INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA DISCRETA

14 de junio de 2005
Total: 30 puntos
Tiempo: 2 h.

TERCER EXAMEN PARCIAL

Este es un examen de desarrollo, por tanto deben aparecer todos los pasos que sean necesarios para obtener su respuesta.

1. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que la igualdad
$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$
es válida para todo $n \geq 1$, con n número natural. Además, utilice esta fórmula para calcular el valor exacto de
$$\frac{1}{17\cdot 21}+\frac{1}{21\cdot 25}+\cdots+\frac{1}{397\cdot 401}$$
(6 puntos)

2. Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $10^{n+1}+12\cdot 4^{n+2}-4$ es divisible por 9, para todo $n \geq 0$, con n número natural. (4 puntos)

3. Considere $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, si $n \geq 2$, con $a_0 = 4$, $a_1 = -13$
   (a) Utilice ésta fórmula para encontrar el valor de a_4. (1 punto)
   (b) Determine la fórmula explícita para esta relación y utilice esta fórmula para encontrar el valor de a_4. (4 puntos)

4. Suponga que la fórmula explícita asociada a la relación de recurrencia homogénea a_n, para $n \geq 1$, es:
$$a_n = 5\cdot 4^n - n\cdot 4^n + n + 1$$
Determine la fórmula recursiva de esta sucesión. (3 puntos)

5. En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la operación $\oplus$ como

$$a \oplus b = 3 + a + b$$

(a) Pruebe que $(\mathbb{Z}, \oplus)$ es grupo abeliano. (4 puntos)

(b) Calcule $(5 \oplus 3^{-1})^2 \oplus \left[7^{-3} \oplus 2 \oplus (-3)\right]$ (2 puntos)

6. Considere el conjunto $\mathbb{Z}_7^*$, con la operación interna $\odot$ como la multiplicación usual de clases de equivalencia.

(6 puntos)

(a) Construya la tabla de operación para el grupo $(\mathbb{Z}_7^*, \odot)$

(b) Determine el elemento neutro y los inversos de cada elemento del grupo

(c) Efectue las siguientes operaciones

$$\left[(\overset{\bullet}{4})^{-2} \odot \overset{\bullet}{5}\right] \odot (\overset{\bullet}{3})^{30}$$

(d) Determine todos los subgrupos del grupo $(\mathbb{Z}_7^*, \odot)$