Universidad Centroamericana José Simeón Cañas
Departamento de Matemática
Cálculo III – Secc. 04
Ing. Julián Manzano

Discusión #7

VIERNES 11 DE OCTUBRE DE 2024

1) Determine si F es un campo vectorial conservativo o no lo es. Si es así, encuentre una función f tal que $F = \nabla f$

$$a)\ [e^x \operatorname{sen}(y)]\ \mathbf{i} + [e^x \cos(y)]\ \mathbf{j}$$
$$b)\ [ye^x + \operatorname{sen}(y)]\ \mathbf{i} + [e^x + x\cos(y)]\ \mathbf{j}$$

2) Demuestre que si el campo vectorial $F = P\ \mathbf{i} + Q\ \mathbf{j} + R\ \mathbf{k}$ k es conservativo y $P, Q\ y\ R$ tienen derivadas parciales continuas de primer orden, entonces:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

3) Encuentre la masa de un alambre delgado que está colocado a lo largo de una curva
$r(t) = \sqrt{2}t\ \mathbf{i} + \sqrt{2}t\ \mathbf{j} + (4 - t^2)\ \mathrm{k},\ 0 \leq t \leq 1$
si la densidad es:

$$a)\ \delta = 3t$$
$$b)\ \delta = 1$$

4) Encuentre el centro de masa de un alambre delgado colocado a lo largo de la curva

$$r(t) = t\ \mathbf{i} + 2t\ \mathbf{j} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\ \mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$$

Si la densidad es:

$$\delta = 3\sqrt{5+t}$$

5) Una varilla delgada con densidad constante está colocada a lo largo del segmento de la recta:

$$r(t) = t\ \mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}\ , 0 \leq t \leq 1 \text{ en } yz$$

Encuentre el momento de inercia de la varilla respecto a los tres ejes coordenados.

Teorema: Si $F(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservatorio donde P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden sobre un dominio D entonces en la totalidad de D tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

6) Dada la función:

$$F(x,y) = \frac{-yi + xj}{x^2 + y^2}$$

$a)$ Demuestre que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$b)$ Demuestre que $\int_C F \cdot dr$ no es independiente de la trayectoria.

(Como sugerencia calcule $\int_{c1} Fdr$ y $\int_{c2} Fdr$ donde C1 y C2 son las mitades superior e inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ desde]1 , 0[hasta]−1 , 0[ )

Con lo hecho en este literal reflexione. ¿Contradice esto el teorema mencionado al inicio del ejercicio?