INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — II SEMESTRE 2013
ESCUELA DE MATEMÁTICA — TIEMPO 2 HORAS 20 MIN
PROBABILIDADES — VALOR 38 PTS

PARCIAL II

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. No son procedentes las apelaciones sobre preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con témpera (corrector). Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Suponga que se tiene una caja con 20 botellas de un refresco para la venta y que 10 de ellos en su tapa traen la palabra PREMIO. Cada vez que un cliente compra una botella, esta es tomada al azar de la caja. Determinar la probabilidad de que la tercera botella que se venda sea la primera que tenga la palabra PREMIO en su tapa. (4 puntos)

$$\begin{aligned} SP_i &: \text{ Sin Premio la botella } i \\ CP_i &: \text{ Con Premio la botella } i \\ P(SP_1 \cap SP_2 \cap CP_3) &= P(CP_3 \mid SP_1 SP_2)P(SP_2 \mid SP_1)P(SP_1) = \frac{10}{18}\frac{9}{19}\frac{10}{20} = \frac{5}{38} \end{aligned}$$

2. Un médico cirujano se especializa en cirugías estéticas. Entre sus pacientes, el 20% se realizan correcciones faciales, un 35% implantes mamarios y el restante en otras cirugías correctivas. Se sabe además, que son de género masculino el 25% de los que se realizan correcciones faciales, 15% implantes mamarios y 40% otras cirugías correctivas. Si se selecciona un paciente al azar:

   (a) Determine la probabilidad de que sea de género masculino. (4 puntos)

   F: pacientes que se realizan cirugías faciales
   M: pacientes que se realizan implantes mamarios
   O: pacientes que se realizan otras cirugías correctivas
   H: pacientes de género masculino

$$\begin{aligned} P(H) &= P(F \cap H) + P(M \cap H) + P(O \cap H) \\ &= P(F)P(H \mid F) + P(M)P(H \mid M) + P(O)P(H \mid O) \\ &= 0.2 \cdot 0.25 + 0.35 \cdot 0.15 + 0.45 \cdot 0.40 = 0.282\,5 \end{aligned}$$

   (b) Si resulta que es de género masculino, determine la probabilidad que se haya realizado una cirugía de implantes mamarios. (3 puntos)

$$P(M \mid H) = \frac{P(H \mid M) \cdot P(M)}{P(H)} = \frac{0.35 \cdot 0.15}{0.282\,5} = 0.185\,84$$

Aproximadamente el 19%

3. Un experimento consiste en lanzar dos dados distinguibles. Considere la variable aleatoria X: el mínimo valor obtenido en los dos dados, por ejemplo, si en un dado se obtiene un tres y en el otro dado se obtiene un cinco, entonces $x = 3$. Se tiene que el rango de X es $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y su función de probabilidad está dada por

X	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

(a) Hallar la función acumulada de X y construir su gráfica. (5 puntos)

$$F_x(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{11}{36} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{20}{36} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{27}{36} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{32}{36} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ \frac{35}{36} & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

(b) Calcule $P(1.3 \leq X \leq 5.5)$. (3 puntos)

$$\begin{aligned} & P(1.3 \leq X \leq 5.5) \\ = \; & P(1 < X \leq 5) \\ = \; & F(5) - F(1) \\ = \; & \frac{35}{36} - \frac{11}{36} = \frac{24}{36} \\ = \; & \frac{2}{3} \end{aligned}$$

O bien podría calcularla como

$$\begin{aligned} P(1.3 \leq X \leq 5.5) &= f(x=2) + f(x=3) + f(x=4) + f(x=5) \\ &= \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(c) Calcule la varianza de X. (3 puntos)

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} \\ &= \frac{91}{36} = 2.5278 \\ Var(X) &= \left(1 - \frac{91}{36}\right)^2 \cdot \frac{11}{36} + \left(2 - \frac{91}{36}\right)^2 \cdot \frac{9}{36} + \left(3 - \frac{91}{36}\right)^2 \cdot \frac{7}{36} + \left(4 - \frac{91}{36}\right)^2 \cdot \frac{5}{36} \\ &\quad + \left(5 - \frac{91}{36}\right)^2 \cdot \frac{3}{36} + \left(6 - \frac{91}{36}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} \\ &= \frac{2555}{1296} = 1.9715 \end{aligned}$$

4. Sea X una variable aleatoria discreta con función generadora de momentos $m_X(t) = \dfrac{e^{kt}}{2-e^t}$ y $E(X) = 3$. Determine el valor de k. (4 puntos)

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\dfrac{e^{kt}}{2-e^t}\right)}{dt} &= \frac{e^{kt}}{(e^t-2)^2}\left(2k+ke^t-ke^t\right) \\ E(X) &= \frac{k+1}{4} = 3 \Longrightarrow k = 11 \end{aligned}$$

5. Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es

$$f_X(x) = k\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + \frac{2^{x-1}}{x!} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Determine el valor de k para que f sea realmente una función de probabilidad. (5 puntos)

$$\sum_{x=0}^{\infty}\left(k\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + \frac{2^{x-1}}{x!}\right) = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}e^2 = 1 \Longrightarrow k = 2 - e^2$$

6. Históricamente, la selección de Costa Rica tiene probabilidad de $\frac{2}{5}$ de ganar un partido en el mundial,

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera victoria de Costa Rica en el mundial se dé en el tercer partido? (4 puntos)

Sea Z : el número de partidos antes de obtener la primera victoria

$Z \sim G\left(p = \dfrac{2}{5}\right)$, por lo tanto la probabibiliad de que la

primera victoria, se de hasta en el tercer partido

$$P(Z=2) = \left(1-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{125}$$

(b) Si un equipo mundialista obtiene su primera victoria en un mundial hasta el tercer partido es declarado CONSERVADOR. Asumiendo que Costa Rica mantiene la misma probabilidad de ganar un partido cada vez que va a un mundial, ¿cuál es la probabilidad de que, de las próximas 10 veces que Costa Rica asista a un mundial, en cinco de ellos sea declarado CONSERVADOR? (3 puntos)

Sea X el número de equipos considerados CONSERVADORES de los 32 que van al mundial

$$X \sim B\left(n = 10, p = \frac{18}{125}\right)$$

$$\begin{aligned} P(X=5) &= \binom{10}{5}\left(\frac{18}{125}\right)^5\left(1-\frac{18}{125}\right)^5 \\ &= 0.007171 \end{aligned}$$

Algunas fórmulas que podría necesitar pero quizás no.

1. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

3. $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$, si $|r| < 1$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$