INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

19 de noviembre de 2007
Total: 30 puntos
Tiempo: 2 h.

TERCER EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que la igualdad
$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + (n-1)(n+1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$
es válida para todo $n \geq 2$, con n número natural. Además, utilice esta fórmula para calcular el valor exacto de
$$100 \cdot 102 + 101 \cdot 103 + 102 \cdot 104 + \cdots + 147 \cdot 149$$
(6 puntos)

2. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9, para todo $n \geq 1$ con n número natural. (4 puntos)

3. Considere la sucesión definida por $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, si $n \geq 3$, con $a_0 = -1$, $a_1 = 10$ y $a_2 = -2$
   (a) Utilice ésta fórmula para encontrar el valor de a_5. (1 punto)
   (b) Determine la fórmula explícita para esta relación y utilice esta fórmula para encontrar el valor de a_5. (4 puntos)

4. Suponga que la fórmula explícita asociada a la relación de recurrencia homogénea a_n, para $n \geq 2$, es:
$$a_n = 2^n + 2n2^n + 2$$
Determine la fórmula recursiva de esta sucesión. (3 puntos)

5. En el conjunto $\mathbb{R}-\{-1\}$ se define la operación $*$ como

$$a * b = a + b + ab$$

   (a) Pruebe que $(\mathbb{R}-\{-1\}, *)$ es grupo abeliano. (4 puntos)

   (b) Calcule $(4 * 2^{-1})^2 * \left[5^{-3} * 3 * (-2)\right]$ (2 puntos)

6. Considere el conjunto $\mathbb{Z}_{11}^*$, con la operación interna $\odot$ como la multiplicación usual de clases de equivalencia.

(6 puntos)

   (a) Determine el elemento neutro y los inversos de cada elemento del grupo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \odot)$.

   (b) Efectue las operaciones $\left[(\dot{7})^6 \odot \dot{4}\right]^{-4} \odot \left[\dot{9} \odot (\dot{3})^{-7}\right]^4$

   (c) Determine todos los subgrupos del grupo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \odot)$.