

EXAMEN DE SUFICIENCIA

INSTRUCCIONES: Esta es una prueba de desarrollo. Por tanto, incluya el procedimiento que utilizó para llegar a sus respuestas. Las preguntas resueltas con lápiz o que presenten secciones pintadas con tempera (corrector) no podrán apelarse. Utilice un cuaderno de examen u hojas debidamente grapadas.

1. Considere el conjunto $S_9 = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Determine el número de subconjuntos de S_9 que:
 - (a) poseen al menos siete elementos. (3 puntos)
 - (b) tienen exactamente seis elementos y no tienen al siete elemento. (3 puntos)
 - (c) tienen exactamente cinco elementos, donde cada subconjunto debe contener al menos un múltiplo de tres. (4 puntos)
2. Si el equipo de fútbol de Cartago en el actual campeonato tiene 14 goles a favor en 8 partidos jugados con distintos rivales.
 - (a) ¿Cuáles son las posibles distribuciones de los goles por partido que pudieron ocurrir? (3 puntos)
 - (b) Se sabe que contra todos los rivales logró anotar al menos un gol, inclusive a Saprissa le logró anotar 3 goles, ¿cuáles son las posibles distribuciones de los goles por partido que pudieron ocurrir bajo estas condiciones? (4 puntos)
3. La probabilidad para una mujer de tener cáncer de mama sin haber presentado síntomas es de 0.8%. Si tiene cáncer y se realiza la mamografía, la probabilidad de salir positiva es del 90%, pero el 7% de mujeres sanas dan positivo en este examen. Suponga que una mujer decide hacerse una mamografía y el resultado es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la mujer tenga cáncer? (5 puntos)
4. Un grupo de 9 estudiantes van a un bar, pero 4 de ellos son menores de edad. Si el mesero les pide la cédula a cinco de ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que describa al menos dos de los menores? (4 puntos)

5. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad f_X definida por

$$f_X(x) = \frac{2^{x+1}}{4^x} \text{ para } x = 2, 3, 4, \dots$$

- (a) Verifique que f_X satisface las condiciones necesarias para ser una función de distribución de probabilidad. (4 puntos)

- (b) Pruebe que la función generadora de momentos de X es

$$m_X(t) = \frac{e^{2t}}{2 - e^t} \text{ si } t < \ln 2$$

(5 puntos)

- (c) Determine la esperanza de X . (3 puntos)

6. Se sabe que el tiempo de espera al hacer fila para almorzar en el comedor de la universidad CET sigue una distribución Gamma con $\alpha = 4$. La probabilidad de que una persona, elegida al azar, espere menos de 15 minutos es de 0.353. Determine el tiempo promedio de espera al hacer fila para almorzar en esta universidad. (4 puntos)

7. Las vacas de don Hernán tienen pesos que se distribuyen normalmente, donde no se conoce el promedio ni la desviación estándar. Su hijo David desea comprar el 10% de las vacas de menor peso. Para ello toman 100 vacas aleatoriamente y se dan cuenta que 25 de ellas pesan menos de 400 kg; luego las sueltan y hacen otra captura con la misma cantidad de vacas y determinan que 20 de ellas pesan más de 600 gramos. ¿Cuál es el peso máximo de las vacas que comprará David? (5 puntos)

8. El tiempo en minutos que tarda cierto componente electrónico en funcionamiento sigue una distribución con $E(X) = \frac{10}{9}$ y $Var(X) = \frac{5}{324}$.

- (a) Si 40 componentes eléctricos se ponen a funcionar, ¿cuál es la probabilidad de que su duración promedio sea superior a 1.1 minutos? (4 puntos)

- (b) Si varios componentes se ponen en funcionamiento en serie (cuando el primero deja de funcionar comienza a funcionar el segundo, y al dejar de funcionar entra en funcionamiento el tercero,...). ¿Cuántos componentes es necesario unir para tener una probabilidad superior al 95% de que el tiempo total de funcionamiento sea superior a una hora? (4 puntos)

9. Sea p la probabilidad de que un estudiante del TEC no realice el examen final de un curso de inglés. Para determinar esta probabilidad, se observó que en una muestra de 1000 estudiantes, la probabilidad de que por lo menos 100 estudiantes realicen el examen final de un curso de inglés es de 15%. Con base en esta estimación, halle la probabilidad aproximada de p . (5 puntos)