INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *19 de noviembre de 2012*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 38 puntos*
MATEMÁTICA DISCRETA — *Tiempo: 2 horas 15 minutos*

Tercer Examen Parcial

Instrucciones: Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto, se deben presentar todos los pasos necesarios que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma clara, ordenada y utilice bolígrafo para resolver el examen. No se aceptan reclamos de exámenes resueltos con lápiz o que presenten algún tipo de alteración. No se permite el uso de calculadora programable ni el uso de celular durante el desarrollo de la prueba. Este es un examen de desarrollo, por tanto, debe aparecer todos los pasos, y sus respectivas justificaciones, que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. [**5 puntos**] Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $4^n + 15n - 1$ es divisible por 9, para todo $n \geq 1$, con n número natural.

2. [**5 puntos**] Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $3^n < (n+1)!$ para todo natural con $n \geq 4$.

3. [**5 puntos**] Determine la fórmula explícita de la sucesión

$$a_n = a_{n-1} + 33a_{n-2} + 63a_{n-3}$$

   si $n \geq 3$, con $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$.

4. [**4 puntos**] Determine la fórmula por recurrencia para la sucesión b_n, para $n \geq 0$, cuya fórmula explícita es $b_n = -3^n + n + 4$.

5. Sobre el conjunto $E = \{a, b, c, d\}$ se define $*$ por medio de la tabla de operación:

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	b

   (a) [**1 punto**] Determine si $*$ es asociativa.
   (b) [**1 punto**] Determine si $*$ es conmutativa.
   (c) [**1 punto**] Determine si $(E, *)$ posee elemento neutro.
   (d) [**1 punto**] Determine si $(E, *)$ satisface la propiedad de los inversos.

6. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación $*$ por: $(a, b) * (c, d) = \left(a + c - 2, \frac{bd}{3}\right)$

   (a) [**5 puntos**] Demuestre que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, *)$ es un grupo abeliano.

   (b) [**2 puntos**] Calcule el valor de $(4, -1)^{-2} * (-2, 4)^3$.

7. [**4 puntos**] Calcule un subgrupo de orden 4 del grupo $(\mathbb{Z}_{17}^*, \odot)$.

8. [**4 puntos**] Si $(G, *)$ es un grupo, demuestre que $(G, *)$ es grupo abeliano si y solo si $(a * b)^2 = a^2 * b^2$ para todos $a, b \in G$.