CONGRUENCIAS

Ejemplo 1. Determina si la siguiente expresión es congruente: 21$\equiv$-3(mod 8)

Dado que 21 mod 8 = 5 y -3 mod 8 = 5, se concluye que la expresión es congruente.

Ejemplo 2. Determina si la siguiente expresión es congruente: -7$\equiv$-22(mod 5)

Por definición, -7-(-22) = 5k , k$\in$Z, entonces 15 = 5k, con k=3. Por lo tanto, la expresión sí es congruente.

Ejemplo 3. Determina si la siguiente expresión es congruente: 28$\equiv$17(mod7)

Por definición, 28-17 = 7k, k$\in$Z. 11$\neq$7k, pues no existe k$\in$Z tal que 7k=11. Por lo tanto, la expresión no es congruente.

Ejemplo 4. Obtén la solución general de la siguiente congruencia lineal: $3x\equiv 2(\text{mod } 7)$

Dado que tenemos (mod 7), x debe estar en el rango {0,1,2,3,4,5,6}, es decir, desde 0 hasta 7-1. Puesto que 7 es un número pequeño, podemos probar para cada valor posible:

- $x=0$

$3(0)\equiv 2(\text{mod } 7)$, pero $0\equiv!2(\text{mod } 7)$

- $x=1$

$3(1)\equiv 2(\text{mod } 7)$, pero $3\equiv!2(\text{mod } 7)$

- $x=2$

$3(2)\equiv 2(\text{mod } 7)$, pero $6\equiv!2(\text{mod } 7)$

- $x=3$

$3(3)\equiv 2(\text{mod } 7)$, y $9\equiv 2(\text{mod } 7)$, por tanto, un valor posible de x es 3. Como tenemos valores infinitos, podemos expresar la solución general como **$x=3+7t$**

Ejemplo 5. Obtén la solución general de la siguiente congruencia lineal: $6x\equiv 3(\text{mod } 4)$

Valores posibles para x: {0,1,2,3}

- $x=0$

$0\equiv!3(\text{mod } 4)$

- $x=1$

$6\equiv!3(\text{mod } 4)$

- $x=2$

$12\equiv!3(\text{mod } 4)$

- $x=3$

$18\equiv!3 \pmod 4$

Ya que ningún valor de x es congruente con $3 \pmod 4$, decimos que no existe solución.

Ejemplo 6. Obtén la solución general de la siguiente congruencia lineal: $4x\equiv 2 \pmod 6$

En este caso, tenemos dos valores de x que cumplen con la congruencia: $x=2$ y $x=5$.

Esto nos indica que existen dos conjuntos de soluciones posibles:

- $x=2+6t,\ t\in Z$
- $x=5+6t,\ t\in Z$

Ejemplo 7. Resuelve la siguiente ecuación de congruencia: $x-4\equiv 11 \pmod{13}$

Podemos restar 4 para dejar sola a la variable x, pero debemos ser muy cuidadosos, pues no lo podemos hacer directamente: debemos buscar un número congruente con $4 \pmod{13}$:

Una forma sencilla de hacer esto es escoger un número arbitrario k y realizar la operación 13k+4. Para este ejemplo usaremos k =2:
13(2)+4=30, por lo tanto 4≡30(mod 13).

Así, tenemos que x-4+4≡11+30(mod 13), y finalmente tenemos que **x≡41(mod 13).** Podemos comprobar este resultado haciendo x=41 y sustituyendo en la ecuación original:
41-4≡11(mod 13), y efectivamente, 37≡11(mod 13) es congruente, por lo tanto el resultado **x≡41(mod 13) es correcto.**

Ejemplo 8. Resuelve la siguiente ecuación de congruencia:
6c≡18(mod 21)

Podemos simplificar un 2 ya que MCD(2,21)=1:

3c≡9(mod 21). Si existe un número que sea múltiplo de los tres términos (a, b y m), podemos simplificarlo pero esto nos cambiará el módulo, por lo que al final debemos arreglar ese problema.
3c≡9(mod 21) => c≡3(mod 7). Ahora observemos la operación que realizamos cuando cambiamos de módulo: $\frac{21}{3} = \frac{m}{d}$. Llamaremos "d" al número que usamos anteriormente para dividir todos los términos de la ecuación, en este caso, 3.

Usaremos la expresión $3 + \frac{m}{d}k,\ k = \{0, 1, \ldots, d-1\}$ para obtener una serie de soluciones (llamadas clases) a la ecuación:

- k=0

3+0=3, entonces c≡3(mod 21)

- k=1

3+7=10, entonces c≡10(mod 21)

- k=2

3+14=17, entonces c≡17(mod 21)

Por tanto, las tres clases anteriores son el resultado de la congruencia.

Ejemplo 9. Resuelve la siguiente ecuación de congruencia:

10c≡80(mod 45)

MCD(2,45)=1, por tanto podemos simplificar el 2:

5c≡40(mod 45)

Ahora podemos dividir todos los términos entre 5:

c≡8(mod 7)

Realizamos la operación $\frac{45}{5} = \frac{m}{d}$, por tanto, nuestras clases quedarán como: $8 + \frac{m}{d}k,\ k = \{0, 1, \ldots, d-1\}$

- k=0

c≡8(mod 45)

- k=1

c≡15(mod 45)

- k=2

c≡22(mod 45)

- k=3

c≡29(mod 45)

- k=4

c≡36(mod 45)

RELACIONES

Ejemplo 1. Sea X={2,3,4} y Y={3,4,5,6,7}, se define a la relación R como: (x,y)∈R si x divide a y.

2R4, pues 4/2=2
2R6, pues 6/2=3
3R3, pues 3/3=1
3R6, pues 6/3=2
4R4, pues 4/4=1

Por tanto la relación xRy es fácil de definir: **R={(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4)}**

Ejemplo 2. Sea X={2,3,4} y Y={3,4,5,6,7}, se define a la relación R como: (x,y)∈R si x divide a y. Encuentra la relación inversa R^{-1}.

Dado que R={(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4)}, la relación inversa está dada por los pares ordenados de R invertidos:

R^{-1} **={(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4)}**

Ejemplo 3. Sean A un conjunto de estudiantes y R una relación de A a A tal que (a, b) ∈ R, si y sólo si a vive en el mismo dormitorio que b.

Puesto que cualquier persona vive en el mismo dormitorio que ella misma (aRa), R es una **relación reflexiva**.
Si a vive en el mismo dormitorio que b (aRb), entonces b vive en el mismo dormitorio que a. Así, R es una **relación simétrica**.
Si a vive en el mismo dormitorio que b y b vive en el mismo dormitorio que c, entonces a vive en el mismo dormitorio que c. Por tanto, R es una **relación transitiva**.

En consecuencia, R es una **relación de equivalencia**.

FUNCIONES DE DISPERSIÓN

Ejemplo 1. Sea N=100 el tamaño del arreglo, K1=7259 y K2=9359 son los dos datos que deben guardarse. Obtenga las direcciones mediante la función Hash por módulo.

H(K1)=(7259 mod 100) + 1 = 60
H(K2)=(9359 mod 100) + 1 = 60

Como el resultado es el mismo, nos encontramos ante una colisión. Para evitar esto, podemos obtener la dirección con un módulo distinto de 100. 97, por ejemplo:

H(K1)=(7259 mod 97) + 1 = 82
H(K2)=(9359 mod 97) + 1 = 48

Ejemplo 2. Sea N=100 el tamaño del arreglo, K1=7259 y K2=9359, son los datos que deben guardarse. Obtenga las direcciones mediante la función Hash cuadrada.

$K_1^2 = 52693081 \ \& \ K_2^2 = 87590881$

52693081 => H(K1)= 93+1 = 94
87590881 => H(K2) = 90+1 = 91

Ejemplo 3. Sea N=100 el tamaño del arreglo, K1=7259 y K2=9359, son los datos que deben guardarse. Obtenga las direcciones mediante la función Hash por truncamiento.

Esta forma de hashing es muy subjetiva, pues depende de la elección de los dígitos utilizados que elija la persona. Por tanto, las soluciones son muchas.

Podemos elegir los dígitos pares:

H(K1) = 29+1 = 30
H(K2) = 39 + 1 = 40

Ejemplo 4. Sea N=100 el tamaño del arreglo, K1=7259 y K2=9359, son los datos que deben guardarse. Obtenga las

direcciones mediante la función Hash por plegamiento, tomando partes de dos dígitos cada una.

H(K1) = (72+59)+1 = (131)+1 = 31 + 1 = 32
H(K2) = (93+59)+1 = (152)+1 = 52 + 1 =53