INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

14 de junio de 2010
Total: 33 puntos
Tiempo: 2 h.

TERCER EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. (a) Utilice el método de inducción matemática para demostrar la validez, para todo $n \geq 1$, con n número natural, de la fórmula **(4 puntos)**

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + \cdots + n(n+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$$

   (b) Además, utilice la fórmula anterior para calcular el valor exacto de **(2 puntos)**

$$10 \cdot 14 + 11 \cdot 15 + 12 \cdot 16 + \cdots + 1365$$

2. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9, para todo $n \geq 0$, con n número natural. **(4 puntos)**

3. Considere la sucesión a_n definida por

$$a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$$

   si $n \geq 3$, con $a_1 = 4$, $a_2 = -16$. Determine la fórmula explícita para esta relación. **(4 puntos)**

4. Suponga que la fórmula explícita asociada a la relación por recurrencia a_n, para $n \geq 1$, es:

$$a_n = 3(-2)^n - 4n(-2)^n - 3$$

   Determine una fórmula recursiva para esta sucesión. **(4 puntos)**

5. En $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se define la operación $\otimes$ como:

$$(a,b) \otimes (c,d) = (2ac, b+d-1)$$

Si se sabe que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes)$ es un grupo abeliano y además se sabe que el elemento neutro en esta estructura es $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

(a) Calcule la fórmula de $(a,b)^{-1}$ **(2 puntos)**

(b) Calcule el resultado de **(3 puntos)**

$$\left[(1,5)^3 \otimes (-2,3)\right]^{-2}$$

6. En $\mathbb{R}^*$ se define la operación interna $\otimes$ como:

$$a \otimes b = 6ab$$

Pruebe que la estructura $(\mathbb{R}^*, \otimes)$ es un grupo abeliano. **(5 puntos)**

7. Considere el conjunto $\mathbb{Z}_{11}^*$, con la operación interna $\odot$ como la multiplicación usual de clases de equivalencia.

(a) Determine el elemento neutro y los inversos de cada elemento del grupo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \odot)$. **(2 puntos)**

(b) Determine todos los subgrupos del grupo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \odot)$. **(3 puntos)**