INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA | TIEMPO: 2.5 HORAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA | PUNTAJE: 29 PUNTOS
ÁLGEBRA LINEA PARA COMPUTACIÓN | I SEMESTRE 2017

I Examen Parcial

SOLUCIÓN

---

1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) ***(4 puntos)*** Verifique la igualdad $A^3 + I_3 = 0_3$.
Solución

$$\begin{aligned} A^3 + I_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) ***(3 puntos)*** Utilice la parte (a) para calcular A^{10}.
Solución
Note que $A^{10} = (A^3)^3A = (-I_3)^3A = -A$, por lo tanto:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

2. ***(4 puntos)*** Sea A una matriz de tamaño $p \times q$, B de $r \times q$ y C de $q \times r$. Pruebe, entrada por entrada, que:

$$A\left(B - 2C^t\right)^t = AB^t - 2AC.$$

Solución

Verificando que ambas sean del mismo tamaño se tiene:

$$B \in M_{r\times q}(\mathbb{R}) \ \wedge \ C \in M_{q\times r}(\mathbb{R}) \Rightarrow B - 2C^t \in M_{r\times q}(\mathbb{R}) \Rightarrow (B - 2C^t)^t \in M_{q\times r}(\mathbb{R})$$
$$A \in M_{p\times q}(\mathbb{R}) \ \wedge \ (B - 2C^t)^t \in M_{q\times r} \Rightarrow A(B - 2C^t)^t \in M_{p\times r}(\mathbb{R}).$$

Por otro lado:

$$A \in M_{p\times q}(\mathbb{R}) \ \wedge \ B^t \in M_{q\times r}(\mathbb{R}) \Rightarrow AB^t \in M_{p\times r}(\mathbb{R})$$
$$A \in M_{p\times q}(\mathbb{R}) \ \wedge \ C \in M_{q\times r}(\mathbb{R}) \Rightarrow 2AC \in M_{p\times r}(\mathbb{R})$$

Así, $AB^T - 2AC \in M_{p\times r}(\mathbb{R})$. Probemos ahora que ambas matrices son iguales, es decir

$$\left\langle A(B - 2C^t)^t \right\rangle_{ij} = \left\langle AB^t - 2AC \right\rangle_{ij}, \quad \text{para todo} \ \ i \in \{1, 2, ..., p\}, j \in \{1, 2, ..., r\}$$

Veamos:

$$\begin{aligned}
\left\langle A(B - 2C^t)^t \right\rangle_{ij} &= \sum_{k=1}^{q} \langle A \rangle_{ik} \cdot \left\langle \left(B - 2C^t\right)^t \right\rangle_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{q} \langle A \rangle_{ik} \cdot \left\langle \left(B - 2C^t\right) \right\rangle_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{q} \langle A \rangle_{ik} \cdot \left[\langle B \rangle_{jk} - \left\langle 2C^t \right\rangle_{jk} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{q} \langle A \rangle_{ik} \cdot \left[\langle B \rangle_{jk} - 2\left\langle C^t \right\rangle_{jk} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{q} \left[\langle A \rangle_{ik} \cdot \langle B \rangle_{jk} - 2\langle A \rangle_{ik} \cdot \left\langle C^t \right\rangle_{jk} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{q} \langle A \rangle_{ik} \cdot \langle B \rangle_{jk} - \sum_{k=1}^{q} 2\langle A \rangle_{ik} \left\langle C^t \right\rangle_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{q} \langle A \rangle_{ik} \cdot \langle B^t \rangle_{kj} - \sum_{k=1}^{q} 2\langle A \rangle_{ik} \langle C \rangle_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{q} \langle A \rangle_{ik} \cdot \left\langle B^t \right\rangle_{kj} - 2\sum_{k=1}^{q} \langle A \rangle_{ik} \langle C \rangle_{kj} \\
&= \left\langle AB^t \right\rangle_{ij} - 2 \cdot \langle AC \rangle_{ij} \\
&= \left\langle AB^t \right\rangle_{ij} - \langle 2AC \rangle_{ij} \\
&= \left\langle AB^t - 2AC \right\rangle_{ij}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \left\langle A(B-2C^t)^t\right\rangle_{ij} = \left\langle AB^t - 2AC\right\rangle_{ij},\ \ \forall i \in \{1,2,....,p\}, \forall j \in \{1,2,...,r\}.$$

3. ***(5 puntos)*** Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, demuestre que:

$$\text{Si } A \text{ es no singular, entonces } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

   Solución

   Como A es no singular, existe A^{-1} tal que

$$\begin{aligned} A\cdot A^{-1} = I_n &\Rightarrow |A\cdot A^{-1}| = |I_n| \\ &\Rightarrow |A|\cdot|A^{-1}| = 1 \\ &\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \end{aligned}$$

4. ***(3 puntos)*** Sean A y B matrices de orden 4×4, tales que $\left|A^{-1}\right| = -3$ y $\left|B^t\right| = \frac{2}{3}$, calcule:

$$|-3B\cdot Adj\,(2A)|$$

   Sugerencia: Si X es una matriz no singular, entonces $|X|\cdot X^{-1} = Adj(X)$ *Solución*

   Como $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = \frac{-1}{3}$

$$\begin{aligned} |-3B\cdot Adj\,(2A)| &= |-3B|\cdot|Adj\,(2A)| \\ &= (-3)^4\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left|(2A)^{-1}\cdot|(2A)|\right| \\ &= 54\cdot\left|(2A)^{-1}\cdot\left(2^4\cdot\frac{-1}{3}\right)\right| \\ &= 54\cdot\left(2^4\cdot\frac{-1}{3}\right)^4\left|(2A)^{-1}\right| \\ &= 54\cdot\left(2^4\cdot\frac{-1}{3}\right)^4\frac{1}{|2A|} \\ &= 54\cdot\left(2^4\cdot\frac{-1}{3}\right)^4\frac{1}{2^4\cdot\frac{-1}{3}} \\ &= -\frac{16\,384}{27} \end{aligned}$$

5. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2w-3x+4y-5z &= 3 \\ 4y+2x &= -4 \\ 7y+x+50 &= 4 \\ y-5 &= 2z \end{cases}$$

- ***(3 puntos)*** Muestre que el sistema tiene solución única. *Solución* El sistema anterior puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -46 \\ 5 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de coeficientes del sistema viene dado por:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -4(14-4) = -40 \neq 0$$

por lo que el sistema tiene solución única.

- ***(2 puntos)*** Utilice la Regla de Cramer para calcular el valor de y. *Solución*

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -46 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}$$

El determinante superior es igual a $2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -46 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -46 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-92+4) =$ 352

Por lo tanto $y = \frac{352}{-40} = \frac{-44}{5}$

6. ***(5 puntos)*** Determine para qué valores de $a, a \in \mathbb{R}$, el sistema tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución, y determine la solución casos que corresponda

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & ay & - & a^2z & = & 1-a \\ ax & + & ay & + & a^2z & = & a \\ (a+1)x & + & ay & + & (a+a^2)z & = & a+1 \end{array} \right.$$

Solución La matriz ampliada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -a^2 & 1-a \\ a & a & a^2 & a \\ a+1 & a & a+a^2 & 1+a \end{array} \right)$$

Aplicando operaciones elementales por fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -a^2 & 1-a \\ a & a & a^2 & a \\ a+1 & a & a+a^2 & 1+a \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+a^2 & a \end{array} \right)$$

Si $a = 0$ se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

se tienen infinitas soluciones con dos parámetros libres: $x = 1, y, z \in \mathbb{R}$.

Si $a = -1$ se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

el sistema es inconsistente.

Si $a \neq 0, a \neq -1$ se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a + a^2 & a \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+1} \end{array}\right)$$

el sistema tiene solución única.
