Solución I Examen Parcial

1. Usando las propiedades de las potencias y de los radicales, realice las operaciones indicadas y exprese el resultado en su forma simplificada.

(a) $\left(\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{-16}}{2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{135}+4\sqrt[6]{25}}\right)^{-3}$ [4 pts]

Solución:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{-16}}{2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{135}+4\sqrt[6]{25}}\right)^{-3} &= \left(\frac{2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3^3\cdot 5}+4\sqrt[6]{5^2}}{\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{-1\cdot 2^3\cdot 2}}\right)^{3}\\
&= \left(\frac{2\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}+4\sqrt[3]{5}}{\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}}\right)^{3} = \left(\frac{(2-3+4)\sqrt[3]{5}}{\left(\frac{1}{2}-2\right)\sqrt[3]{2}}\right)^{3}\\
&= \left(\frac{3\sqrt[3]{5}}{\left(\frac{1-4}{2}\right)\sqrt[3]{2}}\right)^{3} = \left(\frac{3\sqrt[3]{5}}{\frac{-3}{2}\sqrt[3]{2}}\right)^{3} = \frac{\left(3\sqrt[3]{5}\right)^3}{\left(\frac{-3}{2}\sqrt[3]{2}\right)^3} = \frac{3^3\cdot 5}{\left(\frac{-3}{2}\right)^3\cdot 2}\\
&= \frac{27\cdot 5}{\frac{-27}{8}\cdot 2} = \frac{27\cdot 5}{\frac{-27}{4}} = \frac{4\cdot 27\cdot 5}{-27} = -4\cdot 5 = -20
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{-16}}{2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{135}+4\sqrt[6]{25}}\right)^{-3} = -20.$

(b) $\dfrac{16^{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{58}15^7(-3)^0}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}(-3)^6(-5)^9}$ [4 pts]

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{16^{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{58}15^7(-3)^0}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}(-3)^6(-5)^9} &= \frac{\left(2^4\right)^{15}2^{-58}(3\cdot 5)^7\cdot 1}{4(-1\cdot 3)^6(-1\cdot 5)^9}\\
&= \frac{2^{60}\cdot 2^{-58}\cdot 3^7\cdot 5^7}{2^2(-1)^6 3^6(-1)^9 5^9}\\
&= \frac{2^2\cdot 3^7\cdot 5^7}{2^2\cdot 1\cdot 3^6\cdot -1\cdot 5^9}\\
&= \frac{3^{7-6}}{-1\cdot 5^{9-7}} = \frac{3}{-1\cdot 5^2} = \frac{-3}{25}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{16^{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{58}15^7(-3)^0}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}(-3)^6(-5)^9} = \dfrac{-3}{25}.$

2. Determine el cociente $C(x)$ y el residuo $R(x)$ que se obtienen al dividir $A(x)$ por $B(x)$, donde $A(x) = 4x^4 - 2x^2 + 3x - 7$; $B(x) = 2x^2 + x - 5$. Usando los resultados obtenidos exprese la relación equivalente con $\dfrac{A(x)}{B(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$. [5 pts]

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|lll}
4x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +3x & -7 & 2x^2 & +x & -5 \\
\cline{6-8}
-4x^4 & -2x^3 & +10x^2 & & & 2x^2 & -x & +\frac{9}{2} \\
\cline{1-5}
 & -2x^3 & +8x^2 & +3x & -7 & & & \\
 & +2x^3 & +x^2 & -5x & & & & \\
\cline{1-5}
 & & 9x^2 & -2x & -7 & & & \\
 & & -9x^2 & -\frac{9}{2}x & +\frac{45}{2} & & & \\
\cline{1-5}
 & & & -\frac{13}{2}x & +\frac{31}{2} & & &
\end{array}
$$

De esta manera, $C(x) = 2x^2 - x + \dfrac{9}{2}$ y $R(x) = \dfrac{-13}{2}x + \dfrac{31}{2}$.

Por lo tanto, $\dfrac{4x^4 - 2x^2 + 3x - 7}{2x^2 + x - 5} = 2x^2 - x + \dfrac{9}{2} + \dfrac{\frac{-13}{2}x + \frac{31}{2}}{2x^2 + x - 5}$.

3. Factorice completamente cada una de las siguientes expresiones.

(a) $2x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ [4 pts]

Solución:

Los posibles ceros racionales de la expresión $2x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ son los valores del siguiente conjunto: $\left\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm\dfrac{1}{2};\ \pm\dfrac{3}{2}\right\}$; es fácil concluir que únicamente son candidatos los lementos negativos del conjunto anterior (¿por qué?).

Después de comprobar que -3 es un cero de dicha expresión, se tiene que $x+3$ es un factor de $2x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 7x + 3$.

Luego, se realiza la división sintética con el valor -3 para obtener otro factor de dicha expresión.

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
2 & 7 & 5 & 7 & 3 & \\
\downarrow & -6 & -3 & -6 & -3 & -3 \\
\hline
2 & 1 & 2 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Teniendo el factor $x - 3$, sólo salta factorizar el polinomio $2x^3 + x^2 + 2x + 1$. Los posibles ceros racionales de este polinomio son: $\left\{\pm 1;\ \pm\dfrac{1}{2}\right\}$.

Realizando la división sintética con el valor $-\dfrac{1}{2}$, se tiene:

$$
\begin{array}{rrrr|r}
2 & 1 & 2 & 1 & \\
\downarrow & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\
\hline
2 & 0 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

Por último, se tiene que factorizar el polinomio $2x^2+2$. Como $\Delta = -16 < 0$, $2x^2+2$ no es factorizable en $I\!R$. Así:

$$\begin{aligned}
2x^4+7x^3+5x^2+7x+3 &= (x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(2x^2+2\right) \\
&= (x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)2\left(x^2+1\right) \\
&= (x+3)(2x+1)\left(x^2+1\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $2x^4+7x^3+5x^2+7x+3 = (x+3)(2x+1)\left(x^2+1\right)$.

(b) $ax^2y^2 - a^2b - a^3 + bx^2y^2$ [4 pts]

Solución:

$$\begin{aligned}
ax^2y^2 - a^2b - a^3 + bx^2y^2 &= \left(ax^2y^2 + bx^2y^2\right) + \left(-a^2b - a^3\right) \\
&= x^2y^2(a+b) - a^2(b+a) \\
&= x^2y^2(a+b) - a^2(a+b) \\
&= (a+b)\left(x^2y^2 - a^2\right) \\
&= (a+b)\left((xy)^2 - a^2\right) \\
&= (a+b)(xy-a)(xy+a)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $ax^2y^2 - a^2b - a^3 + bx^2y^2 = (a+b)(xy-a)(xy+a)$.

4. Realice las operaciones indicadas y exprese el resultado en su forma más simple. [5 pts]

$$\frac{\left(2x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}}{4x^{-2}-y^{-2}} \cdot \frac{(xy)^{-3}}{(x+2y)^{-2}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(2x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}}{4x^{-2}-y^{-2}} \cdot \frac{(xy)^{-3}}{(x+2y)^{-2}} &= \frac{\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)^{-1}}{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{y^2}} \cdot \frac{\frac{1}{(xy)^3}}{\frac{1}{(x+2y)^2}} \\
&= \frac{\left(\frac{2y+x}{xy}\right)^{-1}}{\frac{4y^2-x^2}{x^2y^2}} \cdot \frac{(x+2y)^2}{(xy)^3} \\
&= \frac{\frac{xy}{2y+x}}{\frac{4y^2-x^2}{x^2y^2}} \cdot \frac{(2y+x)^2}{x^3y^3} \\
&= \frac{xy \cdot x^2y^2}{(2y+x)\left(4y^2-x^2\right)} \cdot \frac{(2y+x)^2}{x^3y^3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x^3y^3}{(2y+x)(2y-x)(2y+x)} \cdot \frac{(2y+x)^2}{x^3y^3} \\
&= \frac{x^3y^3(2y+x)^2}{(2y+x)^2(2y-x)x^3y^3} = \frac{1}{2y-x}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\dfrac{(2x^{-1}+y^{-1})^{-1}}{4x^{-2}-y^{-2}} \cdot \dfrac{(xy)^{-3}}{(x+2y)^{-2}} = \dfrac{1}{2y-x}$.

5. Racionalice el numerador de la siguiente expresión y simplifique completamente. [4 pts]

$$\frac{\sqrt{x+6}-x}{9-x^2}$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+6}-x}{9-x^2} &= \frac{\sqrt{x+6}-x}{9-x^2} \cdot \frac{\sqrt{x+6}+x}{\sqrt{x+6}+x} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x+6}-x\right)\left(\sqrt{x+6}+x\right)}{(9-x^2)\left(\sqrt{x+6}+x\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-x^2}{(3^2-x^2)\left(\sqrt{x+6}+x\right)} \\
&= \frac{x+6-x^2}{(3-x)(3+x)\left(\sqrt{x+6}+x\right)} \\
&= \frac{-x^2+x+6}{(3-x)(3+x)\left(\sqrt{x+6}+x\right)} \\
&= \frac{-(x+2)(x-3)}{(3-x)(3+x)\left(\sqrt{x+6}+x\right)} \qquad (*) \\
&= \frac{(x+2)(3-x)}{(3-x)(3+x)\left(\sqrt{x+6}+x\right)} \\
&= \frac{x+2}{(3+x)\left(\sqrt{x+6}+x\right)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\dfrac{\sqrt{x+6}-x}{9-x^2} = \dfrac{x+2}{(3+x)\left(\sqrt{x+6}+x\right)}$.

(*) La factorización de $-x^2+x+6$ se puede obtener con el uso de la fórmula general. En este caso, $\Delta = (1)^2-4(-1)(6) = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$; luego, $x_1 = \dfrac{-1+5}{2(-1)} = -2$ y $x_2 = \dfrac{-1-5}{2(-1)} = 3$.

De esta manera, $-x^2+x+6 = -1\cdot(x+2)(x-3) = -(x+2)(x-3)$.

6. Resuelva en $I\!R$ cada una de las siguientes ecuaciones.

(a) $\dfrac{1}{2x-6}+\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x-15}+\dfrac{1}{x+5}=0$ [5 pts]

Solución:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2x-6}+\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-15}+\frac{1}{x+5}=0\\
\frac{1}{2\left(x-3\right)}+\frac{x^2+4x+3}{\left(x-3\right)\left(x+5\right)}+\frac{1}{x+5}=0\\
\frac{1\left(x+5\right)+2\left(x^2+4x+3\right)+2\left(x-3\right)}{2\left(x-3\right)\left(x+5\right)}=0\\
x+5+2x^2+8x+6+2x-6=0;\text{ con } x\neq 3 \text{ y } x\neq -5\\
2x^2+11x+5=0
\end{gathered}$$

Para resolver esta última ecuación se puede hacer uso de la fórmula general. En este caso, se tiene que $\Delta=(11)^2-4(2)(5)=81\Rightarrow\sqrt{\Delta}=9$.

Luego, $x_1=\dfrac{-11+9}{2(2)}=\dfrac{-1}{2}$ y $x_2=\dfrac{-11-9}{2(2)}=-5$ (que corresponde con una restricción).

Por lo tanto, el conjunto solución para la ecuación $\dfrac{1}{2x-6}+\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x-15}+\dfrac{1}{x+5}=0$ es $S=\left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$.

(b) $\sqrt{2x+\sqrt{2x+4}}=4$ [5 pts]

Solución:

$$\begin{gathered}
\sqrt{2x+\sqrt{2x+4}}=4\\
2x+\sqrt{2x+4}=4^2\\
\sqrt{2x+4}=16-2x\\
2x+4=(16-2x)^2\\
2x+4=256-64x+4x^2\\
0=4x^2-66x+252\\
0=2\left(2x^2-33x+126\right)\\
0=2x^2-33x+126\\
2x^2-33x+126=0
\end{gathered}$$

Para resolver esta última ecuación se puede hacer uso de la fórmula general. En este caso, se tiene que $\Delta=(-33)^2-4(2)(126)=81\Rightarrow\sqrt{\Delta}=9$.

Luego, $x_1=\dfrac{33+9}{2(2)}=\dfrac{21}{2}$ y $x_2=\dfrac{33-9}{2(2)}=6$.

Así, $x_1 = \dfrac{21}{2}$ y $x_2 = 6$ son posibles soluciones de la ecuación $\sqrt{2x + \sqrt{2x+4}} = 4$.

• Prueba para $x = \dfrac{21}{2}$

$$\sqrt{2x + \sqrt{2x+4}} = 4$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{21}{2} + \sqrt{2 \cdot \frac{21}{2} + 4}} \stackrel{?}{=} 4$$

$$\sqrt{21 + \sqrt{21+4}} \stackrel{?}{=} 4$$

$$\sqrt{21 + \sqrt{25}} \stackrel{?}{=} 4$$

$$\sqrt{21 + 5} \stackrel{?}{=} 4$$

$$\sqrt{26} \neq 4$$

Por lo que $x = \dfrac{21}{2}$ no es solución de la ecuación.

• Prueba para $x = 6$

$$\sqrt{2x + \sqrt{2x+4}} = 4$$

$$\sqrt{2 \cdot 6 + \sqrt{2 \cdot 6 + 4}} \stackrel{?}{=} 4$$

$$\sqrt{12 + \sqrt{12+4}} \stackrel{?}{=} 4$$

$$\sqrt{12 + \sqrt{16}} \stackrel{?}{=} 4$$

$$\sqrt{12 + 4} \stackrel{?}{=} 4$$

$$\sqrt{16} = 4$$

Por lo que $x = 6$ es solución de la ecuación.

Por lo tanto, con base en las pruebas realizadas, se concluye que $S = \{6\}$ es el conjunto solución de la ecuación $\sqrt{2x + \sqrt{2x+4}} = 4$.