1) y (2); además, proponga una posible ecuación (3).

- 4) Los conjuntos de soluciones de las ecuaciones $P(x) = 0$ y $Q(x) = 0$ son, respectivamente, $S_1 = \{1, 5, 7\}$ y $S_2 = \{-5, 7, 9\}$. Determine el conjunto de soluciones de las ecuaciones:
 - (a) $P(x) \cdot Q(x) = 0$
 - (b) $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$
 - (c) $\frac{Q(x)}{P(x)} = 0$
 - (d) $P(x) = Q(x)$
 - (e) $P(x) = Q(-x)$
 - (f) $P(x) + 3Q(x) = 0$

5 Inecuaciones Algebraicas

I. Conteste lo que se pide en cada caso:

- 1) Considere los conjuntos $A = \{-1, -2, 2, 3\}$ y $B = \{-3, -1, 2, 5\}$. Determine, por extensión, los conjuntos:

(a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $A - B$ (d) $B - A$

- 2) Considere las ecuaciones $(2x - 1)(x^2 - 1)^2 = 0$, $(x + 1)^2 \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$. Sean S_1 y S_2 los conjuntos de solución de cada ecuación, respectivamente; determine, por extensión, los conjuntos:

(a) $S_1 \cap S_2$ (b) $S_1 \cup S_2$ (c) $S_1 - S_2$ (d) $S_2 - S_1$

- 3) Si $A =]-5, 7[$ y $B = [0, 10[$, determine:

(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A - B$ (d) $B - A$

- 4) Si $A = [2, 7[$ y $B = [-1, 5[$, ¿qué intervalo se debe tomar para que x esté en A y B ?

- 5) Para que $x \leq 3$ y $x > -7$, entonces $x \in$ _____

- 6) Para que $x < 1$ o $x \geq 3$, entonces $x \in$ _____

- 7) Para que $x > 2$ o $x < 4$, entonces $x \in$ _____

- 8) Para que $x \in]5, \infty[$ y $x \in]-\infty, 1[$, entonces $x \in$ _____

- 9) Para que $5x - 6 < 3x + 8$ y $2x + 1 < 3x - 3$, entonces $x \in$ _____

II. Determine si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas. Justifique su respuesta:

- 1) La solución de $x^2 + 1 > 0$ es \mathbb{R}

- 2) La solución de $-2 - x^4 > 0$ es \mathbb{R}

- 3) La solución de $12x - 4 < 9x^2$ es \mathbb{R}

- 4) La solución de $12x - 1 \geq 36x^2$ es $\left\{\frac{1}{6}\right\}$

- 5) La solución de $-5(2x - 1)^2 < 0$ es $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

- 6) $\forall x \leq 1$ se cumple que $x^2 \leq 1$

- 7) Si $x^2 \geq 4$ entonces $x \leq 2$

- 8) La solución de $x^3 + 1 < 0$ es $] -1, \infty[$

- 9) La solución de $\frac{-2}{4 - 3x} \geq 0$ es $\left] -\frac{4}{3}, \infty \right[$

- 10) La solución de $\frac{2}{(1 - x)^2} > 0$ es $\mathbb{R} - \{1\}$

III. Resuelva las inecuaciones siguientes:

- 1) $10 - \frac{5x}{2} \geq 0$
- 2) $\frac{34 - 2x}{3} + 9 < \frac{3x - 8}{4} - x$
- 3) $(x - 1)^2 - 7 > (x - 2)^2$
- 4) $(x - 1)(x + 2) < (x + 1)(x - 3)$
- 5) $4 > \frac{2 - 3x}{7} \geq 2$
- 6) $x^2 \geq -15x - 56$
- 7) $x^2 < x$
- 8) $x^3 > x^2$
- 9) $x^6 - 1 < 0$
- 10) $\frac{-4}{1 + 2x} \geq 0$
- 11) $\frac{3x + 1}{x - 3} > 0$
- 12) $\frac{x^2 - x}{(x + 1)(2 - x)} \geq 0$
- 13) $\frac{(x - 2)^2(5 - x)}{(4 - x)^3} < 0$
- 14) $\frac{(x + 3)^2(x + 4)(x - 5)^3}{x^2 - x - 20} > 0$
- 15) $\frac{(2x + 1)^2(x - 1)}{x(x^2 - 1)} \geq 0$
- 16) $\frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x - 1)(x + 3)} \leq 0$
- 17) $\frac{1}{x} - \frac{x}{2x - 1} \geq 1$
- 18) $\frac{x(x^2 - 9)}{(x^2 + x + 1)(x - 1)} \geq 0$
- 19) $-\frac{2}{x} \geq \frac{-5x}{x^2 + 6}$
- 20) $\frac{2 - x}{x - 3} \leq \frac{-2}{x}$
- 21) $\frac{2x}{1 - 2x} \leq \frac{3 - x}{x}$
- 22) $\frac{x^3}{x^2 + 3x - 4} \geq x$
- 23) $\frac{2x - 1}{3 + x} \geq 0$
- 24) $\frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8} \leq 0$
- 25) $\frac{5 + x^2}{2x + 4} \leq 0$
- 26) $\frac{-2}{3 + x} \geq \frac{x}{4 - x}$
- 27) $\frac{x}{x - 1} \geq \frac{5}{4 + 2x}$
- 28) $1 + \frac{5x - 2}{1 + 2x} \leq \frac{x}{2x + 1}$
- 29) $\frac{x - 2}{x + 2} < \frac{1 + x}{x - 1}$
- 30) $\frac{x^2 - x + 3}{x - 3} \leq \frac{18 + x^2}{x - 3}$
- 31) $\frac{2}{x - 3} + \frac{6}{9 - x^2} \leq -\frac{1}{x}$
- 32) $\frac{x^2 - 4x + 1}{1 + x} > \frac{1 - 4x + (x - 3)x}{1 + x}$
- 33) $3 + x \leq \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
- 34) $\frac{2x^2 + 5x - 3}{(3 + x)(4 + x)} \leq \frac{-2}{3 + x} + \frac{x}{4 + x}$
- 35) $\frac{4x - 4}{x} + \frac{1 + x}{x^2} \leq \frac{4x}{1 + x} + \frac{4}{x^2 + x^3}$
- 36) $\frac{-1}{x - 3} + \frac{2x}{3 + x} \leq \frac{-6}{3 + x}$
- 37) $\frac{1 + x}{x - 3} + \frac{x + 1}{x - 1} \leq \frac{2x}{x - 3} - \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$
- 38) $\frac{6}{2 + x} - \frac{3}{x^2 - x - 6} > \frac{20}{9 - x^2}$
- 39) $\frac{3 - x + x^2}{x - 3} > -3 + x + \frac{18 - x^2}{x - 3}$
- 40) $\frac{1 + 2x}{x - 2} + \frac{2x^2 - 3}{x - 2} \geq -x$
- 41) $\frac{3x}{1 + 2x} > \frac{5 + x}{1 + x} + \frac{x - 19}{2x^2 + 3x + 1}$
- 42) $\frac{4 + x}{6 + 3x} - \frac{x - 6}{4x - 8} \leq \frac{1 + x}{x - 2}$
- 43) $-x^2 + \frac{7 + x^2}{x - 3} > -3 + \frac{16}{x - 3}$
- 44) $\frac{-x}{4 + x} + \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2 + 7x + 12} \leq \frac{2}{3 + x}$
- 45) $\frac{5 - 2x}{x^2 - 49} + \frac{x - 2}{x^2 + 8x + 7} > \frac{2 - x}{x^2 - 6x - 7}$

IV. Resuelva los ejercicios siguientes:

- 1) Justifique cada paso y encuentre el(los) error(es) en la “demostración” de que $0 > 2$. Sea a un número real cualquiera, tal que $a > 2$, entonces:

$$\begin{aligned}
 a &> 2 \\
 2 \cdot a &> 2 \cdot 2 \\
 2a - a^2 &> 4 - a^2 \\
 a(2 - a) &> (2 - a)(2 + a) \\
 \frac{a(2 - a)}{2 - a} &> \frac{(2 - a)(2 + a)}{2 - a} \\
 a &> 2 + a \\
 a - a &> 2 + a - a \\
 0 &> 2
 \end{aligned}$$

- 2) Determine el valor de k para que las ecuaciones que se enuncian tengan dos raíces reales distintas.
- (a) $x^2 - kx + 4 = 0$
- (b) $2x^2 + kx^2 + x + 1 = kx$
- 3) Determine el valor de k para que las ecuaciones que se enuncian no tengan raíces reales.
- (a) $kx^2 + 3x + 4k = 0$
- (b) $(k + 1)x^2 + kx + k + 1 = 0$

V. Plantee y resuelva los problemas siguientes:

- 1) Un estudiante de Matemática tiene en sus dos primeros exámenes calificaciones de 61 y 87, si los exámenes tienen el mismo valor, ¿cuál debe ser la calificación mínima en el tercer examen para obtener, al menos, 75 de promedio?
- 2) Un estudiante de Matemática tiene en sus tres primeros exámenes calificaciones de 45, 77 y 66, si estos representan las dos terceras partes de la nota final, ¿cuál debe ser la calificación mínima en el cuarto examen para que su nota supere el 70?
- 3) Se dispara un proyectil hacia arriba, en forma perpendicular desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 72 m/s , su altura h (en metros) después de t segundos está dada por $h = -16t^2 + 72t$. ¿En qué intervalo de tiempo está el proyectil a más de 32 m del suelo?
- 4) El número de diagonales d en un polígono con n lados, está dado por:

$$d = \frac{n(n-1)}{2} - n$$

¿Para qué polígonos pasará de 35 el número de diagonales?

VI. Resuelva, para x , las inecuaciones siguientes:

$$1) \quad 3b(a - 2x)(x + b) \leq 0 \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ constantes, tales que } b < a < 0$$

$$2) \quad \frac{2x - 1}{b} \geq \frac{2x - 3}{a} \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ constantes, tales que } b < 0 < a$$

$$3) \quad \frac{bx - a}{ax^2 + a^2x} \geq 0 \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ constantes, tales que } a < 0 < b$$

$$4) \quad \frac{1}{bx} \geq \frac{b + 1}{bx + ba} \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ constantes, tales que } a < 0 < b$$

$$5) \quad \frac{-a}{2x + 1} \leq 0 \quad \text{con } a \text{ constante, tal que } a < 0$$

$$6) \quad \frac{5 - 2a}{x^2 + 1} \leq 0 \quad \text{con } a \text{ constante, tal que } a > \frac{5}{2}$$

$$7) \quad \frac{b(a + x)(x + b)}{3x^2 + 5} \geq 0 \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ constantes, tales que } b < 0 < a$$

$$8) \quad \frac{(a + x)(x - b)}{a + x} \leq \frac{(x - b)^2}{a + x} \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ constantes, tales que } 0 < -a < b$$

$$9) \quad ax - a \geq x - 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

6 Valor Absoluto

I. Resuelva las ecuaciones siguientes:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1) $ 3 - 2x = 2$ | 15) $2x - 3 - 4x = -3$ |
| 2) $3 2x - 5 - 5 = 4$ | 16) $ 1 - 3x + x - 3 = 0$ |
| 3) $ x - 2 = 5 + \left \sqrt{3} - 2 \right $ | 17) $-3\sqrt[6]{(x+4)^6} - 2 = x$ |
| 4) $3 = 2 + \sqrt[8]{(2-x)^8}$ | 18) $ 3 - 2x + x = 3$ |
| 5) $-2 - 4x + 1 = x - 7$ | 19) $2 5 - 4x = x + 2$ |
| 6) $\sqrt[4]{(1-2x)^4} + x = 3$ | 20) $2 + \sqrt[8]{(4x+1)^8} = 7 - x$ |
| 7) $-3\sqrt{(x-2)^2} + 5 = -3x + 6$ | 21) $2 - x = 5 - 3 - 2x $ |
| 8) $ 3 - 2x + x = -3$ | 22) $x x - 2 + 2 = x - x^2$ |
| 9) $ x + 8 = 0$ | 23) $ 3x - 1 - 2 = 4x$ |
| 10) $\sqrt[12]{(2x+3)^{12}} = 7$ | 24) $8 - x + 3 - 5 = 1$ |
| 11) $ -3x + 2 + 5 = 3$ | 25) $2x^2 + 3 - x + 2 = x(2x - 3)$ |
| 12) $\left 2 - \sqrt{3} \right + x - 1 = 4$ | 26) $ 2x + 3 + 3x - 1 = 0$ |
| 13) $ x + 5 + 3 = 0$ | 27) $ 2 - x + 3x = 2$ |
| 14) $\sqrt[10]{(2x+5)^{10}} - 3x = -3 + 2x$ | 28) $ x - 2 - 2x = 3$ |

II. Determine si las proposiciones que se enuncian son falsas o verdaderas. Justifique su respuesta:

- 1) Si $-6 \leq x \leq 4$ entonces, con certeza, se tiene que $|x| < 4$
- 2) Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ cumplen que $a < b$, entonces, se cumple que $|a| < |b|$
- 3) Si $-\frac{1}{2} < x < 0$, entonces, $|x| > \frac{1}{2}$
- 4) $|-x - 1| = x + 1$
- 5) $\left| |x| - x \right| = 0$ si $x > 0$
- 6) $|x - 5| < 3$ significa que x está a menos de 3 unidades del 5
- 7) $|x - 6| \geq 7$ significa que x difiere de 6 en, por lo menos, 7 unidades
- 8) $x < 3$ y $x > -3$, de manera simultánea, se escribe $|x| > 3$
- 9) $|x + 2| > 1$ significa que x está a más de 1 unidad del 2
- 10) La solución de $|x - 2| < 0$ es \mathbb{R}
- 11) La solución de $-|x - 2| < 0$ es \emptyset

12) La solución de $0 \geq |3x - 2|$ es $\left\{\frac{2}{3}\right\}$

III. Simplifique al máximo cada una de las expresiones, de acuerdo con las condiciones que se indican:

- 1) $5|b - 3a|$, si se tiene que $b < 0 < a$
- 2) $2 - |b - a| + |a + b|$, si se tiene que $0 < b < a$
- 3) $|x|$, si se tiene que $x < -5$
- 4) $|-y|$, si se tiene que $y < -8$
- 5) $|-a|$, si se tiene que $a > 0$
- 6) $3a - 2|a - b|$, si se tiene que $b \leq a$
- 7) $3|b - x| + |x| - |-b|$, si se tiene que $b < x < 0$

IV. Verifique la validez de cada uno de los enunciados siguientes:

- 1) Si $y > 0$ y $x > 1$, entonces $|xy - y| + |y| = xy$
- 2) Si $x < y < 0$, entonces $|y| - |x - 2| - x = -2 - y$
- 3) Si $a \leq b < 1$, entonces $2|a - b| + |2b - 4| = 4 - 2a$
- 4) Si $b < x < 0$, entonces $3|b - x| + |x| - |-b| = 2x - 2b$
- 5) Si $0 < b < a$, entonces $\frac{a - |2a - b| + 5|b - a|}{4a} = 1 - \frac{b}{a}$
- 6) Si $x < 0 < y$, entonces $2x|x - y| - 3|x(2y - x)| = x(8y - 5x)$

V. Resuelva las inecuaciones siguientes:

- | | |
|--|---|
| 1) $-2 2x - 3 \leq 4$ | 9) $\frac{2x - 5}{6} + \frac{ x }{2} + 1 < 3$ |
| 2) $ 4 - 7x \leq 0$ | 10) $6 - \sqrt{(4 - x)^2} \geq 5$ |
| 3) $\sqrt{\left(\frac{4x + 1}{8}\right)^2} \leq \frac{1}{2}$ | 11) $2 - 4 - x \leq 5$ |
| 4) $4 - -2x + 1 \leq 2$ | 12) $3 + \sqrt{(1 - x)^2} > 0$ |
| 5) $ 4 - 5x - 3 \leq -1$ | 13) $5 - 2\sqrt{(4 - x)^2} < 3$ |
| 6) $5 - 2 - 5x \geq -3$ | 14) $1 - 2 x + 4 > -3$ |
| 7) $2x + 12x - 2 < 5$ | 15) $5 - 2 x + 4 > -3$ |
| 8) $ 2x - 3 + \frac{x}{3} \leq \frac{4x - 1}{9}$ | 16) $ 4 - 5x - 3 \leq -1$ |

7 Geometría

I. Plantee y resuelva los problemas siguientes:

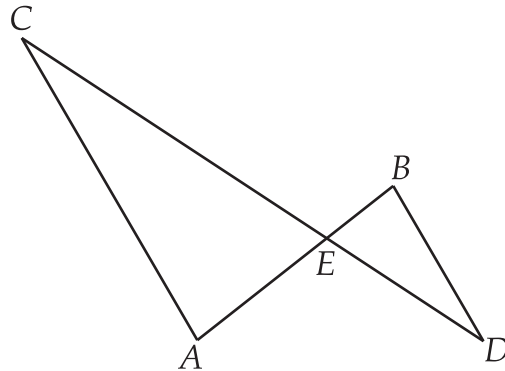
- 1) Un árbol proyecta una sombra de 5 m en el mismo instante en el que un poste de 6 m de altura, próximo al árbol, proyecta una sombra de 2 m . Halle la altura del árbol, si tanto este como el poste forman un ángulo recto con el suelo.
- 2) Se sirve una bola de tenis desde una altura de 7 pies , pasando ajustadamente sobre una red de 3 pies de altura; si el servicio se hace desde una distancia de 40 pies de la red, ¿a qué distancia de la red dará la bola en el piso?
- 3) En un triángulo equilátero de lado 8 cm , ¿cuál es la longitud de la altura correspondiente a cualquiera de sus lados? Si el lado es de longitud l , exprese la longitud de la altura en términos de l .
- 4) ¿Cuál es el área de un rectángulo si su perímetro es 50 cm y la diferencia entre su base y su altura es 5 cm ?
- 5) En un rombo, cada lado mide 10 cm de longitud y una de sus diagonales mide 12 cm . Determine el área del rombo y calcule la distancia que hay desde el punto de intersección de sus diagonales con cualquiera de sus lados.
- 6) Calcule el área de un cuadrado cuya diagonal mide $5\sqrt{2}\text{ cm}$.
- 7) Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son tales que: $m\angle A = m\angle D$, $m\angle B = m\angle E$. Si los lados de estos triángulos miden, respectivamente: $a = 24\text{ cm}$, $b = 16\text{ cm}$, $c = 36\text{ cm}$, $d = 18\text{ cm}$, $e = 12\text{ cm}$ y $f = 27\text{ cm}$, justifique por qué los triángulos son semejantes y halle la razón de semejanza del primero respecto del segundo.
- 8) Los lados de un triángulo miden 48 m , 56 m y 32 m , respectivamente. Si el perímetro de un triángulo semejante a él es 51 m , determine las longitudes de sus lados.
- 9) Los lados de un triángulo rectángulo miden 6 m , 8 m y 10 m , respectivamente. ¿Cuánto miden los catetos de un triángulo semejante al primero, si su hipotenusa es igual a 15 m ?
- 10) En un triángulo rectángulo, los segmentos determinados en la hipotenusa por la altura correspondiente miden 9 cm y 4 cm , respectivamente. Halle la longitud de la altura sobre la hipotenusa y la medida de los catetos de dicho triángulo.
- 11) La base de un triángulo isósceles mide 24 cm y los lados congruentes miden 20 cm , halle la medida de la altura sobre la base del triángulo.
- 12) Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 24 cm y la proyección del otro sobre la hipotenusa mide $10,8\text{ cm}$. Determine la medida de la hipotenusa del triángulo.
- 13) La base y la altura de un rectángulo miden 12 cm y 5 cm , respectivamente. Halle la altura de otro rectángulo, si se sabe que tiene 20 cm de base y que su área es $\frac{4}{3}$ del área del primero.
- 14) El área de un triángulo equilátero es $200\sqrt{3}\text{ dm}^2$; determine la distancia del ortocentro a cualquiera de los vértices de dicho triángulo.

- 15) Halle el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 12 cm .
- 16) Determine el área de un círculo cuya circunferencia tiene 24 cm de longitud.
- 17) Calcule el área de un círculo, sabiendo que el cuadrado inscrito en él tiene 100 cm^2 de área.
- 18) Halle el área de la porción del plano limitada por una circunferencia de radio igual a 6 cm y por el contorno de un hexágono regular inscrito en ella.
- 19) Determine el área de un segmento circular, de un círculo de 6 cm de radio, cuya medida del arco subtendido es 60° .
- 20) Calcule el ángulo central de un sector circular, de un círculo de 15 cm de radio, cuya área es $95\pi\text{ cm}^2$.
- 21) Halle el área de un sector circular de radio 10 cm cuyo arco subtendido mide $\frac{2\pi}{5}$.
- 22) Determine el área y el volumen de un prisma recto, cuyas bases son triángulos equiláteros de 4 cm de lado y cuya altura mide 7 cm .
- 23) Halle la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 15 cm .
- 24) Halle el área de la base de un cilindro, sabiendo que su área total es $480\pi\text{ cm}^2$ y que su altura mide 40 cm .
- 25) Determine el área lateral de un cono, sabiendo que el radio de su base mide 6 cm y que su altura mide 8 cm .
- 26) Halle el área lateral de un cilindro de radio r , cuya altura es igual a la medida del lado del triángulo equilátero inscrito en su base.
- 27) Al contenido de un cubo de 5 cm de arista se le quita la capacidad de un cilindro de 3 cm de diámetro que posee la misma altura. Calcule el volumen restante en el cubo.
- 28) Dos esferas de metal de radios $2r$ y $3r$, respectivamente, se funden juntas para hacer una esfera mayor. Calcule el radio de la nueva esfera.
- 29) Al introducirse un sólido de superficie irregular en un recipiente con forma de paralelepípedo, con dimensiones $2\text{ dm} \times 3\text{ dm}$ en su base, el nivel del agua subió 4 dm . ¿Cuál es el volumen del sólido irregular?
- 30) La altura de un cono es 5 cm y un plano a 2 cm del vértice del cono es paralelo a su base. Si el volumen del cono más pequeño es $16\pi\text{ cm}^3$, ¿cuál es el volumen del cono más grande?
- 31) Un tronco de cono tiene 8 dm de altura; si los radios de sus bases son 4 dm y 6 dm , respectivamente, ¿cuál es el volumen del tronco de cono? NOTA: Un tronco de cono se obtiene cortando un cono con un plano paralelo a la base a una distancia menor que su altura.
- 32) Dentro de una caja cúbica, cuyo volumen es 64 cm^3 , se coloca una bola que toca a cada una de las caras en su punto medio. Calcule el volumen de la bola.
- 33) Encuentre el volumen de un cono circular recto, si se sabe que su generatriz mide 25 cm y que su altura mide 24 cm .

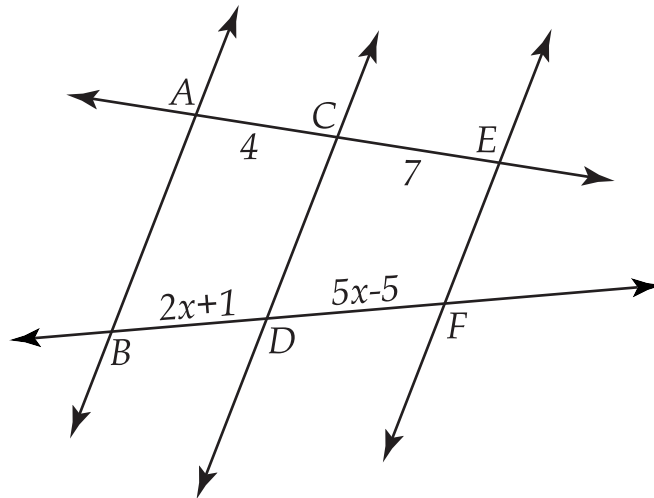
- 34) Determine el volumen de un cilindro circular recto de 12 cm de altura, si se sabe que el área lateral de dicho cilindro es $168\pi\text{ cm}^2$.
- 35) Si el volumen de un cono es $384\pi\text{ cm}^3$ y su altura es $\frac{9}{4}$ partes del radio, halle el área de su base.

II. En cada caso, utilice el dibujo que se proporciona para resolver los siguientes problemas (las figuras no están hechas, necesariamente, a escala)

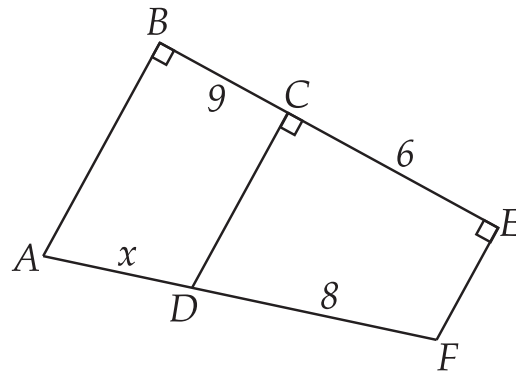
- 1) En la siguiente figura, $\overline{AE} = 12$, $\overline{EB} = 28$, $\overline{CE} = 15$ y $\overline{AC} = 18$; halle \overline{ED} y \overline{BD} , si se sabe que $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.



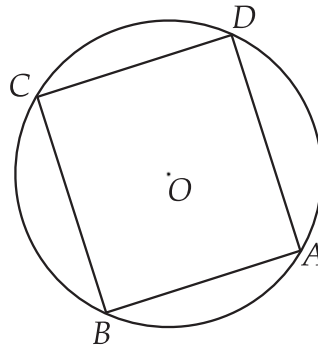
- 2) En la siguiente figura se tiene que $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$. Determine el valor de x .



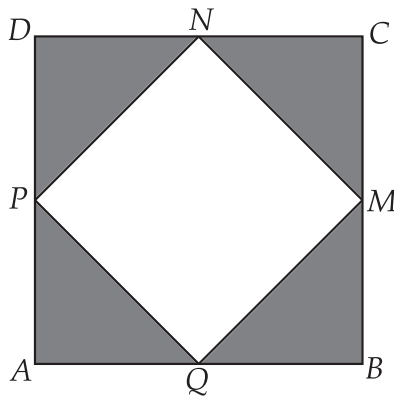
- 3) Halle el valor de x para la siguiente figura.



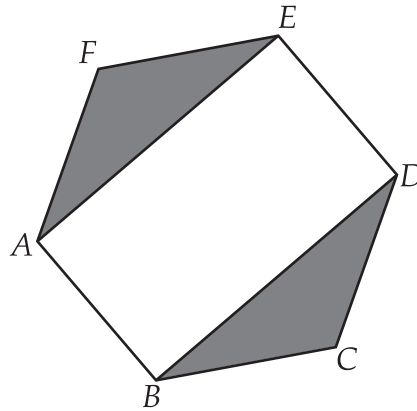
- 4) El área de un cuadrado es 144 cm^2 , determine el área del círculo circunscrito a dicho cuadrado.



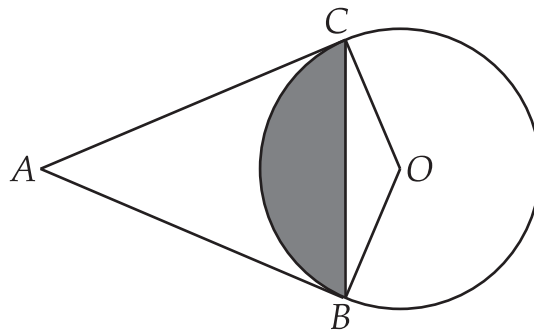
- 5) El cuadrado $ABCD$ tiene 4 m de lado. Si M , N , P y Q son los puntos medios de sus lados, halle el área de la región sombreada.



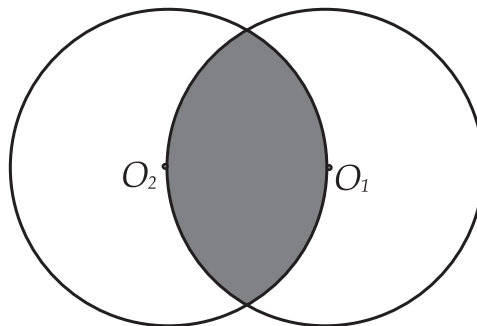
- 6) En el hexágono regular $ABCDEF$ de 2 cm de lado, se trazan las diagonales \overline{AE} y \overline{BD} . Halle el área de la región sombreada.



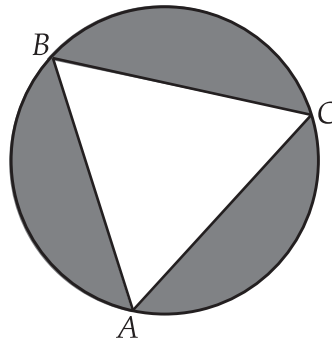
- 7) Las tangentes \overline{AB} y \overline{AC} , trazadas desde un punto A a una circunferencia de centro O y de 3 cm de radio, forman un ángulo de 60° . Halle el área de la región sombreada.



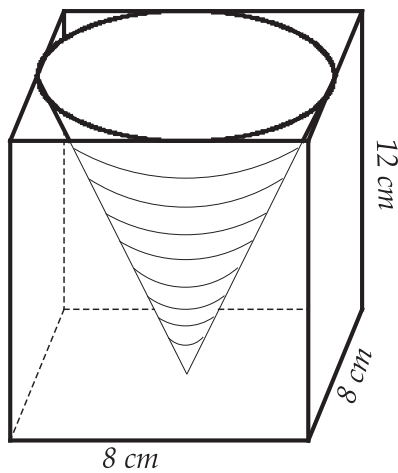
- 8) Las circunferencias congruentes de centros O_1 y O_2 tienen 6 cm de radio. Halle el área de la región sombreada.



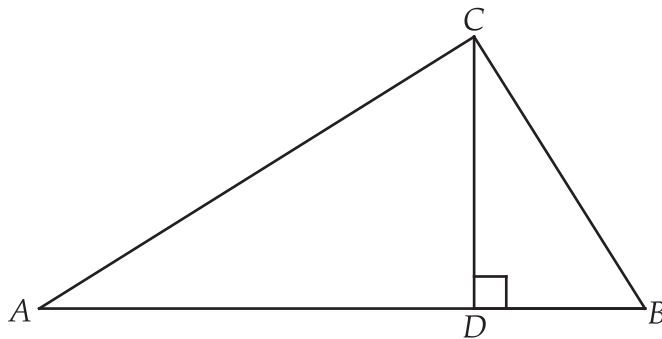
- 9) En la figura adjunta, el triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio. Halle el área de la región sombreada.



- 10) Determine el volumen del espacio limitado entre el cono y el prisma, de acuerdo con las medidas indicadas en la siguiente figura.

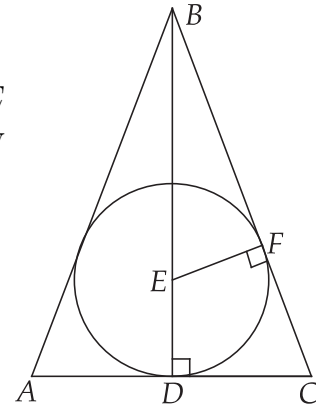


- 11) Considere el triángulo de la figura y determine la longitud de \overline{AD} y \overline{CD} , si se tiene que $\overline{AC} = 20\text{ cm}$, $\overline{BC} = 15\text{ cm}$ y, además, el ángulo en C es recto (mide 90°).



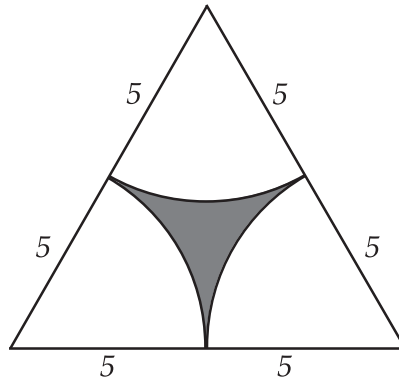
- 12) En la siguiente figura se tiene un círculo, de centro E y de 8 cm de radio, inscrito en el $\triangle ABC$; si $y = \overline{EB}$ y $x = \overline{DC}$:

- (a) muestre que $\triangle DBC \sim \triangle FBE$
 (b) determine el área del $\triangle ABC$ en términos de y

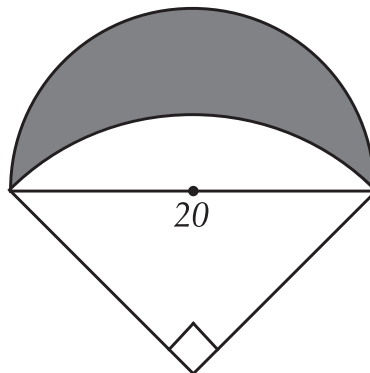


- 13) Determine el área sobreada en cada uno de los casos siguientes

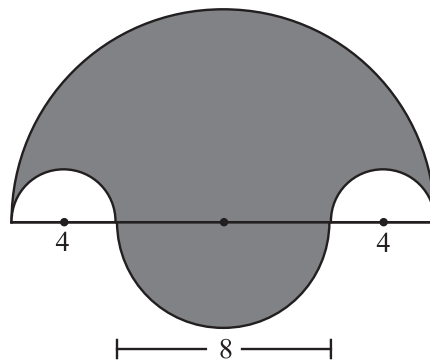
(a)



(b)



(c)



8 Funciones Algebraicas

I. Determine si la correspondencia dada por el conjunto de pares ordenados (x, y) es una función o no:

1) $\left\{ (1, 2), (2, -3), (3, 4), (4, -1), (1, -5) \right\}$

2) $\left\{ (0, 1), (1, 1), (2, 1) \right\}$

3) $\left\{ (4, 8), (4, 2), (4, -16) \right\}$

II. Considere las siguientes relaciones de conjuntos y determine ¿cuáles son funciones?

1) $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 1 - x^2$

2) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

3) $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $h(x) = \sqrt{x}$

III. Para cada una de las siguientes funciones, determine lo que se pide:

1) Si $g(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$

(a) $g\left(\frac{-1}{2}\right)$

(b) $g(-1)$

(c) $g(0)$

(d) $g(\sqrt{5})$

(e) $g\left(\frac{2}{3}\right)$

(f) $g(a + 1)$

2) Si $f(x) = \frac{4x^2 - x}{3x - 4}$

(a) $f(2)$

(b) $f(-5)$

(c) $f\left(\frac{4}{3}\right)$

(d) x , de manera que $f(x) = 7$

3) Si $h(x) = \frac{1 - x}{x}$

(a) $h(1)$

(b) $h(2)$

(c) $h(a + x)$

(d) $h(0)$

(e) Todas las preimágenes de 24

$$4) \text{ Si } f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } |x| < 2 \\ -2x - 4 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(a) \quad f(-3)$$

$$(b) \quad f\left(\frac{-3}{2}\right)$$

$$(c) \quad f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$(d) \quad f(-2)$$

$$(e) \quad f(\sqrt{3})$$

$$(f) \quad \text{Todas las preimágenes de 2}$$

IV. Represente en un sistema de coordenadas rectangulares lo que se pide en cada caso:

1) Los datos de la tabla siguiente

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	210	330	450	580	700	830	950	1150

2) Las funciones siguientes

$$(a) \quad f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ tal que } f(x) = 3 - x^2$$

$$(b) \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } h(x) = 3 - x^2$$

$$(c) \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x > 1 \\ -x^3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

$$(d) \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x > -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

$$(e) \quad f :]-\infty, 4] \cup [5, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 4x & \text{si } -1 \leq x \leq 4 \\ 6 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

$$(f) \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 2 \geq x \geq 1 \\ 4 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$(g) \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

V. Para las gráficas de funciones que se enuncian, denotadas como f , determine:

(a) D_f : dominio real de f

(b) A_f : ámbito de f

(c) I_y : punto de intersección con el Eje y

(d) I_x : puntos de intersección con el Eje x

(e) $f+$: intervalos del dominio donde f es positiva

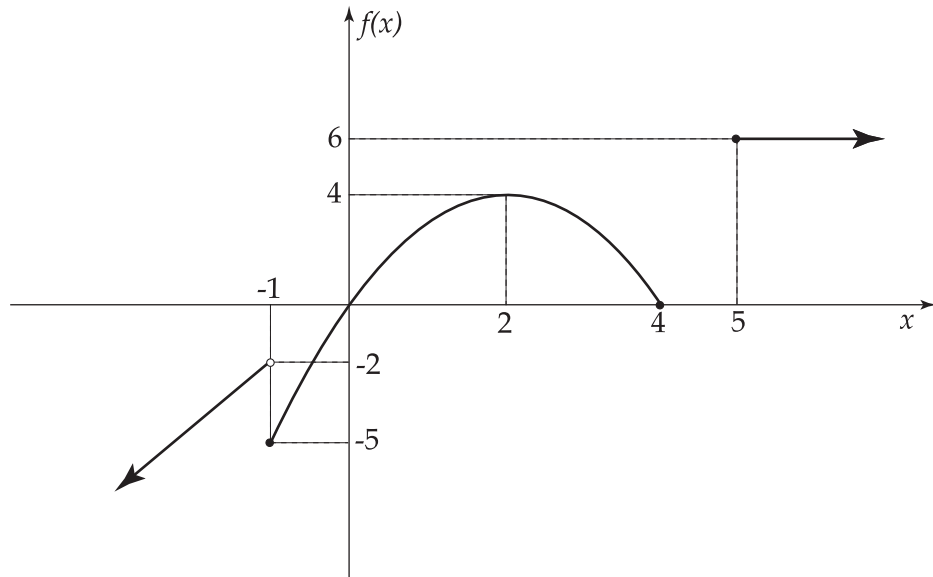
(f) $f-$: intervalos del dominio donde f es negativa

(g) $f \nearrow$: intervalos del dominio donde f es estrictamente creciente

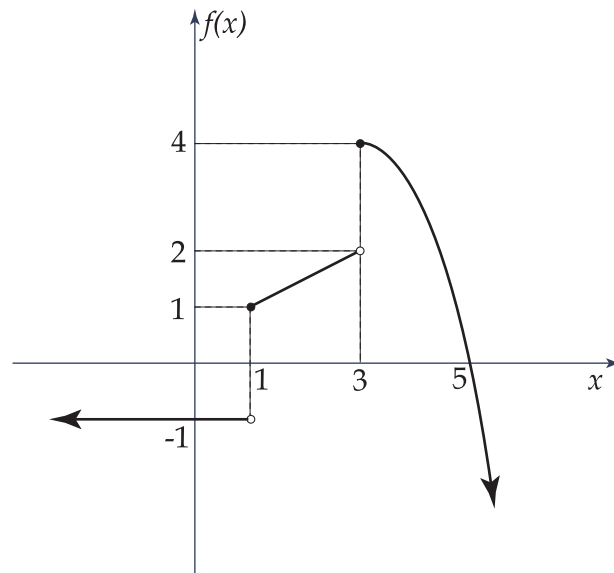
(h) $f \searrow$: intervalos del dominio donde f es estrictamente decreciente

(i) $f \rightarrow$: intervalos del dominio donde f es constante

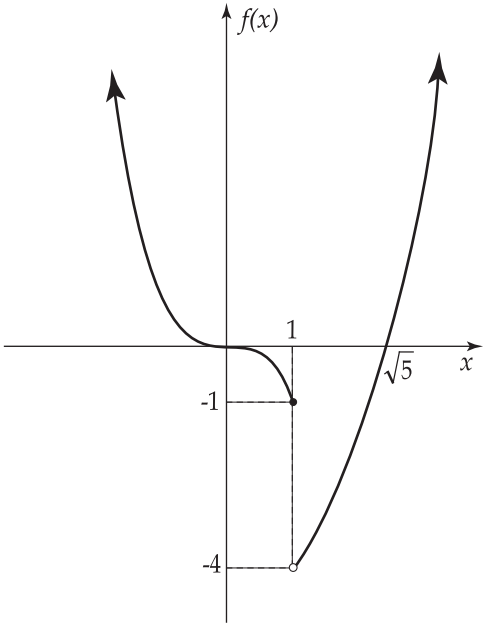
1)



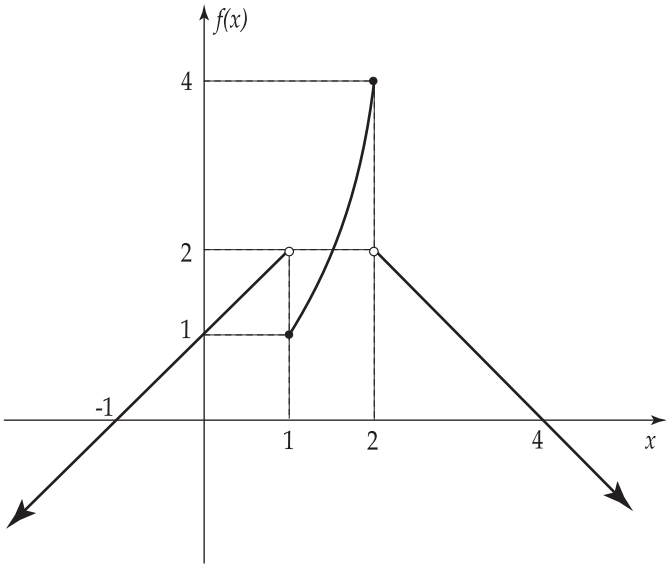
2)



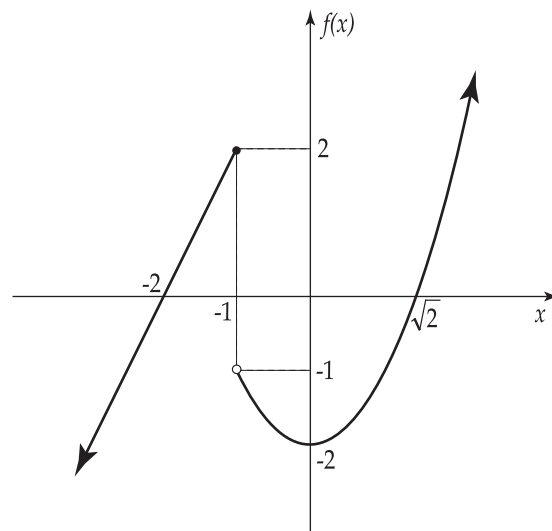
3)



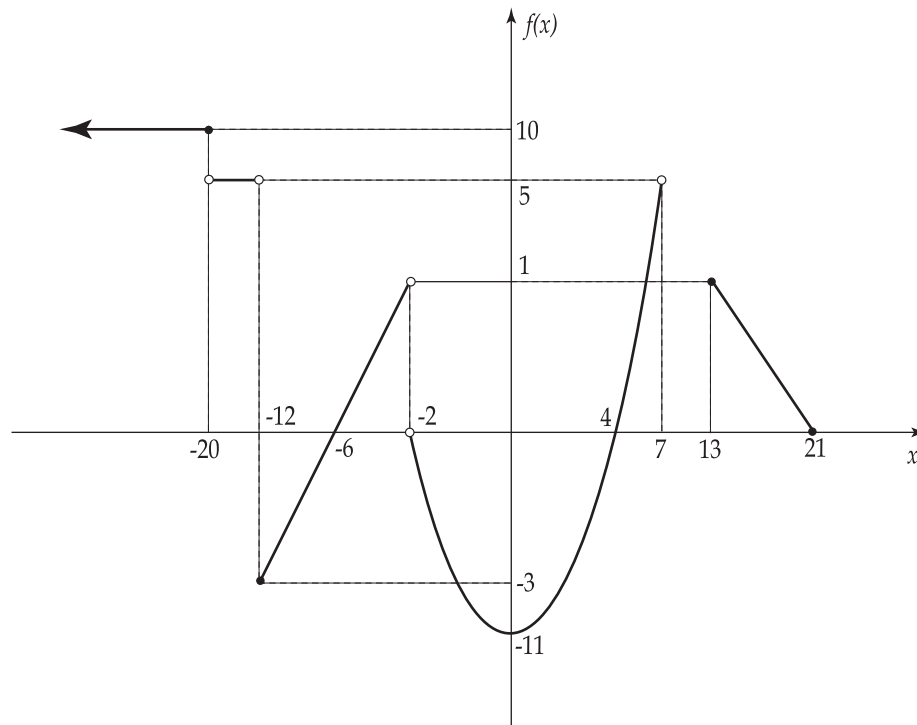
4)



5)



6)



VI. Plantee y resuelva los problemas siguientes:

- 1) Considere el $\triangle ABC$ recto en B , donde $|\overline{AC}| = 10\text{ cm}$ y $|\overline{AB}| = 6\text{ cm}$ con X entre los puntos B y C . Si $x = |\overline{BX}|$, exprese el área S (como función de x) del rectángulo inscrito al $\triangle ABC$ que tiene a \overline{BX} como uno de sus lados.
- 2) Un cilindro recto de radio 3 y altura 9 está inscrito en un cono de altura H y radio R .
 - (a) Exprese H como función de R .
 - (b) Exprese el volumen V del cono como función de R .

- 3) Se desea construir un recipiente cilíndrico cerrado. Si el área del fondo es igual a $4\pi \text{ cm}^2$, exprese el área S de material, en términos de la altura h del cilindro, que se necesita para construir el recipiente.
- 4) Considere el triángulo rectángulo ABC , recto en B , con $\overline{AC} = 6$ y $\overline{AB} = 4$. Sean E y D puntos sobre los lados AC y BC , respectivamente, tales que $m\angle EDC = 90^\circ$, $x = \overline{DC}$, $h = \overline{ED}$ y $z = \overline{EC}$.
 - (a) Exprese h como función de x .
 - (b) Exprese z en términos de x .
- 5) El dueño de una fábrica de refrescos sabe que su ganancia (en miles de colones semanales), como función del número x de refrescos vendidos, está dado por la fórmula:

$$P(x) = -0,01x^2 + 9x - 1\,296$$

- (a) Grafique la función $P(x)$.
 - (b) ¿Cuántos refrescos se deben vender, semanalmente, para obtener una ganancia máxima?
 - (c) ¿Cuál es la ganancia máxima?
- 6) Determine, para cada uno de los siguientes casos, la ecuación de la recta l que satisfaga las condiciones indicadas.
 - (a) Contiene los puntos $(-2, 3)$ y $(4, -1)$.
 - (b) Interseca al eje x en el punto $(-5, 0)$ y contiene el punto $(5, 6)$.
 - (c) Contiene el punto $(4, 1)$ y es paralela a la recta l_1 definida por $l_1 : 2x + 3y - 5 = 0$.
 - (d) Contiene el punto de intersección de las rectas l_1 y l_2 , definidas por $l_1 : y - 2x = 1$ y $l_2 : y - 4x = -1$, y, además, es perpendicular a la recta l_3 cuya ecuación es $l_3 : 3x - 2y = 4$. Represente, además, las cuatro rectas en un mismo sistema de coordenadas rectangulares, cuya escala en el eje x sea la misma que se utiliza en el eje y .
 - 7) Sea el triángulo con vértices $A = (-2, 1)$, $B = (4, 7)$ y $C = (6, -3)$. Determine la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela al segmento BC .
 - 8) Sea l la recta de ecuación $l : y = -2x + 5$. Calcule la distancia entre el punto $P = (-3, 1)$ y l .
 - 9) Sabiendo que $f(x) = x^2 - 3x + 1$, determine la ecuación de la recta l que pasa por el punto $(3, f(3))$ y que, además, sea perpendicular a la recta l_1 , donde l_1 contiene el punto $(2, 1)$ y corta el eje x en $(5, 0)$.
 - 10) Considere la recta l cuya ecuación es $l : 3x - 2y = 8$. Sea l_1 la recta a la que pertenecen los puntos $(2, -2)$ y $(k, 0)$. Determine el valor de k para que la recta l sea perpendicular a l_1 .
 - 11) Determine la ecuación de la recta l que pasa por el punto $(4, -1)$ y contiene el punto de intersección entre la parábola con ecuación $y = x^2 + 4$ y la recta de ecuación $y = 4x$.

- 12) Determine la ecuación de la recta l que pasa por el punto $(-2, 3)$ y contiene uno de los puntos de intersección entre la parábola con ecuación $y = -x^2 + 6x$ y la recta de ecuación $x + y = 6$.
- 13) Sea l_1 la recta de ecuación $l_1 : 2x - 3y = 1$ y sea P un punto de dicha recta cuya abscisa es 3. Determine la ecuación de la recta l que es perpendicular a l_1 y que, además, contiene el punto P .
- 14) Determine la ecuación de la recta l que pasa por el punto $(-1, 5)$ y es perpendicular a la recta l_1 de ecuación $l_1 : -3x + \frac{y}{3} = 4$.
- 15) Determine la ecuación de la recta l si se sabe que esta pasa por el punto $(0, 5)$ y, además, es perpendicular a la recta l_1 que contiene los puntos $(a, a + 1)$ y $(a + 1, a + 2)$.
- 16) Determine el valor de k para que $l_1 : y = kx - 3k$ y $l_2 : y = (3 - 4k)x + 2$ se intersequen en $x = 1$.
- 17) Determine el valor de k para que la recta de ecuación $\frac{3kx}{2} + (5k - 1)y - 2 = 0$ sea paralela a la recta $2x - 3y + 4 = 0$.
- 18) Dados $A = (-3, 1)$ y $B = (5, 4)$, encuentre la ecuación de la mediatriz del segmento AB .
- 19) Sea $l_1 : y = (k - 1)x + k$, $l_2 : y = (2k + 2)x + 2$ y $l_3 : y = kx + 5$. Calcule k , tal que $l_1 \parallel l_2$ y que $l_1 \perp l_3$.
- 20) ¿Para qué valores de a la parábola de ecuación $f(x) = x^2 + 3ax + 16$ interseca al eje x en un solo punto?
- 21) Compruebe que los puntos de coordenadas $A = (1, 6)$, $B = (4, 5)$, $C = (1, -4)$ y $D = (-2, -3)$ son los vértices de un rectángulo.
- 22) Determine el área del triángulo que está limitado por los ejes coordenados y la recta $5x - 4y = 20$. Calcule la longitud de la altura sobre la hipotenusa.
- 23) Determine la ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola de ecuación $y = -x^2 + 4x + 1$ y por el punto Q , donde Q es la intersección de la recta de ecuación $3x + 5y = 10$ con el eje y .
- 24) Si se lanza un objeto con velocidad inicial 100 m/s , su altura S (en metros sobre el suelo) después de t segundos viene dada por $S(t) = 100t - 4,9t^2$.
 - (a) ¿En qué instante t está el objeto a 40 m sobre el suelo?
 - (b) ¿En qué tiempo alcanzará el objeto su mayor altura?
 - (c) ¿Cuál es la altura máxima del objeto?
- 25) Un fabricante internacional de relojes puede producir cierto reloj con un costo de \$15 por unidad. Se estima que si el precio de venta del reloj es $\$x$, entonces, el número de relojes vendidos semanalmente será $125 - x$. Determine ¿cuál debe ser el precio de venta de cada reloj para que el fabricante obtenga una ganancia semanal máxima.

- 26) Determine dos números positivos cuya suma sea 50 y cuya suma de sus cuadrados sea mínima.
- 27) Una compañía de televisión por cable da servicio a 5000 usuarios y cobra \$20 por mes. Un estudio de mercado indica que por cada dólar menos en la tarifa mensual, se suscribirán 500 nuevos clientes. Si $R(x)$ denota el ingreso total mensual cuando el cobro es x dólares mensuales:
- Determine la función de ingreso R .
 - Halle el valor de x que produzca un ingreso máximo mensual.
- 28) La entrada a un edificio tiene la forma de un arco parabólico y mide 9 *pie* de alto en el centro y 6 *pie* de ancho en la base. Si hay que meter una caja rectangular de 8 *pie* de alto, ¿cuál es el ancho máximo que puede tener la caja?
- 29) El número de millas M que cierto automóvil puede recorrer con un galón de gasolina a una velocidad v , en *mi/h*, está dada por $M = \frac{-1}{30}v^2 + \frac{5}{2}v$, con $0 < v < 70$.
- Indique la velocidad más económica para un viaje.
 - Determine el valor máximo de millas que se pueden recorrer con un galón de gasolina.
- 30) Determine la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(1, -5)$, $(2, -3)$ y $(-3, -7)$.

VII. Determine el dominio real de las funciones siguientes:

- | | |
|---|--|
| 1) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} + \frac{5}{\sqrt[3]{2x - 7}}$ | 5) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x^4 + 1}$ |
| 2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x - 1}} + \frac{x^2 + 3}{6x^2 + 5x + 1}$ | 6) $f(x) = \frac{2x + 3}{\sqrt{2 - 5x}} + \frac{1}{2x^2 - 9x - 5}$ |
| 3) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 2}} - \frac{x + 9}{x^2 - 7x + 10}$ | 7) $f(x) = \sqrt{-2 + x - 1 }$ |
| 4) $f(x) = 4\sqrt[3]{5x + 1} + x^2$ | 8) $f(x) = \sqrt[4]{2 - \frac{1}{x}}$ |

VIII. Determine f^{-1} para cada una de las funciones siguientes:

- $f : \left] \frac{-1}{5}, \infty \right] \rightarrow [-3, \infty[$, tal que $f(x) = \sqrt{5x + 1} - 3$
- $f :]-\infty, -2] \rightarrow [0, \infty[$, tal que $f(x) = 4x^2 - 16$

IX. Si f y g están definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 5x + 1$. Determine el criterio para $f \circ (g \circ g)$.

X. Si f y g están definidas por $f(x) = \sqrt[4]{x^4} + 4$ y $g(x) = 16x^2 - 4$:

- 1) Determine el criterio para $g \circ f$
- 2) Resuelva la ecuación $(g \circ f)(x) = 0$
- 3) Calcule $(f \circ f)\left(\frac{-3}{2}\right)$

XI. Si f y g están definidas por $f(x) = \frac{-x}{2x+1}$ y $g(x) = 2 - x$, determine el criterio para las siguientes funciones y simplifique al máximo el resultado:

- 1) $f \circ g$
- 2) $\frac{g}{f}$
- 3) $f + g$

XII. Si $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, determine el criterio para $f(x)$.

XIII. Si $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y $g(x) = x + 1$, determine el criterio para las funciones siguientes:

- 1) $f + g$
- 2) $2f - 3g$
- 3) $g \circ (2f + 5g)$

XIV. Considere la siguiente tabla

x	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	-1	-1	1	11	19
$g(x)$	$\frac{-2}{3}$	-1	-2	2	1

y calcule:

- 1) $(f \circ g)(0)$
- 2) $(g \circ g)(0)$
- 3) $(g \circ f)(-2)$
- 4) $(f \circ g)(2)$

XV. Sea $h :]-\infty, 4[\cup]5, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < -1 \\ -x^2+4x & \text{si } -1 \leq x < 4 \\ 6 & \text{si } x > 5 \end{cases}$ Calcule $h\left(\frac{5}{2}\right)$

XVI. Identifique criterios para funciones f y g , si se tiene que:

- 1) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x+3}$
- 2) $(f \circ g)(x) = \frac{2}{(1-3x)^4}$
- 3) $(f \circ g)(x) = (x-1)^4$
- 4) $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+2}}$

XVII. Determine el criterio para la función g en cada caso:

- 1) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{3x-2}$ y $f(x) = 3x+5$
- 2) $(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$ y $f(x) = x+1$
- 3) $(g \circ f)(x) = (x-3)^2 + 2(x-3)$ y $f(x) = x-3$

XVIII. Si $f : D_f \rightarrow A_f$ es una función definida de manera tal que es biyectiva, para cada uno de los siguientes casos halle el criterio para f^{-1} y, además, compruebe que $(f \circ f^{-1})(x) = x$:

1) $f(x) = x^2 - 2$

5) $f(x) = \sqrt{x-1}$

2) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

6) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

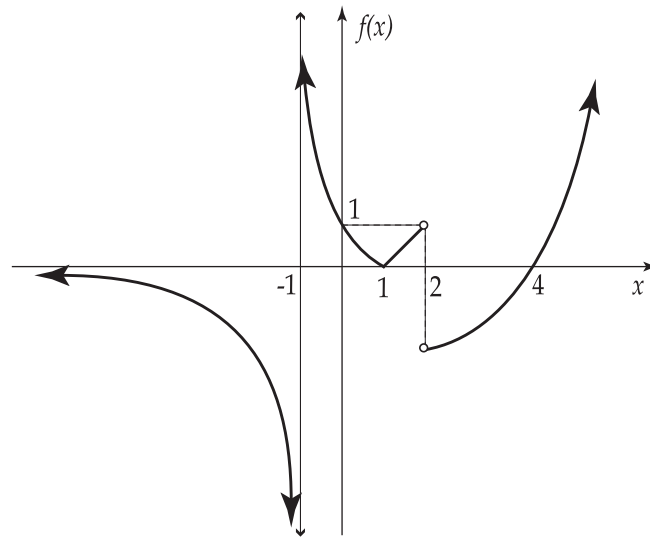
3) $f(x) = \frac{x+1}{7}$

7) $f(x) = -x^2 - 9x + 6$

8) $f(x) = x^2 + 6x + 7$

4) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x & \text{si } x < 1 \end{cases}$

XIX. Considere la siguiente representación gráfica de una función $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$



1) Determine:

(a) D_f : Dominio real de f

(b) A_f : Ámbito de f

(c) C_f : Codominio de f

2) ¿Es la función biyectiva?

XX. Sea $f : [0, \infty[\rightarrow [-25, \infty[$, tal que $f(x) = x^2 - 25$

1) Justifique ¿por qué f es biyectiva?

2) Determine D_f y $A_{f^{-1}}$

3) Halle el criterio para f^{-1}

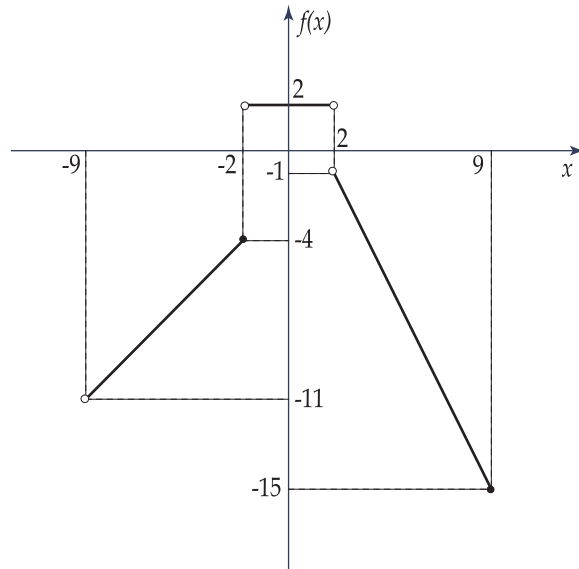
4) Verifique que $(f \circ f^{-1})(x) = x$

5) Represente, en un mismo sistema de coordenadas, las gráficas de f y f^{-1}

XXI. Sea $f :]-2, \infty[\rightarrow]-\infty, 1[$, tal que $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

- 1) Justifique ¿por qué f es biyectiva?
- 2) Determine D_f y $A_{f^{-1}}$
- 3) Halle el criterio para f^{-1}
- 4) Verifique que $(f \circ f^{-1})(x) = x$

XXII. Considere la siguiente representación gráfica de una función $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$



- 1) Determine:
 - (a) D_f : Dominio real de f
 - (b) A_f : Ámbito de f
 - (c) C_f : Codominio de f
- 2) ¿Es la función biyectiva?

9 Ecuaciones y Funciones Exponenciales y Logarítmicas

I. Determine el dominio real de las funciones siguientes:

$$1) f(x) = \log_4(16 - x^2)$$

$$4) f(x) = 3^{\sqrt{2x+1}}$$

$$2) g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x-1}}$$

$$5) f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

$$6) g(x) = \log_2(-2x - 1)$$

$$3) h(x) = \log_2\left(\frac{2+3x}{5-x}\right)$$

II. Grafique las siguientes funciones y determine, respectivamente, el dominio y el ámbito:

$$1) f(x) = 2^{x-3}$$

$$5) f(x) = \log_{\frac{3}{2}}(8 - x)$$

$$2) f(x) = e^x - 8$$

$$6) f(x) = \log_{\frac{6}{5}}(-x + 10) + 8$$

$$3) f(x) = 3^{4-x} - 9$$

$$7) f(x) = 2 + \ln(x + 12)$$

$$4) f(x) = \ln(-x + 6) - 3$$

$$8) f(x) = 2^{1,5x-2} - 3,5$$

III. Escriba las siguientes igualdades exponenciales en forma logarítmica:

$$1) 3^{-6} = \frac{1}{729}$$

$$7) 0,1013 \approx \pi^{-2}$$

$$2) \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$8) \sqrt[7]{3} = 3^{\frac{1}{7}}$$

$$3) 10^{-2} = 0,01$$

$$9) 5^{2k} = \frac{c+d}{d}$$

$$4) 3^4 = 81$$

$$10) 7^w = \frac{105q}{2r}$$

$$5) (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

$$11) (0,2)^t = 3 - 4r$$

$$6) e^3 \approx 20,0855$$

$$12) r^s = t - w$$

IV. Escriba las siguientes igualdades logarítmicas en forma exponencial:

$$1) \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{16}{9}\right) = -2$$

$$7) \log_3\left(\frac{m}{3}\right) = 2x + 5$$

$$2) \log_3(2x - y) = \frac{-3t}{x + y}$$

$$8) 5 - \log_7 m = 7 - 21x$$

$$3) \frac{2}{5} = \log \sqrt[5]{100}$$

$$9) \log \sqrt{\frac{2x+1}{w}} = w - 5$$

$$4) -0,5978 \approx \ln(0,55)$$

$$10) -1 = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$5) -2 \log 100 = -4$$

$$11) \ln w = \frac{2-x}{3-y}$$

$$6) \frac{2}{3} = \log_2 \sqrt[3]{4}$$

$$12) \ln(3 - t) = 3,8$$

V. Despeje t en cada uno de los casos siguientes:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1) $L = 100 (1 - 0,1e^{-0,01t})^2$ | 5) $A = A_0 e^{-0,0239t}$ |
| 2) $h = \frac{120}{1 + 200e^{-0,2t}}$ | 6) $5z^{2t} = B - v$ |
| 3) $A = Bw^{tC} + D$ | 7) $L = a (1 - be^{-kt})$ |
| 4) $E = \frac{U^2 C}{2} \left(1 - e^{\frac{-0,2t}{RC}}\right)$ | 8) $Q = k \cdot 2^{\frac{-t}{5}} + 3$ |
| | 9) $P = Mr^{\frac{t}{N}} - W$ |

VI. Determine el valor de la variable en cada una de las expresiones siguientes:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $e^{-x} = 1$ | 7) $\log_z (2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}$ |
| 2) $\log_{\frac{1}{3}} N = -3$ | 8) $5 = \ln x$ |
| 3) $\ln(-x) = 1$ | 9) $\log_w \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ |
| 4) $\log 0,001 = x$ | 10) $\log_5 625 = y$ |
| 5) $2 = \log_{0,75} x$ | 11) $5x = \log 1,5$ |
| 6) $\log_y 27 = -1,5$ | 12) $z = \log_{\frac{1}{4}} 16$ |

VII. Utilizando propiedades de expresiones logarítmicas y exponenciales, verifique cada una de las identidades siguientes:

- 1) $\log(ab^3) - \log(c\sqrt[3]{a^2}) = \log\left(\frac{b^3\sqrt[3]{a}}{c}\right)$
- 2) $\log\left(\frac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}\right) = \frac{1}{3}\log z - \log x - \frac{1}{2}\log y$
- 3) $e^{2\ln x} = x^2$
- 4) $\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$
- 5) $\log(a(a+b)^2) = 2\log(a+b) + \log a$
- 6) $\log_a\left(\frac{x^3\sqrt{y}}{z^2}\right) = 3\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - 2\log_a z$
- 7) $\frac{1}{4}\log(x^2 + 4x + 3) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{x+1}{x+3}\right) = \log\sqrt{x+1}$
- 8) $\ln\left(x\sqrt[3]{2x+1}\sqrt[5]{(3x+1)^2}\right) = \ln x + \frac{1}{3}\ln(2x+1) + \frac{2}{5}\ln(3x+1)$
- 9) $\frac{1}{3}\log_b(x^2 - 1) - \log_b y - 4\log_b z = \log_b\left(\frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{yz^4}\right)$
- 10) $\log_2\left(\frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}\right) = 2\log_2(\sin x) - \log_2(1 - \cos x) - \frac{1}{2}\log_2 x$

VIII. Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes:

- | | |
|---|---|
| 1) $2^{x^2+1} = 4$ | 17) $(e^x - 2)(4 + \log_x x)(2^x - 4^x) = 0$ |
| 2) $2^{3x} = 3$ | 18) $(e^{3+x} - 2)(2^x - 4^{x+1}) = 0$ |
| 3) $2^{2x} - 18 \cdot 2^x = -32$ | 19) $\log_2 \left(\frac{x+3}{x-4} \right) = 2$ |
| 4) $27^x = \frac{9^{2x-1}}{3^x}$ | 20) $\log_5(3x-1) + \log_5(2x+1) = 2$ |
| 5) $x^x = x^2$ | 21) $e^{2x^2} - \frac{1}{e^{5x+3}} = 0$ |
| 6) $\ln(2x) = 5$ | 22) $\log_9 \sqrt{10x+5} - \frac{1}{2} = \log_9 \sqrt{x+1}$ |
| 7) $\frac{1}{2} \ln(x+1) + \ln \sqrt{5x} = 1$ | 23) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{2-x} = 29$ |
| 8) $2^{2x} - 2^x - 1 = 1$ | 24) $2 \cdot 3^{-(x-2)} + 9^{\frac{x+1}{2}} - 20 = 9$ |
| 9) $\sqrt{2^x} = \frac{1}{2^5}$ | 25) $\log_5(\log_3(2x)) = 0$ |
| 10) $5^{7-3x} = 8^{5+2x}$ | 26) $\log(-x) = 1 - \log(3-x)$ |
| 11) $5^{2x} + 5^x = 6$ | 27) $\log_2 x + 4 + \log_2(x+1) = \log_2(x+2) + 5$ |
| 12) $\log_2(x+1) = 1 - \log_2 x$ | 28) $\log x^2 = (\log x)^2$ |
| 13) $e^{5x-2} = 30$ | 29) $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$ |
| 14) $e^x - e^{-x} = -1$ | 30) $\log(\log x) = 2$ |
| 15) $5 \cdot 4^{x-2} - 2^{x+3} = -28$ | 31) $\log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$ |
| 16) $1 + \ln x - \ln(3x) = 4 \ln x$ | |

IX. Considere el criterio para la función $f : D_f \rightarrow A_f$ y determine f^{-1} en cada caso; además, compruebe que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| 1) $f(x) = 2^x + 3$ | 8) $f(x) = e^x - 8$ |
| 2) $f(x) = \log_2 x + 5$ | 9) $f(x) = 3^{4-x}$ |
| 3) $f(x) = 4^{x-3} + 2$ | 10) $f(x) = \log_3(3-x)$ |
| 4) $f(x) = 4 - \log(2-x)$ | 11) $f(x) = 4^x - 3$ |
| 5) $f(x) = 5 \log_2 x + 3$ | 12) $f(x) = 2 - \ln(3-2x)$ |
| 6) $f(x) = 2^{x-3} - 2$ | 13) $f(x) = 2 \log_3(x+5) - 20$ |
| 7) $f(x) = -\log_2(2-x) + 4$ | 14) $f(x) = -4 \log_2(2-3x)$ |

X. Plantee y resuelva cada uno de los problemas siguientes:

- 1) Una bacteria del cólera se divide cada media hora para producir 2 bacterias completas. Si comenzamos con una colonia de A_0 bacterias, en t horas habrá $A(t) = A_0 2^{2t}$ bacterias (suponiendo que se les proporciona comida adecuada y suficiente).
 - (a) Encuentre A para $A_0 = 5\,000$ bacterias y $t = 2,6$ horas
 - (b) Si en $t = 4,33$ horas hay 2 000 000 de bacterias, ¿cuál era la colonia inicial de bacterias?

- 2) De acuerdo con la “ley de enfriamiento de Newton”, un objeto se enfría en forma directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea. Dicha ley de enfriamiento puede servir para mostrar que, bajo ciertas condiciones, la temperatura T de un objeto está dada por $T = 75 e^{-t}$, donde t es el tiempo. Expresa t como función de T para poder determinar el tiempo que se necesita para que cierto objeto tenga una temperatura específica.
- 3) Cierta sustancia radiactiva se desintegra según la fórmula $q(t) = q_0 e^{-0,0063t}$, donde t es el tiempo en días y q_0 es la cantidad inicial de sustancia. Calcule la semivida de la sustancia. NOTA: La *semivida* o *vida media* de una sustancia, es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la cantidad original de la muestra.
- 4) Con base en las tasas demográficas actuales, se espera que la población de Kenia, N , aumente según la fórmula $N = 20,2 e^{0,046t}$ con N en millones y $t = 0$ correspondiente al año 1998. ¿En qué año se duplicará la población inicial?
- 5) Después de que un estudiante con virus gripal regresa a un campus universitario aislado, de 2000 estudiantes, el número N de infectados después de t días se pronostica por:

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 1999 e^{-0,985t}}$$

- (a) ¿Cuántos estudiantes estarán infectados después de 72 horas?
- (b) ¿Cuántos días deben pasar para que hallan 662 estudiantes infectados?
- 6) El número de bacterias de un cultivo después de t horas está dado por $N(t) = N_0 e^{kt}$, donde N_0 es la cantidad de bacterias que habían, originalmente, en el cultivo y k es cierta constante real. Encuentre el tiempo que tarda la colonia para cuadruplicar su tamaño, sabiendo que después de una hora esta se ha extendido a 1,5 veces de su población inicial.
- 7) En cierto circuito, la corriente I en cualquier instante t (tiempo en segundos) está dada por $I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$, donde I_0 es la corriente máxima, L es la inductancia y R es la resistencia. Si un circuito tiene un inductor de $0,9 H$, una resistencia de 2Ω y corriente máxima de $1,5 A$, ¿en qué instante la corriente llega a $1,45 A$?
- 8) Como resultado de la contaminación, la población de peces de un río disminuye según la fórmula $\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -0,0437t$, donde P es la población de peces después de t años y P_0 es la población inicial de peces.
 - (a) ¿Después de cuántos años habrá solo 50% de la población original de peces?
 - (b) ¿Después de cuántos años la población se reducirá en 40%?
 - (c) ¿Qué porcentaje de la población morirá durante los primeros 3 años y 9 meses de contaminación?

- 9) Sea n el número promedio de temblores por año con magnitudes entre R y $R + 1$ en la escala de Richter. Una fórmula que relaciona el número de temblores con su magnitud es $\ln n = 7,7 - 0,9 R$.
- (a) Despeje n en términos de R para poder hallar el número de temblores con cierta magnitud.
 - (b) Encuentre el número promedio de temblores por año para los casos en que las magnitudes son $R = 4,5$ y $R = 7$, respectivamente.
- 10) La energía E (en *ergs*) liberada durante un temblor de magnitud R se puede calcular mediante la fórmula $\log E = 11,4 + 1,5 R$.
- (a) Despeje E en términos de R para poder hallar la cantidad de energía que se libera con un temblor de magnitud R .
 - (b) Encuentre la energía liberada durante el famoso temblor de Alaska de 1964, que tuvo una intensidad de 8,4 en la escala de Richter.
- 11) En un estanque se cultivan 1 000 ejemplares de truchas; tres meses después se estima que quedan 600 truchas. Encuentra una fórmula, de la forma $N = N_0 a^{ct}$ para calcular el número de ejemplares restantes después de t meses.
- 12) La longitud L de un pez se relaciona con su edad por medio de la fórmula de crecimiento de Bertalanffy $L = a(1 - b e^{-kt})$, donde a , b y k son constantes positivas que dependen del tipo de pez. Resuelva esta ecuación para t , con el fin de obtener una fórmula que permita calcular la edad de un ejemplar con base en su longitud.
- 13) En un cultivo de bacterias hay 2 000 ejemplares; 5 meses más tarde se estima que el número de bacterias aumente en 60%.
- Determine una fórmula, de la forma $B = B_0 a^{kt}$, donde se pueda calcular el número de bacterias que habrá después de t meses.

10 Ecuaciones y Funciones Trigonómicas

I. Exprese en grados las siguientes medidas dadas en radianes:

- | | | |
|-----------------------|----------------------|-------------|
| 1) $\frac{7\pi}{6}$ | 4) $\frac{14}{5}$ | 7) -15π |
| 2) $\frac{11\pi}{12}$ | 5) $\frac{1}{90}$ | 8) 42π |
| 3) $\frac{13\pi}{90}$ | 6) $\frac{-2\pi}{3}$ | 9) -25 |

II. Exprese en radianes las siguientes medidas dadas en grados:

- | | | |
|-----------------|------------------|--------------------|
| 1) 225° | 3) 15° | 5) $-12^\circ 30'$ |
| 2) -840° | 4) $7^\circ 12'$ | 6) 13° |

III. Sin hacer uso de la calculadora determine el valor numérico de las expresiones siguientes:

- | | |
|--|---|
| 1) $\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ | 6) $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ |
| 2) $\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right) + 2\cos(3\pi)$ | 7) $\sin^2(-90^\circ) + \cos^2(135^\circ)$ |
| 3) $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ | 8) $\sin^2\left(\frac{7\pi}{3}\right) - \cos(3\pi) + \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ |
| 4) $\cos\left(2\arctan(1)\right)$ | 9) $\arccos\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ |
| 5) $\tan(4\pi) + \sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ | 10) $\arcsen\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ |

IV. Determine la función trigonométrica indicada para el ángulo cuyas características se dan en cada caso:

- 1) Si el lado terminal de un ángulo en posición normal α pasa por el punto $P(-3, 5)$, calcule $\tan(\alpha)$
- 2) Si α es un ángulo en posición normal, tal que $\sin(\alpha) = \frac{-2}{\sqrt{13}}$ y su lado terminal se localiza en el IV cuadrante, encuentre $\cos(\alpha)$
- 3) Si el ángulo β está en posición estándar y el punto $P(-2, -3)$ se encuentra en el lado terminal de β , encuentre $\sin(\beta) - \cos(\beta)$
- 4) Si se sabe que θ es un ángulo en posición estándar que está en el II cuadrante y $\tan(\theta) = x$, halle $\cos(\theta)$
- 5) Si $\sin(\theta) = x$ y θ es un ángulo en posición estándar que está en el segundo cuadrante, encuentre $\cos(2\theta)$

- 6) Si $\tan(\alpha) = \frac{4}{5}$ y $\tan(\beta) = \frac{5\sqrt{3}+4}{4\sqrt{3}-5}$, con α y β ángulos en posición estándar que pertenecen al primer cuadrante, halle $\tan(\alpha + \beta)$
- V. Sea α un ángulo en posición estándar en el III cuadrante, tal que $\tan(\alpha) = \frac{5}{12}$. Determine el valor exacto de la siguiente expresión: $\frac{\sin(\alpha)}{2\cos^2(\alpha)}$
- VI. Determine $\cos(\alpha - \beta)$, si $\cos(\alpha) = \frac{-3}{4}$ y $\sec(\beta) = 2$, donde α y β son ángulos en posición estándar, tales que α está en el III cuadrante y β está en el I cuadrante
- VII. Determine el valor numérico exacto de $2\cos(-225^\circ) + 5\frac{\tan(330^\circ)}{\cot(-495^\circ)} - 4\sqrt{2}\frac{\csc(-450^\circ)}{\sec(225^\circ)}$
- VIII. Si α es un ángulo en posición normal, halle el valor de $\tan(\alpha)$, sabiendo que $\arcsen\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \alpha$
- IX. Determine el valor de $\sin(\beta - \alpha)$ si se sabe que α y β son dos ángulos en posición estándar del tercer cuadrante que satisfacen $\sin(\alpha) = \frac{-3}{5}$ y $\cos(\beta) = \frac{-1}{4}$
- X. Determine $\sin(\alpha)$ como función de x si se sabe que α es un ángulo en posición normal del tercer cuadrante que satisface que $\sec(\alpha) = x$. Determine, posteriormente, el valor de α como función de x
- XI. Verifique cada una de las siguientes identidades
- 1) $\frac{\sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x) + 4\sin^3(x)\cos(x)}{1 - 4\sin^4(x)}$
 - 2) $\frac{\tan^2(x)}{\sec(x) + 1} = \frac{1 - \cos(x)}{\cos(x)}$
 - 3) $\frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} + \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = 2\csc(x)$
 - 4) $\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} = 2\sec(x)$
 - 5) $\frac{\sin(\alpha) + \tan(\alpha)}{\cot(\alpha) + \csc(\alpha)} = \sec(\alpha) - \cos(\alpha)$
 - 6) $\frac{1}{\sin(\alpha)} - \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{1 - 2\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) + \sin^2(\alpha)\cos(\alpha)}$
 - 7) $\frac{1 - \sin(x)}{\sin(x)\cot(x)} = \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}$
 - 8) $\frac{2\cos(2x)}{\cos^2(x) - \sin(x)\cos(x)} = 2 + 2\tan(x)$

$$9) \quad \sec(\alpha) - \tan(\alpha) = \frac{\sec^2(\alpha) - \tan^2(\alpha)}{\sec(\alpha) + \tan(\alpha)} + \sec(\alpha) - \tan(\alpha)$$

$$10) \quad \csc(x) \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$11) \quad \frac{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}{2 \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \cot(2\alpha)$$

$$12) \quad \frac{1}{1 + \cos(\alpha)} - \frac{1}{1 - \cos(\alpha)} = -2 \cot(\alpha) \csc(\alpha)$$

$$13) \quad \cos(\theta) \cot(\theta) + \sin(\theta) = \csc(\theta)$$

$$14) \quad \sin(\alpha) \tan(\alpha) + \cos(\alpha) = \sec(\alpha)$$

$$15) \quad (1 - \cos(x)) (\csc(x) + \cot(x)) = \sin(x)$$

$$16) \quad \sec^2(\lambda) + \tan^2(\lambda) + 1 = \frac{2}{\cos^2(\lambda)}$$

$$17) \quad \frac{\sin(\lambda) + \cos(\lambda)}{\cos(\lambda) - \sin(\lambda)} = \frac{\cot(\lambda) + 1}{\cot(\lambda) - 1}$$

$$18) \quad \frac{\csc(\beta) + 1}{\csc(\beta) - 1} = \frac{1 + \sin(\beta)}{1 - \sin(\beta)}$$

$$19) \quad \frac{\cos(\delta)}{\cos(\delta) + \sin(\delta)} = \frac{\cot(\delta)}{1 + \cot(\delta)}$$

$$20) \quad \frac{1}{1 + \cot(\delta)} = \frac{\sin(\delta)}{\sin(\delta) + \cos(\delta)}$$

$$21) \quad \frac{\cos(\varphi)}{1 + \sin(\varphi)} + \frac{1 + \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = 2 \sec(\varphi)$$

$$22) \quad \frac{\sin^4(\varphi) - \cos^4(\varphi)}{1 - \cot^4(\varphi)} = \sin^4(\varphi)$$

$$23) \quad \sec(\varphi) + \tan(\varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)}$$

$$24) \quad \frac{\sin(2\delta)}{1 + \cos(2\delta)} = \tan(\delta)$$

$$25) \quad \sin(2\delta) = \frac{2 \tan(\delta)}{1 + \tan^2(\delta)}$$

$$26) \quad \frac{\cos(2\delta)}{\cos(\delta)} = 2 \cos(\delta) - \sec(\delta)$$

$$27) \quad \left(\sec(\alpha) + \tan(\alpha) \right)^2 = \frac{1 + \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}$$

$$28) \quad \cos(\alpha) \cos(-\alpha) - \sin(\alpha) \sin(-\alpha) = 1$$

$$29) \quad \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\beta)$$

$$30) \quad \tan(\phi) + \cot(\phi) = \frac{2}{\sin(2\phi)}$$

- 31) $\frac{\operatorname{sen}(2\phi)}{\operatorname{sen}(\phi)} - \frac{\cos(2\phi)}{\cos(\phi)} = \sec(\phi)$
 32) $\cos^2(\phi) - \cos^2(\varphi) = \operatorname{sen}^2(\varphi) - \operatorname{sen}^2(\phi)$
 33) $\cos^2(\varphi) - \operatorname{sen}^2(\varphi) = \frac{1 - \tan^2(\varphi)}{1 + \tan^2(\varphi)}$
 34) $\cos^2(\alpha) = \cos(\alpha) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
 35) $\cos(x+y) \cos(y) + \operatorname{sen}(x+y) \operatorname{sen}(y) = \cos(x)$

XII. Determine todas las soluciones que pertenecen a $[0, 2\pi]$ para la ecuación

$$\left(3 \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x)\right) \left(4 \cos^2(x) - 3\right) = 0$$

XIII. Resuelva todas y cada una de las siguientes ecuaciones en \mathbb{R} o en el intervalo que se indique

- 1) $\left(2 \operatorname{sen}(2\alpha) + \sqrt{3}\right) \left(1 - 2 \operatorname{sen}(\alpha)\right) = 0$
- 2) $2 \tan^2(x) + \sec^2(x) = 2$, para $x \in [0, 2\pi[$
- 3) $2 \cos(\theta) \cos(2\theta) - 3 \cos(2\theta) = 0$
- 4) $\tan^2(x) + \sec(x) - 1 = 0$
- 5) $\left(2 \operatorname{sen}(2x) - 1\right) \left(\sec(x) + 1\right) = 0$
- 6) $-2 \operatorname{sen}^2(\alpha) - 7 \cos(\alpha) = 2$
- 7) $2 \operatorname{sen}(x) + \tan(x) = 0$
- 8) $2 \operatorname{sen}(x) \tan(x) - \tan(x) - 10 \operatorname{sen}(x) + 5 = 0$
- 9) $3 \tan^3(x) + 3 \tan^2(x) + \tan(x) + 1 = 0$
- 10) $\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x) + 1 = 0$
- 11) $-2 \operatorname{sen}^2(3\alpha) = \cos(3\alpha) - 2$
- 12) $7 \cos^2(3\alpha) = 3 \cos(3\alpha)$, para $\alpha \in [0, 2\pi[$
- 13) $-2 \cos^2(\alpha) - 3 \operatorname{sen}(\alpha) = 0$
- 14) $\cos(x) = \operatorname{sen}(x)$
- 15) $\cos^2(x) = 2 \operatorname{sen}(x)$
- 16) $\csc(x) = \sec(x)$
- 17) $\cos(x) = \sqrt{5} \operatorname{sen}(x)$
- 18) $2 \operatorname{sen}(x) = 3$
- 19) $\cos(x) + 2 \operatorname{sen}(x) = 2$
- 20) $2 \cos(x) \tan(x) = 1$
- 21) $\tan^2(x) + 3 = 2 \sec^2(x)$
- 22) $2 \cos^2 - 3 \operatorname{sen}(x) = 1$
- 23) $3 \operatorname{sen}^2(x) - 2 \operatorname{sen}(x) = 0$
- 24) $\operatorname{sen}(x) = \cos(2x)$
- 25) $\cos(2x) + \cos(x) + 1 = 0$
- 26) $3 \operatorname{sen}(x) - \cos(2x) = \frac{1}{2}$
- 27) $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{5}$
- 28) $3 \operatorname{sen}(x) + 4 \cos(x) = 5$
- 29) $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 1$

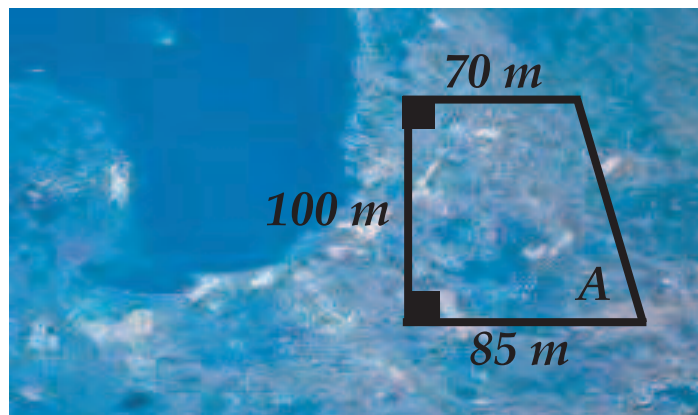
- | | |
|--|---|
| 30) $4 \cos^2(x) = 3 - 4 \sin(x)$ | 39) $\cos(3x) = \sin(6x)$ |
| 31) $\cos(x) = -0,27$ | 40) $\sec(x) = \cos(x)$ |
| 32) $\sin(x) = \frac{-8}{9}$ | 41) $\cos^2(x) + 2 \sin(x) + 2 = 0$ |
| 33) $\sin(x) (\cos(x) + 2) = \sin(x)$ | 42) $\sin(2x) = 0,37$ |
| 34) $\cos^3(x) - \sin^2(x) + 1 = \cos(x)$ | 43) $2 \cos^2(x) + 5 \sin(x) - 4 = 0$ |
| 35) $\tan(x) = 2 \cos(x)$ | 44) $2 \cos^2(2x) + \sin(2x) = 1$ |
| 36) $\cos^2(x) = \frac{3(1 - \sin(x))}{2}$ | 45) $2 \sin^2(x) = \sin(x) + 1$ |
| 37) $\sin(2x) + \cos(x) = 0$ | 46) $\sin\left(\frac{2x}{3}\right) = 0$ |
| 38) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ | 47) $\sin(4x) = \cos(2x)$ |
| | 48) $\tan(x) + 3 \cot(x) = 4$ |
| | 49) $4 \sin(x) \cos(x) + 1 = 0$ |

XIV. Plantee y resuelva los siguientes problemas

- 1) Un hombre cuya estatura es $1,75 \text{ m}$ proyecta una sombra de $1,9 \text{ m}$. Calcule las razones trigonométricas del ángulo δ que forman los rayos del sol con la horizontal.
- 2) En un triángulo rectángulo ABC , recto en B , el ángulo en C mide $18^\circ 21'$ y la hipotenusa 219 m . Determine el ángulo en A y la longitud de los otros dos lados de dicho triángulo.
- 3) Desde lo alto de una roca de 75 m sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión a una boya (cuerpo flotante sobre el mar usado para señalizar) es de $37^\circ 15'$; calcule la distancia de la roca a la boya.
- 4) Calcule el área de un triángulo rectángulo en el que un cateto mide $93,78 \text{ cm}$ y el ángulo opuesto a dicho cateto mide $37^\circ 51'$.
- 5) Determine la altura de una torre que se levanta sobre un plano horizontal, si el ángulo de elevación a su parte más alta, desde un punto a 240 m de su base, mide 33° .
- 6) Un helicóptero está volando a una altura de $731,52 \text{ m}$ directamente sobre una torre. El piloto mide que el ángulo de depresión hacia una torre que queda al este es de 34° , mientras que el copiloto mide que el ángulo de depresión hacia una torre que queda al oeste es de 56° , ¿cuál es la distancia que separa a las dos torres observadas?
- 7) ¿A qué distancia de un edificio de 18 m de altura debe colocarse un observador con un teodolito (instrumento de precisión para medir ángulos) de $1,5 \text{ m}$, para que el ángulo de elevación a la cúspide del edificio sea de $26^\circ 55'$?
- 8) El asta de 8 m de altura de una bandera está situada en lo alto de un edificio. Desde un punto cerca de la base del edificio, los ángulos de elevación al tope y al pie del asta son 38° y 20° , respectivamente. Determine la altura del edificio.

- 9) Dos puntos A y B sobre el mismo lado de un río distan 30 m entre sí. Un punto C al otro lado del río está localizado de tal modo que el ángulo CAB mide 75° y el ángulo ABC mide 85° . ¿Cuál es la anchura del río?
- 10) Se va a construir un túnel a través de una montaña de un punto A a un punto B . Un punto C que es visible desde A y B se encuentra a $384,8\text{ m}$ de A y a $555,6\text{ m}$ de B . Determine la longitud que tendrá el túnel.
- 11) Un observador de $1,2\text{ m}$ de altura ve la cúspide de un árbol con un ángulo de elevación de 32° , camina 11 m hacia el árbol y ve la misma cúspide con un ángulo de 68° . Determine la altura del árbol.
- 12) Un barco sale de un puerto navegando 5 millas en dirección $N 40^\circ E$ y luego 8 millas al este. Determine la distancia del barco al puerto de partida.
- 13) Desde una ventana de un edificio, una persona ve la base y la cúspide de otro edificio con ángulos de 37° y $51^\circ 20'$, respectivamente; si la distancia entre los dos edificios es de 18 m , determine la altura del edificio que observa esta persona.
- 14) Dos lados adyacentes de un paralelogramo miden, respectivamente, $3472,7\text{ cm}$ y $4822,3\text{ cm}$, si el ángulo comprendido entre estos lados mide $72^\circ 48'$, determine la longitud de la diagonal mayor.
- 15) Un barco navega 15 millas en dirección $S 40^\circ 10' O$ y después 21 millas en dirección $N 28^\circ 20' O$. Encuentre la distancia a la que está el barco del punto de partida junto con su orientación.
- 16) Al aproximarse un vehículo a un edificio situado en una llanura, su conductora encuentra que desde un cierto lugar el edificio se ve bajo un ángulo de 10° y desde otro lugar, 200 m más cerca del edificio, este se ve bajo un ángulo de 15° . Determine la altura del edificio y la distancia de este al segundo lugar de observación.
- 17) Un jugador de baloncesto de 2 m de altura se encuentra a 7 m de la base del aro. Si el jugador observa el aro con un ángulo de elevación de $10^\circ 13'$, encuentre la altura a la que se encuentra el aro del suelo.
- 18) Dos barcos salen a la misma hora desde el mismo puerto, con rutas que forman un ángulo de 71° ; después de cierto tiempo, el segundo barco a viajado una distancia de 15 km y la distancia entre los barcos es de 20 km . ¿Cuánto ha viajado el primer barco?
- 19) Al aproximarse un vehículo a un edificio en una llanura, encuentra que desde cierto lugar la cúpula del edificio se ve con un ángulo de 10° . Luego viaja en línea recta 200 m más y la cúpula del edificio se ve con un ángulo de $35^\circ 48'$. ¿Cuál es la altura de la cúpula del edificio y cuál es la distancia desde el segundo lugar de observación a la base del edificio?
- 20) Una persona ubicada en un punto A debe estar en un plazo de 10 horas en un punto B situado a 325 km al este de A . Esta persona decide tomar una lancha para pasar por el puesto C donde realizará un negocio. Si C queda en dirección $N 55^\circ E$ de A y en dirección $N 15^\circ O$ de B , y la velocidad promedio de viaje es 60 km/h , ¿de cuánto tiempo dispone para tratar su negocio en C ?

- 21) Un crucero zarpa con rumbo $N 47^\circ E$ desde una isla a un puerto en tierra firme que está a 150 millas; después de navegar por aguas de fuertes corrientes, la nave está fuera de curso en una posición P ubicada $N 33^\circ E$ y a 80 millas de la isla. ¿A qué distancia aproximada estará del puerto de destino?
- 22) Desde un avión se observa la base de un edificio con un ángulo de depresión de 40° . A 12 metros de la base del edificio y desde el suelo una persona observa el avión con un ángulo de elevación de 50° . Determine la altura a la que vuela el avión.
- 23) Desde el piso de un cañón se necesitan 62 pies de cuerda para alcanzar la cima de la pared del cañón y 86 pies para alcanzar la cima de la pared opuesta. Si ambas cuerdas forman un ángulo de 123° , ¿cuál es la distancia entre la cima de la pared del cañón y la otra cima?
- 24) Desde un punto A , ubicado a una altura de 10 metros, un observador ve la cúspide de un edificio con un ángulo de elevación de 28° y la base del mismo con un ángulo de depresión de 15° . Determine la altura del edificio.
- 25) La diagonal mayor de un corral en forma de paralelogramo mide 10 metros de longitud. Un extremo de esta diagonal forma ángulos de 33° y 25° con los lados, respectivamente, del paralelogramo. Determine la longitud del lado mayor del corral.
- 26) Cuando Ana intentaba alcanzar a Berta en una carrera, observan un globo (al frente de ellas) con un ángulo de elevación de $32^\circ 40'$ y $44^\circ 50'$, respectivamente. Si la distancia entre estas competidoras es de 254 metros y se supone que Ana, Berta y el globo están sobre el mismo plano horizontal, determine la distancia de Ana al globo.
- 27) Un terreno se encuentra al lado de un lago (ver figura), determine la medida aproximada del ángulo A .

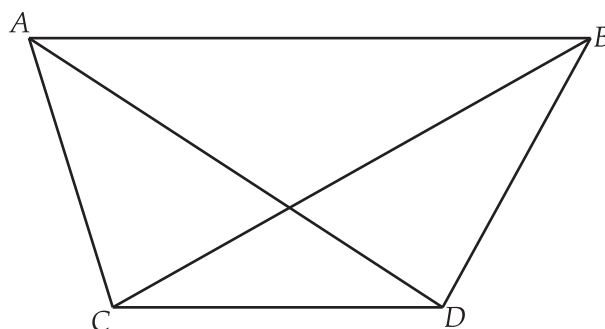


- 28) Un satélite de comunicación está directamente sobre la prolongación de la línea que une las torres de recepción A y B . Se determina por las señales de radio que el ángulo de elevación del satélite desde la torre A es de $82^\circ 12'$ y desde la torre B es de $86^\circ 30'$. Determine ¿cuál de las dos torres (en línea recta) se encuentra más cerca de dicho satélite? si se sabe que ambas torres se separan por una distancia de 1 290 km.

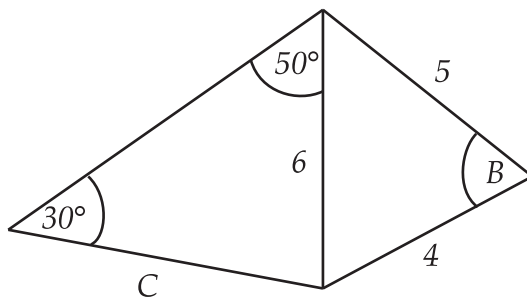
- 29) Desde un auto que se acerca a un edificio, una persona observa la cumbre de este con un ángulo de elevación de 25° ; posteriormente, después de recorrer 95 pies hacia el edificio, vuelve a observar la cumbre con un ángulo de elevación de 40° . Determine la altura del edificio.
- 30) Una ruta comercial entre un puerto y una isla (ruta en línea recta) mide 200 millas. En determinado momento, un náufrago que sale del puerto hacia la isla se da cuenta que está a 80 millas del puerto y que se ha desviado $6^\circ 20'$ desde su salida con respecto de la ruta comercial. ¿A qué distancia de la isla se encuentra el náufrago?
- 31) Determine las medidas de los ángulos de un triángulo isósceles, si se sabe que $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$, donde α es el ángulo comprendido entre los dos lados congruentes.

XV. Calcule la longitud que debe tener una escalera para que, apoyada en la pared, alcance una altura de 4,5 metros, al formar con el plano de la base un ángulo de medida $\frac{\pi}{6}$.

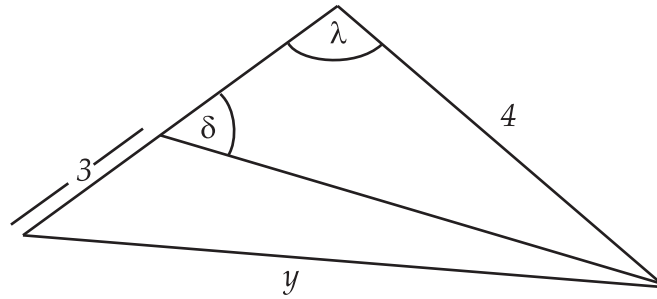
XVI. Considere la siguiente figura y determine la medida de \overline{AB} , sabiendo que $\overline{CD} = 120$ metros, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $m\angle ACD = 115^\circ$, $m\angle ACB = 92^\circ$, $m\angle BDC = 125^\circ$ y $m\angle BDA = 100^\circ$.



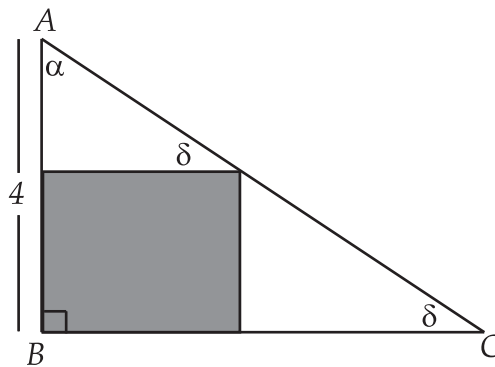
XVII. Considere la siguiente figura y determine los valores de B y de C , respectivamente.



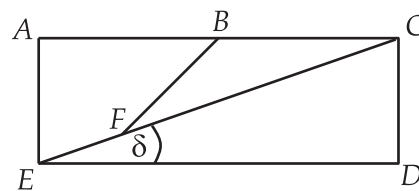
XVIII. Considere la siguiente figura. Si $\lambda = 120^\circ$ y $\delta = 30^\circ$, determine el valor de y .



XIX. Considere la siguiente figura. Si $\delta = \frac{\pi}{3}$ y $\alpha = \frac{\pi}{6}$, determine las dimensiones del triángulo ABC y halle el área del cuadrado sombreado.



XX. Considere la siguiente figura; si $R = \frac{\pi}{6}$, $|\overline{BC}| = |\overline{BF}| = \frac{1}{2}|\overline{ED}|$ y, además, $|\overline{CD}| = 3\text{ cm}$, determine las dimensiones del rectángulo $ACDE$ y halle las dimensiones del triángulo FBC .



11 Exámenes Resueltos

Solución I Examen Parcial del I Semestre de 2009

I. Realice las operaciones indicadas utilizando propiedades de potencias y radicales.

Simplifique al máximo el resultado

(4 puntos)

$$\frac{-45^2 \cdot 27^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-6}}{(-3 \cdot 15)^3 \cdot 6^7} + \frac{\sqrt[3]{375}}{125} + \frac{1}{-2^0 \cdot 24^{-\frac{1}{3}}}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{-45^2 \cdot 27^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-6}}{(-3 \cdot 15)^3 \cdot 6^7} + \frac{\sqrt[3]{375}}{125} + \frac{1}{-2^0 \cdot 24^{-\frac{1}{3}}} &= \frac{-(3^2 5)^2 (3^3)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6}{(-3^2 5)^3 (2 \cdot 3)^7} + \frac{\sqrt[3]{5^3 3}}{5^3} + \frac{24^{\frac{1}{3}}}{-1} \\ &= \frac{-3^4 5^2 3^{15} \cdot \frac{2^6}{3^6}}{-3^6 5^3 2^7 3^7} + \frac{5 \sqrt[3]{3}}{5^3} - \sqrt[3]{24} \\ &= \frac{3^4 5^2 3^{15} 2^6}{3^6 5^3 2^7 3^7 3^6} + \frac{\sqrt[3]{3}}{5^2} - \sqrt[3]{2^3 3} \\ &= \frac{3^{19} 5^2 2^6}{3^{19} 5^3 2^7} + \frac{\sqrt[3]{3}}{5^2} - 2 \sqrt[3]{3} \\ &= \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{5^2} - 2 \sqrt[3]{3} \\ &= \frac{1 \cdot 5 + \sqrt[3]{3} \cdot 2 - 2 \sqrt[3]{3} \cdot 5^2 2}{5^2 2} \\ &= \frac{5 + 2 \sqrt[3]{3} - 100 \sqrt[3]{3}}{50} \\ &= \frac{5 - 98 \sqrt[3]{3}}{50} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{-45^2 \cdot 27^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-6}}{(-3 \cdot 15)^3 \cdot 6^7} + \frac{\sqrt[3]{375}}{125} + \frac{1}{-2^0 \cdot 24^{-\frac{1}{3}}} = \frac{5 - 98 \sqrt[3]{3}}{50}$

II. Suponga que 4 es un cero del polinomio $M(x) = 27x^4 - 126x^3 + 4ax^2 + 56x - 2a - 2$, donde a es una constante desconocida. Determine el valor de a (2 puntos)

Solución:

Como 4 es un cero del polinomio $M(x)$, se cumple que $M(4) = 0$

Calculando $M(4)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 M(4) &= 27(4)^4 - 126(4)^3 + 4a(4)^2 + 56(4) - 2a - 2 \\
 &= 27 \cdot 256 - 126 \cdot 64 + 4a \cdot 16 + 224 - 2a - 2 \\
 &= 6912 - 8064 + 64a + 224 - 2a - 2 \\
 &= 62a - 930
 \end{aligned}$$

Luego, $M(4) = 0$ si, y sólo si, $62a - 930 = 0$; es decir, se cumple que $a = \frac{930}{62} = 15$

Por lo tanto, si 4 es un cero del polinomio $M(x)$ entonces, necesariamente, $a = 15$

III. Realice la factorización completa de la expresión algebraica siguiente (4 puntos)

$$8xt^3y^n + 8t^3y^n - xy^{6+n} - y^{6+n}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 8xt^3y^n + 8t^3y^n - xy^{6+n} - y^{6+n} &= 8t^3y^n(x+1) - y^{6+n}(x+1) \\
 &= (x+1)(8t^3y^n - y^{6+n}) \\
 &= (x+1)(8t^3y^n - y^6y^n) \\
 &= (x+1)y^n(8t^3 - y^6) \\
 &= y^n(x+1)\left((2t)^3 - (y^2)^3\right) \\
 &= y^n(x+1)(2t - y^2)\left((2t)^2 + 2t \cdot y^2 + (y^2)^2\right) \\
 &= y^n(x+1)(2t - y^2)(4t^2 + 2ty^2 + y^4)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $8xt^3y^n + 8t^3y^n - xy^{6+n} - y^{6+n} = y^n(x+1)(2t - y^2)(4t^2 + 2ty^2 + y^4)$

IV. Considere los polinomios $P(a) = 3a^4 + a^3 - 2a + 1$ y $Q(a) = 2a^2 - a$. Realice $P(a) \div Q(a)$ y exprese el resultado de la forma

$$\frac{P(a)}{Q(a)} = C(a) + \frac{R(a)}{Q(a)},$$

donde $C(a)$ es el cociente y $R(a)$ el residuo obtenidos en la división (4 puntos)

Solución:

El proceso de división es el siguiente:

$$\begin{array}{r}
3a^4 + a^3 + 0a^2 - 2a + 1 \\
\underline{-3a^4 + \frac{3}{2}a^3} \\
\frac{5}{2}a^3 + 0a^2 - 2a + 1 \\
\underline{-\frac{5}{2}a^3 + \frac{5}{4}a^2} \\
\frac{5}{4}a^2 - 2a + 1 \\
\underline{-\frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{8}a} \\
-\frac{11}{8}a + 1
\end{array}
\left| \begin{array}{l}
2a^2 - a \\
\underline{\frac{3}{2}a^2 + \frac{5}{4}a + \frac{5}{8}}
\end{array} \right.$$

Por lo tanto, $\frac{3a^4 + a^3 - 2a + 1}{2a^2 - a} = \frac{3}{2}a^2 + \frac{5}{4}a + \frac{5}{8} + \frac{-\frac{11}{8}a + 1}{2a^2 - a}$

V. Simplifique al máximo el resultado que se obtiene al racionalizar la expresión siguiente (4 puntos)

$$\frac{a^4 - a^2b^2}{\sqrt[3]{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{a^4 - a^2b^2}{\sqrt[3]{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})} &= \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^{\frac{1}{3}}(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\
&= \frac{a^{2-\frac{1}{3}}(a+b)(a-b)}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}, \text{ con } a \neq 0 \\
&= \frac{a^{\frac{5}{3}}(a+b)(a-b)}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{a^5}(a+b)(a-b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} \\
&= \frac{a\sqrt[3]{a^2}(a+b)(a-b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b} \\
&= a\sqrt[3]{a^2}(a+b)(\sqrt{a} + \sqrt{b}), \text{ con } a - b \neq 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{a^4 - a^2b^2}{\sqrt[3]{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = a\sqrt[3]{a^2}(a+b)(\sqrt{a} + \sqrt{b}), \text{ con } a \neq 0, a \neq b$

VI. Resuelva en \mathbb{R} las ecuaciones siguientes

$$1) \quad \sqrt{x + \sqrt{x+8}} = 2\sqrt{x} \quad (5 \text{ puntos})$$

Solución:

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \sqrt{x+8}} = 2\sqrt{x} &\Rightarrow \left(\sqrt{x + \sqrt{x+8}}\right)^2 = (2\sqrt{x})^2 \\ &\Rightarrow x + \sqrt{x+8} = 4x \\ &\Rightarrow \sqrt{x+8} = 4x - x \\ &\Rightarrow \sqrt{x+8} = 3x \\ &\Rightarrow \left(\sqrt{x+8}\right)^2 = (3x)^2 \\ &\Rightarrow x + 8 = 9x^2 \\ &\Rightarrow 0 = 9x^2 - x - 8, \text{ en este caso se tiene que } \Delta = (-1)^2 - 4(9)(-8) = 289 \\ &\Rightarrow 0 = (x-1)(9x+8), \text{ utilizando inspección, ya que } \Delta = 289 = (17)^2 \\ &\Rightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = \frac{-8}{9} \end{aligned}$$

Así, $x = 1$ y $x = \frac{-8}{9}$ son posibles soluciones de la ecuación $\sqrt{x + \sqrt{x+8}} = 2\sqrt{x}$

Si $x = 1$, se tiene que $\sqrt{1 + \sqrt{1+8}} = \sqrt{1 + \sqrt{9}} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 = 2\sqrt{1}$; es decir, $x = 1$ es solución de la ecuación en estudio.

Si $x = \frac{-8}{9}$, la expresión $2\sqrt{\frac{-8}{9}}$ no represente número real alguno y, de esta manera, $x = \frac{-8}{9}$ no es solución de la ecuación en estudio.

Por lo tanto, $S = \{1\}$

$$2) \quad \frac{x-2}{x^2-x} + \frac{x^2+8x}{x^4+3x^3-4x^2} = \frac{x+3}{x^2+3x-4} \quad (5 \text{ puntos})$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x^2-x} + \frac{x^2+8x}{x^4+3x^3-4x^2} = \frac{x+3}{x^2+3x-4} &\Rightarrow \frac{x-2}{x^2-x} + \frac{x^2+8x}{x^2(x^2+3x-4)} - \frac{x+3}{x^2+3x-4} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{x-2}{x(x-1)} + \frac{x^2+8x}{x^2(x^2+3x-4)} - \frac{x+3}{x^2+3x-4} = 0 \\ \text{inspección en } x^2+3x-4, \text{ ya que } \Delta = 5^2 &\Rightarrow \frac{x-2}{x(x-1)} + \frac{x(x+8)}{x^2(x+4)(x-1)} - \frac{x+3}{(x+4)(x-1)} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{x-2}{x(x-1)} + \frac{x+8}{x(x+4)(x-1)} - \frac{x+3}{(x+4)(x-1)} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2) \cdot (x+4) + (x+8) \cdot 1 - (x+3) \cdot x}{x(x+4)(x-1)} = 0$$

$$\text{con } x \neq 0, x \neq -4 \text{ y } x \neq 1 \Rightarrow x^2 + 4x - 2x - 8 + x + 8 - x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

Por lo tanto, $S = \mathbb{R} - \{0, -4, 1\}$

VII. Platee y resuelva el problema siguiente (5 puntos)

En la soda EL COMELÓN se venden 60 platos del día (*casados*) si el precio es de 1 000 colones por plato. Por cada incremento de 50 colones en el precio del plato, se venderán dos *casados* menos. Determine el precio que se debe fijar por plato para obtener un ingreso diario de 62 500 colones por la venta de los platos del día.

Solución:

Sea n el número de incrementos de 50 colones en el precio de cada plato del día.

Sea I el ingreso diario por la venta de casados; dichos ingresos se obtienen multiplicando el número de platos que se venden y el precio de cada uno de estos.

Se quiere que $I = 62\,500$

Los ingresos están dado por: $I = (\text{número de platos vendidos}) (\text{precio de cada plato})$

Es decir, $I = (60 - 2n)(1\,000 + 50n)$, con $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 \leq n < 30$ (note que si $n = 30$ no se vendería plato alguno).

Luego, se debe resolver la ecuación $(60 - 2n)(1\,000 + 50n) = 62\,500$

$$\begin{aligned} (60 - 2n)(1\,000 + 50n) = 62\,500 &\Rightarrow 60\,000 + 3\,000n - 2\,000n - 100n^2 = 62\,500 \\ &\Rightarrow 60\,000 + 1\,000n - 100n^2 = 62\,500 \\ &\Rightarrow 0 = 62\,500 - 60\,000 - 1\,000n + 100n^2 \\ &\Rightarrow 0 = 2\,500 - 1\,000n + 100n^2 \\ &\Rightarrow 0 = 100(25 - 10n + n^2) \\ &\Rightarrow 0 = 25 - 10n + n^2 \\ &\Rightarrow 0 = (5 - n)^2 \\ &\Rightarrow 0 = 5 - n \\ &\Rightarrow n = 5 \end{aligned}$$

Así, con 5 incrementos de 50 colones en el precio de cada plato del día, se obtienen los ingresos deseados; en este caso, si $n = 5$ se tiene que $1\,000 + 50n = 1\,000 + 50 \cdot 5 = 1\,250$

Por lo tanto, el precio que se debe fijar por plato para obtener un ingreso diario de 62 500 colones por la venta de *casados* es de 1 250 colones cada uno.

Solución I Examen Parcial del I Semestre de 2006

I. Simplifique al máximo la siguiente expresión:

[5 pts]

$$\frac{\left(1 - \frac{a-1}{h-1}\right) \cdot \frac{h^2-1}{(h-a)^2}}{\frac{h}{a+h} - \frac{ah-1}{a^2-h^2}}$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 - \frac{a-1}{h-1}\right) \cdot \frac{h^2-1}{(h-a)^2}}{\frac{h}{a+h} - \frac{ah-1}{a^2-h^2}} &= \frac{\frac{1 \cdot (h-1) - (a-1) \cdot 1}{h-1} \cdot \frac{h^2-1^2}{(h-a)^2}}{\frac{h}{a+h} - \frac{ah-1}{(a+h)(a-h)}} \\ &= \frac{\frac{h-1-a+1}{h-1} \cdot \frac{(h+1)(h-1)}{(h-a)^2}}{\frac{h(a-h) - (ah-1) \cdot 1}{(a+h)(a-h)}} \\ &= \frac{\frac{h-a}{h-1} \cdot \frac{(h+1)(h-1)}{(h-a)^2}}{\frac{ha-h^2-ah+1}{(a+h)(a-h)}} = \frac{\frac{h+1}{h-a}}{\frac{-h^2+1}{(a+h)(a-h)}} \\ &= \frac{h+1}{h-a} \div \frac{1^2-h^2}{(a+h)(a-h)} \\ &= \frac{h+1}{h-a} \cdot \frac{(a+h)(a-h)}{(1+h)(1-h)}, \text{ con } a+h \neq 0 \\ &= \frac{1}{h-a} \cdot \frac{(a+h)(a-h)}{1-h}, \text{ con } h+1 \neq 0 \\ &= \frac{1}{-(a-h)} \cdot \frac{(a+h)(a-h)}{1-h} = -1 \cdot \frac{a+h}{1-h}, \text{ con } a-h \neq 0 \\ &= \frac{a+h}{h-1} \end{aligned}$$

Respuesta: $\frac{\left(1 - \frac{a-1}{h-1}\right) \cdot \frac{h^2-1}{(h-a)^2}}{\frac{h}{a+h} - \frac{ah-1}{a^2-h^2}} = \frac{a+h}{h-1}, \text{ con } h+1 \neq 0, a+h \neq 0 \text{ y } a-h \neq 0.$

II. Factorice completamente la siguiente expresión:

[3 pts]

$$4a^3 + b^3 - 4a^2b - ab^2$$

Solución

$$\begin{aligned} 4a^3 + b^3 - 4a^2b - ab^2 &= (4a^3 - 4a^2b) + (b^3 - ab^2) \\ &= 4a^2(a - b) + b^2(b - a) \\ &= 4a^2(a - b) - b^2(a - b) \\ &= (a - b)(4a^2 - b^2) \\ &= (a - b)((2a)^2 - b^2) \\ &= (a - b)(2a + b)(2a - b) \end{aligned}$$

Respuesta: $4a^3 + b^3 - 4a^2b - ab^2 = (a - b)(2a + b)(2a - b)$.

III. Racionalice el denominador y simplifique el resultado de la siguiente expresión:

[3 pts]

$$\frac{8h - 4}{1 + \sqrt{4h - 1}}$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{8h - 4}{1 + \sqrt{4h - 1}} &= \frac{8h - 4}{1 + \sqrt{4h - 1}} \cdot \frac{1 - \sqrt{4h - 1}}{1 - \sqrt{4h - 1}} \\ &= \frac{(8h - 4)(1 - \sqrt{4h - 1})}{1^2 - (\sqrt{4h - 1})^2} \\ &= \frac{(8h - 4)(1 - \sqrt{4h - 1})}{1 - (4h - 1)} \\ &= \frac{(8h - 4)(1 - \sqrt{4h - 1})}{1 - 4h + 1} \\ &= \frac{(8h - 4)(1 - \sqrt{4h - 1})}{2 - 4h} \\ &= \frac{-2(-4h + 2)(1 - \sqrt{4h - 1})}{2 - 4h} \\ &= \frac{-2(2 - 4h)(1 - \sqrt{4h - 1})}{2 - 4h} \\ &= -2(1 - \sqrt{4h - 1}), \text{ con } 2 - 4h \neq 0 \end{aligned}$$

Respuesta: $\frac{8h - 4}{1 + \sqrt{4h - 1}} = -2(1 - \sqrt{4h - 1}), \text{ con } 2 - 4h \neq 0$.

IV. Considere los polinomios $A(x) = 4x^5 - 2x^3 + 5x^2 + x + 1$ y $B(x) = 2x^2 + 1$.

- 1) Determine el cociente $C(x)$ y el residuo $R(x)$ que se obtienen después de realizar la división de $A(x)$ por $B(x)$. [3 pts]

Solución

Lo recomendable es ordenar los polinomios $A(x)$ y $B(x)$ en forma descendente, agregando los términos $0x^4$ y $0x$, respectivamente.

$$\begin{array}{r|l}
 4x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 1 & 2x^2 + 0x + 1 \\
 \underline{-4x^5 - 0x^4 - 2x^3} & 2x^3 - 2x + \frac{5}{2} \\
 -4x^3 + 5x^2 + x + 1 & \\
 \underline{4x^3 - 0x^2 + 2x} & \\
 5x^2 + 3x + 1 & \\
 \underline{-5x^2 - 0x - \frac{5}{2}} & \\
 3x - \frac{3}{2} &
 \end{array}$$

Respuesta: $C(x) = 2x^3 - 2x + \frac{5}{2}$ y $R(x) = 3x - \frac{3}{2}$.

- 2) Usando $C(x)$ y $R(x)$, determine una expresión equivalente con $\frac{A(x)}{B(x)}$. [1 pto]

Solución

Recordemos que:

$$A(x) = C(x) \cdot B(x) + R(x)$$

De esta manera:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

Respuesta: $\frac{4x^5 - 2x^3 + 5x^2 + x + 1}{2x^2 + 1} = 2x^3 - 2x + \frac{5}{2} + \frac{3x - \frac{3}{2}}{2x^2 + 1}$.


- V. Sean $P(x) = 20x^3 - 7x^2 + 29x + k$ y $Q(x) = 4x + 1$. Encuentre el valor de k para que el polinomio $P(x)$ sea divisible por el polinomio $Q(x)$. [4 pts]

Solución

El polinomio $P(x)$ es divisible por el polinomio $Q(x)$ si al realizar la división $P(x) \div Q(x)$ se obtiene residuo igual a cero.

Como el polinomio $Q(x)$ es de grado 1 (note que $Q(\frac{-1}{4}) = 0$), se puede utilizar la división sintética para determinar el residuo que se obtiene en $P(x) \div Q(x)$.

20	-7	29	k		
↓	-5	3	-8		$\frac{-1}{4}$
20 -12 32 $k-8$					4



Residuo

Así, $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ si, y sólo si, $k - 8 = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Respuesta: $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ cuando $k = 8$.

- VI. Resuelva en el conjunto de los números reales las siguientes ecuaciones:

1) $(y - 1)^{20} + (y - 1)^{10} - 2 = 0$ [4 pts]

$$\begin{aligned}
 (y - 1)^{20} + (y - 1)^{10} - 2 = 0 &\Rightarrow (y - 1)^{20} + (y - 1)^{10} - 2 = 0 \\
 &\Rightarrow \left((y - 1)^{10} \right)^2 + (y - 1)^{10} - 2 = 0
 \end{aligned}$$

Conviene realizar un cambio de variable. Sea $u = (y - 1)^{10}$; así:

$$\begin{aligned}
 (y - 1)^{20} + (y - 1)^{10} - 2 = 0 &\Rightarrow \left((y - 1)^{10} \right)^2 + (y - 1)^{10} - 2 = 0 \\
 &\Rightarrow u^2 + u - 2 = 0
 \end{aligned}$$

La ecuación anterior es una ecuación cuadrática; su discriminante está dado por:

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{-(1) \pm \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{-1 \pm 3}{2} \\
 u_1 &= \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2
 \end{aligned}$$

Ahora hay que retomar el cambio de variable que se había realizado.

Para $u_1 = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 (y-1)^{10} = 1 &\Rightarrow y-1 = \pm \sqrt[10]{1} \\
 &\Rightarrow y-1 = \pm 1 \\
 &\Rightarrow y = 1 \pm 1 \\
 &\Rightarrow y_1 = 1+1 = 2 \quad y \quad y_2 = 1-1 = 0
 \end{aligned}$$

Para $u_2 = -2$, se tiene:

$$(y-1)^{10} = -2 \Rightarrow y-1 = \pm \sqrt[10]{-2}$$

Como $\sqrt[10]{-2} \notin \mathbb{R}$, no existe valor alguno de y que satisfaga $(y-1)^{10} = -2$.

Respuesta: $S = \{2, 0\}$.

$$2) \quad \sqrt{b-3} = 4 - \sqrt{b+5} \quad [4 \text{ pts}]$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{b-3} = 4 - \sqrt{b+5} &\Rightarrow (\sqrt{b-3})^2 = (4 - \sqrt{b+5})^2 \\
 &\Rightarrow b-3 = (4)^2 - 2(4)\sqrt{b+5} + (\sqrt{b+5})^2 \\
 &\Rightarrow b-3 = 16 - 8\sqrt{b+5} + b+5 \\
 &\Rightarrow b-3 = 21 + b - 8\sqrt{b+5} \\
 &\Rightarrow b-3-21-b = -8\sqrt{b+5} \\
 &\Rightarrow \frac{-24}{-8} = \sqrt{b+5} \\
 &\Rightarrow 3^2 = (\sqrt{b+5})^2 \\
 &\Rightarrow 9 = b+5 \Rightarrow 4 = b
 \end{aligned}$$

Como es una ecuación que involucra raíces con índice par, se debe realizar comprobación del resultado que obtuvimos:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{4-3} &\stackrel{?}{=} 4 - \sqrt{4+5} \\
 \sqrt{1} &\stackrel{?}{=} 4 - \sqrt{9} \\
 1 &\stackrel{?}{=} 4 - 3 \\
 1 &= 1 \quad (\text{igualdad verdadera})
 \end{aligned}$$

Respuesta: $S = \{4\}$.

$$3) \quad \frac{1+a}{a^2} - \frac{4a}{1+a} = \frac{4}{a^2+a^3} - \frac{4a-4}{a} \quad [4 \text{ pts}]$$

$$\begin{aligned}
\frac{1+a}{a^2} - \frac{4a}{1+a} &= \frac{4}{a^2+a^3} - \frac{4a-4}{a} \Rightarrow \frac{1+a}{a^2} - \frac{4a}{1+a} = \frac{4}{a^2(1+a)} - \frac{4a-4}{a} \\
&\Rightarrow \frac{(1+a)(1+a) - 4a \cdot a^2}{a^2(1+a)} = \frac{4 - (4a-4)a(1+a)}{a^2(1+a)} \\
&\Rightarrow \frac{1+2a+a^2-4a^3}{a^2(1+a)} = \frac{4 - (4a-4)(a+a^2)}{a^2(1+a)}
\end{aligned}$$

Si $a \neq 0$ y $1+a \neq 0$ (equivalente a mencionar que $a \neq -1$), entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{1+2a+a^2-4a^3}{a^2(1+a)} &= \frac{4 - (4a-4)(a+a^2)}{a^2(1+a)} \Rightarrow 1+2a+a^2-4a^3 = 4 - (4a-4)(a+a^2) \\
&\Rightarrow 1+2a+a^2-4a^3 = 4 - (4a^2+4a^3-4a-4a^2) \\
&\Rightarrow 1+2a+a^2-4a^3 = 4 - 4a^2 - 4a^3 + 4a + 4a^2 \\
&\Rightarrow 1+2a+a^2-4a^3 = 4 - 4a^3 + 4a \\
&\Rightarrow 1+2a+a^2-4a^3 - 4 + 4a^3 - 4a = 0 \\
&\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0
\end{aligned}$$

La última ecuación es una ecuación cuadrática; su discriminante está dado por:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2(1)} = \frac{2 \pm 4}{2} \\
a_1 &= \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{y} \quad a_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad (\text{restricción})
\end{aligned}$$

Respuesta: $S = \{3\}$.

VII. Plantee y resuelva los siguientes problemas:

- 1) Para determinar la velocidad inicial de aterrizaje apropiada de un avión se utiliza la fórmula $d = 0,1v^2 - 3v + 22$, donde d es la distancia (en pies) que recorrerá el avión en la pista si la velocidad inicial de aterrizaje es v (en pies por segundo). [4 pts]
 - (a) ¿Por qué no es apropiada una velocidad inicial de aterrizaje de 110 pies por segundo para una pista de 900 pies de largo?

Solución

En el enunciado se indica que:

$$d = 0,1v^2 - 3v + 22$$

Si $v = 110$ *pies/s*, entonces:

$$\begin{aligned}
d &= 0,1(110)^2 - 3(110) + 22 \\
&= 0,1(12\,100) - 3(110) + 22 \\
&= 1\,210 - 330 + 22 \\
&= 902 \text{ pies}
\end{aligned}$$

Respuesta: Dado que la pista de aterrizaje mide 900 *pies* de largo, no es apropiada una velocidad inicial de aterrizaje de 110 *pies/s*, ya que con esta velocidad el avión recorrería una distancia mayor de la que posee la pista (se le acabaría la pista).

- (b) Si una pista mide 800 *pies* de largo, ¿cuál debe ser, aproximadamente, la velocidad inicial de aterrizaje apropiada?

Solución

En este caso se pregunta el valor aproximado de v si se tiene que $d = 800$; así:

$$\begin{aligned} d = 0,1v^2 - 3v + 22 &\Rightarrow 800 = 0,1v^2 - 3v + 22 \\ &\Rightarrow 0 = 0,1v^2 - 3v + 22 - 800 \\ &\Rightarrow 0 = 0,1v^2 - 3v - 778 \end{aligned}$$

La última ecuación es una ecuación cuadrática; su discriminante está dado por:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(0,1)(-778) = 9 + 311,2 = 320,2$$

De esta manera:

$$v = \frac{-(-3) \pm \sqrt{320,2}}{2(0,1)} = \frac{3 \pm \sqrt{320,2}}{0,2}$$

$$v_1 = \frac{3 + \sqrt{320,2}}{0,2} \approx 104,47 \text{ pies/s} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{3 - \sqrt{320,2}}{0,2} \approx -74,47 \text{ pies/s} \quad (\text{descartado})$$

Respuesta: La velocidad inicial de aterrizaje apropiada para una pista de 800 *pies* de largo debe ser, aproximadamente, igual a 104,47 *pies/s*.

- 2) Carlos compró cierto número de libros en 120 000 colones. Si hubiera comprado 5 libros más por el mismo dinero, cada libro le habría costado 2 000 colones menos. Si hubiera comprado 5 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado 4 000 colones más. [4 pts]

- (a) ¿Cuántos libros compró Carlos?
(b) ¿Cuánto pagó Carlos por cada libro?

Solución

Sean q el número de libros que compró Carlos y p el precio de cada libro. Note que el costo total (cantidad de dinero que paga Carlos) está dado por:

$$(\text{cantidad de artículos}) \text{ por } (\text{precio unitario}) \text{ igual costo}$$

Con base en las variables que se han definido, hay que representar el enunciado del problema en términos de dichas incógnitas.

La primera oración:

$$\text{Carlos compró cierto número de libros en 120 000 colones}$$

Se puede representar como:

$$\underbrace{q}_{\text{cantidad}} \cdot \underbrace{p}_{\text{precio}} = \overbrace{120\,000}^{\text{costo}}$$

Consideremos la oración:

si hubiera comprado 5 libros más por el mismo dinero, cada libro le habría costado 2 000 colones menos

En este caso, se tiene que la cantidad de artículos hubiera sido $(q + 5)$, el precio de cada uno de los libros hubiera sido $(p - 2\,000)$ y el costo hubiera sido el mismo, 120 000 colones. De esta manera, obtenemos la ecuación:

$$\underbrace{(q + 5)}_{\text{cantidad}} \underbrace{(p - 2\,000)}_{\text{precio}} = \overbrace{120\,000}^{\text{costo}}$$

De la ecuación anterior:

$$q \cdot p - 2\,000q + 5p - 10\,000 = 120\,000$$

$$120\,000 - 2\,000q + 5p - 10\,000 = 120\,000$$

$$-2\,000q + 5p = 10\,000 \quad (1)$$

Consideremos la oración:

si hubiera comprado 5 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado 4 000 colones más

En este caso, se tiene que la cantidad de artículos hubiera sido $(q - 5)$, el precio de cada uno de los libros hubiera sido $(p + 4\,000)$ y el costo hubiera sido el mismo, 120 000 colones. De esta manera, obtenemos la ecuación:

$$\underbrace{(q - 5)}_{\text{cantidad}} \underbrace{(p + 4\,000)}_{\text{precio}} = \overbrace{120\,000}^{\text{costo}}$$

De la ecuación anterior:

$$q \cdot p + 4\,000q - 5p - 20\,000 = 120\,000$$

$$120\,000 + 4\,000q - 5p - 20\,000 = 120\,000$$

$$4\,000q - 5p = 20\,000 \quad (2)$$

Al resolver el sistema que conforman las ecuaciones (1) y (2) se tiene información suficiente para dar respuesta a las preguntas planteadas.

$$\begin{cases} -2\,000q + 5p = 10\,000 \\ 4\,000q - 5p = 20\,000 \end{cases}$$

Sumando (miembro a miembro) las dos ecuaciones, se llega a la ecuación $2\,000q = 30\,000$. De esta manera, $q = 15$. Sustituyendo este valor en cualquier de las dos ecuaciones del sistema, se tiene:

$$\begin{aligned} -2\,000q + 5p = 10\,000 &\Rightarrow -2\,000(15\,000) + 5p = 10\,000 \\ &\Rightarrow -30\,000 + 5p = 10\,000 \\ &\Rightarrow 5p = 10\,000 + 30\,000 \\ &\Rightarrow 5p = 40\,000 \\ &\Rightarrow p = 8\,000 \end{aligned}$$

Respuesta: Carlos compró 15 libros y pagó 8 000 colones por cada uno de ellos.

Solución I Examen Parcial del II Semestre de 2004

- I. Encuentre el valor numérico de la siguiente expresión para $x = -3$ y $y = \frac{3}{2}$. [5 puntos]

$$\frac{(-x^{-2} + y^{-1})^{-2}}{\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{-x}}\right)^4\right)^3}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{(-x^{-2} + y^{-1})^{-2}}{\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{-x}}\right)^4\right)^3} &= \frac{\left(-(-3)^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{-2}}{\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{-(-3)}}\right)^4\right)^3} \\ &= \frac{\left(\frac{-1}{(-3)^2} + \frac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(\sqrt[6]{3}\right)^{12}} \\ &= \frac{\left(\frac{-1}{9} + \frac{2}{3}\right)^{-2}}{3^2} = \frac{\left(\frac{5}{9}\right)^{-2}}{9} \\ &= \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^2}{9} = \frac{\frac{81}{25}}{9} = \frac{81}{9 \cdot 25} = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

Así, $\frac{(-x^{-2} + y^{-1})^{-2}}{\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt{-x}}\right)^4\right)^3} = \frac{9}{25}$ cuando $x = -3$ y $y = \frac{3}{2}$.

- II. Realice la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y exprese el resultado en la forma $P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$, donde $C(x)$ es el cociente de la división y $R(x)$ es el residuo, si [4 puntos]

$$P(x) = 3x^5 + 6x^4 + 20x^2 - 26x - 10; \quad Q(x) = x^2 + 2x - 3$$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 + 6x^4 + 0x^3 + 20x^2 - 26x - 10 & x^2 + 2x - 3 \\ -3x^5 - 6x^4 + 9x^3 & 3x^3 + 9x + 2 \\ \hline 9x^3 + 20x^2 - 26x - 10 & \\ -9x^3 - 18x^2 + 27x & \\ \hline 2x^2 + x - 10 & \\ -2x^2 - 4x + 6 & \\ \hline -3x - 4 & \end{array}$$

Así, $3x^5 + 6x^4 + 20x^2 - 26x - 10 = (3x^3 + 9x + 2)(x^2 + 2x - 3) - 3x - 4$.

- III. Determine un polinomio $P(x)$ de grado 3, tal que $x - 2$ sea uno de sus factores y $x = -1$ sea un cero de $P(x)$. [3 puntos]

Solución: Como $x = -1$ es un cero de $P(x)$, se tiene que $x + 1$ también es un factor de $P(x)$. De esta manera, $P(x) = (x - 2)(x + 1)A(x)$, donde $A(x)$ es cualquier polinomio de grado uno. Por ejemplo, si $A(x) = x$ se obtiene el polinomio $P(x) = (x - 2)(x + 1)x = x^3 - x^2 - 2x$.

- IV. Factorice al máximo las siguientes expresiones.

1) $3^{3x} + 3^{2x} - 3^x - 1$ [3 puntos]

Solución:

$$\begin{aligned} 3^{3x} + 3^{2x} - 3^x - 1 &= (3^{3x} + 3^{2x}) + (-3^x - 1) \\ &= 3^{2x}(3^x + 1) - (3^x + 1) \\ &= (3^x + 1)(3^{2x} - 1) \\ &= (3^x + 1)(3^x - 1)(3^x + 1) \end{aligned}$$

2) $a^3(x^2 - 1) - 3a^2b(x^2 - 1) + 3ab^2(x^2 - 1) - b^3(x^2 - 1)$ [3 puntos]

Solución:

$$\begin{aligned} &a^3(x^2 - 1) - 3a^2b(x^2 - 1) + 3ab^2(x^2 - 1) - b^3(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) \\ &= (x - 1)(x + 1)(a - b)^3 \end{aligned}$$

- V. Racionalice el denominador de la siguiente expresión y simplifique al máximo el resultado. [4 puntos]

$$\frac{50ab - 8a^3}{2a - 5\sqrt{b}}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{50ab - 8a^3}{2a - 5\sqrt{b}} &= \frac{50ab - 8a^3}{2a - 5\sqrt{b}} \cdot \frac{2a + 5\sqrt{b}}{2a + 5\sqrt{b}} \\ &= \frac{(50ab - 8a^3)(2a + 5\sqrt{b})}{(2a - 5\sqrt{b})(2a + 5\sqrt{b})} \\ &= \frac{2a(25b - 4a^2)(2a + 5\sqrt{b})}{(2a)^2 - (5\sqrt{b})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2a(25b - 4a^2)(2a + 5\sqrt{b})}{4a^2 - 25b} \\
&= -2a(2a + 5\sqrt{b})
\end{aligned}$$

VI. Si $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3$.

1) Factorice $P(x)$ al máximo [3 puntos]

Solución: Los posibles ceros racionales de $P(x)$ son los valores del siguiente conjunto, $\left\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}\right\}$. Se comprueba que $P(1) = 12$, $P(-1) = 8$, $P(2) = -25$, $P(-2) = 75$. Como $P(3) = 0$, un factor de $P(x)$ es $x - 3$.

Luego, se realiza la división sintética con el valor 3 para obtener otro factor de $P(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & -5 & -1 & -5 & -3 & \\
\downarrow & 6 & 3 & 6 & 3 & \\
\hline
2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3
\end{array}$$

Teniendo el factor $x - 3$, sólo falta factorizar el polinomio $2x^3 + x^2 + 2x + 1$. Los posibles ceros racionales de este polinomio son: $\left\{\pm 1; \pm \frac{1}{2}\right\}$, pero ya se habían descartado los valores $x = \pm 1$, así que las únicas dos posibilidades son $x = \pm \frac{1}{2}$. Realizando la división sintética con $x = -\frac{1}{2}$ se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 2 & 1 & \\
\downarrow & -1 & 0 & -1 & \\
\hline
2 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2}
\end{array}$$

Por último, se tendría que factorizar el polinomio $2x^2 + 2$. Como $\Delta = -16 < 0$, $2x^2 + 2$ no es factorizable en \mathbb{R} . Así:

$$\begin{aligned}
P(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3 &= (x - 3) \left(x + \frac{1}{2}\right) (2x^2 + 2) \\
&= (x - 3) \left(x + \frac{1}{2}\right) 2(x^2 + 1) \\
&= (x - 3)(2x + 1)(x^2 + 1)
\end{aligned}$$

2) Resuelva $P(x) = 0$ [2 puntos]

Solución: Como $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x-3)(2x+1)(x^2+1)$, se tiene que $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x+1)(x^2+1) = 0$. Luego:

$$\begin{aligned}(x-3)(2x+1)(x^2+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x-3=0 \quad \vee \quad 2x+1=0 \quad \vee \quad x^2+1=0\end{aligned}$$

De esta manera, el conjunto solución para la ecuación $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$ está dado por:

$$S = \left\{ 3; \frac{-1}{2} \right\}$$

VII. Simplifique al máximo la siguiente expresión.

[5 puntos]

$$\frac{4}{x} - \frac{2x}{x^2 - 6x + 9} - \frac{5}{x-3}$$

$$\begin{aligned}\frac{4}{x} - \frac{2x}{x^2 - 6x + 9} - \frac{5}{x-3} &= \frac{4}{x} - \frac{2x}{(x-3)^2} - \frac{5}{x-3} \\ &= \frac{4 \cdot (x-3)^2 - 2x \cdot x - 5x \cdot (x-3)}{x(x-3)^2} \\ &= \frac{4(x^2 - 6x + 9) - 2x^2 - 5x^2 + 15x}{x(x-3)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 24x + 36 - 7x^2 + 15x}{x(x-3)^2} \\ &= \frac{-3x^2 - 9x + 36}{x(x-3)^2}\end{aligned}$$

La factorización de $-3x^2 - 9x + 36$ se realiza utilizando la fórmula general.

$$\Delta = (-9)^2 - 4(-3)(36) = 513$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{513} = 3\sqrt{57}$$

$$x = \frac{9 \pm 3\sqrt{57}}{2(-3)}$$

$$x = \frac{3(3 \pm \sqrt{57})}{-3 \cdot 2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{57}}{-2}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{57}}{-2}$$

$$-3x^2 - 9x + 36 = -3 \left(x - \frac{3 + \sqrt{57}}{-2} \right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{57}}{-2} \right)$$

$$-3x^2 - 9x + 36 = -3 \left(x + \frac{3 + \sqrt{57}}{2} \right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{57}}{2} \right)$$

Por lo tanto, $\frac{4}{x} - \frac{2x}{x^2 - 6x + 9} - \frac{5}{x - 3} = \frac{-3 \left(x + \frac{3 + \sqrt{57}}{2} \right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{57}}{2} \right)}{x(x - 3)^2}$

Solución II Examen Parcial del II Semestre de 2004

I. Resuelva las siguientes ecuaciones.

$$1) \quad x|x-2|+2=x-x^2 \quad (4 \text{ pts.})$$

Solución

$$|x-2| = \begin{cases} (x-2) & \text{si } x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ -(x-2) = (2-x) & \text{si } x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \end{cases}$$

Caso 1: $x \geq 2$; es decir, $x \in [2, +\infty[$

$$x|x-2|+2=x-x^2$$

$$x(x-2)+2=x-x^2$$

$$x^2-2x+2=x-x^2$$

$$x^2-2x+2-x+x^2=0$$

$$2x^2-3x+2=0$$

Para esta última ecuación, se tiene que $\Delta = -7$; de esta manera, $2x^2 - 3x + 2 = 0$ no posee soluciones reales en $[2, +\infty[$ y, así, $S_1 = \emptyset$.

Caso 2: $x < 2$; es decir, $x \in]-\infty, 2[$

$$x|x-2|+2=x-x^2$$

$$x(2-x)+2=x-x^2$$

$$2x-x^2+2=x-x^2$$

$$2x-x^2+2-x+x^2=0$$

$$x+2=0$$

$$x=-2$$

Como $x = -2 \in]-\infty, 2[$ se tiene que $S_2 = \{-2\}$.

De los casos 1 y 2 se concluye que $S = S_1 \cup S_2 = \{-2\}$.

$$S = \{-2\}$$

$$2) \quad 3x - \sqrt{4 - 5x} = 2 \quad (4 \text{ pts.})$$

Solución

$$3x - \sqrt{4 - 5x} = 2$$

$$3x - 2 = \sqrt{4 - 5x}$$

$$(3x - 2)^2 = 4 - 5x$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 4 - 5x$$

$$9x^2 - 12x + 4 - 4 + 5x = 0$$

$$9x^2 - 7x = 0$$

$$x(9x - 7) = 0$$

De la ecuación anterior se tiene que $x(9x - 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 9x - 7 = 0$; es decir, si $x = 0 \vee x = \frac{7}{9}$.

• Prueba para $x = 0$

$$3x - \sqrt{4 - 5x} = 2$$

$$3 \cdot 0 - \sqrt{4 - 5 \cdot 0} \stackrel{?}{=} 2$$

$$0 - \sqrt{4 - 0} \stackrel{?}{=} 2$$

$$-\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$$

$$-2 \neq 2$$

Por lo que $x = 0$ no es solución de la ecuación.

• Prueba para $x = \frac{7}{9}$

$$3x - \sqrt{4 - 5x} = 2$$

$$3 \cdot \frac{7}{9} - \sqrt{4 - 5 \cdot \frac{7}{9}} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\frac{7}{3} - \sqrt{4 - \frac{35}{9}} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\frac{7}{3} - \sqrt{\frac{1}{9}} \stackrel{?}{=} 2$$

$$\frac{7}{3} - \frac{1}{3} \stackrel{?}{=} 2$$

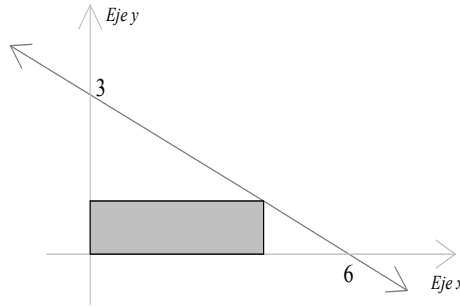
$$\frac{6}{3} = 2$$

Por lo que $x = \frac{7}{9}$ es solución de la ecuación.

Con base en las pruebas realizadas, se concluye que $S = \left\{ \frac{7}{9} \right\}$.

$$S = \left\{ \frac{7}{9} \right\}$$

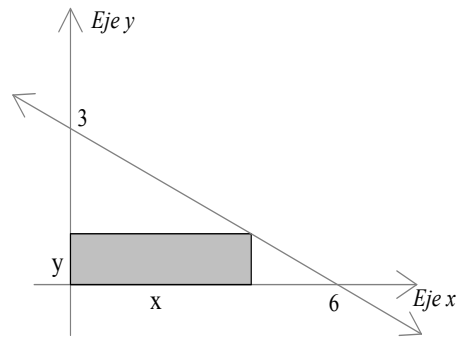
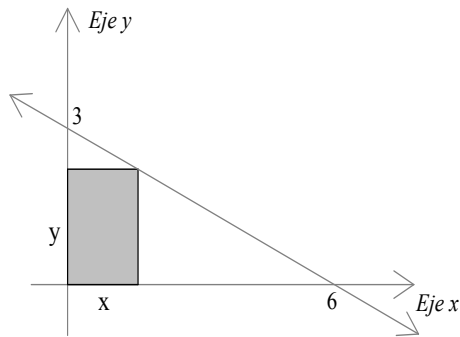
- II. Se quiere obtener un rectángulo en el primer cuadrante con sus lados paralelos a los ejes coordenados y uno de sus vértices sobre la recta $y = 3 - \frac{x}{2}$, como se muestra en la siguiente figura.



¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo para que su área sea máxima? (4 pts.)

Solución Sea x la distancia que hay del origen del sistema de coordenadas al -otro- vértice del rectángulo que está sobre el eje de las abscisas (como se muestra en la figura de abajo), y sea y la distancia que hay del origen del sistema de coordenadas al -otro- vértice del rectángulo que está sobre el eje de las ordenadas.

La figura de abajo muestra dos posibles rectángulos que se pueden obtener; note que para cada longitud x (base del rectángulo) se obtiene una y sólo una longitud para y (altura del rectángulo), donde, específicamente, $y = 3 - \frac{x}{2}$. Si A denota el área del rectángulo,



se tiene que $A = x \cdot y = x \left(3 - \frac{x}{2} \right) = 3x - \frac{x^2}{2}$. Esta función tiene como gráfica una parábola cóncava hacia abajo, por lo que en $x = \frac{-b}{2a}$ alcanza su máximo valor (es decir, su mayor área posible). De esta manera, para $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot \frac{-1}{2}} = \frac{-3}{-1} = 3$ el rectángulo posee área máxima. Luego, el valor de y está dado por $y = 3 - \frac{x}{2} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$.

Así, las dimensiones que debe tener el rectángulo para que su área sea máxima son 3 (ul) de largo por 1,5 (ul) de ancho.

III. Resuelva para x las siguientes inecuaciones.

$$1) \quad \frac{a(x-a)}{2x-a} \geq 0, \text{ donde } a < 0 \quad (4 \text{ pts.})$$

Solución

En el miembro izquierdo de esta inecuación hay tres factores.

- a nunca toma el valor 0.

Una condición que se presenta en el enunciado de la inecuación es que la constante real a siempre es negativa ($a < 0$).

- $x - a$ se anula en $x = a$.

$$x - a > 0 \Leftrightarrow x > a$$

- $2x - a$ se anula en $x = \frac{a}{2}$.

$$2x - a > 0 \Leftrightarrow 2x > a \Leftrightarrow x > \frac{a}{2}$$

Es importante colocar, correctamente, los ceros de los factores de la expresión $\frac{a(x-a)}{2x-a}$ en la tabla de análisis de signo. De esta manera, hay que determinar la relación de orden entre todos los ceros de dicha expresión.

Observe que $a < \frac{a}{2}$, ya que $2a < a$ (recuerde que $a < 0$).

	$-\infty$	a	$\frac{a}{2}$	∞
a	—	—	—	—
$x - a$	—	• +	—	+
$2x - a$	—	—	o +	—
$\frac{a(x-a)}{2x-a}$	—	+	—	—

Con base en la tabla de signos anterior, se deben seleccionar los intervalos donde el resultado de la expresión $\frac{a(x-a)}{2x-a}$ es de signo negativo o cero. Observe, además, que $x = \frac{a}{2}$ es una restricción para el conjunto solución de la inecuación, ya que esta se indefiniría para tal valor.

$$S = \left[a, \frac{a}{2} \right[$$

$$2) \quad \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x^2(x-1)} < \frac{2}{x(x-2)(x-1)} \quad (5 \text{ pts.})$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x^2(x-1)} &< \frac{2}{x(x-2)(x-1)} \\ \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x^2(x-1)} - \frac{2}{x(x-2)(x-1)} &< 0 \\ \frac{1 \cdot x^2(x-1) + 2 \cdot (x-2) - 2 \cdot x}{x^2(x-2)(x-1)} &< 0 \\ \frac{x^3 - x^2 + 2x - 4 - 2x}{x^2(x-2)(x-1)} &< 0 \\ \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2(x-2)(x-1)} &< 0 \end{aligned}$$

El polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - 4$ debe ser factorizado completamente. Utilizando división sintética con el valor $x = 2$, ya que $P(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$, se tiene:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -4 & \\ \downarrow & 2 & 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

El polinomio $Q(x) = x^2 + x + 2$, que resulta de la división anterior, no es factorizable en \mathbb{R} , ya que $\Delta = (1)^2 - 4(1)(2) = -7 < 0$. De esta manera, se tiene que $P(x) = (x-2)(x^2 + x + 2)$.

Volviendo a la inecuación, se obtiene $\frac{(x-2)(x^2 + x + 2)}{x^2(x-2)(x-1)} < 0$.

Los ceros, de manera ordenada, de la expresión $(*) \frac{(x-2)(x^2 + x + 2)}{x^2(x-2)(x-1)}$ son $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Con base en la tabla para el análisis del signo de dicha expresión, se obtiene la respuesta.

	$-\infty$	0	1	2	∞
$x-2$	-	-	-	o	+
x^2+x+2	+	+	+	+	+
x^2	+	o	+	+	+
$x-2$	-	-	-	o	+
$x-1$	-	-	o	+	+
$(*)$	-	-	-	+	+

Ahora, se seleccionan los intervalos en los que se cumple que $\frac{(x-2)(x^2 + x + 2)}{x^2(x-2)(x-1)} < 0$.

$$S =]-\infty, 0[\cup]0, 1[$$

- IV. Calcule el valor de k de tal forma que las rectas l_1 y l_2 sean perpendiculares, donde
- $$l_1 : y = \frac{2-k}{5}x + 2, \quad l_2 : y = \frac{-3}{2}x + 4. \quad (3 \text{ pts.})$$

Solución

Para que las rectas l_1 y l_2 sean perpendiculares se debe cumplir que el producto de sus pendientes sea -1 .

Para la recta l_1 su pendiente está dada por $m_1 = \frac{2-k}{5}$.

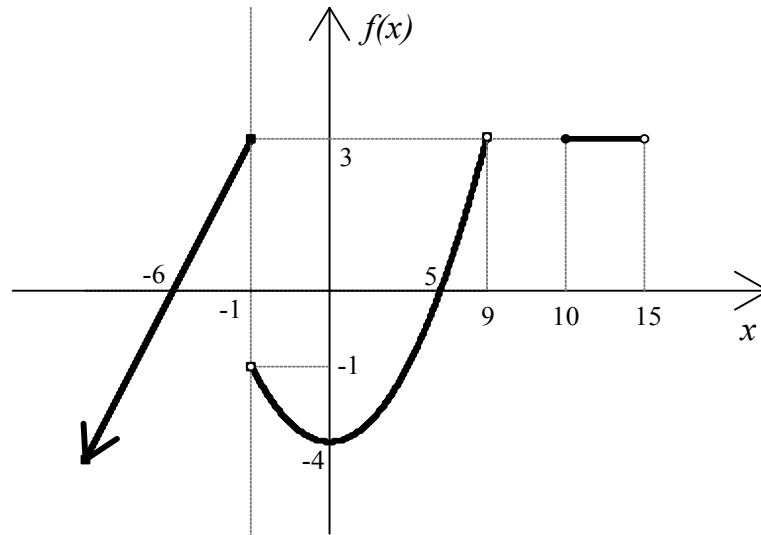
Para la recta l_2 su pendiente está dada por $m_2 = \frac{-3}{2}$.

De esta manera:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= -1 \\ \frac{2-k}{5} \cdot \frac{-3}{2} &= -1 \\ \frac{-3(2-k)}{5 \cdot 2} &= -1 \\ \frac{-3(2-k)}{10} &= -1 \\ 2-k &= \frac{-1 \cdot 10}{-3} \\ 2-k &= \frac{10}{3} \\ 2 - \frac{10}{3} &= k \\ \frac{6-10}{3} &= k \\ \frac{-4}{3} &= k \end{aligned}$$

Para que las rectas l_1 y l_2 sean perpendiculares, se debe tomar $k = \frac{-4}{3}$.

V. Considere la siguiente gráfica de una función f y determine lo que se pide. (6 pts.)



- 1) D_f : dominio máximo de f .
- 2) A_f : ámbito de f .
- 3) Los puntos de intersección con los ejes coordenados.
- 4) f_+ : intervalos en los que f es positiva.
- 5) $f \nearrow$: intervalos en los que f es estrictamente creciente.
- 6) $f \rightarrow$: intervalos en los que f es constante.

Solución

- 1) $D_f =]-\infty, 9[\cup [10, 15[$.

Es el conjunto de preimágenes; es decir, el conjunto de valores x que poseen imagen.

- 2) $A_f =]-\infty, 3]$.

Es el conjunto de imágenes; es decir, el conjunto de valores y que poseen al menos una preimagen.

- 3) Corta el eje y en el punto $(0, -4)$ y corta el eje x en los puntos $(-6, 0)$ y $(5, 0)$.

- 4) $f_+ =]-6, -1] \cup]5, 9[\cup [10, 15[$.

El intervalo es:

Abierto en -6 , ya que $f(-6) = 0$ y 0 no es positivo; cerrado en -1 , ya que $f(-1) = 3$ y 3 es positivo; abierto en 5 , ya que $f(5) = 0$ y 0 no es positivo; abierto en 9 , ya que 9 no pertenece al dominio de la función; cerrado en 10 , ya que $f(10) = 3$ y 3 es positivo; abierto en 15 , ya que 15 no pertenece al dominio de la función.

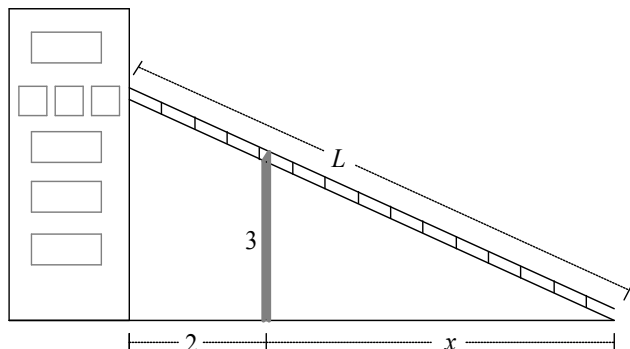
- 5) $f \nearrow:]-\infty, -1]; [0, 9[$.

El intervalo es abierto en 9 , ya que 9 no pertenece al dominio de la función; también es válido: $]-\infty, -1[;]0, 9[$.

- 6) $f \rightarrow: [10, 15[$

El intervalo es abierto en 15 , ya que 15 no pertenece al dominio de la función; también es válido: $]10, 15[$.

- VI. Exprese en función de x la longitud L de una escalera que va desde el piso, pasa apoyándose sobre un muro de 3 metros de altura, hasta llegar a una pared de un edificio que se encuentra a 2 metros del muro, como se muestra en siguiente figura: (4pts.)

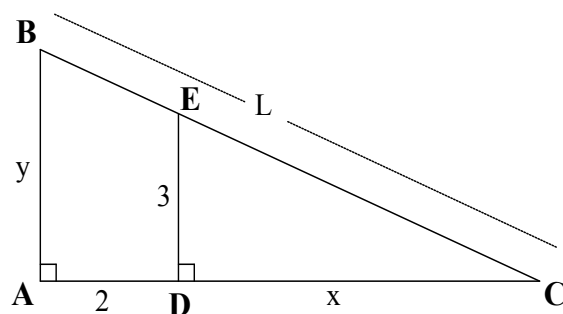


Solución

Hay que buscar resultados que relacionen a L con x . Considerando el triángulo rectángulo ABC , recto en B , que se muestra en la figura de la derecha, y utilizando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$L^2 = y^2 + (2 + x)^2$$

$$L = \sqrt{y^2 + (2 + x)^2} \quad (*)$$



La igualdad $(*)$ presenta a L como función de x y de y ; así, es necesario hallar una expresión que relacione estas dos variables y, de esta manera, despejar y en términos de x . Utilizando el teorema de Thales (semejanza de los triángulos rectángulos ABC y DEC), se tiene:

$$\frac{y}{2+x} = \frac{3}{x} \Rightarrow y = \frac{3(2+x)}{x}$$

Sustituyendo este último resultado en $(*)$ se obtiene a L como función de x .

$$L = \sqrt{y^2 + (2+x)^2} = \sqrt{\left(\frac{3(2+x)}{x}\right)^2 + (2+x)^2}$$

$$\text{Así, } L(x) = \sqrt{\left(\frac{3(2+x)}{x}\right)^2 + (2+x)^2}.$$

NOTA: $L(x)$ se puede simplificar; sin embargo, ya con la expresión anterior es suficiente para dar respuesta a lo solicitado en el problema.

$$L(x) = \sqrt{\left(\frac{3(2+x)}{x}\right)^2 + (2+x)^2} = \sqrt{\frac{3^2(2+x)^2}{x^2} + (2+x)^2}$$

$$L(x) = \sqrt{\frac{9(2+x)^2 + x^2(2+x)^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{(2+x)^2(9+x^2)}}{x} = \frac{(2+x)\sqrt{9+x^2}}{x}$$

12 Soluciones

12.1 Números Reales

- | | | |
|---------------------|-----------------------|------------------------------|
| II. 1) 0 | 8) $\frac{33}{25}$ | 16) 2 |
| 2) $\frac{6}{5}$ | 9) $-\frac{4}{5}$ | 17) $\frac{414}{175}$ |
| 3) $-\frac{1}{3}$ | 10) $\frac{414}{175}$ | 18) $\frac{169}{16}$ |
| 4) $-\frac{40}{7}$ | 11) 3 | 19) $\frac{719}{150}$ |
| 5) $-\frac{15}{28}$ | 12) $\frac{187}{70}$ | 20) $\frac{1}{18}$ |
| 6) $\frac{47}{80}$ | 13) $\frac{20}{9}$ | 21) $\frac{13\,501}{3\,150}$ |
| 7) $-\frac{1}{48}$ | 14) $-\frac{11}{7}$ | 22) $\frac{12}{583}$ |
| | 15) 12 | |

12.2 Expresiones Algebraicas

- | | | |
|---|-------------------------------|-----------------|
| I. 1) -5 | 4) $\frac{2}{11}$ | 7) 2 |
| 2) -7 | 5) $\frac{1}{8}$ | 8) 0 |
| 3) $\frac{9}{128}$ | 6) $-\frac{1}{8}$ | 9) $60\sqrt{5}$ |
| II. 1) + | 6) + | 11) + |
| 2) - | 7) - | 12) + |
| 3) + | 8) + | 13) - |
| 4) + | 9) + | 14) + |
| 5) + | 10) + | |
| III. 1) $9xy - 15xy^2 - 10x^2y - 7x^2$ | 8) $-30x^5y^6w^2$ | |
| 2) $8y^2 + 6yz$ | 9) $-2a^3 - 15ab$ | |
| 3) $x + 7y$ | 10) $x^3 - x + x^2y - y$ | |
| 4) $y - 4x + 4$ | 11) $4 + 12x^2b^2 + 9x^4b^4$ | |
| 5) $2a + 10b - c$ | 12) $a^2 - 16b^2 + 8bc - c^2$ | |
| 6) $\frac{8ab}{5} - \frac{bc}{14} - \frac{7ac}{15}$ | 13) $x^6 - a^6$ | |
| 7) $-\frac{7m^2}{2} + \frac{9m}{2} - \frac{3}{2}$ | 14) $-3x^2 + 15x - 18$ | |
| | 15) $8a^3 - b^3$ | |

16) $3x^2 - 16x + 21$

17) $-6x^2y + 6y^3$

18) $8a^3$

19) $b^{3x} - b^{3x+1}$

20) $x^2 + x^{2a+1} + x^a$

21) $-3a^{2x-1} - 4a^x$

IV. 8) No

VI. 1) $3a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{15}{2}$

2) $4x - y - \frac{8}{3}xy$

3) $2x^2 + 4x - \frac{21}{2}$

4) $3x - 2$

5) $x^3 - 3x$

6) $a^3 - a^2b - 8ab^2$

7) $3x - 7y^2$

8) $3a^2 + 5x$

VII. 1) Sí

2) Sí

3) No

XI. $P(x) = (x-2)(x+1)(x^2+1)$

XII. $P(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x-5)(x+3)$

XIII. $P(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)(x+1)(x-2)$

XIV. 1) $4x^2 - 9x + 12 - \frac{14}{x+1}$

2) $x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x+1}$

3) $-x - 4 + \frac{1}{1-x}$

4) $-x^3 - x^2 + \frac{1}{1-x}$

5) $9x^2 + 12x + 16$

6) $y^3 + 3y^2 + 10y + 27 + \frac{68y - 29}{y^2 - 3y + 1}$

7) $x^2 + xy$

XV. 1) $x + 1 - \frac{1}{x-2}$

2) $x^2 - 5x + 25$

3) $2y^3 - 5y^2 + 12y - 27 + \frac{49}{y+2}$

4) $-x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32 + \frac{67}{2-x}$

5) $4x^2 - 2x + 6$

6) $8x^3 + 7x^2 + 6x + 9$

7) $2x^2 + 9x + 1 - \frac{36}{2x+1}$

8) $3b^2 + 7b + \frac{17}{2} + \frac{57}{2(2b-3)}$

XVI. 1) $a^4(a-1)^2(a+1)^2(a^2+1)$

2) $(m+b)^2$

3) $(a-b)(a+1)$

4) $(x-6)(x+6)$

5) $(3x-y)^2$

6) $(x+1)(x^2-x+1)$

7) $(3a-1)(9a^2+3a+1)$

8) $(x^4+1)(x-1)$

9) $(x-4)(6x+5)$

10) $(5x^2-9y)(5x^2+9y)$

11) $(1-m)(1+m+m^2)$

12) $a(a-2b)(a-3b)$

- 13) $(2y + z)(x - 3)$
- 14) $(1 - 2b)^2$
- 15) $(a + 5)(a - 6)$
- 16) $(3m - 2)(5m + 7)$
- 17) $(2m - 3y^2)(4m^2 + 6my^2 + 9y^4)$
- 18) $(2a - 1)^3$
- 19) $(c - a\sqrt{2})(c + a\sqrt{2})(c^2 + 2a^2)$
- 20) $(m + n - 3)^2$
- 21) $(x + 5)(7x - 4)$
- 22) $(1 - m)(1 + m)$
- 23) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$
- 24) $(4a - 3b)^2$
- 25) $(1 - 6x^3 + 36x^6)\left(1 + x\sqrt[3]{6}\right)$
 $\left(1 - x\sqrt[3]{6} + x^2\sqrt[3]{36}\right)$
- 26) $(a + c - d - n)(a - c + d - n)$
- 27) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$
- 28) $(7ab + 1)^2$
- 29) $(x + 10)(x - 8)$
- 30) $(x - 2)(x + 4)(x^2 + 2x + 10)$
- 31) $(x + y + a - b)(x + y - a + b)$
- 32) $(1 - ab^2)(1 + ab^2)$
- 33) $\left(x - \sqrt[3]{2}\right)\left(x^2 + x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$
- 34) $(x + 1)(x - 3)(x + 4)(x - 5)$
- 35) $(x + 1)(a - b + x)$
- 36) $(a + 6b)^2$
- 37) $(1 + a - 3b)(1 - a + 3b + (a - 3b)^2)$
- 38) $(7 + 2a)(49 - 14a + 4a^2)$
- 39) $(2a - 1)(2n + 3m)$
- 40) $(9a^3 - 2bc^4)(9a^3 + 2bc^4)$
- 41) $(4 - 2a - b)(4 + 2a + b)$
- 42) $(4 - x)(5 + x)$
- 43) $(n + 7)(n - 6)$
- 44) $(a - 1)(x + 1)$
- 45) $(a + x)(a - x - 1)$
- 46) $(3m - 2a)^2$
- 47) $(a + b + c)(a - b - c)$
- 48) $(3x^2 - 5t^3)(3x^2 + 5t^3)$
- 49) $(x + 6)(x - 3)$
- 50) $(x + 2y)^3$
- 51) $(5a^2 + 1)(25a^4 - 5a^2 + 1)$
- 52) $3(a - 2)(a + 5)(m + 1)$
- 53) $a(a + 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
- 54) $(2a - 7)(4a + 3)$
- 55) $(1 + 9ab)^2$
- 56) $\left(a\sqrt[3]{2} - 1\right)\left(a\sqrt[3]{2} + 1\right)$
 $\left(a^2\sqrt[3]{4} - a\sqrt[3]{2} + 1\right)$
 $\left(a^2\sqrt[3]{4} + a\sqrt[3]{2} + 1\right)$
- 57) $(x + 1)(x - 2)(x - 3)$
- 58) $2(x + 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)$
- 59) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)^2$
- 60) $x(2x - 1)(x - 1)^2$
- 61) $(x + 3)(2x + 3)(3x - 2)$
- 62) $(x - 1)(x + 2)(2x^2 + 3)$
- 63) $x^2(x^m - y^m)(x^m + y^m)$
- 64) $(2^x - 1)(2^x + 1)^2(2^{2x} - 2^x + 1)$
- 65) $(3^m - 1)(3^m + 1)(3^{m-2} + 2)$
- 66) $\frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 3}$
- 67) $x + 3$
- 68) $\frac{1}{(x - 1)(x + 1)}$
- 69) $\frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 1}$
- 70) $\frac{2a - 1}{a + 3}$

XVII. 1) $(3x+1)^2 - 3^2$
 2) $1^2 - (1-x)^2$
 3) $3^2 - (x+2)^2$
 4) $(\sqrt{2})^2 - (4b-3)^2$

5) $(x^2+2)^2 + (\sqrt{3})^2$
 6) $(5y+1)^2 - (\sqrt{13})^2$
 7) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

XIX. 1) $\frac{x-1}{b+1}$
 2) $\frac{4(2x+1)}{(x-1)(x+1)}$
 3) $\frac{x-2}{x(x-1)(x+1)}$
 4) $\frac{m^2+3m+54}{12(m-3)(m+3)}$
 5) $\frac{x^2+3x-5}{(x-1)(x+2)(x-3)}$
 6) $\frac{-8x+39}{6(x+3)(x+4)}$

7) $\frac{6-x}{(x-1)(x+3)}$
 8) 1
 9) $\frac{1}{x+1}$
 10) $\frac{(x-1)(x-7)}{(x+2)^2}$
 11) $\frac{y^2(y-4)(y+5)}{(y-1)^2}$
 12) $\frac{x+2}{x+1}$
 13) $\frac{x}{x+1}$

14) $\frac{x^2-xy+y^2}{xy}$
 15) $\frac{2a^2+b}{a^2b(b-2a)}$
 16) $\frac{a-b}{a+b}$
 17) 1
 18) $\frac{y-2x}{x(x-y)}$
 19) $\frac{x}{x^n+y^n}$

XX. 1) $\frac{x\sqrt[5]{8x^2y^2}}{y}$
 2) $\frac{3\sqrt{6ab}}{2b}$

3) $-\frac{\sqrt[3]{4xyz^2}}{2z}$
 4) a^n

XXI. 1) $\frac{x\sqrt[3]{9}(3-xy)}{3}$
 2) $\frac{3(2-\sqrt{9-x})}{2}$
 3) $4\sqrt[3]{(x-2)^2} - 6\sqrt[3]{x-2} + 9$
 4) $\frac{2(x-2)(3x+2\sqrt{1-4x})}{9x-2}$
 5) $\frac{x(x+\sqrt{2x-1})}{x-1}$
 6) $-2(\sqrt{2-x}+3)$
 7) $\frac{2}{\sqrt[5]{(3x-1)^3}}$

8) $\frac{(11-2x)(3+2\sqrt{x+1})}{5-4x}$
 9) $-4x(\sqrt{x}+\sqrt{x^2+x-3})$
 10) $\frac{-5x-4}{(5x+2)(\sqrt{8-10x+5x})}$
 11) $\frac{1}{xy(\sqrt{x}-2\sqrt{y})}$
 12) $\frac{1}{(8-x)\left(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$
 13) $2\left(4\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}+1\right)$
 14) $\frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2(x^2-2)}+\sqrt[3]{(x^2-2)^2}}{2(x-1)}$

12.3 Ecuaciones Algebraicas

- I. 1) $x = 2$ no es solución; $x = -1$ sí es solución.
 2) $x = -1$ sí es solución; $x = -2$ no es solución.
 3) $x = \frac{2 - \sqrt{5}}{3}$ y $x = 1$ son soluciones; $x = -5$ no es solución.
 4) $x = -1$ no es solución.
 5) $x = 2$ sí es solución; $x = 3$ y $x = 4$ no son soluciones.
- II. 1) $m = \frac{3k}{2n}$, si $2n \neq 0$
 2) $n = bm - m \frac{a+b}{3k-t}$
 3) $m = \frac{13}{-3a-4}$, si $-3a-4 \neq 0$
 4) $w = \frac{-9a+3b-32}{-9a+3b-36n-20}$, si $-36n \neq 9a-3b+20$
- III. 1) $S = \left\{ \frac{14}{11} \right\}$
 2) $S = \emptyset$
 3) $S = \left\{ \frac{4}{3}, 3 \right\}$
 4) $S = \mathbb{R}$
 5) $S = \{0\}$
 6) $S = \emptyset$
 7) $S = \{5, 3, -2\}$
 8) $S = \left\{ \frac{2}{5}, 3 \right\}$
 9) $S = \left\{ 3\sqrt{2} - \sqrt{17}, 3\sqrt{2} + \sqrt{17} \right\}$
 10) $S = \left\{ -\frac{1}{9}, 2 \right\}$
 11) $S = \{-3, 3\}$
 12) $S = \{-2, -3, 1, 2\}$
 13) $S = \left\{ 5, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5} \right\}$
 14) $S = \left\{ 2, -3, \frac{5}{2} \right\}$
 15) $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$
- 16) $S = \left\{ \frac{-1}{6} \sqrt{\frac{\sqrt{193}-7}{2}}, \frac{1}{6} \sqrt{\frac{\sqrt{193}-7}{2}} \right\}$
 17) $S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$
 18) $S = \left\{ 1, -\frac{23}{6} \right\}$
 19) $S = \{2, 7\}$
 20) $S = \mathbb{R} - \{1\}$
 21) $S = \{-4, 3\}$
 22) $S = \{8\}$
 23) $S = \{4\}$
 24) $S = \{3\}$
 25) $S = \{6\}$
 26) $S = \{9\}$
 27) $S = \{2\}$
 28) $S = \{3\}$
 29) $S = \{1\}$
 30) $S = \left\{ -3, \frac{1}{2} \right\}$
 31) $S = \{6\}$
 32) $S = \{6\}$

33) $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

34) $S = \{a, 2b\}$

35) $S = \{a, a + b\}$

36) $S = \{3, 6a - 3\}$

37) $S = \left\{ -\frac{1}{2m} (m^2 + n^2) \right\}$

38) $S = \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

39) $S = \{1, -7\}$

40) $S = \emptyset$

41) $S = \left\{ \frac{-2(14 \pm \sqrt{105})}{13} \right\}$

42) $S = \left\{ \frac{-1}{9} \right\}$

43) $S = \mathbb{R} - \{3\}$

44) $S = \{-8\}$

45) $S = \{3\}$

46) $S = \left\{ \frac{-5}{11} \right\}$

47) $S = \{-2\}$

48) $S = \{1, 5\}$

49) $S = \{3\}$

50) $S = \left\{ \frac{19}{9} \right\}$

IV. 1) si $m = -\frac{10}{9} \Rightarrow x = 7$;
si $m = 2 \Rightarrow x = \frac{-7}{3}$

2) $m = \frac{-9}{8}$
3) $m = \frac{68}{7}$

V. 1) $a = 2, b = 1$
2) $a = \frac{68}{27}, b = \frac{151}{27}$
3) $a = -7, b = \frac{27}{7}$
4) Tiene infinito número de soluciones: $a = b - 6$
5) $a = \frac{278}{87}, b = \frac{57}{29}$
6) $a = \frac{19}{23}\sqrt{3}, b = -\frac{3}{23}\sqrt{3}$
7) $a = \frac{5}{2}\sqrt{2}, b = -2$
8) $a = \frac{7}{4}\sqrt{2}, b = -\frac{9}{4}\sqrt[3]{4}$

9) $x = \frac{3}{23} (93 + 8\sqrt{239})$,
 $y = \frac{3}{23} (-57 + 4\sqrt{239})$

10) $a = 4, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{1}{3}$

11) $x = 1, y = \frac{9}{5}, z = \frac{12}{5}$

12) $t = -\frac{94}{21}, x = \frac{82}{21}, y = \frac{128}{21}$

13) $x = \frac{160}{7}, y = -\frac{5}{7}, z = \frac{75}{7}$

14) $a = \frac{29}{10}\sqrt{2}, y = \frac{33}{10}, z = \frac{11}{2}$

15) $x = 2 - \sqrt{2}, y = \sqrt{2}, z = \sqrt{2} + 2$

VI. 1) 14 m y 28 m
2) 12 000 colones
3) \$75 000 al 8% y \$25 000 al 10%
4) \$200
5) 30 m \times 70 m
6) 60 hectáreas
7) 3 500 personas

8) 2 m
9) 24 pulg, 76 pulg
10) El diámetro es 2 pies
11) 9 \times 11 pulg
12) 8 \times 16 pulg
13) 15 años
14) 40 libras a 15 000 colones cada uno

- 15) $2\sqrt[3]{\frac{432}{\pi}} \text{ cm}$
- 16) (a) $4\,050 \text{ pie}^2$
(b) $2\,592 \text{ pie}^2$
(c) $3\,600 \text{ pie}^2$
- 17) 88 de calificación
- 18) \$820
- 19) (a) 1 s y 3 s
(b) 4 s
- 20) (a) $4\,320 \text{ m}$
(b) $96,86^\circ \text{C}$
- 21) 2 m
- 22) Asistieron 200 niños
- 23) $12 \text{ m} \times 12 \text{ m}$
- 24) $\frac{14}{3}$ de glucosa y $\frac{7}{3}$ de agua
- 25) 194,59 g de plata y 5,4 g de cobre
- 26) (a) 64 s
(b) 128 m y 96 m
- 27) 7 km/h
- 28) (a) $\frac{5}{9} \text{ km/h}$
(b) $\frac{20}{9}$ kilómetros
- 29) 6 km/h
- 30) NO se puede
- 31) (a) $d = 100\sqrt{20t^2 + 4t + 1}$
(b) 3 : 30 pm

- VII. 1) La ecuación $(x^2 + 1)(x + 2) = 2$ tiene una solución real y el polinomio $P(x) = (x^2 + 1)(x + 2)$ es de grado 3.
- 2) $P(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)(x + 2)$.
- 3) Las ecuaciones (1) y (2) son:
- (1) $(x - 1)(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$
- (2) $(x - 1)(x - 2)(x - 6)(x - 5) = 0$
- Una posible ecuación (3) es $(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x^2 + 1) = 0$.
- 4) (a) $S_1 \cup S_2 = \{-5, 1, 5, 7, 9\}$
(b) $S_1 - S_2 = \{1, 5\}$
(c) $S_2 - S_1 = \{-5, 9\}$
(d) $\{7\}$
(e) $\{5\}$
(f) $\{7\}$

12.4 Inecuaciones Algebraicas

- I. 1) (a) $A \cap B = \{-1, 2\}$ (c) $A - B = \{-2, 3\}$
(b) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 2, 3, 5\}$ (d) $B - A = \{-3, 5\}$
- 2) (a) $S_1 \cap S_2 = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ (b) $S_1 \cup S_2 = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right\}$

(c) $S_1 - S_2 = \{1\}$

(d) $S_2 - S_1 = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

3) (a) $] -5, 10[$

(b) $[0, 7[$

(c) $] -5, 0[$

(d) $[7, 10[$

4) $[2, 5[$

5) $] -7, 3]$

6) $] -\infty, 1[\cup [3, \infty[$

7) \mathbb{R}

8) \emptyset

9) $]4, 7[$

II.

1) F

3) F

5) V

7) F

9) F

2) F

4) V

6) F

8) F

10) V

III.

1) $S =]-\infty, 4]$

2) $S = \left] \frac{268}{5}, \infty \right[$

3) $S =]5, \infty[$

4) $S = \left] -\infty, -\frac{1}{3} \right[$

5) $S = \left] -\frac{26}{3}, -4 \right]$

6) $S =]-\infty, -8] \cup [-7, \infty[$

7) $S =]0, 1[$

8) $S =]1, \infty[$

9) $S =]-1, 1[$

10) $S = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[$

11) $S = \left] -\infty, -\frac{1}{3} \right[\cup]3, \infty[$

12) $S =]-1, 0] \cup [1, 2[$

13) $S =]4, 5[$

14) $S = \mathbb{R} - \{-4, -3, 5\}$

15) $S =]-\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]1, \infty[\cup \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$

16) $S =]-\infty, -3[\cup]1, \infty[$

17) $S = \left] 0, \frac{1}{2} \right[$

18) $S =]-\infty, -3] \cup [0, 1[\cup [3, \infty[$

19) $S = [-2, 0[\cup [2, \infty[$

20) $S =]-\infty, 0[\cup]3, \infty[$

21) $S = \left] 0, \frac{3}{7} \right] \cup \left] \frac{1}{2}, \infty \right[$

22) $S =]-4, 0] \cup \left] 1, \frac{4}{3} \right]$

23) $S =]-\infty, -3[\cup \left[\frac{1}{2}, \infty \right[$

24) $S =]-\infty, -3]$

25) $S =]-\infty, -2[$

26) $S =]-\infty, -3[\cup]4, \infty[$

27) $S = \mathbb{R} - [1, -2]$

28) $S = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{6} \right]$

29) $S =]-2, 0[\cup]1, \infty[$

30) $S =]-\infty, -15] \cup]3, \infty[$

31) $S =]-\infty, -3[\cup \left[-\sqrt{3}, 0 \right[\cup \left[\sqrt{3}, 3 \right[$

32) $S =]-\infty, -1[\cup]0, \infty[$

33) $S = \emptyset$

34) $S =]-4, -3[$

35) $S =]-\infty, 0[\cup]0, 3] - \{-1\}$

36) $S = \left] 3, \frac{7}{2} \right]$

37) $S =]-\infty, 1[\cup]3, 5]$

38) $S = \left] \frac{-23}{6}, -3 \right[\cup]-2, 1[\cup]3, \infty[$

39) $S =]-8, \infty[$

$$40) \quad S = \left[-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right] \cup]2, \infty[$$

$$41) \quad S =]-\infty, -1[\cup \left[\frac{-1}{2}, 2 \right[\cup]7, \infty[$$

$$42) \quad S =]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$$

$$43) \quad S =]-2, 3[$$

$$44) \quad S =]-4, 3] - \{-3\}$$

$$45) \quad S =]-7, -1[\cup]5, 7[$$

IV. 1) El error es dividir entre el número negativo $2 - a$ en el quinto paso.

$$2) \quad (a) \quad k \in]-\infty, -4[\cup]4, \infty[$$

$$(b) \quad k \in]-\infty, -1[\cup]7, \infty[$$

$$3) \quad (a) \quad k \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right[$$

$$(b) \quad k \in]-\infty, -2[\cup \left[-\frac{2}{3}, \infty \right[$$

V. 1) La calificación en el tercer examen debe ser mayor o igual a 77.

2) La calificación en el cuarto examen debe ser mayor a 84,667.

3) El intervalo de tiempo en que el proyectil estará a más de 32 m del suelo es: $\left] \frac{1}{2}, 4 \right[$.

4) Para los polígonos de más de 10 lados.

$$\text{VI. } 1) \quad S = \left[\frac{a}{2}, -b \right]$$

$$5) \quad S = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[$$

$$2) \quad S = \left] -\infty, \frac{-3b+a}{2(a-b)} \right]$$

$$6) \quad S = \mathbb{R}$$

$$3) \quad S = \left] -\infty, \frac{a}{b} \right] \cup]0, -a[$$

$$7) \quad S = [-a, -b]$$

$$8) \quad S =]-a, b]$$

$$4) \quad S = \left] -\infty, \frac{a}{b} \right] \cup]0, -a[$$

$$9) \quad \text{Si } a = 1 \Rightarrow S = \mathbb{R}$$

$$\text{Si } a > 1 \Rightarrow S =]1, \infty[$$

$$\text{Si } a < 1 \Rightarrow S =]-\infty, 1[$$

12.5 Valor Absoluto

$$\text{I. } 1) \quad S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right\}$$

$$2) \quad S = \{1, 4\}$$

$$3) \quad S = \left\{ \sqrt{3} - 5, 9 - \sqrt{3} \right\}$$

$$4) \quad S = \{1, 3\}$$

$$5) \quad S = \left\{ -2, \frac{4}{5} \right\}$$

$$6) \quad S = \left\{ -2, \frac{4}{3} \right\}$$

$$7) \quad S = \left\{ \frac{7}{6} \right\}$$

$$8) \quad S = \emptyset$$

$$9) \quad S = \{-8\}$$

$$10) \quad S = \{-5, 2\}$$

$$11) \quad S = \emptyset$$

$$12) \quad S = \left\{ -1 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3} \right\}$$

$$13) \quad S = \emptyset$$

$$14) \quad S = \left\{ \frac{8}{3} \right\}$$

$$15) \quad S = \{0, 3\}$$

$$16) \quad S = \{-1, 1\}$$

17) $S = \left\{-5, \frac{-7}{2}\right\}$

18) $S = \{0, 2\}$

19) $S = \left\{\frac{8}{9}, \frac{12}{7}\right\}$

20) $S = \left\{-2, \frac{4}{5}\right\}$

21) $S = \{0, 6\}$

22) $S = \{-2\}$

23) $S = \left\{\frac{-1}{7}\right\}$

24) $S = \{-5, -1\}$

25) $S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$

26) $S = \left\{\frac{-2}{5}\right\}$

27) $S = \{0\}$

28) $S = \left\{\frac{-1}{3}\right\}$

II. 1) F

4) F

7) V

10) F

2) F

5) V

8) F

11) F

3) F

6) V

9) F

12) V

III. 1) $15a - 5b$

2) $2 + 2b$

3) $-x$

4) $-y$

5) a

6) $a + 2b$

V. 1) $S = \mathbb{R}$

2) $S = \left\{\frac{4}{7}\right\}$

3) $S = \left[-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right]$

4) $S = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$

5) $S = \left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right]$

6) $S = \left[-\frac{6}{5}, 2\right]$

7) $S = \left]-\frac{7}{10}, \frac{1}{2}\right[$

8) $S = \left[\frac{28}{19}, \frac{26}{17}\right]$

9) $S = \left]-17, \frac{17}{5}\right[$

10) $S = [3, 4]$

11) $S = \mathbb{R}$

12) $S = \mathbb{R}$

13) $S =]-\infty, 3[$

14) $S =]-6, -2[$

15) $S =]-8, 0[$

16) $S = \left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right]$

12.6 Geometría

I. 1) La altura del árbol es 15 m

2) La bola dará en el piso a 30 pies de la red

3) Para el triángulo de lado 8 cm su altura es $4\sqrt{3}\text{ cm}$. Para el triángulo cuyo lado mide l su altura es $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

- 4) El área del rectángulo es 150 cm^2
- 5) El área del rombo es 96 cm^2 y la distancia del punto de intersección de sus diagonales con cualquier lado es $4,8 \text{ cm}$
- 6) El área del cuadrado es 25 cm^2
- 7) Los triángulos son semejantes porque dos pares de ángulos correspondientes, respectivamente, son congruentes; o bien, porque sus tres pares de lados correspondientes son proporcionales. La razón de semejanza es $\frac{4}{3}$
- 8) Las longitudes de los lados son 18 m , 21 m y 12 m
- 9) Los catetos miden 12 m y 9 m , respectivamente
- 10) La altura sobre la hipotenusa del triángulo mide 6 cm ; sus catetos miden $2\sqrt{13} \text{ cm}$ y $3\sqrt{13} \text{ cm}$, respectivamente
- 11) La altura del triángulo es 16 cm
- 12) La medida de la hipotenusa del triángulo es 30 cm
- 13) La altura del triángulo es 4 cm
- 14) La distancia del ortocentro del triángulo a cualquiera de sus vértices es $\frac{20\sqrt{6}}{3} \text{ dm}$
- 15) El área del triángulo es 36 cm^2
- 16) El área del círculo es $\frac{144}{\pi} \text{ cm}$
- 17) El área del círculo es $50 \pi \text{ cm}^2$
- 18) El área de la porción del plano es $18 (2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$
- 19) El área del segmento circular es $3 (2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$
- 20) El ángulo central del sector circular es 152°
- 21) El área del sector circular es $2 \pi \text{ cm}^2$
- 22) El área del prisma es $4 (21 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ y su volumen es $28\sqrt{3} \text{ cm}^3$
- 23) La arista del cubo mide $5\sqrt{3} \text{ cm}$
- 24) El área de la base del cilindro es $(8\sqrt{10} - 20) \pi \text{ cm}^2$
- 25) El área lateral del cono es $60 \pi \text{ cm}^2$
- 26) El área lateral del cilindro está dada por $2\pi\sqrt{3} r^2$
- 27) El volumen restante del cubo es $\frac{500 - 45 \pi}{4} \text{ cm}^3$
- 28) El radio de la nueva esfera es $\sqrt[3]{35} r$
- 29) El volumen del sólido regular es 24 dm^3
- 30) El volumen del cono más grande es $250 \pi \text{ cm}^3$
- 31) El volumen del tronco de cono es $\frac{608}{3} \pi \text{ dm}^3$

- 32) El volumen de la bola es $\frac{32\pi}{3} cm^3$
- 33) El volumen del cono es $392\pi cm^3$
- 34) El volumen del cilindro es $588\pi cm^3$
- 35) El área de la base del cono es $64\pi cm^2$
- II. 1) $\overline{ED} = 35 (ul)$ y $\overline{BD} = 42 (ul)$
- 2) $x = 4,5 (ul)$
- 3) $x = 12 (ul)$
- 4) El área del círculo es $72\pi cm^2$
- 5) El área de la región sombreada es $8 m^2$
- 6) El área de la región sombreada es $2\sqrt{3} cm^2$
- 7) El área de la región sombreada es $\frac{12\pi - 9\sqrt{3}}{4} cm^2$
- 8) El área de la región sombreada es $6(4\pi - 3\sqrt{3}) cm^2$
- 9) El área de la región sombreada es $4(4\pi - 3\sqrt{3}) cm^2$
- 10) El volumen del espacio libre entre las figuras es $64(12 - \pi) cm^3$
- 11) $\overline{AD} = 16 cm$ y $\overline{CD} = 12 cm$
- 12) (a) SUGERENCIA: Observe que se trata de dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo en común
- (b) El área del triángulo, en términos de y , está dada por $A = \frac{8(y+8)\sqrt{y^2-64}}{y-8}$
- 13) (a) El área de la región sombreada es $25\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)(ul)^2$
- (b) El área de la región sombreada es $100(ul)^2$
- (c) El área de la región sombreada es $40\pi(ul)^2$

12.7 Funciones Algebraicas

- | | | | |
|------|-----------------------|--------------------------|-------------------------------|
| I. | 1) No | 2) Sí | 3) No |
| II. | 1) Sí | 2) Sí | 3) Sí |
| III. | 1) (a) $\frac{-6}{5}$ | (c) 0 | (e) $\frac{18}{13}$ |
| | (b) $\frac{-3}{2}$ | (d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | (f) $\frac{3(a+1)}{a^2+2a+2}$ |

2) (a) 7
(b) $\frac{-125}{19}$

(c) No existe

(d) $x = 2 \wedge x = \frac{7}{2}$

3) (a) 0
(b) $\frac{-1}{2}$

(c) $\frac{1-a-x}{a+x}$

(d) No existe

(e) $x = \frac{1}{25}$

4) (a) 2
(b) $\frac{7}{4}$

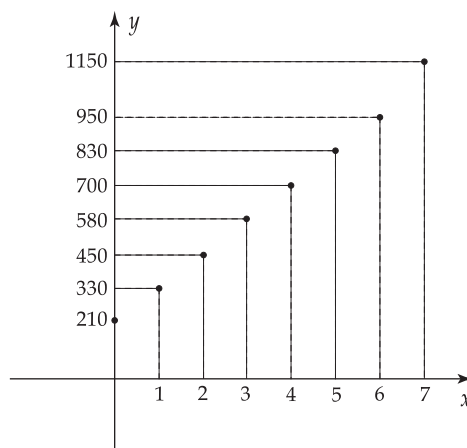
(c) 9

(d) 0

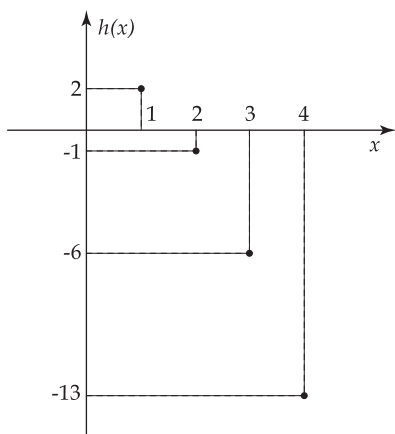
(e) 1

(f) $x = -3, x = \sqrt{2} \wedge x = -\sqrt{2}$

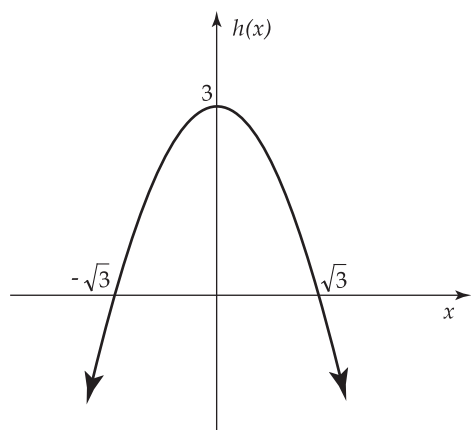
IV. 1)



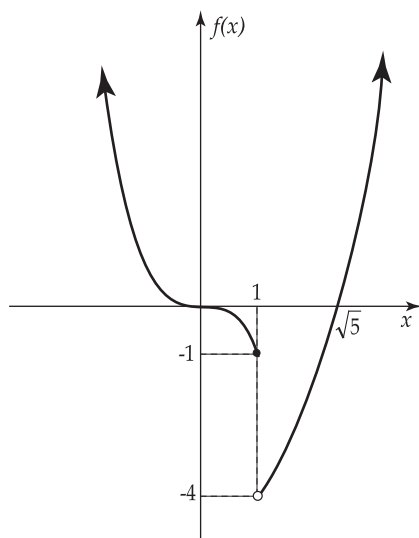
2) (a)



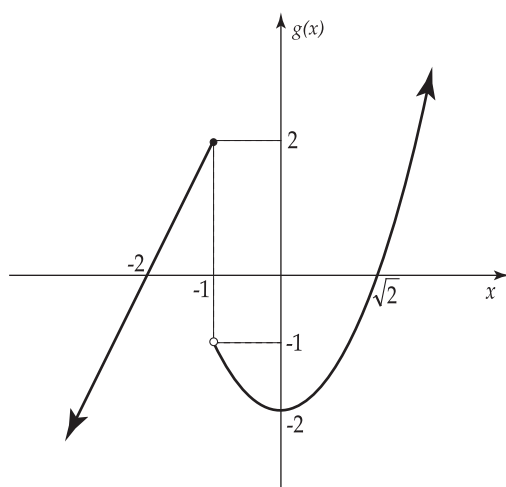
(b)



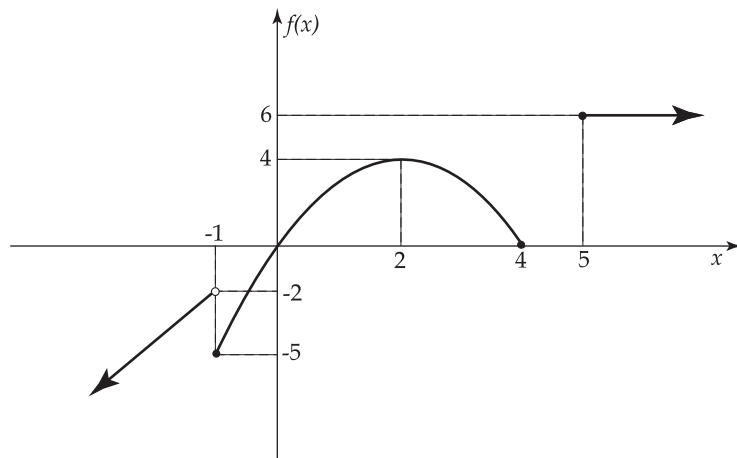
(c)



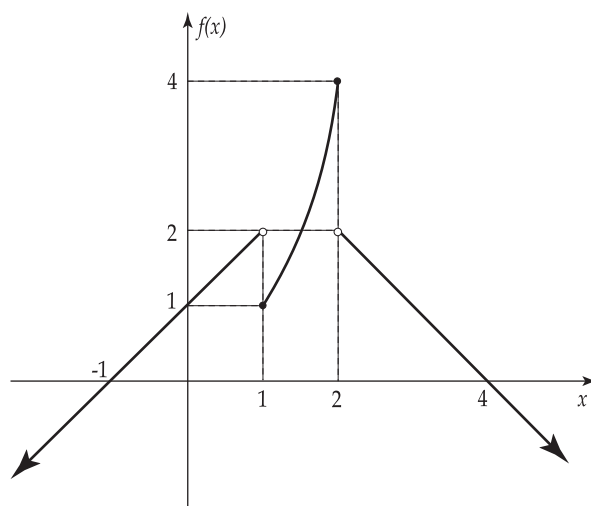
(d)



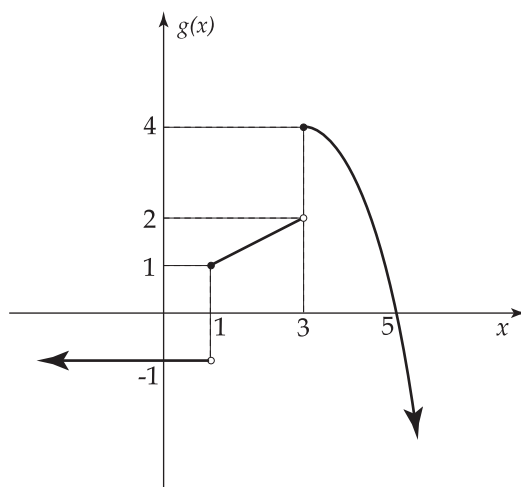
(e)



(f)



(g)



- V. 1) (a) $D_f :]-\infty, 4] \cup [5, +\infty[$
 (b) $A_f :]-\infty, 4] \cup \{6\}$
 (c) $I_y : (0, 0)$
 (d) $I_x : (0, 0)$ y $(4, 0)$
 (e) $f+ :]0, 4[\cup [5, +\infty[$

- (f) $f- :]-\infty, 0[$
 (g) $f \nearrow :]-\infty, -1[;]-1, 2[$
 (h) $f \searrow :]2, 4[$
 (i) $f \rightarrow :]5, +\infty[$

- 2) (a) $D_f : \mathbb{R}$ (f) $f- :]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$
 (b) $A_f :]-\infty, 4]$ (g) $f \nearrow : [1, 3[$
 (c) $I_y : (0, -1)$ (h) $f \searrow :]3, +\infty[$
 (d) $I_x : (5, 0)$ (i) $f \rightarrow :]-\infty, 1[$
 (e) $f+ : [1, 5[$
- 3) (a) $D_f : \mathbb{R}$ (f) $f- :]0, \sqrt{5}[$
 (b) $A_f :]-4, +\infty]$ (g) $f \nearrow :]1, +\infty[$
 (c) $I_y : (0, 0)$ (h) $f \searrow :]-\infty, 1[$
 (d) $I_x : (0, 0) \text{ y } (\sqrt{5}, 0)$ (i) $f \rightarrow : \emptyset$
 (e) $f+ :]-\infty, 0[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$
- 4) (a) $D_f : \mathbb{R}$ (f) $f- :]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$
 (b) $A_f :]-\infty, 4]$ (g) $f \nearrow :]-\infty, 1[;]1, 2[$
 (c) $I_y : (0, 1)$ (h) $f \searrow :]2, +\infty[$
 (d) $I_x : (-1, 0) \text{ y } (4, 0)$ (i) $f \rightarrow : \emptyset$
 (e) $f+ :]-1, 4[$
- 5) (a) $D_f : \mathbb{R}$ (f) $f- :]-\infty, -2[\cup]-1, \sqrt{2}[$
 (b) $A_f : \mathbb{R}$ (g) $f \nearrow :]-\infty, -1[;]0, +\infty[$
 (c) $I_y : (0, -2)$ (h) $f \searrow :]-1, 0[$
 (d) $I_x : (-2, 0) \text{ y } (\sqrt{2}, 0)$ (i) $f \rightarrow : \emptyset$
 (e) $f+ :]-2, -1] \cup]\sqrt{2}, +\infty[$
- 6) (a) $D_f :]-\infty, -2[\cup]-2, 7[\cup [13, 21]$ (f) $f- : [-12, -6[\cup]-2, 4[$
 (b) $A_f : [-11, 5] \cup \{10\}$ (g) $f \nearrow :]-\infty, -2[;]0, 7[$
 (c) $I_y : (0, -11)$ (h) $f \searrow :]-2, 0[;]13, 21[$
 (d) $I_x : (-6, 0), (4, 0) \text{ y } (21, 0)$ (i) $f \rightarrow :]-\infty, -20[;]-20, -12[$
 (e) $f+ :]-\infty, -12[\cup]-6, -2[\cup]4, 7[\cup [13, 21[$

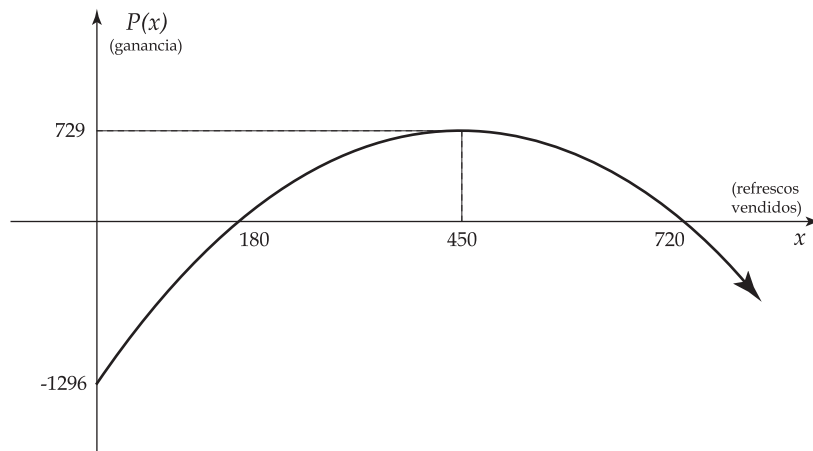
VI. 1) $S(x) = 6x - \frac{3}{4}x^2$

2) (a) $H(R) = \frac{9R}{R-3}$ (b) $V(R) = \frac{3\pi R^3}{R-3}$

3) $S(h) = 4\pi(h+2)$

4) (a) $h(x) = \frac{2x\sqrt{5}}{5}$ (b) $z(x) = \frac{3x\sqrt{5}}{5}$

5) (a)



(b) Se deben vender, semanalmente, 450 refrescos para obtener una ganancia máxima.

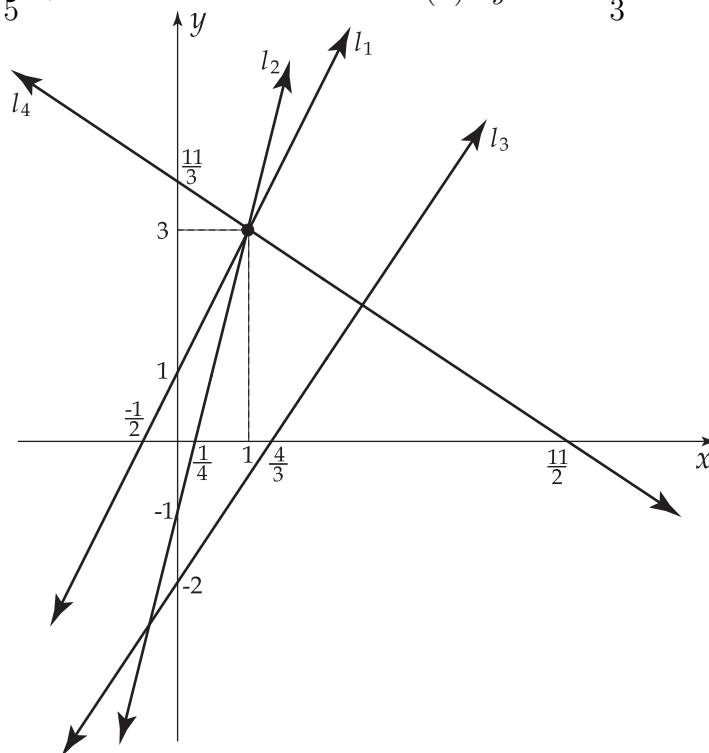
(c) La ganancia máxima, semanalmente, es 729 000 colones.

6) (a) $y = \frac{-2x + 5}{3}$

(c) $y = \frac{-2x + 11}{3}$

(b) $y = \frac{3x}{5} + 3$

(d) $y = \frac{-2x + 11}{3}$



- 7) La ecuación de la recta es $y = -5x - 9$.
- 8) La distancia entre P y l es $2\sqrt{5}$ (ul).
- 9) La ecuación de la recta l es $l : y = 3x - 8$.
- 10) Para que l sea perpendicular a l_1 , k debe valer -1 .
- 11) La ecuación de la recta l es $l : y = \frac{-9}{2}x + 17$.
- 12) Se tienen dos opciones. Si selecciona el punto $(6, 0)$, la ecuación de la recta l está dada por $l : y = \frac{-3}{8}x - \frac{9}{4}$. Por otra parte, si selecciona el punto $(1, 5)$, la ecuación de la recta l está dada por $l : y = \frac{2x + 13}{3}$.
- 13) La ecuación de la recta l es $l : y = \frac{-3}{2}x + \frac{37}{6}$.
- 14) La ecuación de la recta l es $l : y = \frac{-1}{9}x + \frac{44}{9}$.
- 15) La ecuación de la recta l es $l : y = -x + 5$.
- 16) Para que l_1 y l_2 se intersequen en $x = 1$, k debe valer $\frac{5}{2}$.
- 17) Para que las rectas dadas sean paralelas, se debe cumplir: $k = \frac{4}{29}$.
- 18) La ecuación de la mediatriz del segmento AB es $y = \frac{31 - 16x}{6}$.
- 19) No existe un valor k para que se cumplan, simultáneamente, ambas condiciones.
- 20) La parábola interseca el eje x en un solo punto cuando $a = \pm \frac{8}{3}$.
- 21) SUGERENCIA: Verifique que los pares de lados opuestos del cuadrilátero son, respectivamente, de igual longitud ($\overline{AB} = \overline{DC} = \sqrt{10}$ y $\overline{BC} = \overline{DA} = 3\sqrt{10}$); o bien, verifique que las rectas que contienen cada par de lados opuestos del cuadrilátero son paralelas, es decir, sus pendientes son de igual medida $\left(\text{pendiente } \overline{AB} = \text{pendiente } \overline{DC} = \frac{-1}{3} \text{ y } \text{pendiente } \overline{BC} = \text{pendiente } \overline{DA} = \frac{9}{3} = 3 \right)$.
- 22) El área del triángulo es 10 (ul)^2 y la longitud de su altura sobre la hipotenusa es $\frac{20\sqrt{41}}{41} \text{ (ul)}$.
- 23) La ecuación de la recta es $y = \frac{3}{2}x + 2$.
- 24) (a) El objeto está a 40 m sobre el suelo cuando $t = 0,4 \text{ s}$ y cuando $t = 20 \text{ s}$.
 (b) El objeto alcanza su altura máxima a los $\frac{500}{49} \text{ s} \approx 10,204 \text{ s}$.
 (c) La altura máxima del objeto es $\frac{25\,000}{49} \text{ m} \approx 510,204 \text{ m}$.

- 25) El precio de venta para que se obtenga una ganancia máxima debe ser \$70 por reloj.
- 26) Los dos números buscados son iguales y su magnitud es 25.
- 27) (a) $R(x) = 15\,000x - 500x^2$.
 (b) El ingreso máximo mensual se produce cuando $x = 15$; es decir, cuando se cobran \$15 mensuales.
- 28) El ancho máximo que puede tener la caja es 2 pie .
- 29) (a) La velocidad más económica para un viaje es $37,5\text{ mi/h}$.
 (b) La mayor cantidad de millas que se pueden recorrer con un galón de gasolina es $46,875\text{ mi}$.
- 30) La ecuación de la parábola está dada por $f(x) = \frac{3}{10}x^2 + \frac{11}{10}x - \frac{32}{5}$.
- VII. 1) $D_f =]-\infty, 2[\cup]3, \infty[- \left\{ \frac{7}{2} \right\}$ 5) $D_f = \mathbb{R}$
 2) $D_f = \left] \frac{1}{2}, \infty \right[$ 6) $D_f = \left] -\infty, \frac{2}{5} \right[- \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$
 3) $D_f =]-\infty, 1] \cup [3, \infty[- \{5\}$ 7) $D_f =]-\infty, 1] \cup [3, \infty[$
 4) $D_f = \mathbb{R}$ 8) $D_f =]-\infty, 0[\cup \left[\frac{1}{2}, \infty \right[$
- VIII. 1) $f^{-1} : [-3, \infty[\rightarrow \left] \frac{-1}{5}, \infty \right]$, tal que $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{5}$
 2) $f^{-1} : [0, \infty[\rightarrow]-\infty, -2]$, tal que $f^{-1}(x) = \frac{-\sqrt{x+16}}{2}$
- IX. $(f \circ (g \circ g))(x) = \sqrt{25x+6}$
- X. 1) $(g \circ f)(x) = 16 \left(\sqrt[4]{x^4} + 4 \right)^2 - 4$
 2) $S = \emptyset$
 3) $(f \circ f) \left(\frac{-3}{2} \right) = \frac{19}{2}$
- XI. 1) $(f \circ g)(x) = \frac{x-2}{5-2x}$
 2) $\left(\frac{g}{f} \right)(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x}$
 3) $(f+g)(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{2x+1}$
- XII. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

XIII. 1) $(f + g)(x) = x^2 + 4x + 3$

2) $(2f - 3g)(x) = 2x^2 + 3x + 1$

3) $(g \circ (2f + 5g))(x) = 2x^2 + 11x + 20$

XIV. 1) $(f \circ g)(0) = -1$

2) $(g \circ g)(0) = \frac{-2}{3}$

3) $(g \circ f)(-2) = -1$

4) $(f \circ g)(2) = 11$

XV. $h\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}$

XVI. 1) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 3$

2) $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = (1 - 3x)^4$

3) $f(x) = x^4$ y $g(x) = x - 1$

XVII. 1) $g(x) = \frac{1}{x - 7}$

2) $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$

3) $g(x) = x^2 + 2x$

XVIII. 1) $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2}$

2) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{x}}$

3) $f^{-1}(x) = 7x - 1$

4) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 2 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$

5) $f^{-1}(x) = x^2 + 1$

6) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$

7) $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{61}{4} - x} - \frac{9}{2}$

8) $f^{-1}(x) = -3 - \sqrt{x + 2}$

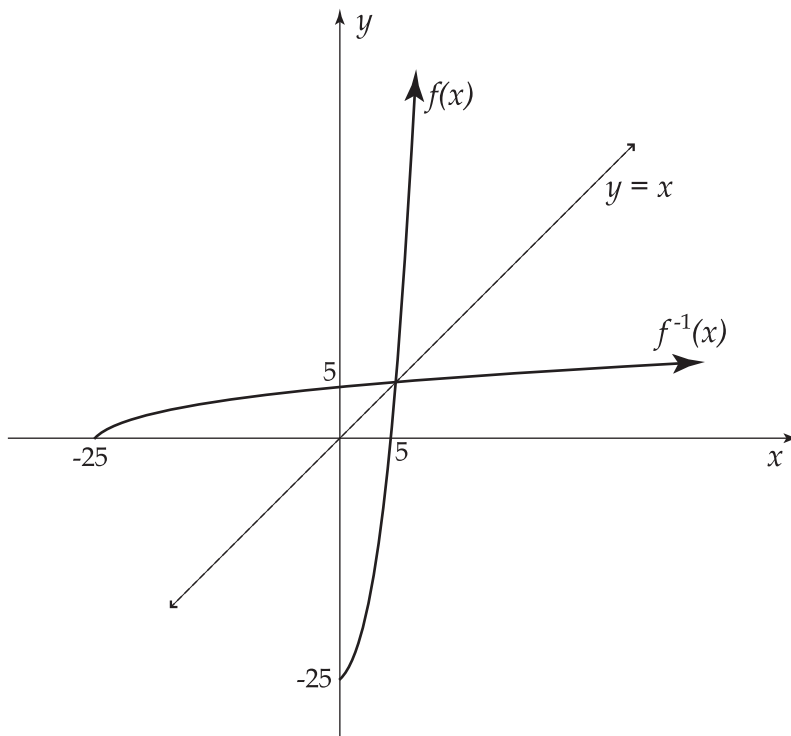
XIX. 1) (a) $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, \infty[$

(b) $A_f = \mathbb{R}$

(c) $C_f = \mathbb{R}$

2) No es biyectiva, ya que no es inyectiva (hay valores en el codominio de f que poseen más de una preimagen); no obstante, f es sobreyectiva (porque $C_f = A_f$).

- XX. 1) f es biyectiva, ya que es tanto inyectiva como sobreyectiva.
 2) $D_f = [0, \infty[$ y $A_{f^{-1}} = [0, \infty[$
 3) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+25}$
 5)



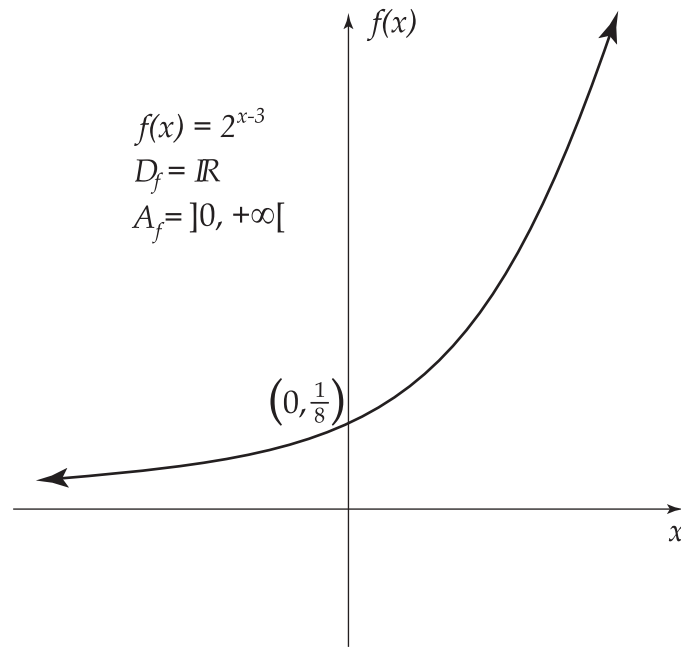
- XXI. 1) f es biyectiva, ya que es tanto inyectiva como sobreyectiva.
 2) $D_f = [-2, \infty[$ y $A_{f^{-1}} = [-2, \infty[$
 3) $f^{-1}(x) = \frac{-(1+2x)}{x-1}$
- XXII. 1) (a) $D_f =]-9, 2[\cup]2, 9]$
 (b) $A_f = [-15, -1[\cup \{2\}$
 (c) $C_f = \mathbb{R}$
- 2) No es biyectiva, ya que no es ni inyectiva (porque hay valores del codominio que tienen más de una preimagen) ni sobreyectiva (porque $C_f \neq A_f$).

12.8 Ecuaciones y Funciones Exponenciales y Logarítmicas

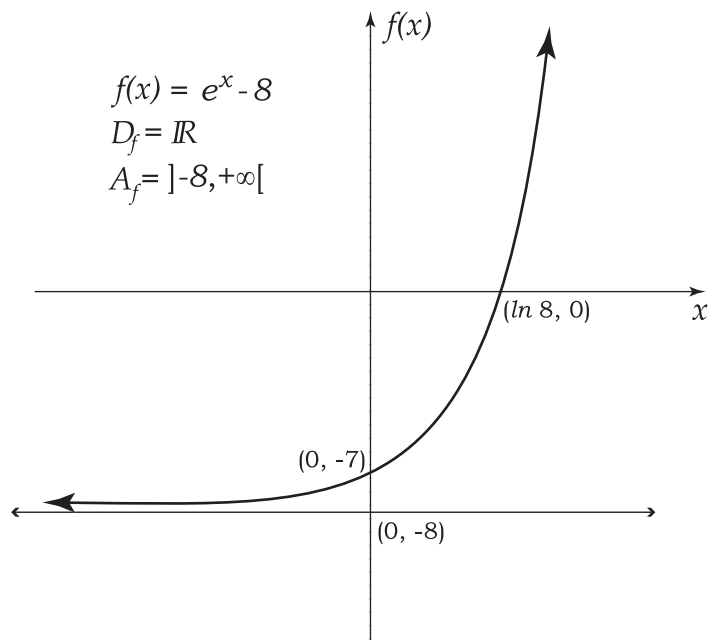
- I. 1) $] -4, 4[$
 2) $[1, +\infty[$
 3) $\left] \frac{-2}{3}, 5 \right[$

- 4) $\left[\frac{-1}{2}, +\infty \right[$
 5) $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$
 6) $\left] -\infty, \frac{-1}{2} \right[$

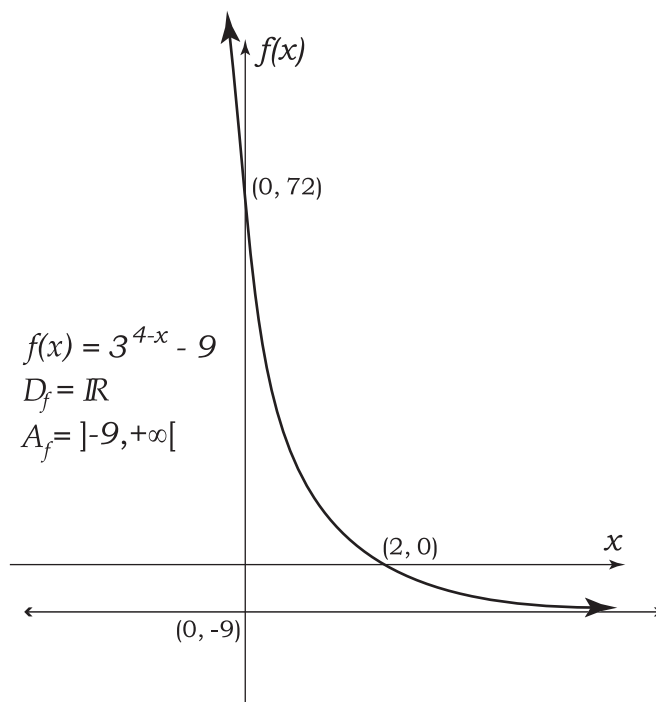
II. 1)



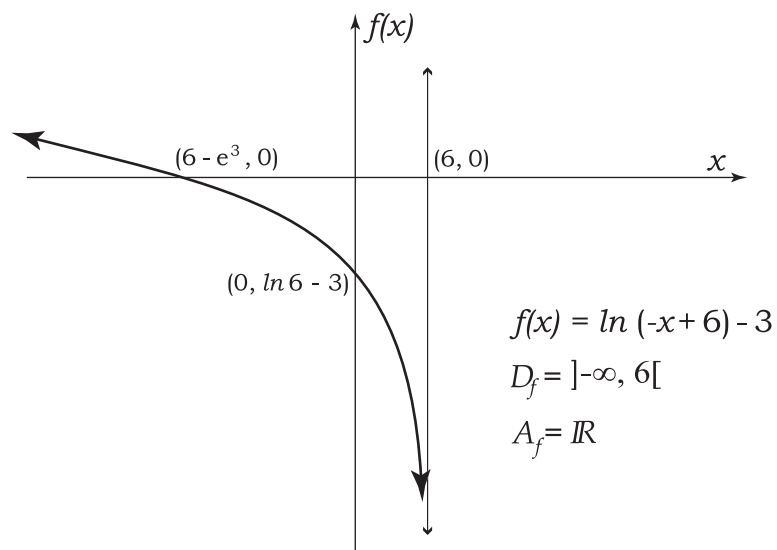
2)



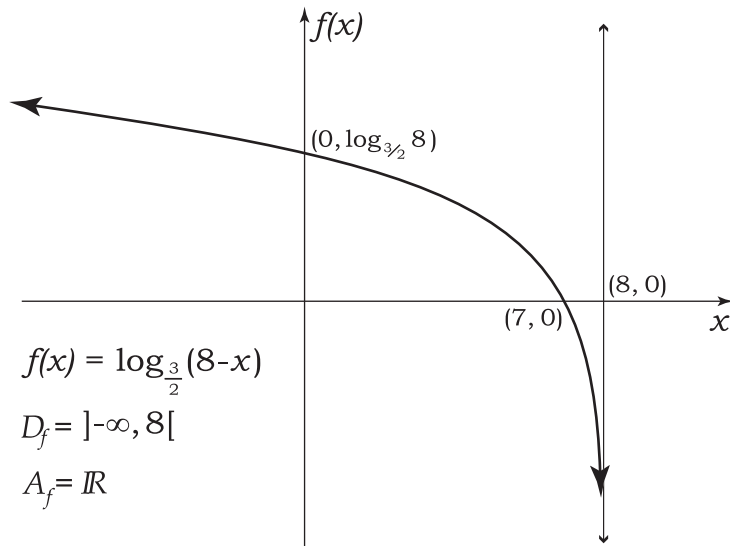
3)



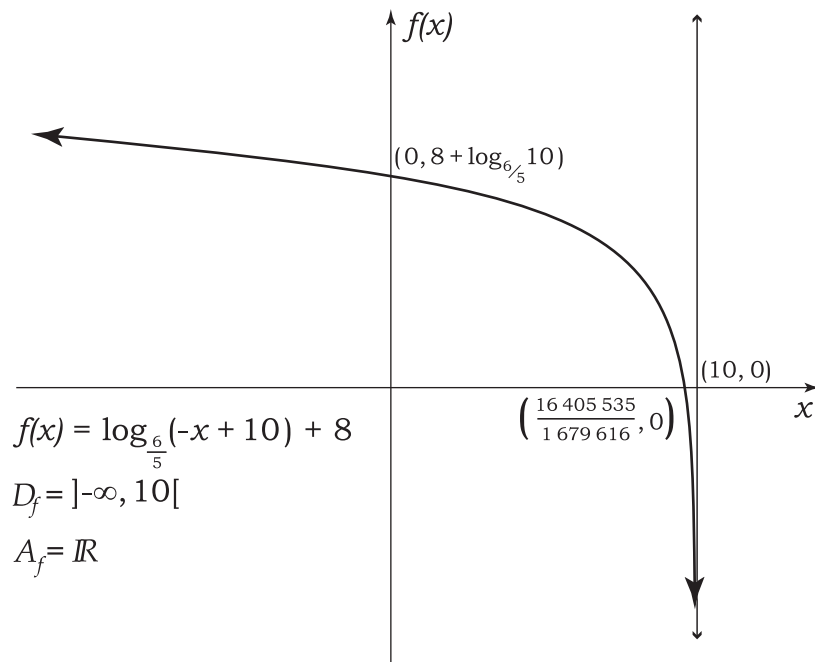
4)



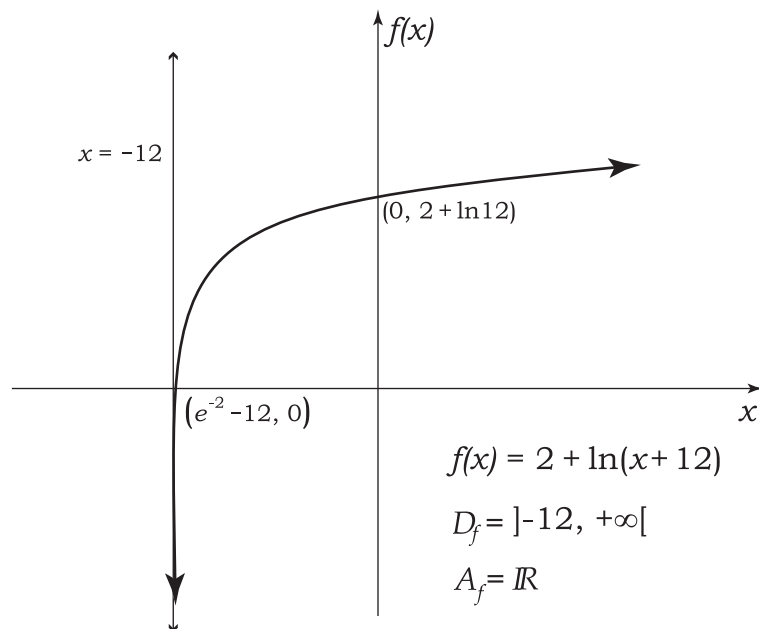
5)



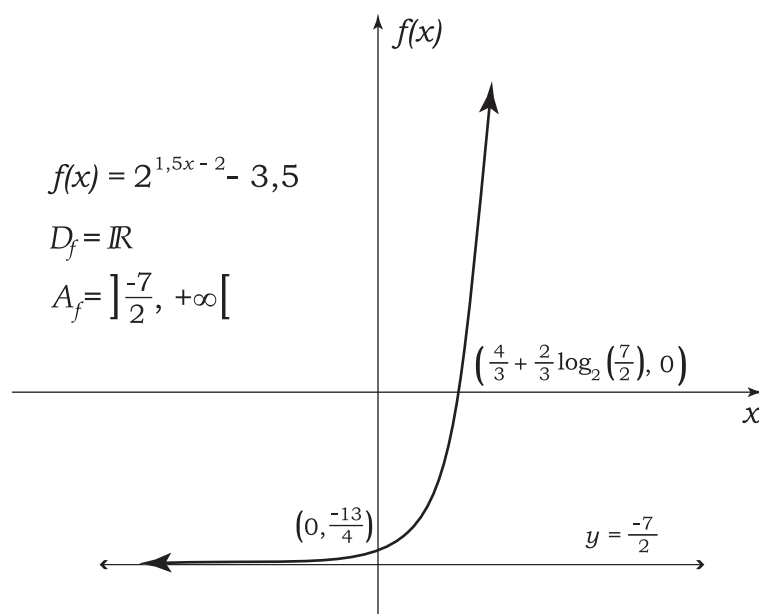
6)



7)



8)



III. 1) $\log_3 \left(\frac{1}{729} \right) = -6$

2) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{16} \right) = 4$

3) $\log 0,01 = -2$

4) $\log_3 81 = 4$

5) $\log_{\sqrt{2}} (2\sqrt{2}) = 3$

6) $\ln 20,0855 \approx 3$

7) $\log_{\pi} 0,1013 \approx -2$

$$8) \log_3 \sqrt[7]{3} = \frac{1}{7}$$

$$9) \log_5 \left(\frac{c+d}{d} \right) = 2k$$

$$10) \log_7 \left(\frac{105q}{2r} \right) = w$$

$$11) \log_{0,2} (3 - 4r) = t$$

$$12) \log_r (t - w) = s$$

$$\text{IV. } 1) \left(\frac{3}{4} \right)^{-2} = \frac{16}{9}$$

$$2) 3^{\frac{-3t}{x+y}} = 2x - y$$

$$3) 10^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{100}$$

$$4) e^{-0,5978} \approx 0,55$$

$$5) 10^2 = 100$$

$$6) 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$7) 3^{2x+5} = \frac{m}{3}$$

$$8) 7^{21x-2} = m$$

$$9) 10^{w-5} = \sqrt{\frac{2x+1}{w}}$$

$$10) e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$11) e^{\frac{2-x}{3-y}} = w$$

$$12) e^{3,8} = 3 - t$$

$$\text{V. } 1) t = -100 \ln (10 - \sqrt{L})$$

$$2) t = -5 \ln \left(\frac{3}{5h} - \frac{1}{200} \right)$$

$$3) t = \frac{1}{C} \log_w \left(\frac{A-D}{B} \right)$$

$$4) t = -5RC \ln \left(1 - \frac{2E}{U^2C} \right)$$

$$5) t = 41,8410041 \cdot \ln \left(\frac{A_0}{A} \right)$$

$$6) t = \frac{1}{2} \log_z \left(\frac{B-v}{5} \right)$$

$$7) t = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{ba}{a-L} \right)$$

$$8) t = 5 \log_2 \left(\frac{k}{Q-3} \right)$$

$$9) t = N \log_r \left(\frac{P+W}{M} \right)$$

$$\text{VI. } 1) x = 0$$

$$2) N = 27$$

$$3) x = -e$$

$$4) x = -3$$

$$5) x = \frac{9}{16}$$

$$6) y = \frac{1}{9}$$

$$7) z = 2$$

$$8) x = e^5$$

$$9) w = 2$$

$$10) y = 4$$

$$11) x = \log \left(\frac{\sqrt[5]{48}}{2} \right)$$

$$12) z = -2$$

$$\text{VIII. } 1) S = \{\pm 1\}$$

$$2) S = \left\{ \log_2 \sqrt[3]{3} \right\}$$

$$3) S = \{1, 4\}$$

$$4) S = \{\}$$

$$5) S = \{1, 2\}$$

$$6) S = \left\{ \frac{e^5}{2} \right\}$$

$$7) S = \left\{ \frac{-5 + \sqrt{25 + 20e^2}}{10} \right\}$$

- | | |
|--|---|
| 8) $S = \{1\}$ | 20) $S = \{2\}$ |
| 9) $S = \{-10\}$ | 21) $S = \left\{-1, \frac{-3}{2}\right\}$ |
| 10) $S = \left\{\log_{8000} \left(\frac{78125}{32768}\right)\right\}$ | 22) $S = \{4\}$ |
| 11) $S = \{\log_5 2\}$ | 23) $S = \left\{2, \log_3 \left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ |
| 12) $S = \{1\}$ | 24) $S = \left\{2, \log_3 \left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ |
| 13) $S = \left\{\ln \sqrt[5]{30 e^2}\right\}$ | 25) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ |
| 14) $S = \left\{\ln \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right\}$ | 26) $S = \{-2\}$ |
| 15) $S = \left\{\log_2 \left(\frac{64 \pm 8\sqrt{29}}{5}\right)\right\}$ | 27) $S = \left\{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right\}$ |
| 16) $S = \left\{\sqrt[4]{\frac{e}{3}}\right\}$ | 28) $S = \{1, 100\}$ |
| 17) $S = \{\ln 2\}$ | 29) $S = \{10^4\}$ |
| 18) $S = \left\{-2, \ln \left(\frac{2}{e^3}\right)\right\}$ | 30) $S = \{10^{100}\}$ |
| 19) $S = \left\{\frac{19}{3}\right\}$ | 31) $S = \{10^4, 1\}$ |

- IX.
- 1) $f^{-1} :]3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f^{-1}(x) = \log_2(x - 3)$
 - 2) $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, tal que $f^{-1}(x) = 2^{x-5}$
 - 3) $f^{-1} :]2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f^{-1}(x) = \log_4(x - 2) + 3$
 - 4) $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 2[$, tal que $f^{-1}(x) = 2 - 10^{4-x}$
 - 5) $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, tal que $f^{-1}(x) = 2^{\frac{x-3}{5}}$
 - 6) $f^{-1} :]-2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f^{-1}(x) = \log_2(x + 2) + 3$
 - 7) $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 2[$, tal que $f^{-1}(x) = 2 - 2^{4-x}$
 - 8) $f^{-1} :]-8, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f^{-1}(x) = \ln(x + 8)$
 - 9) $f^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f^{-1}(x) = 4 - \log_3 x$
 - 10) $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 3[$, tal que $f^{-1}(x) = 3 - 3^x$
 - 11) $f^{-1} :]-3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f^{-1}(x) = \log_4(x + 3)$

$$12) \quad f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\infty, \frac{3}{2} \right[, \text{ tal que } f^{-1}(x) = \frac{3 - e^{2-x}}{2}$$

$$13) \quad f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]-5, +\infty[, \text{ tal que } f^{-1}(x) = 3^{\frac{x+20}{2}} - 5$$

$$14) \quad f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\infty, \frac{2}{3} \right[, \text{ tal que } f^{-1}(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2^{\frac{-x}{4}}$$

X. 1) (a) $A = 183\,791$ bacterias.

(b) La colonia inicial era de 4944 bacterias.

$$2) \quad t = \ln 75 - \ln T = \ln \left(\frac{75}{T} \right).$$

3) La semivida de la sustancia radioactiva es 110 días.

4) La población inicial se duplicará en el año 2013.

5) (a) Después de 72 horas habrá 19 estudiantes afectados.

(b) Deben pasar 7 días para que el número de afectados sea 662.

6) La colonia tarda, aproximadamente, 3 horas y 25 minutos para cuduplicar su tamaño inicial.

7) La corriente llega a 1,45 A a los 1,53 segundos, aproximadamente.

8) (a) Habrá solo 50% de la población original de peces después de 15,9 años, aproximadamente.

(b) Después de 11,7 años, aproximadamente, la población inicial de peces se reducirá en 40%.

(c) Durante los primeros 3 años y 9 meses se morirá 15,12% de los peces, aproximadamente.

$$9) \quad (a) \quad n = e^{7,7-0,9R}$$

(b) El número promedio de temblores anuales con magnitudes entre 4,5 grados y 5,5 grados, en la escala de Richter, es de 38 sismos, aproximadamente; y el número promedio para los que están entre 7 grados y 8 grados es de 4, aproximadamente.

$$10) \quad (a) \quad E = 10^{11,4+1,5R}$$

(b) La energía liberada durante el temblor de Alaska de 1964 fue de 1×10^{24} ergs.

$$11) \quad N(t) = 1\,000 \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{t}{3}}$$

$$12) \quad t = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{ba}{a-L} \right)$$

$$13) \quad B(t) = 2\,000 \left(\frac{8}{5} \right)^{\frac{t}{5}}$$

12.9 Ecuaciones y Funciones Trigonométricas

I. 1) 210°

2) 165°

3) 26°

4) $\left(\frac{504}{\pi}\right)^\circ \approx 160^\circ 25'$

5) $\left(\frac{2}{\pi}\right)^\circ \approx 0^\circ 38'$

6) -120°

7) $-2\,700^\circ$

8) $7\,560^\circ$

9) $\left(\frac{-4\,500}{\pi}\right)^\circ \approx -1\,432^\circ 23'$

II. 1) $\frac{5\pi}{4}$

2) $\frac{-14\pi}{3}$

3) $\frac{\pi}{12}$

4) $\frac{\pi}{25}$

5) $\frac{-5\pi}{72}$

6) $\frac{13\pi}{180}$

III. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\frac{-5}{2}$

3) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

4) 0

5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{-4}$

7) $\frac{3}{2}$

8) $\frac{7 - 4\sqrt{3}}{4}$

9) $\frac{3\pi}{4}$

10) $\frac{-\pi}{3}$

IV. 1) $\tan(\alpha) = \frac{-5}{3}$

2) $\cos(\alpha) = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

3) $\sin(\beta) - \cos(\beta) = \frac{-\sqrt{13}}{13}$

4) $\cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$

5) $\cos(2\theta) = 1 - 2x^2$

6) $\tan(\alpha + \beta) = -\sqrt{3}$

V. $\frac{-65}{288}$

VI. $\frac{-(3 + \sqrt{21})}{8}$

VII. $-\sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{3}} - 4$

VIII. 2

IX. $\frac{\sqrt{15}}{5} - \frac{3}{20}$

X. $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}; \quad \alpha = \pi - \arcsen\left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right)$

XI. Son verificaciones de identidades trigonométricas

XII. $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \pi + \tan^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) \approx 2,554; 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) \approx 5,695 \right\}$

XIII. 1) $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{-\pi}{6} + \pi k; \frac{-\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$

3) $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

4) $S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

5) $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{5\pi}{12} + \pi k; \pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

6) $S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

7) $S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

8) $S = \left\{ \tan^{-1}(5) + \pi k \approx 1,373 + \pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

9) $S = \left\{ \frac{3\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

10) $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

11) $S = \left\{ \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k; -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

12) $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; 0,376; 2,470; 4,565; 1,718; 3,813; 5,907 \right\}$

13) $S = \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

14) $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

15) $S = \left\{ 0,4271 + 2\pi k; 2,7145 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

16) $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

17) $S = \left\{ 0,4205 + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$18) \quad S = \left\{ \right\}$$

$$19) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0,6435 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$20) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$21) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{-\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$22) \quad S = \left\{ 2,8570 + 2\pi k; 0,2846 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$23) \quad S = \left\{ 0,7297 + 2\pi k; 2\pi k; 2,4119 + 2\pi k; \pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$24) \quad S = \left\{ 0,5236 + 2\pi k; \frac{-\pi}{2} + 2\pi k; 2,6180 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$25) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{-\pi}{2} + 2\pi k; \frac{-2\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$26) \quad S = \left\{ 0,4068 + 2\pi k; 2,7348 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$27) \quad S = \left\{ 0,6243 + \pi k; 1,9937 + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$28) \quad S = \left\{ 0,6435 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$29) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$30) \quad S = \left\{ -0,2086 + 2\pi k; 3,3502 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$31) \quad S = \left\{ 1,8442 + 2\pi k; -1,8442 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$32) \quad S = \left\{ -1,0949 + 2\pi k; 4,2365 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$33) \quad S = \left\{ \pi + 2\pi k; 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$34) \quad S = \left\{ 0,9046 + 2\pi k; -0,9046 + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{-\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$35) \quad S = \left\{ 0,8959 + 2\pi k; 2,2457 + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$36) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0,5236 + 2\pi k; 2,6180 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$37) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{-\pi}{2} + 2\pi k; \frac{-\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$38) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$39) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k; \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k; \frac{-\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k; \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$40) \quad S = \{\pi k; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$41) \quad S = \left\{ \frac{-\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$42) \quad S = \{0,1895 + \pi k; 1,3813 + \pi k; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$43) \quad S = \{0,5236 + 2\pi k; 2,6180 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$44) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; -0,2618 + \pi k; 1,8360 + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$45) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k; -0,5236 + 2\pi k; 3,6652 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$46) \quad S = \left\{ 3\pi k; \frac{3\pi}{2} + 3\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$47) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{5\pi}{12} + \pi k; \frac{-\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$48) \quad S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; 1,2490 + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$49) \quad S = \left\{ \frac{-\pi}{12} + \pi k; \frac{7\pi}{12} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- XIV. 1) $\sin(\delta) \approx 0,6775$; $\cos(\delta) \approx 0,7355$; $\tan(\delta) \approx 0,9211$;
 $\sec(\delta) \approx 1,3595$; $\csc(\delta) \approx 1,4761$; $\cot(\delta) \approx 1,0857$.
- 2) $m\angle A \approx 71^\circ 39'$; el lado opuesto al vértice A mide, aproximadamente, $207,86 \text{ m}$ y el otro cateto mide, aproximadamente $68,95 \text{ m}$.
- 3) La distancia de la roca a la boya es de, aproximadamente, $98,63 \text{ m}$.
- 4) El área del triángulo es, aproximadamente, $5\,658,82 \text{ cm}^2$.
- 5) La torre mide, aproximadamente, $155,86 \text{ m}$.
- 6) Las dos torres observadas están separadas una distancia aproximada de $1\,577,84 \text{ m}$.
- 7) El observador con su teodolito debe colocarse a una distancia aproximada de $29,55 \text{ m}$ del edificio.
- 8) El edificio mide, aproximadamente, $6,98 \text{ m}$.
- 9) El río tiene una anchura aproximada de $84,4 \text{ m}$.
- 10) El túnel tendrá una longitud de $330,94 \text{ m}$, aproximadamente.
- 11) La altura del árbol es, aproximadamente, $10,39 \text{ m}$.
- 12) La distancia del barco al puerto de partida es, aproximadamente, $11,85$ millas.
- 13) La altura del edificio observado por la persona es, aproximadamente, $36,06 \text{ m}$.
- 14) La diagonal mayor del paralelogramo mide, aproximadamente, $5\,040,85 \text{ cm}$.
- 15) El barco está, aproximadamente, a $20,86$ millas del punto de partida y en dirección $N\,70^\circ 19' O$.

- 16) La altura del edificio es, aproximadamente, $103,13\text{ m}$ y la distancia del edificio al segundo lugar de observación es, aproximadamente, $384,9\text{ m}$.
- 17) El aro se encuentra a $3,26\text{ m}$ de altura sobre el suelo.
- 18) El primer barco ha viajado $18,97\text{ km}$.
- 19) La altura de la cúpula del edificio es $46,67\text{ m}$ y la distancia desde el segundo lugar de observación a la base del edificio es $64,71\text{ m}$.
- 20) La persona dispone de 1 hora, 7 minutos y 30 segundos para tratar su negocio en el puesto C .
- 21) El crucero estará, aproximadamente, a $74,92$ millas del puerto de destino.
- 22) El avión vuela a una altura aproximada de $5,88\text{ m}$.
- 23) La distancia entre la cima de la pared del cañón y la otra cima es de $130,57$ pies, aproximadamente.
- 24) La altura aproximada del edificio es $29,84$ metros.
- 25) La longitud aproximada del lado mayor del corral es $6,42\text{ m}$.
- 26) La distancia aproximada de Ana al globo es $849,70\text{ m}$.
- 27) $A \approx 81,46^\circ$.
- 28) La torre B es la que se encuentra más cerca; está, aproximadamente, $48,62\text{ km}$ más cerca.
- 29) La altura aproximada del edificio es $99,7$ pies.
- 30) El naufrago se encuentra, aproximadamente, a $120,81$ millas de la isla.
- 31) La longitud de cada uno de los ángulos congruentes del triángulo es 75° y la longitud del tercer ángulo es 30° .

XV. La longitud que debe tener la escalera es 9 metros.

XVI. $\overline{AB} \approx 204,07\text{ m}$.

XVII. $\overline{C} \approx 9,19\text{ m}$ y $m\angle B \approx 82^\circ 81'$.

XVIII. $y \approx 9,64$ unidades lineales.

XIX. Las dimensiones del triángulo ABC son las siguientes: $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\overline{AC} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.
El área del cuadrado es $16 - 8\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

XX. Las dimensiones del rectángulo son 3 cm de ancho por $3\sqrt{3}\text{ cm}$ de largo. Las dimensiones del triángulo FBC son $\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$ cada uno de los lados congruentes y $\frac{9}{2}\text{ cm}$ el tercer lado.