INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
Álgebra Lineal para Computación (MA-2405)

Tiempo: 2 h. 20 m.
Total: 40 puntos
Fecha: 9 de enero de 2013

Segundo Examen Parcial (Verano 2012-2013)

1. En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación $\otimes$ como:
$$(a,b) \otimes (c,d) = (a+c-5, 2bd)$$
Si se sabe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ es grupo abeliano y $H = \left\{(5,t) \;/\; t \in \mathbb{R}^*\right\}$, pruebe que $H < \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ **(4 puntos)**

2. En el grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5^*, \odot)$ donde $(a,b) \odot (c,d) = (a+c, bd)$.
   (a) Calcule los ocho elementos del grupo. **(1 punto)**
   (b) Determine el elemento neutro y el inverso de cada elemento. **(2 puntos)**
   (c) Calcule un subgrupo de orden 4 de este grupo. **(2 puntos)**

3. En el espacio vectorial P_2 se definen $H_1 = \{ax^2 + bx + c \in P_2 \;/\; a + 2b + 3c = 0\}$ y $H_2 = \{ax^2 + bx + c \in P_2 \;/\; 2a + 3b + 5c = 0\}$.
   (a) Demuestre que H_1 es un subespacio de P_2. **(3 puntos)**
   (b) Determine una base para el subespacio vectorial H_2. **(3 puntos)**
   (c) Calcule $H_1 \cap H_2$. **(3 puntos)**

4. Si se sabe que $\{u, v, w\}$ es un conjunto linealmente independiente en el espacio vectorial V. Determine si el conjunto $\{u + v + 2w, v - u, 3u + 2v - w\}$ es linealmente independiente en V. **(4 puntos)**

5. Determine si el conjunto $\{(3,2,-1),(2,1,-1),(1,1,0),(1,2,1)\}$ genera o no al espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. **(4 puntos)**

6. En cada caso, determine si H es subespacio vectorial del espacio vectorial V indicado
   (a) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 2x + 4y + 6z - 2 = 0\}$ donde $V = \mathbb{R}^3$. **(2 puntos)**
   (b) $H = \left\{f \in V \;/\; \int_a^b f(x)\,dx = 1\right\}$ donde V es el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de todas las funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$. **(2 puntos)**
   (c) $H = \{A \in M_2 \;/\; \det(A) \neq 0\}$ donde $V = M_2$. **(2 puntos)**

7. Considere el subespacio de P_4 dado por $H = \{p \in P_4 \;/\; p'(1) = 0 \wedge p(1) = 0\}$. Determine una base de H y calcule su dimensión. **(5 puntos)**

8. Sean V algún espacio vectorial y $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un subconjunto de V, tal que S es linealmente independiente. Si $x \in V$, tal que $x \notin Gen(S)$, demuestre que el conjunto $H = \{x, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es, también, linealmente independiente. **(4 puntos)**