Solucionario Segundo Examen Parcial

---

1. Considere los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Calcule el valor de α para que $w \in gen\left(\{u, v\}\right)$ **(3 puntos)**

SOLUCIÓN

Si $w \in Gen\left(\{u, v\}\right) \Longrightarrow \exists\ m, n \in \mathbb{R}$ tal que $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2m \\ 3m + 2n = 0 \\ 5n = 15 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2, n = 3 \quad \text{y} \quad \alpha = -4$$

2. Sea $A = \left\{\ x + (k-1)x^2\ ,\ 2x^2 - x + 1\ ,\ 6x^2 + 2\ \right\} \subset P_2(\mathbb{R})$
Determine el valor de k para que el conjunto A sea linealmente dependiente. **(4 puntos)**

SOLUCIÓN

El conjunto A será linealmente dependiente si y solo si existen números reales α, β y γ, no todos iguales a cero, tales que:

$$\alpha(x + (k-1)x^2) + \beta(2x^2 - x + 1) + \gamma(6x^2 + 2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (\alpha(k-1) + 2\beta + 6\gamma)x^2 + (\alpha - \beta)x + (\beta + 2\gamma) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha(k-1) + 2\beta + 6\gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

De las últimas dos ecuaciones se tiene que $\alpha = \beta = -2\gamma$. Al sustituir estos valores en la primera ecuación del último sistema, se tiene que $\alpha(k-1) + 2\alpha - 3\alpha = 0 \Longrightarrow (k-2)\alpha = 0$

Observe que α debe ser distinto de 0, puesto que si $0 = \alpha = \beta = -2\gamma = \gamma$ lo que contradice el hecho de que no pueden ser todos iguales a cero. Así, $(k-2)\alpha = 0 \Longrightarrow k = 2$

3. Considere la siguiente tabla para la operación binaria $*$ en el conjunto $S = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

$*$	2	3	5	7	11
2	7	3	5	2	11
3	11	2	5	3	7
5	5	5	5	5	5
7	2	3	5	7	11
11	7	3	5	11	11

a) Indique cuál es el elemento neutro de la estructura $(S, *)$. **(1 punto)**
SOLUCIÓN 7

b) Determine cuál es el elemento absorbente de la estructura $(S, *)$. **(1 punto)**
SOLUCIÓN 5

c) Halle todos los elementos idempotentes de la estructura $(S, *)$. **(1 punto)**
SOLUCIÓN $\{5, 7, 11\}$

d) Indique cuáles son los elementos involutivos de la estructura $(S, *)$. **(1 punto)**
SOLUCIÓN $\{2, 7\}$

4. Sea $(G, \perp)$ un grupo.

a) Demuestre que el elemento neutro de $(G, \perp)$ es único. **(2 puntos)**

SOLUCIÓN
Sean e_1 y e_2 dos elementos neutros de la estructura $(G, \perp)$. Entonces, como e_1 es neutro, se tiene que $e_1 \perp e_2 = e_2$. De forma análoga, como e_2 es neutro, entonces $e_1 \perp e_2 = e_1$. De lo anterior se tiene que $e_1 = e_1 \perp e_2 = e_2$, por lo que el neutro es único.

b) Pruebe que $(a \perp b)^{-1} = b^{-1} \perp a^{-1}, \ \forall a, b \in G$. **(2 puntos)**

SOLUCIÓN
Sea e el elemento neutro de $(G, \perp)$. Considere la expresión:

$$\left(b^{-1} \perp a^{-1}\right) \perp (a \perp b) \perp (a \perp b)^{-1} = \left(b^{-1} \perp a^{-1}\right) \perp (a \perp b) \perp (a \perp b)^{-1}$$

$$\left[\left(b^{-1} \perp a^{-1}\right) \perp (a \perp b)\right] \perp (a \perp b)^{-1} = \left(b^{-1} \perp a^{-1}\right) \perp \left[(a \perp b) \perp (a \perp b)^{-1}\right]$$

$$\left[b^{-1} \perp \left(a^{-1} \perp a\right) \perp b\right] \perp (a \perp b)^{-1} = \left(b^{-1} \perp a^{-1}\right) \perp e$$

$$\left[b^{-1} \perp (e \perp b)\right] \perp (a \perp b)^{-1} = b^{-1} \perp a^{-1}$$

$$\left(b^{-1} \perp b\right) \perp (a \perp b)^{-1} = b^{-1} \perp a^{-1}$$

$$e \perp (a \perp b)^{-1} = b^{-1} \perp a^{-1}$$

$$(a \perp b)^{-1} = b^{-1} \perp a^{-1}$$

5. Considere el grupo abeliano $\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}, *\right)$ con la operación $*$ definida por:

$$a * b = a + b + 2ab \ \ \forall a, b \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Resuelva la ecuación $\quad (2 * x^{-1})^{-1} = 3$ **(4 puntos)**

SOLUCIÓN

$$(2 * x^{-1})^{-1} = 3$$

$$x * 2^{-1} = 3$$

$$x * 2^{-1} * 2 = 3 * 2$$

$$x = 3 * 2$$

$$x = 3 + 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2$$

$$x = 17$$

6. Considere el conjunto $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - c = 0\}$.
Demuestre que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. **(4 puntos)**

SOLUCIÓN
Observe que $W \neq \emptyset$ pues $(0, 0, 0) \in W$.
Ahora debemos probar que $(\alpha x + y) \in W, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in W$

Sean $x = (a_1, b_1, c_1) \in W \quad$ y $\quad y = (a_2, b_2, c_2) \in W$

$\alpha x + y = \alpha (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (\alpha a_1 + a_2, \alpha b_1 + b_2, \alpha c_1 + c_2)$

Así, $(\alpha x + y) \in W \Leftrightarrow (\alpha a_1 + a_2, \alpha b_1 + b_2, \alpha c_1 + c_2) \in W$

$\Leftrightarrow (\alpha a_1 + a_2) + (\alpha b_1 + b_2) - (\alpha c_1 + c_2) = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha a_1 + \alpha b_1 - \alpha c_1) + (a_2 + b_2 - c_2) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha (a_1 + b_1 - c_1) + (a_2 + b_2 - c_2) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + 0 = 0$

Lo que prueba que $W < \mathbb{R}^3$

7. Sea $D = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Q} \right\}$

En D se define la operación binaria $\circ$ mediante $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5ar & 0 \\ 0 & 7bs \end{pmatrix}$

a) Muestre que $(D, +)$ es un subgrupo de $(M_2(\mathbb{R}), +)$, donde $+$ representa la adición usual de matrices. **(3 puntos)**

SOLUCIÓN
En primer lugar observe que $D \neq \emptyset$ dado que $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, la matriz $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in D$

Por otro lado, dadas $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in D$ y $R = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in D$ se tiene que $A + R = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+r & 0 \\ 0 & b+s \end{pmatrix} \in D$ debido a la cerradura de la suma en $\mathbb{Q}$.

Lo anterior prueba que D es subgrupo de $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

b) Pruebe que $(D, +, \circ)$ es un anillo conmutativo con unidad. **(4 puntos)**

SOLUCIÓN

De la parte anterior se tiene que D es un grupo abeliano, pues hereda la conmutatividad de $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

Así, falta probar la cerradura, asociatividad, conmutatividad y existencia de elemento neutro en $(D, \circ)$ y la distributividad de $\circ$ respecto a $+$.

- **Cerradura**

  Sean $a, b, r, s \in \mathbb{Q}$, entonces $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in D$ y $R = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in D$

  Además $A \circ R = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5ar & 0 \\ 0 & 7bs \end{pmatrix} \in D$ debido a la cerradura de la multiplicación en $\mathbb{Q}$.

- **Asociatividad**

$$\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 5ar & 0 \\ 0 & 7bs \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5rm & 0 \\ 0 & 7sn \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25arm & 0 \\ 0 & 49bsn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25arm & 0 \\ 0 & 49bsn \end{pmatrix}$$

- **Conmutatividad**

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5ar & 0 \\ 0 & 7bs \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

- **Neutro**

  El elemento neutro de $(D, \circ)$ es $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \in D_2$, pues se cumple que:

  $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$

- **Distributividad**

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r+m & 0 \\ 0 & s+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5ar & 0 \\ 0 & 7bs \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5am & 0 \\ 0 & 7bn \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5ar+5am & 0 \\ 0 & 5bs+5bn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5ar+5am & 0 \\ 0 & 5bs+5bn \end{pmatrix}$$

Así, $(D, +, \circ)$ es un anillo conmutativo con unidad.

$c)$ Mediante un ejemplo verifique que $(D, +, \circ)$ no es un dominio entero. **(2 puntos)**

SOLUCIÓN

Solo debemos dar un ejemplo que muestre que $(D, +, \circ)$ posee divisores de cero.

$$\begin{pmatrix} 53 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$