Ejercicios Resueltos de Álgebra Lineal para Computación

Kendall Rodríguez Bustos

I Semestre 2013

Este material[1] es una recopilación de ejercicios tomados de exámenes de semestres y veranos anteriores, y también de algunos libros del tópico de Álgebra Lineal y Álgebra Abstracta.
Además este material está dirigida principalmente a estudiantes de Ingeniería en Computación y Administración en Tecnologías de la Información.

Agradezco al profesor Cristhian Páez Páez por sus correciones y sugerencias a este material.

[1]Primera parte del material

MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Para las matrices $C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ dadas, calcule el resultado de $I_3 - C^{-1} + 3B^tB$.

Solución:

Primero se calcula C^{-1}.

$$(C|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3F_1+F_3]{2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-F_2+F_3]{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-4F_3+F_2]{6F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\textit{Entonces, } C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

- $I_3 - C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{11}{3} & -\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{14}{3} & \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$

- $3B^tB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+12 & 6-6 & 12-12 \\ 6-6 & 12+3 & 24+6 \\ 12-12 & 24+6 & 48+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 30 \\ 0 & 30 & 60 \end{pmatrix}$

Así,

$$I_3 - C^{-1} + 3B^tB = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{14}{3} & \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 30 \\ 0 & 30 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 & -2 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{59}{3} & \dfrac{94}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{91}{3} & \dfrac{182}{3} \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

2. Sean H y G matrices de $n \times n$ tal que H es invertible y se cumple que $HG = O_n$. Pruebe entonces que $G = O_n$.

Solución:

$$\begin{aligned}
HG = O_n \quad &\Rightarrow \quad H^{-1} \cdot (HG) = H^{-1} \cdot O_n, \quad (H \;\; \textit{es invertible}) \\
&\Rightarrow \quad \left(H^{-1}H\right) G = O_n \\
&\Rightarrow \quad I_n G = O_n \\
&\Rightarrow \quad G = O_n
\end{aligned}$$

Por lo tanto si H y G son matrices de $n \times n$ tal que H es invertible y se cumple que $HG = O_n$, entonces $G = O_n$. ■

3. Considere las matrices $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule $B^t \cdot (C + 2I_3)^{-1}$.

Solución:

Primero se calcula $C + 2I_3$.

$$\begin{aligned}
C + 2I_3 \quad &= \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces

$$(C+2I_3|I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2F_3+F_2]{-4F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\textit{Es decir, } (C+2I_3)^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$\begin{aligned} B^t\cdot(C+2I_3)^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6-1+2 & 4-1+0 & -8+2-2 \\ -9+0-1 & -6+0+0 & 12+0+1 \\ 0+1-2 & 0+1+0 & 0-2+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ -10 & -6 & 13 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

4. Determine el conjunto de solución del sistema:

$$\begin{cases} x+3y-2z &= -3 \\ 3x+5y-2z-w &= -2 \\ x-y+2z-w &= 4 \end{cases}$$

Solución:

Una representación matricial está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-3F_1+F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{-7}{4} \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[4F_2+F_3]{-3F_2+F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{-7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así:

$$x+z-\frac{3}{4}w = \frac{9}{4} \Rightarrow \boxed{x = -z+\frac{3}{4}w+\frac{9}{4}}$$

$$y-z+\frac{1}{4}w = -\frac{7}{4} \Rightarrow \boxed{y = z-\frac{1}{4}w-\frac{7}{4}}$$

Por lo tanto $S = \left\{ \left(-z+\frac{3}{4}w+\frac{9}{4},\ z-\frac{1}{4}w-\frac{7}{4}, z, w \right) \Big/ z, w \in \mathbb{R} \right\}$. ■

5. Se dice que una matriz de $n \times n$ es ortogonal si cumple que $A^{-1} = A^t$.

(a) Pruebe que si B y C son ortogonales, entonces BC es ortogonal.

Solución:

Hipótesis:

1. *B es ortogonal* ($B^{-1} = B^t$).

2. *C es ortogonal* ($C^{-1} = C^t$).

HQM: *BC es ortogonal, es decir,* $(BC)^{-1} = (BC)^t$.

$$\begin{aligned} & (BC)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \\ \Rightarrow \quad & (BC)^{-1} = C^t \cdot B^t \quad \textit{(Hipótesis 1 y 2)} \\ \Rightarrow \quad & (BC)^{-1} = (BC)^t \end{aligned}$$

Por lo tanto si B y C es ortogonal, entonces BC es ortogonal.

(b) Pruebe que si B es ortogonal, entonces $\det(B) = -1$ o $\det(B) = 1$.

Solución:

Hipótesis: *B es ortogonal* ($B^{-1} = B^t$).

HQM: $|B| = -1$ o $|B| = 1$.

$$B^{-1} = B^t \quad \Rightarrow \quad |B^{-1}| = |B^t|$$

$$\Rightarrow \quad |B^{-1}| = |B|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|B|} = |B|$$

$$\Rightarrow \quad |B|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad |B|^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (|B| + 1)(|B| - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad |B| + 1 = 0 \ \ \vee \ \ |B| - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad |B| = -1 \ \ \vee \ \ |B| = 1$$

Por lo tanto si B es ortogonal, entonces $|B| = -1$ o $|B| = 1$. ∎

6. Demuestre la igualdad $\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = b^2(3a+b).$

Solución:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} &= (a+b) \cdot \begin{vmatrix} a+b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ a & a+b \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} a & a+b \\ a & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b)\left(a^2 + 2ab + b^2 - a^2\right) - a\left(a^2 + ab - a^2\right) + a\left(a^2 - a^2 - ab\right) \\
&= (a+b)\left(2ab + b^2\right) - a \cdot ab + a \cdot -ab \\
&= 2a^2b + ab^2 + 2ab^2 + b^3 - a^2b - a^2b \\
&= ab^2 + 2ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

$$= \quad b^2\,(3a+b)$$

■

7. Utilizando el método de Gauss-Jordan, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcr} -8a+3b+c & = & -25 \\ 5a-2b & = & 16 \\ a-c & = & 1 \\ -5a+2b+c & = & -16 \end{array}\right.$$

Solución:

Una representación matricial está dada por:

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 16 \\ 1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -8 & 3 & 1 & -25 \\ 5 & -2 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & 1 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 16 \\ -8 & 3 & 1 & -25 \\ -5 & 2 & 1 & -16 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[5F_1+F4]{\substack{-5F_1+F_2 \\ 8F_1+F_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 11 \\ 0 & 3 & -7 & -17 \\ 0 & 2 & -4 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & -7 & -17 \\ 0 & 2 & -4 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-2F_2+F4]{-3F_2+F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Así, el sistema equivalente es igual a:

$$\begin{cases} a &= c+1 \\ b &= 2c-6 \\ c &= -1 \\ 0 &= 1 \end{cases}$$

Es claro que el sistema de ecuaciones no tiene solución, pues $0=1$ *es falso.*

Por lo tanto el conjunto solución del sistema de ecuaciones es vacío, es decir, $S=\emptyset$. ■

8. Sean A una matriz de tamaño $r \times p$, B matriz de $q \times r$, C matriz de $r \times q$. Pruebe, entrada por entrada, que $(2B^t - C)^t A = 2BA - C^t A$.

Solución:

Note que las matrices de cada miembro de la igualdad son de tamaño de $q \times p$.

HQM: $\left\langle (2B^t - C)^t A \right\rangle_{ij} = \langle 2BA - C^t A \rangle_{ij} \quad \forall i = 1,2,...,q,\ \forall j = 1,2,...,p.$

Veamos, $\forall i = 1,2,...q,\ \forall j = 1,2,...p$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(2B^t - C\right)^t A \right\rangle_{ij} &= \sum_{k=1}^{r} \left\langle \left(2B^t - C\right)^t \right\rangle_{ik} \langle A \rangle_{kj} \quad (\textit{Multiplic. de matrices}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \langle 2B^t - C \rangle_{ki} \langle A \rangle_{kj} \quad (\textit{Matriz transpuesta de una matriz}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \Big(\langle 2B^t \rangle_{ki} - \langle C \rangle_{ki} \Big) \langle A \rangle_{kj} \quad (\textit{Sustracción de matrices}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \langle 2B^t \rangle_{ki} \langle A \rangle_{kj} - \langle C \rangle_{ki} \langle A \rangle_{kj} \quad (\textit{Distrib. por la derecha en matrices}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \langle 2B^t \rangle_{ki} \langle A \rangle_{kj} - \sum_{k=1}^{r} \langle C \rangle_{ki} \langle A \rangle_{kj} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ij} - \langle B \rangle_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \langle A \rangle_{ij} - \sum_{k=1}^{n} \langle B \rangle_{ij} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{r} 2 \langle B^t \rangle_{ki} \langle A \rangle_{kj} - \sum_{k=1}^{r} \langle C \rangle_{ki} \langle A \rangle_{kj} \quad (\textit{Multiplic. por un escalar en una matriz})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{r} 2\langle B\rangle_{ik}\langle A\rangle_{kj} - \sum_{k=1}^{r} \langle C^t\rangle_{ik}\langle A\rangle_{kj} \quad \textit{(Matriz transpuesta de una matriz)}\\
&= \sum_{k=1}^{r} \langle 2B\rangle_{ik}\langle A\rangle_{kj} - \sum_{k=1}^{r} \langle C^t\rangle_{ik}\langle A\rangle_{kj} \quad \textit{(Multiplic. por un escalar en una matriz)}\\
&= \langle 2BA\rangle_{ij} - \langle C^tA\rangle_{ij} \quad \textit{(Multiplic. de matrices)}\\
&= \langle 2BA - C^tA\rangle_{ij} \quad \textit{(Sustracción de matrices)}
\end{aligned}$$

Así, $\left\langle \left(2B^t - C\right)^t A\right\rangle_{ij} = \langle 2BA - C^tA\rangle_{ij} \quad \forall i = 1,2,...,q,\ \forall j = 1,2,...p$

Por lo tanto $\left(2B^t - C\right)^t A = 2BA - C^tA.$ ■

9. Si se sabe que (a,b,c,d) es la solución del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x - z &=& 1\\ 3y - 2w &=& 0\\ x - y + w &=& -2\\ 5y + 4z + w &=& 0 \end{array}\right.$$

Utilice la regla de Cramer para encontrar el valor de la constante b.

Solución:

Una representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2\\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Se calcula $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_1+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & \dfrac{1}{2} & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{5}{3}F_2+F_4]{\frac{1}{3}F_2+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 4 & \dfrac{13}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{-8F_3+F_4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{3} = 5 \qquad \textit{(Matriz Triangular Superior)}$$

Ahora se calcula el determinante para la constante ***b*** .

Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}F_1+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \left(2 \cdot -\tfrac{5}{2} \cdot 4 \cdot -2\right) = 40 \qquad \textit{(Matriz Triangular Superior)}$$

Observe que el efecto de los dos intercambios de filas aplicados no afecta en el resultado anterior.

Así, por Regla de Cramer:

$$b = \frac{|B|}{|A|} = \frac{40}{5} = 8$$

■

10. Si A es una matriz de tamanño $n \times n$ y $|A| \neq 0$, entonces:

(a) Demuestre que $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$.

Solución:

Se sabe que:

$$\begin{aligned} A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) \quad &\Leftrightarrow \quad |A^{-1}| = \left| \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) \right| \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{|A|} = \left(\frac{1}{|A|}\right)^n \cdot |Adj(A)| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad |Adj(A)| = \frac{\frac{1}{|A|}}{\left(\frac{1}{|A|}\right)^n} \\
&\Leftrightarrow \quad |Adj(A)| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^{1-n} \\
&\Leftrightarrow \quad |Adj(A)| = \left(|A|^{-1}\right)^{1-n} \\
&\Leftrightarrow \quad |Adj(A)| = |A|^{n-1}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto si A es una matriz de tamaño $n \times n$ y $|A| \neq 0$, entonces $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$.

(b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, demuestre que $|Adj(\lambda A)| = \Big(\lambda^n |A|\Big)^{n-1}$.

Solución:

Se sabe que:

$$
\begin{aligned}
A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) \quad &\Leftrightarrow \quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{|\lambda A|} \cdot Adj(\lambda A) \\
&\Leftrightarrow \quad |(\lambda A)^{-1}| = \left| \frac{1}{\lambda^n |A|} \cdot Adj(\lambda A) \right| \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{|\lambda A|} = \left(\frac{1}{\lambda^n |A|}\right)^n \cdot |Adj(\lambda A)| \\
&\Leftrightarrow \quad |Adj(\lambda A)| = \frac{\frac{1}{\lambda^n |A|}}{\left(\frac{1}{\lambda^n |A|}\right)^n} \\
&\Leftrightarrow \quad |Adj(\lambda A)| = \left(\frac{1}{\lambda^n |A|}\right)^{1-n} \\
&\Leftrightarrow \quad |Adj(\lambda A)| = \left((\lambda^n |A|)^{-1}\right)^{1-n} \\
&\Leftrightarrow \quad |Adj(\lambda A)| = \Big(\lambda^n |A|\Big)^{n-1}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto si A es una matriz de tamaño de $n \times n$ y $|A| \neq 0$, entonces $|Adj(\lambda A)| = \Big(\lambda^n |A|\Big)^{n-1}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. ■

11. Si A y B son matrices de 4×4, tales que $\det(A) = -5$ y $\det(B^{-1}) = \frac{4}{3}$, calcule $\det(2B \cdot Adj(A^t))$.

Solución:

Sabemos que $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} \Rightarrow |B| = \dfrac{1}{|B^{-1}|} \Rightarrow |B| = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

Además $|Adj(A^t)| = \left|(Adj(A))^t\right| = |Adj(A)|$. *Como* $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$ *(Ejercicio* **10.**), *entonces* $|Adj(A^t)| = (-5)^3 = -125$.

Así, $|2B \cdot Adj\,(A^t)\,| = 2^4 \cdot |B| \cdot |Adj\,\left(A^t\right)| = 16 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot -125 = -1500.$ ■

12. Considere el sistema de ecuaciones con variables x, y, donde m, $n \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} mx - 3y & = & 1 \\ 2mx + my & = & n \end{array}\right.$$

Determine los valores de m y n para que el sistema:

(a) Tenga solución única.

(b) No tenga solución.

(c) Tenga infinita cantidad de soluciones.

Solución:

Una representación matricial está dada por:

$$\begin{pmatrix} m & -3 \\ 2m & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}$$

Entonces se calcula $\begin{vmatrix} m & -3 \\ 2m & m \end{vmatrix}$ *que es* $m^2 + 6m$.

- *Si* $m^2 + 6m \neq 0$*, es decir* $m \neq 0$ *y* $m \neq -6$ *entonces el sistema tiene solución única.*

- *Si* $m^2 + 6m = 0$*, es decir si* $m = 0$ o $m = -6$*, el sistema es inconsistente o posee infinita cantidad de soluciones.*

Caso $m = 0$.

Se sustituye $m = 0$ *en el sistema de ecuaciones.*

$$\begin{cases} -3y &= 1 \\ 0 &= n \end{cases}$$

Si $n = 0$ *el sistema posee infinita cantidad de soluciones. Si* $n \neq 0$ *el sistema es inconsistente.*

Caso $m = -6$.

Se sustituye $m = -6$ *en el sistema de ecuaciones.*

$$\begin{cases} -6x - 3y &= 1 \\ -12x - 6y &= n \end{cases} \xrightarrow{-2F_1} \begin{cases} 12x + 6y &= -2 \\ -12x - 6y &= n \end{cases} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{cases} 12x + 6y &= -2 \\ 0 &= n - 2 \end{cases}$$

Así, si $n = 2$ *el sistema posee infinita cantidad de soluciones y si* $n \neq 2$ *el sistema es inconsistente.*

Por lo tanto

a) *Si* $m \neq 0$ *y* $m \neq -6$ *con* $n \in \mathbb{R}$ *entonces el sistema de ecuaciones tiene solución única.*

b) *Si* $m = 0$ *y* $n \neq 0$ o $m = -6$ *y* $n \neq 2$ *entonces el sistema de ecuaciones no tiene solución.*

c) *Si* $m = 0$ *y* $n = 0$ o $m = -6$ *y* $n = 2$ *entonces el sistema de ecuaciones tiene infinita cantidad de soluciones.* $\blacksquare$

13. Si A es una matriz de $n \times n$ tal que $A^3 = O_n$, pruebe que $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$.

Solución:

Hipótesis: $A^3 = O_n$.

HQM: $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$.

Se sabe que al multiplicar la matriz $I_n - A$ *por la matriz* $(I_n - A)^{-1}$ *se obtiene la matriz identidad.*

$$\Leftrightarrow \quad (I_n - A)^{-1} \cdot (I_n - A) = \left(I_n + A + A^2\right) \cdot (I_n - A)$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = {I_n}^2 + A \cdot I_n + A^2 \cdot I_n - I_n \cdot A - A^2 - A^3$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = I_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = I_n - A^3$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = I_n - O_n \quad (\textit{Por hipótesis})$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = I_n \ \checkmark$$

Por lo tanto si A *es una matriz de* $n \times n$ *tal que* $A^3 = O_n$, *entonces se cumple que* $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$. ■

14. Considere el sistema de ecuaciones en las variables x, y, donde a, $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3ax - 4y &= 2b \\ -x + 3ay &= 3b+1 \end{cases}$$

Determine los valores de las constantes a y b para que el sistema:

(a) No tenga solución.

(b) Tenga solución única.

(c) Tenga infinita cantidad de soluciones.

(d) Determine el conjunto solución en el caso de que la solución es única.

Solución:

Una representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} 3a & -4 \\ -1 & 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ 3b+1 \end{pmatrix}$$

Se calcula $\begin{vmatrix} 3a & -4 \\ -1 & 3a \end{vmatrix}$ *que es* $9a^2 - 4$.

- *Si* $9a^2 - 4 \neq 0$, *es decir* $a \neq \pm\dfrac{2}{3}$ *entonces el sistema tiene solución es única.*

- *Si* $9a^2 - 4 = 0$, *es decir, si* $a = \pm\dfrac{2}{3}$ *el sistema es inconsistente o posee infinito número de soluciones.*

Caso $a = \dfrac{2}{3}$.

Se sustituye $a = \dfrac{2}{3}$ *en el sistema de ecuaciones.*

$$\begin{cases} 2x - 4y &= 2b \\ -x + 2y &= 3b+1 \end{cases} \xrightarrow{2F_2} \begin{cases} 2x - 4y &= 2b \\ -2x + 4y &= 6b+2 \end{cases} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{cases} 2x - 4y &= 2b \\ 0 &= 8b+2 \end{cases}$$

Así, si $b = -\dfrac{1}{4}$ *el sistema posee infinito número de soluciones y si* $b \neq -\dfrac{1}{4}$ *el sistema es inconsistente.*

Caso $a = -\dfrac{2}{3}$.

Se sustituye $a = -\dfrac{2}{3}$ *en el sistema de ecuaciones.*

$$\left\{\begin{array}{rcc} -2x-4y & = & 2b \\ -x-2y & = & 3b+1 \end{array}\right. \xrightarrow{-2F_2} \left\{\begin{array}{rcc} -2x-4y & = & 2b \\ 2x+4y & = & -6b-2 \end{array}\right. \xrightarrow{F_1+F_2} \left\{\begin{array}{rcc} -2x-4y & = & 2b \\ 0 & = & -4b-2 \end{array}\right.$$

Así, si $b = -\dfrac{1}{2}$ *el sistema posee infinito número de soluciones y si* $b \neq -\dfrac{1}{2}$ *el sistema es inconsistente.*

Por lo tanto

a) *Si* $a = \dfrac{2}{3}$ *y* $b \neq -\dfrac{1}{4}$ o $a = -\dfrac{2}{3}$ *y* $b \neq -\dfrac{1}{2}$ *entonces el sistema de ecuaciones no tiene solución.*

b) *Si* $a \neq \dfrac{2}{3}$ *y* $a \neq -\dfrac{2}{3}$ *con* $b \in \mathbb{R}$ *entonces el sistema de ecuaciones tiene solución única.*

c) *Si* $a = \dfrac{2}{3}$ *y* $b = -\dfrac{1}{4}$ o $a = -\dfrac{2}{3}$ *y* $b = -\dfrac{1}{2}$ *entonces el sistema de ecuaciones tiene infinita cantidad de soluciones.*

d) *Se sabe que el conjunto solución es de la forma* $x = A^{-1}b$. *Donde* $A = \begin{pmatrix} 3a & -4 \\ -1 & 3a \end{pmatrix}$ *y* $b = \begin{pmatrix} 2a \\ 3b+1 \end{pmatrix}$.

Primero se calcula A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3a & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 3a & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3a}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\dfrac{4}{3a} & \dfrac{1}{3a} & 0 \\ & & & \\ -1 & 3a & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1+F_2}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\dfrac{4}{3a} & \dfrac{1}{3a} & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{-4+9a^2}{3a} & \dfrac{1}{3a} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{3a}{-4+9a^2}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\dfrac{4}{3a} & \dfrac{1}{3a} & 0 \\ \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{-4+9a^2} & \dfrac{3a}{-4+9a^2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{4}{3a}F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{3a^3}{-12a+27a^3} & \dfrac{4}{-4+9a^2} \\ \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{-4+9a^2} & \dfrac{3a}{-4+9a^2} \end{array}\right)$$

Entonces $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \dfrac{3a^3}{-12a+27a^3} & \dfrac{4}{-4+9a^2} \\ \\ \dfrac{1}{-4+9a^2} & \dfrac{3a}{-4+9a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a \\ 3b+1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{6a^4}{-12a+27a^3} + \dfrac{4}{-4+9a^2} \cdot (3b+1) \\ \\ \dfrac{2a}{-4+9a^2} + \dfrac{3a}{-4+9a^2} \cdot (3b+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2a^3+4(3b+1)}{-4+9a^2} \\ \\ \dfrac{2a+3a(3b+1)}{-4+9a^2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $S = \left\{ \left(\dfrac{2a^3+4(3b+1)}{-4+9a^2},\ \dfrac{2a+3a(3b+1)}{-4+9a^2} \right) \Big/ a \neq 0 \wedge a \neq \pm\dfrac{2}{3},\ b \in \mathbb{R} \right\}$ ■

15. Si A una matriz involutiva de $n \times n$ tal que $\frac{1}{2}(A+I_n)$ es invertible, demuestre que $\det\left(\frac{1}{2}(A+I_n)\right) = 1$.

Solución:

Hipótesis:

1. *A es involutiva ($A^2 = I_n$).*

2. *$\frac{1}{2}(A+I_n)$ es invertible.*

HQM: $\det\left(\frac{1}{2}(A+I_n)\right) = 1$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(A^2+2A\cdot I_n+{I_n}^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(A^2+2A+I_n\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(I_n+2A+I_n\right) \quad \textit{(Por hipótesis 1)}\\
&= \frac{1}{4}\Big(2(A+I_n)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\left(A+I_n\right)
\end{aligned}$$

Es decir, $\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)$ *es idempotente.*

Como $\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)$ *es idempotente, entonces:*

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\\
\Rightarrow\quad & \left|\left(\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right)^2\right| = \left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right|\\
\Rightarrow\quad & \left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right|\cdot\left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right|\\
\Rightarrow\quad & \left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right|\cdot\left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right|-\left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right| = 0\\
\Rightarrow\quad & \left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right|\left(\left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right|-1\right) = 0\\
\Rightarrow\quad & \left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right| = 0 \quad \vee \quad \left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right| = 1
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)$ *es invertible (Hipótesis 2) entonces* $\left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right| \neq 0,$ *es decir* $\left|\frac{1}{2}\left(A+I_n\right)\right| = 1.$

Por lo tanto si A es una matriz involutiva de $n \times n$ tal que $\frac{1}{2}(A + I_n)$ es invertible, entonces $\det\big(\frac{1}{2}(A + I_n)\big) = 1$. ■

16. Si A y B son matrices de 4×4, tales que $\det(A) = -4$ y $\det(B^{-1}) = \frac{5}{4}$, calcule $\det(3B \cdot Adj(2A))$.

Solución:

Sabemos que $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} \Rightarrow |B| = \dfrac{1}{|B^{-1}|} \Rightarrow |B| = \dfrac{1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}$.

Además $|Adj(2A)| = (2^4 \cdot -4)^3 = -262144$. (*Por ejercicio* **10.**)

Así, $|3B \cdot Adj(2A)| = 3^4 \cdot |B| \cdot |Adj(2A)| = 81 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot -262144 = -\dfrac{84934656}{5}$. ■

17. Se sabe que si A es una matriz de $n \times n$ que posee inversa, se cumple:

$$A \cdot \frac{Adj(A)}{det(A)} = I_n$$

Donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$. Demuestre que si B es una matriz de $n \times n$ que posee inversa, entonces:

$$(Adj\ (B^t))^t = det(B) \cdot B^{-1}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\big(Adj\ \big(B^t\big)\big)^t = det(B) \cdot B^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \big(Adj(B)^t\big)^t = det(B) \cdot B^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad Adj(B) = det(B) \cdot B^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad Adj(B) \cdot B = \big(det(B) \cdot B^{-1}\big) \cdot B \\
&\Leftrightarrow \quad Adj(B) \cdot B = det(B) \cdot \big(B^{-1} \cdot B\big)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad Adj(B) \cdot B = det(B) \cdot I_n$$

$$\Leftrightarrow \quad Adj(A) \cdot B = det(B)$$

$$\Leftrightarrow \quad Adj(B) \cdot B \cdot det(B)^{-1} = det(B) \cdot det(B)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad B \cdot \frac{Adj(B)}{det(B)} = I_n$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = I_n \ \checkmark \qquad (Hipótesis)$$

Por lo tanto si A y B son matrices invertibles de tamaño $n \times n$, donde se cumple que $A \cdot \dfrac{Adj(A)}{det(A)} = I_n$, entonces $\left(Adj\left(B^t\right)\right)^t = det(B) \cdot B^{-1}$. ■

18. Calcule el determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$$

Solución:

Se aplican operaciones elementales buscando transformarlo en una matriz triangular superior para calcular su determinante; multiplicando los elementos de su diagonal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix} \quad \xrightarrow{-F_1+F_2} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F_1+F_3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-F_1+F_{n-2} \\ -F_1+F_{n-1}}]{\substack{-F_1+F_4 \\ \vdots}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F_1+F_n}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-(n-1) \end{vmatrix}$$

Por lo tanto su determinante es igual a $(x-1)(x-2)\cdot ... \cdot(x-(n-1))$. ■

19. Sean $X \in M_{n\times 1}$, B una matriz simétrica de tamaño $n \times n$ y considere la matriz

$$A = B - \frac{2}{X^tX}XX^t$$

Pruebe, entrada por entrada, que $A^t = A$.

Solución:

Hipótesis: *B es una matriz simétrica* $(B^t = B)$.

HQM: $\langle A^t\rangle_{ij} = \langle A\rangle_{ij} \quad \forall i,j = 1,2,...,n$. (*Ya que A es una resta de dos matrices de $n\times n$*)

Es claro que $\dfrac{2}{X^tX}$ es una constante, pues X^t es de tamaño $1\times n$ y X es de tamaño $n\times 1$; por lo tanto X^tX es de tamaño 1×1. (*Considerado como un número en este curso*)

Veamos que $\forall i, i = 1,2,...n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle A^t\rangle_{ij} &= \left\langle \left(B - \frac{2}{X^tX}XX^t\right)^t \right\rangle_{ij} \\ &= \left\langle B - \frac{2}{X^tX}XX^t \right\rangle_{ji} \quad (\textit{Matriz transpuesta de una matriz}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle B\rangle_{ji} - \left\langle \frac{2}{X^tX} XX^t \right\rangle_{ji} \quad (\textit{Sustración de matrices})\\
&= \langle B\rangle_{ji} - \frac{2}{X^tX} \langle XX^t\rangle_{ji} \quad (\textit{Multiplic. por escalar en una matriz})\\
&= \langle B^t\rangle_{ji} - \frac{2}{X^tX} \langle XX^t\rangle_{ji} \quad (\textit{Hipótesis})\\
&= \langle B\rangle_{ij} - \frac{2}{X^tX} \sum_{k=1}^{n} \langle X\rangle_{jk} \langle X^t\rangle_{ki} \quad (\textit{Multiplic. de matrices})\\
&= \langle B\rangle_{ij} - \frac{2}{X^tX} \sum_{k=1}^{n} \langle X^t\rangle_{kj} \langle X\rangle_{ik} \quad (\textit{Matriz transpuesta de una matriz})\\
&= \langle B\rangle_{ij} - \frac{2}{X^tX} \sum_{k=1}^{n} \langle X\rangle_{ik} \langle X^t\rangle_{kj} \quad (\textit{Conmutativa})\\
&= \langle B\rangle_{ij} - \frac{2}{X^tX} \langle XX^t\rangle_{ij} \quad (\textit{Multiplic. de matrices})\\
&= \langle B\rangle_{ij} - \left\langle \frac{2}{X^tX} XX^t \right\rangle_{ij} \quad (\textit{Multiplic. por escalar en una matriz})\\
&= \left\langle B - \frac{2}{X^tX} XX^t \right\rangle_{ij} \quad (\textit{Sustracción de matrices})\\
&= \langle A\rangle_{ij}
\end{aligned}
$$

Así, $\forall i,j = 1,2,...,n \ \langle A^t\rangle_{ij} = \langle A\rangle_{ij}$.

Por lo tanto si $A = B - \dfrac{2}{X^tX} XX^t$ *con* B *una matriz simétrica, entonces* $A^t = A$. ∎

20. Suponga que A es una matriz de $n \times n$ que satisface la condición $A^2 = A$. Pruebe que que $\forall k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 1$, se cumple que:

$$(A + I_n)^k = I_n + \left(2^k - 1\right) A$$

Solución:

Se demuestra por inducción sobre k.

- *Para* $k = 1 \Leftrightarrow (A + I_n)^1 = I_n + (2^1 - 1) A \Leftrightarrow A + I_n = I_n + A \;\checkmark$.

- *Asumimos validez para algún* $k > 1$, *es decir* $(A + I_n)^k = I_n + \left(2^k - 1\right) A$ *es nuestra hipótesis inductiva* (HI).

- *Con base en lo anterior hay que probar la validez para* $k + 1$, *es decir, hay que probar* $(A + I_n)^{k+1} = I_n + \left(2^{k+1} - 1\right) A$.

- **Prueba**:

$$\begin{aligned}
(A + I_n)^{k+1} &= (A + I_n)^k (A + I_n) \\
&\overset{\text{HI}}{=} \left(I_n + \left(2^k - 1\right) A\right)(A + I_n) \\
&= I_n \cdot A + {I_n}^2 + \left(2^k - 1\right) A^2 + \left(2^k - 1\right) A \cdot I_n \\
&= A + I_n + \left(2^k - 1\right) A + \left(2^k - 1\right) A \qquad \left(\textit{Hipótesis: } A^2 = A\right) \\
&= A + I_n + 2\left(2^k - 1\right) A \\
&= I_n + 2\left(2^k - 1\right) A + A \\
&= I_n + \left(2^{k+1} - 2\right) A + A \\
&= I_n + \left(2^{k+1} - 2 + 1\right) A \\
&= I_n + \left(2^{k+1} - 1\right) A
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(A + I_n)^k = I_n + \left(2^k - 1\right) A, \quad \forall k \in \mathbb{N}$ *con* $k \geq 1$. ■

Bibliografía

[1] Arce C. (2003). *Ejercicios Resueltos de Álgebra Lineal*. Editorial Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica.

[2] Ávila E. *Álgebra Lineal para Computación*. Publicaciones ITCR. Cartago, Costa Rica.

[3] Barrantes H. (2012). *Elementos de Álgebra Lineal*. 2a ed. Editorial Universidad Estatal a Distancia. San José, Costa Rica

[4] Páez C. (2010). *Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones Lineales*. Publicaciones ITCR. Cartago, Costa Rica.