Universidad Centroamericana José Simeón Cañas
Departamento de Matemática
Cálculo III

Discusión #3

VIERNES 6 DE SEPTIEMBRE DE 2024

1. Demuestre que el elipsoide:

$$S: 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$$

y la esfera

$$H: x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$$

son tangentes entre sí en el punto $P(1, 1, 2)$ (Esto significa que tiene un plano tangente común en ese punto)

2. Dos superficies son ortogonales en un punto de intersección si las rectas normales son perpendiculares en ese punto. Demuestre que las superficies con ecuaciones $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales en un punto donde $\nabla F \neq 0$ y $\nabla G \neq 0$ sí y solo si:

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0 \text{ en } P$$

3. Demuestre que la ecuación del plano tangente al elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

En el punto $(x_{0,} y_0, z_0)$ puede escribirse como:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

4. Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico Vestá dado por

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

a) Determine la razón de cambio del potencial en P (3, 4, 5) en la dirección del vector

$$\mathrm{v} = \mathrm{i} + \mathrm{j} - \mathrm{k}$$

b) ¿En qué dirección cambia Vcon mayor rapidez en P?

c) ¿Cuál es la razón máxima de cambio en P?

5. Determine los máximos y mínimos locales para:

$$Q(x, y) = e^x \cos(y)$$

6. Suponga que las derivadas direccionales de $f(x, y)$ se conocen en un punto dado en dos direcciones no paralelas dadas por los vectores unitarios u y v ¿Es posible determinar $f\nabla$ en ese punto? Si es así, ¿cómo lo haría?