Tarea 2 - Dados

Sebastián Martínez, Juan Darracq, Diego Handalian, Francisco Cabarcos

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA APLICADA

13/05/2024

Introducción

Los juegos de dados han sido parte de la cultura y el entretenimiento a lo largo de la historia de la humanidad. Basados en la aleatoriedad y la probabilidad, han sido objeto de estudio y análisis en el campo de la probabilidad y la estadística.

En este informe, emplearemos la herramienta de la probabilidad condicional para analizar un juego de dados entre dos jugadores. Nuestro principal objetivo es determinar si alguno de los jugadores tiene una mayor probabilidad de obtener ciertos puntajes. Además de este enfoque teórico, realizaremos una simulación del juego en Python. Esta simulación nos permitirá poner a prueba nuestras conclusiones teóricas en un entorno práctico y dinámico.

Para lograr una comunicación efectiva de nuestras ideas y resultados comenzaremos presentando el problema y estableciendo nuestros objetivos de investigación. Luego, exploramos el marco teórico que respalda el análisis de la probabilidad condicional aplicada al juego de dados. A continuación, desarrollaremos una solución para las preguntas planteadas en la tarea y detallaremos la implementación de la simulación en Python, destacando las herramientas y técnicas empleadas. Finalmente, concluimos con una reflexión sobre los resultados obtenidos.

Presentación del Problema

El juego de dados requiere dos dados y se juega entre dos jugadores, a quienes llamaremos Juan y María. Cada jugador lanza los dos dados y obtiene un puntaje en el conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. El jugador que acumule más puntos ganará la partida.En este juego, se suman puntos si uno de los dados muestra un 4, y el puntaje corresponde al valor del otro dado. Los posibles puntajes se pueden observar en la figura 1.1. Cualquier otro resultado donde ninguno de los dados muestra un 4 vale 0 puntos.

Resultados	Puntaje
$(4, 1)$	1
$(1, 4)$	1
$(4, 2)$	2
$(2, 4)$	2
$(4, 3)$	3
$(3, 4)$	3
$(4, 4)$	4
$(4, 5)$	5
$(5, 4)$	5
$(6, 4)$	6
$(4, 6)$	6

Figura 1.1

El juego se desarrolla en dos fases:

1. En la primera tirada, si un jugador obtiene 0 puntos, tiene la opción de lanzar los dados de nuevo. En este caso, su puntaje final será el obtenido en la segunda tirada.
2. Si un jugador no obtiene 0 puntos en su primera tirada (es decir, si al menos uno de los dados muestra un 4), tiene la oportunidad de lanzar de nuevo el dado que no haya mostrado un 4 o mantener los puntos obtenidos en la primera tirada. Si decide volver a tirar, su puntaje final será el obtenido en esta segunda tirada.

De acuerdo a las reglas establecidas Juan decide seguir la siguiente estrategia de juego:
Si obtiene 0 puntos utilizará su segunda tirada de ambos dados. Si obtiene 1, 2 o 3 puntos utilizará su segunda tirada de uno de los dados para intentar mejorar su
puntaje, por último si obtiene más de 3 puntos se plantará en su puntaje y no utilizará su tirada adicional de uno de los dados.

Ahora que conocemos el problema vamos a identificar algunas de las problemáticas que nos deja esta tarea.

En primer lugar vamos a investigar por qué la estrategia elegida por Juan es razonable para intentar ganar el juego y en un segundo lugar hallar analíticamente la probabilidad de que Juan obtenga k puntos en este juego, para los valores de k = 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Asimismo, diseñaremos una estrategia de juego para María que maximice sus chances de ganar.

Marco Teórico

- **Espacio Muestral:** Conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio, se le denota con la letra **Ω**. Por ejemplo, el espacio muestral de un dado sería el siguiente: **Ω** = {1,2,3,4,5,6}.
- **Evento:** Un evento es un subconjunto del espacio muestral, siendo así un resultado posible de un experimento aleatorio. Por ejemplo, la probabilidad de que en un dado salga 6.
- **Probabilidad Condicional:** Medida de la probabilidad de que ocurra un evento, dado que ya se sabe que ha ocurrido otro suceso. Se representa de la siguiente manera $P(A|B) = \frac{2}{3}$, que se entiende como la probabilidad de que ocurra A sabiendo qué ocurrió B. La manera de calcularla es la siguiente: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
  La probabilidad condicional cuenta con distintas propiedades:
- $P(A|\Omega) = P(A)$
- $Si\ A\ y\ B\ son\ incompatibles\ entonces\ P(A|B) = 0$
- $Si\ B \subset A\ entonces\ P(A|B) = 1$
- $Si\ A \subset B\ entonces\ P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$
- $P(B|B) = 1$

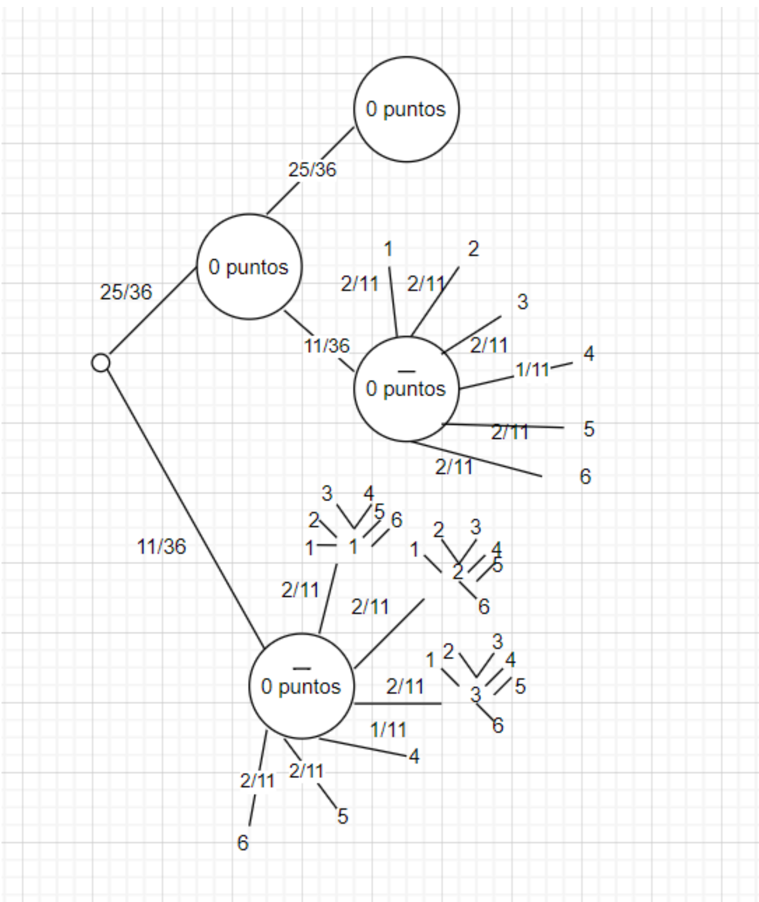
- **Eventos Independientes:** La ocurrencia de un evento no afecta la probabilidad del otro. Decimos que dos eventos A y B son independientes sí $P(A \cap B) = P(A) \star P(B)$.
- **Diagrama de árbol:** Sirve para demostrar los distintos eventos y sus probabilidades. Donde los nodos son los eventos y las aristas sus probabilidades.

- **Fórmula de Bayes:** Fórmula para "invertir" los eventos. Se define de la siguiente manera $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$. Un ejemplo sería: Si se sabe que el producto falló, cuál es la probabilidad que se haya fabricado en la fábrica A.

Estrategia de Juan y Análisis de Resultados.

La estrategia de Juan es razonable, él trata de ganar al equilibrar la búsqueda de puntajes más altos con la mínima chance de riesgo de obtener puntajes más bajos. Al decidir utilizar su segunda tirada solo cuando su puntaje inicial es bajo, Juan intenta mejorar sus probabilidades de obtener un puntaje más alto y superar a su oponente, mientras que plantarse en puntajes más altos reduce el riesgo de empeorar su situación. En resumen, su estrategia considera el balance entre riesgo y recompensa para tomar decisiones informadas durante el juego.

Investigación analítica mediante un árbol de probabilidad



Este árbol representa el juego de Juan. Para poder explicar cómo está construido este diagrama de árbol vamos a dividir el juego de Juan para su primera tirada en 2 eventos que llamaremos A= "$0\ puntos$" y B= "$\overline{0\ puntos}$". El evento " $\overline{0\ puntos}$ "engloba las posibles tiradas donde Juan saca algún punto, siendo el 4 en algún dado y algo más en otro dado.

Podemos visualizar que desde la raíz del diagrama se separan estos dos eventos donde $P(A) = \frac{25}{36}$ y $P(B) = \frac{11}{36}$.

Como explicamos en la sección de explicación del problema, si Juan saca 0 puntos Juan tira de vuelta 2 dados, entonces para su segunda tirada estos dos eventos se vuelven a repetir. Pero ahora lo que le salga a Juan en su segunda tirada es su puntaje definitivo.
Si no saca 4 en ninguno de los dados Juan obtendrá 0 puntos, siendo la probabilidad de este evento $\frac{25}{36}*\frac{25}{36}$. Sin embargo, si saca 4 en algún dado la probabilidad de obtener los diferentes puntos es $\frac{25}{36} * \frac{11}{36} * \frac{2}{11}$ para los casos donde Juan saca inicialmente 0 ($\frac{25}{36}$) luego saca en algún dado 4 ($\frac{11}{36}$), formando así {(4,1), (1,4), (4,2), (2,4), (4,3), (3,4), (4,5), (5,4) (4,6), (6,4)} o $\frac{25}{36} * \frac{11}{36} * \frac{1}{11}$ para la pareja (4,4)

C="la probabilidad de sacar 1 o 2 o 3 si ocurre B" = 2/11
D= la probabilidad de sacar un número en un dado = ⅙ para cada puntaje
E="la probabilidad de sacar 5 o 6 si ocurre B" = 2/11
F="la probabilidad de sacar 4 si ocurre B" = 1/11

Resultados obtenidos para k=1,2,3
$P(A)* P(B) * P(C) + ((P(B) * P(C) * P(D)) * 3$ = 25/36 * 11/36 * 2/11 + (11/36 * 2/11 * 1/6) * 3 = 43/648

Resultados obtenidos para k=5,6
$P(A)* P(B) * P(E) + P(B) * P(E) + ((P(B) * P(E) * P(D))$ * 2=
25/36 * 11/36 * 2/11 + 11/36 * 2/11 + (11/36 * 2/11 * 1/6) * 2 = 79/648

Resultados obtenidos para k=4
$P(A)* P(B) * P(F) + P(B) * P(F) + ((P(B) * P(E) * P(F))$ =
25/36 * 11/36 * 2/11 + 11/36 * 2/11 + (11/36 * 2/11 * 1/6) * 2 =97/1296

Estrategia de María

La estrategia de María para ganar se beneficia de saber lo que sacó Juan para decidir si tira de nuevo o no. Como primer punto, si Juan saca 0 puntos, a María le basta con sacar un 4 para ganar. Como segundo punto, si María saca menos que Juan en la primera tirada, siempre tirará de nuevo. Sin embargo, si María empata con Juan en su primera tirada, se desprenden dos posibles caminos que María puede tomar para decidir si utilizar la segunda tirada.

En primer lugar, si María y Juan sacan 4 y algún $k=\{1,2,3\}$, es decir, empatan con alguno de esos valores, María tirará de nuevo, ya que las probabilidades de ganar son mayores que las de perder. Vamos a mostrar punto por punto cada probabilidad, donde ganar equivale a sacar más que Juan, perder equivale a sacar menos que Juan y empatar equivale a sacar lo mismo que Juan.

Si Juan obtiene 1 punto y María también obtiene 1 punto en su primera tirada, si María tira de nuevo, la probabilidad de ganar es de 5/6, la de empatar es de 1/6 y la de perder es de 0.

También, si Juan obtiene 2 puntos y María también obtiene 2 puntos, si María tira de nuevo, las posibilidades de ganar son de 4/6, las de empatar son de 1/6 y las de perder son de 1/6.

Asimismo si Juan obtiene 3 puntos y María también obtiene 3 puntos, si María tira de nuevo, las posibilidades de ganar son de 3/6, las de empatar son de 1/6 y las de perder son de 2/6.

Ahora, sí Juan y María obtienen $k= \{4,5,6\}$, las probabilidades de que María gane si tira de nuevo disminuyen. Por ejemplo, si obtiene 4 puntos en la primera tirada, la probabilidad de ganar es de 2/6, la de empatar es de 1/6 y la de perder es de 3/6.

Si empata con Juan obteniendo 5 puntos en la primera tirada, en la segunda tirada la probabilidad de ganar es de 1/6, la de empatar es de 1/6 y la de perder es de 4/6.

Si empata con 6 puntos, en la segunda tirada la probabilidad de ganar es de 0, la de empatar es de 1/6 y la de perder es de 5/6.

Por lo tanto, si María empata con Juan en la primera vuelta con k={4,5,6}, basándonos en la probabilidad de ganar o perder, Maria no debería tirar de nuevo.

Resultados Según Simulación.

RESULTADO

Ganador	Total
Juan	386
Maria	356
Empate	258

RESULTADO

Ganador	Total
Juan	3557
Maria	3638
Empate	2805

RESULTADO

Ganador	Total
Juan	35623
Maria	36383
Empate	27994

- Frecuencia relativa de que Juan gane en 1.000 tiradas = 38,6%
- Frecuencia relativa de que Juan gane en 10.000 tiradas : 35,57%
- Frecuencia relativa de que Juan gane en 100.000 tiradas: 35,623%

- Frecuencia relativa de que Maria gane en 1.000 tiradas = 35,6%
- Frecuencia relativa de que María gane en 10.000 tiradas : 36,38%
- Frecuencia relativa de que María gane en 100.000 tiradas: 36,383%

- Frecuencia relativa de que Juan y María empaten en 1.000 tiradas = 25,8%
- Frecuencia relativa de que Juan y María empaten en 10.000 tiradas: 28,05%
- Frecuencia relativa de que Juan y María empaten en 100.000 tiradas: 27,994%

Podemos visualizar que la frecuencia de ganar de María se mantiene sin importar el número de tiradas y es mayor a la de Juan. Esto demuestra una cierta tendencia a ganar por parte de María.

Sin embargo , estos resultados muestran que el juego entre Juan y María es bastante equilibrado, con frecuencias relativas de victoria y empate que se mantienen relativamente constantes a medida que aumenta el número de tiradas.

Explicación del Código

```
def roll_dice():
    return random.randint(1, 6)
```

La función roll_dice() simula el lanzamiento de un dado, devolviendo un número aleatorio entre los números que se encuentran en un dado (1, 2, 3, 4, 5, 6).

```python
def is_valid(str_input):
    try:
        n = int(str_input)
        return n > 0  # Chequear si el input es un número mayor a 0
    except ValueError:
        return False
```

La función is_valid(str_input) verifica que la cadena ingresada por el usuario sea un número entero mayor que 0, ya que si no lo fuese generaría distintos errores en el programa. Si no es válido, en este caso, ya sea menor o igual a 0 o un string, el programa en la función play_game() solicitará que sea ingresado nuevamente un valor que sea válido (mayor a 0).

```python
def play_game():
    while True:
        sim_games_string = input(
            "Ingrese cuantas veces quiere simular el juego: ")
        if is_valid(sim_games_string):
            sim_games = int(sim_games_string)
            break
        else:
            print("Por favor, ingrese un número mayor a 0.")

    juan_wins = 0  # Cantidad de Victorias de Juan
    maria_wins = 0  # Cantidad de Victorias de María
    draws = 0  # Cantidad de Empates

    while (sim_games > 0):
        juan_score = juan_strategy()
        maria_score = maria_strategy(juan_score)

        if juan_score > maria_score:
            juan_wins += 1
        elif maria_score > juan_score:
            maria_wins += 1
        else:
            draws += 1

        sim_games = sim_games - 1

    print("\n      RESULTADO     \n  Ganador |  Total"
          "\n---------------------\n  Juan    |  ", juan_wins,
          "\n---------------------\n  Maria   |  ", maria_wins,
          "\n---------------------\n  Empate  |  ", draws, "\n")
```

La función play_game() permite al usuario ingresar cuántas veces quiere simular el juego. Luego, para simular la dinámica del juego, esta función llamará esa cantidad de veces a las funciones juan_strategy() y maria_strategy(juan_score) alternando entre ellas. Según los puntajes obtenidos por Juan y María en cada ronda se registrará el ganador de la misma. Y se reiniciará nuevamente sus valores a 0 y realizará el mismo proceso hasta finalizar todas las simulaciones solicitadas.

Al finalizar las simulaciones se despliega una tabla mostrando las victorias de Juan, las victorias de María y los empates.

```python
def juan_strategy():
    juan_score = 0
    dice1 = roll_dice()
    dice2 = roll_dice()

    if dice1 == 4 or dice2 == 4:
        juan_score = dice1 + dice2 - 4
        if dice1 < 4:
            dice1 = roll_dice()
        if dice2 < 4:
            dice2 = roll_dice()
        if dice1 == 4 or dice2 == 4:
            juan_score = dice1 + dice2 - 4
    else:
        dice1 = roll_dice()
        dice2 = roll_dice()
        if dice1 == 4 or dice2 == 4:
            juan_score = dice1 + dice2 - 4
        else:
            juan_score = 0
    return juan_score
```

```python
def maria_strategy(juan_score):
    maria_score = 0
    dice1 = roll_dice()
    dice2 = roll_dice()

    if dice1 == 4 or dice2 == 4:
        maria_score = dice1 + dice2 - 4
        if maria_score > juan_score:
            return maria_score
        else:
            if maria_score == juan_score and maria_score > 3:
                return maria_score
            if dice1 == 4 & dice2 == 4:
                dice2 = roll_dice()
            elif dice1 < 4:
                dice1 = roll_dice()
            elif dice2 < 4:
                dice2 = roll_dice()
            if dice1 == 4 or dice2 == 4:
                maria_score = dice1 + dice2 - 4
    else:
        dice1 = roll_dice()
        dice2 = roll_dice()
        if dice1 == 4 or dice2 == 4:
            maria_score = dice1 + dice2 - 4
        else:
            maria_score = 0
    return maria_score
```

Las funciones juan_strategy() y maria_strategy(juan_score) establecen las estrategias de juego de Juan y María respectivamente.

En la estrategia de Juan, se tiran ambos dados y se chequea si alguno es 4, si alguno es 4 se controla que el otro sea mayor o igual a 4 o sino se vuelve a tirar ambos dados y se vuelve a chequear.

Para la estrategia de María, también se tiran ambos dados y si alguno es igual a 4, se compara con el puntaje obtenido de Juan. Si el puntaje de María es menor se vuelve a tirar.

Estas funciones determinan las decisiones que cada jugador toma durante el juego, basándose en su puntaje actual y en las reglas del juego.

Conclusión

De acuerdo a los resultados obtenidos en la búsqueda de la probabilidad de que Juan obtenga ciertos puntajes, podemos observar, según el diagrama de árbol, que algunos puntajes son más probables que otros. Por ejemplo, para que Juan pueda sacar un 2, tiene una probabilidad de 43/648, mientras que para sacar un 6, tiene una probabilidad de 79/648.

Si bien la estrategia es conservadora en el sentido de que Juan decide si seguir jugando o plantarse en función de los puntos obtenidos en la primera tirada, minimizando así el riesgo de perder puntos innecesariamente, también revela una cierta rigidez. Esta rigidez puede llevar a no utilizar oportunidades de aumentar el puntaje cuando la situación del juego lo permita. Una estrategia flexible donde se tenga en cuenta el puntaje del oponente puede ser beneficioso para Juan.

En cuanto al caso de María, de acuerdo a los resultados obtenidos en las simulaciones, hemos observado que María tiene una tendencia a ganar sobre Juan. Ella mantiene un porcentaje de partidas ganadas parejo sin importar las tiradas.

María muestra una estrategia que depende en parte del puntaje de Juan. Esto puede llevar a una mayor variabilidad en sus resultados, ya que su decisión de tirar nuevamente los dados o mantener su puntaje inicial está influenciada por lo que sacó Juan.

La estrategia de María parece ser más adaptable y orientada a la situación que la de Juan, que según los resultados proporciona una ventaja en el juego.