**CONGRUENCIAS**

**Ejemplo 1. Determina si la siguiente expresión es congruente: 21**$\equiv -3 \pmod 8$

Dado que 21 mod 8 = 5 y -3 mod 8 = 5, se concluye que la expresión es congruente.

**Ejemplo 2. Determina si la siguiente expresión es congruente:** $-7 \equiv -22 \pmod 5$

Por definición, $-7-(-22) = 5k$ , $k \in Z$, entonces $15 = 5k$, con $k=3$. Por lo tanto, la expresión sí es congruente.

**Ejemplo 3. Determina si la siguiente expresión es congruente:** $28 \equiv 17 \pmod 7$

Por definición, $28-17 = 7k$, $k \in Z$. $11 \neq 7k$, pues no existe $k \in Z$ tal que $7k=11$. Por lo tanto, la expresión no es congruente.

**Ejemplo 4. Obtén la solución general de la siguiente congruencia lineal:** $3x \equiv 2 \pmod 7$

Dado que tenemos (mod 7), x debe estar en el rango {0,1,2,3,4,5,6}, es decir, desde 0 hasta 7-1. Puesto que 7 es un número pequeño, podemos probar para cada valor posible:

- $x=0$

$3(0) \equiv 2 \pmod 7$, pero $0 \equiv! 2 \pmod 7$

- $x=1$

$3(1) \equiv 2 \pmod 7$, pero $3 \equiv! 2 \pmod 7$

- $x=2$

$3(2) \equiv 2 \pmod 7$, pero $6 \equiv! 2 \pmod 7$

- $x=3$

$3(3) \equiv 2 \pmod 7$, y $9 \equiv 2 \pmod 7$, por tanto, un valor posible de x es 3. Como tenemos valores infinitos, podemos expresar la solución general como **$x=3+7t$**

**Ejemplo 5. Obtén la solución general de la siguiente congruencia lineal:** $6x \equiv 3 \pmod 4$

Valores posibles para x: {0,1,2,3}

- $x=0$

$0 \equiv! 3 \pmod 4$

- $x=1$

$6 \equiv! 3 \pmod 4$

- $x=2$

$12 \equiv! 3 \pmod 4$

- $x=3$

$18 \equiv ! 3 \pmod 4$

Ya que ningún valor de x es congruente con $3 \pmod 4$, decimos que no existe solución.

**Ejemplo 6. Obtén la solución general de la siguiente congruencia lineal:** $4x \equiv 2 \pmod 6$

En este caso, tenemos dos valores de x que cumplen con la congruencia: $x=2$ y $x=5$.

Esto nos indica que existen dos conjuntos de soluciones posibles:

- $x=2+6t,\ t \in Z$
- $x=5+6t,\ t \in Z$

**Ejemplo 7. Resuelve la siguiente ecuación de congruencia:** $x-4 \equiv 11 \pmod{13}$

Podemos restar 4 para dejar sola a la variable x, pero debemos ser muy cuidadosos, pues no lo podemos hacer directamente: debemos buscar un número congruente con $4 \pmod{13}$:

Una forma sencilla de hacer esto es escoger un número arbitrario k y realizar la operación $13k+4$. Para este ejemplo usaremos $k=2$:
$13(2)+4=30$, por lo tanto $4\equiv 30 \pmod{13}$.

Así, tenemos que $x-4+4\equiv 11+30 \pmod{13}$, y finalmente tenemos que $\mathbf{x\equiv 41 \pmod{13}}$. Podemos comprobar este resultado haciendo $x=41$ y sustituyendo en la ecuación original:
$\mathbf{41-4}\equiv 11 \pmod{13}$, y efectivamente, $37\equiv 11 \pmod{13}$ es congruente, por lo tanto el resultado **$x\equiv 41 \pmod{13}$ es correcto.**

**Ejemplo 8. Resuelve la siguiente ecuación de congruencia:**
$6c\equiv 18 \pmod{21}$

Podemos simplificar un 2 ya que $MCD(2,21)=1$:

$3c\equiv 9 \pmod{21}$. Si existe un número que sea múltiplo de los tres términos (a, b y m), podemos simplificarlo pero esto nos cambiará el módulo, por lo que al final debemos arreglar ese problema.
$3c\equiv 9 \pmod{21} \Rightarrow c\equiv 3 \pmod{7}$. Ahora observemos la operación que realizamos cuando cambiamos de módulo: $\frac{21}{3}=\frac{m}{d}$. Llamaremos "d" al número que usamos anteriormente para dividir todos los términos de la ecuación, en este caso, 3.

Usaremos la expresión $3+\frac{m}{d}k,\ k=\{0,1,..\ .,d-1\}$ para obtener una serie de soluciones (llamadas clases) a la ecuación:

- k=0

3+0=3, entonces c≡3(mod 21)

- k=1

3+7=10, entonces c≡10(mod 21)

- k=2

3+14=17, entonces c≡17(mod 21)

Por tanto, las tres clases anteriores son el resultado de la congruencia.

**Ejemplo 9. Resuelve la siguiente ecuación de congruencia:**
10c≡80(mod 45)

MCD(2,45)=1, por tanto podemos simplificar el 2:
5c≡40(mod 45)
Ahora podemos dividir todos los términos entre 5:
c≡8(mod 7)
Realizamos la operación $\frac{45}{5}=\frac{m}{d}$, por tanto, nuestras clases quedarán como: $8+\frac{m}{d}k,\ k=\{0,1,..\ .,d-1\}$

- k=0

**c≡8(mod 45)**

- k=1

**c≡15(mod 45)**

- k=2

**c≡22(mod 45)**

- k=3

**c≡29(mod 45)**

- $k=4$

**$c \equiv 36 \pmod{45}$**