Instituto Tecnológico de Costa Rica
Área de Ingeniería en Computadores
Profesor: Dr. Pablo Alvarado Moya
CE-3102 Análisis Numérico para Ingeniería — Fecha de entrega: **7 de agosto, 2018**
II Semestre 2018

Tarea 1

1. La función de error se utiliza con frecuencia en aplicaciones estadísticas y probabilísticas, y está definida como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

donde el factor $2/\sqrt{\pi}$ tiene como tarea asegurar que $\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$.

Para esta función no existe una representación algebraica cerrada en términos de funciones trascendentales, por lo que para su cálculo es necesario utilizar series de potencias.

Recuérdese que la serie de Taylor de la función exponencial es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

y si reemplazamos $x = -t^2$ entonces obtenemos directamente

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} - \frac{t^8}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k}$$

Con esto podemos encontrar fácilmente la serie de Taylor de la función de error $\operatorname{erf}(x)$ integrando la serie anterior término a término:

$$\begin{aligned}
\operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k} \right) dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k}\, dt \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}
\end{aligned}$$

Realice una función en GNU/Octave denominada `[v,ev,ea,n]=anpi_erf(x,c)` que reciba $\boxed{35\,\text{pts}}$

`x`: valor real de entrada

`c`: número entero de cifras significativas, que debe ser menor que el número de cifras significativas de la precisión utilizada (revisar estándar IEEE 754).

El programa debe estimar el valor `v` de la función de error utilizando la serie de Taylor anterior de modo que se asegure que es exacto en al menos `c` cifras significativas.

Como salida, el programa debe producir:

`v`: el valor estimado

`ev`: el error relativo porcentual verdadero

`ea`: el error relativo porcentual aproximado

`n`: el número de términos de la serie utilizado para el cálculo

Observe que GNU/Octave ya tiene implementada la función $\operatorname{erf}(x)$, que puede utilizar para calcular el valor "verdadero".

2. Encuentre la representación binaria *exacta* de $0{,}1_{10}$. $\boxed{5\,\text{pts}}$

   Sugerencia: Utilice división binaria sabiendo que $0{,}1_{10} = 1/10_{10} = 0001_2/1010_2$

3. En GNU/Octave, introduzca los siguientes comandos:

```
output_precision(30)
a=single(0.1)
b=double(0.1)
double(a)-b
```

   Explique qué hace cada línea y qué resultado produce cada una. Indique por qué el resultado final no es igual a cero. $\boxed{25\,\text{pts}}$

4. Realice una función en GNU/Octave que provea las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, para precisiones numéricas simple y doble. Compruebe los errores producidos si $b^2 \gg 4ac$ con $a = 1$; $b = -6000{,}0002$ y $c = 1{,}2$. Utilice tanto la fórmula cuadrática tradicional: $\boxed{35\,\text{pts}}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   como la fórmula cuadrática alternativa

$$x_{1,2} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

   Indique claramente cuál de las fórmulas produce en qué casos mejores resultados. Observe que los resultados exactos para el ejemplo son $\{6000; 2 \times 10^{-4}\}$

Esta tarea es individual. Favor subir a tiempo el documento al tecDigital según las instrucciones indicadas en el programa del curso. Note que las entregas tardías se penalizan.