INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA — *5 de mayo del 2004*
ESCUELA DE MATEMÁTICA — *Total: 31 puntos*
MATEMÁTICA DISCRETA — *Tiempo: 2 h. 15 min.*

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, sea $\mathcal{R}$ una relación definida en A, cuyo gráfico H viene dado por $H = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, e), (d, d), (c, c), (e, c), (e, e), (f, f)\}$. Si se sabe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre A, determine la clase de equivalencia de a y determine el conjunto cociente $A/\mathcal{R}$.
(2 puntos)

2. Sea $A = \{0, 2, 3, 4\}$, sea $\mathcal{R}$ una relación sobre A, definida por
$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a - b)^2 \in A$$
y sea $\mathcal{S}$ otra relación sobre A, definida por
$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow [a = b \ \vee \ b = a + 1]$$
   (a) Determine los gráficos de $\mathcal{R}$, de $\mathcal{S}$ y de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ (3 puntos)
   (b) Determine la matriz de $\overline{\mathcal{R}} \cup \mathcal{S}^{-1}$ (3 puntos)

3. Sobre $\mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:
$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow [a = b \vee a + b = 5]$$
   (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. (3 puntos)
   (b) Determine la clase de equivalencia de -3 y el conjunto cociente.
(2 puntos)

4. Si $f(x) = -3x + 1$ y $g(x) = 2x + 3$, calcule $(f \circ f \circ g)^{-1}(x)$. (2 puntos)

5. Considere la función $f\colon \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ definida por $f(x) = \dfrac{x - 4}{x - 3}$.
   (a) Pruebe que f es una función biyectiva. (4 puntos)
   (b) Determine el criterio de $f^{-1}(x)$. (1 punto)

6. Sea $A = \{1, 2, 4, 6\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$, considere la función

$$f \colon A \times B \to \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

definida por

$$f((a, b)) = \begin{cases} ab & \text{si } a \leq 2 \\ a + 1 & \text{si } a > 2 \end{cases}$$

(a) Determine si f es inyectiva y si f es sobreyectiva.

(b) Calcule $f(\{(2, 3), (6, 3)\})$, $f^{-1}(\{4\})$, $f^{-1}(\{2, 3, 5\})$

(c) Si $C = \{(a, b) \in A \times B \ / \ a + b = 6\}$, calcule $f^{-1}(f(C))$

(5 puntos)

7. Sean A, B y C conjuntos no vacíos, suponga que f es una función de A en B y g una función de B en C.
Pruebe que si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.
(3 puntos)

8. Sean A y B conjuntos no vacíos, suponga que f es una función de A en B y sea $D \subseteq A$. Si f es sobreyectiva, pruebe que $B - f(D) \subseteq f(A - D)$.
(3 puntos)

NOTA: Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.