INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

5 de mayo de 2008
Total: 33 puntos
Tiempo: 2 h.

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

1. Para $A = \{1, 4, 7\}$, sea $\mathcal{R}$ una relación sobre A, definida por

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow ab < 16$$

y sea $\mathcal{S}$ otra relación sobre A, cuya matriz es $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Determine el gráfico de $\mathcal{R}$. **(1 punto)**

   (b) Determine la matriz asociada a $\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}$ **(2 puntos)**

   (c) Determine el gráfico asociado a $(\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}) - \overline{\mathcal{R}}$ **(2 puntos)**

2. Sobre $\mathbb{N}$ se define la relación $\mathcal{R}$, por:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = b + 4k)$$

   (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. **(4 puntos)**

   (b) Determine la clase de equivalencia de 2. **(1 punto)**

   (c) Calcule el conjunto cociente $\mathbb{N}/\mathcal{R}$. **(1 punto)**

3. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ relaciones definidas sobre el conjunto A, con A no vacío. Demuestre que si $\mathcal{R}$ es antisimétrica, entonces $\mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S}$ es antisimétrica.

(4 puntos)

4. Considere las funciones G y H, definidas sobre sus respectivos dominios reales, con criterios $G(x) = \dfrac{x}{x+4}$, $H(x) = 3x - 4$. Calcule $(H^{-1} \circ G \circ H)(x)$.

(3 puntos)

5. Considere la función $f\colon [1,+\infty[\longrightarrow]1,3]$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2}$$

   (a) Pruebe que f es una función biyectiva. **(5 puntos)**

   (b) Determine $f^{-1}(x)$. **(1 punto)**

6. Sea $A = \{3,4,5,6\}$ y $B = \{1,2,3\}$ considere la función

$$f\colon A \times B \to [1,6]$$

   definida por $f((a,b)) = \dfrac{a}{b}$

   (a) Determine si f es inyectiva. (Justifique)

   (b) Determine la cardinalidad del ámbito de f.

   (c) Determine si f es sobreyectiva. (Justifique)

   (d) Calcule $f(C)$, donde $C = \{(a,b) \in A \times B \ \text{ tal que } \ a+b = 6\}$

   (e) Calcule $f^{-1}(\{2,3\})$

(5 puntos)

7. Sean A, B y C conjuntos no vacíos, suponga que f es una función de A en B y g una función de B en C.
   Demuestre que si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.

(4 puntos)