$\mathcal{I}$nstituto $\mathcal{T}$ecnológico de $\mathcal{C}$osta $\mathcal{R}$ica
$\mathcal{E}$scuela de $\mathcal{M}$atemática
$\acute{\mathcal{A}}$lgebra $\mathcal{L}$ineal para $\mathcal{C}$omputación

$\mathcal{T}$iempo: 3 horas, 20 minutos
$\mathcal{P}$untaje $\mathcal{T}$otal: 61 puntos
$\mathcal{V}$erano 2 009 − 2 010

$\mathcal{I}$ $\mathcal{E}$xamen $\mathcal{P}$arcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo; por lo tanto, debe presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni de teléfono celular.

1. Utilizando el método de Gauss–Jordan, determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales siguiente: $\begin{cases} a-2b+c-d+2e=10 \\ -4a+8b+c-11d-2e=-10 \\ 2a-4b+4d+2e=8 \end{cases}$ (5 pts)

2. Sea A alguna matriz de orden n. Se dice que A es involutiva si $A^2=\mathcal{I}_n$, y se dice que A es idempotente si $A^2=A$.

   (a) Determine si la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ es involutiva, idempotente o si no es de alguno de los tipos mencionados. (3 pts)

   (b) Demuestre que si B es alguna matriz de orden n, tal que B es idempotente, entonces la matriz $C=2B-\mathcal{I}_n$ es involutiva. (4 pts)

3. Si se sabe que $|B|=4$, halle el valor de la expresión $\left|AB^{-1}\right|$ con: (6 pts)

$$A=\begin{pmatrix} -2z_1 & z_1-5y_1 & x_1 \\ -2z_2 & z_2-5y_2 & x_2 \\ -2z_3 & z_3-5y_3 & x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

4. Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2cx+cy=d \\ cx-3y=1 \end{cases}$, donde $c,d\in\mathbb{R}$

   Determine el valor o los valores (en caso de existir) que deben tomar c y d, respectivamente, para que el sistema de ecuaciones anterior: no tenga solución, tenga solución única y posea infinito número de soluciones, respectivamente. (8 pts)

5. Sean A una matriz de orden n y B la matriz que se obtiene de A luego de multiplicar la r-ésima fila de A por un número real δ. Con base en la definición de *determinante*, demuestre que $|B| = \delta \cdot |A|$ (4 pts)

6. Sean $A \in \mathcal{M}_{z\times w}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{w\times r}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que, entrada por entrada, se cumple la igualdad siguiente: $A(\lambda B) = \lambda(AB)$. (5 pts)

7. Demuestre que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y A es no singular, entonces $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$ (4 pts)

8. Sea $\mathcal{E} = \left\{3, 2, 1, 0\right\}$. Sobre $\mathcal{E}$ se define una ley de composición interna $\otimes$, tal que $\forall x, y \in \mathcal{E}$, $x \otimes y = \mathcal{R}$, donde $\mathcal{R}$ es el residuo que se obtiene luego de dividir xy por 4.
   (a) Determine la tabla de operación binaria para $\mathcal{E}$ y $\otimes$. (2 pts)
   (b) Considere la estructura algebraica $\left(\mathcal{E}, \otimes\right)$ y determine su elemento neutro. (1 pto)
   (c) ¿Cuáles elementos de $\mathcal{E}$ poseen elemento simétrico y cuáles no bajo la aplicación $\otimes$? Justifique. (2 pts)

9. Sea $(\mathcal{G}, *)$ algún grupo con elemento neutro e. Demuestre que $\forall x \in \mathcal{G}, (x')' = x$. (3 pts)

10. Sea $(\mathcal{G}, *)$ algún grupo con elemento neutro e. Usando inducción matemática, demuestre que $\forall x \in \mathcal{G}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que: (4 pts)

$$(x^n)' = (x')^n$$

11. En $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se define la operación $\otimes$ de la manera siguiente: $\forall\,(a,b)\,,(c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,

$$(a,b) \otimes (c,d) = (ac, ad + b)$$

Si se define $\mathcal{H} = \left\{ (x,0) \Big/ x \in \mathbb{R}^* \right\}$ y se sabe que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes)$ es grupo con elemento neutro $e = (1,0)$, demuestre que $(\mathcal{H}, \otimes) \leq (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes)$. (4 pts)

12. Sea $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Si $+$ y $\cdot$ representan la adición y multiplicación usuales de matrices, conteste lo que se pide.
   (a) Demuestre que $(\mathcal{D}, +, \cdot)$ es anillo conmutativo. (3 pts)
   (b) ¿Cuál es el elemento unidad de $(\mathcal{D}, +, \cdot)$? (1 pts)
   (c) ¿Es $(\mathcal{D}, +, \cdot)$ un dominio de integridad? Justifique. (2 pts)