

Algunos aspectos principales mecánico estadísticos de las redes multiplexas.

Diego Alejandro Heredia Franco Juan Camilo Higuera Calderón

Introducción a la Sociofísica

Departamento de Física,

Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá,

Carrera 30 Calle 45-03, CP 111321, Bogotá, Colombia.

I. RESUMEN

En este trabajo se da una introducción al modelamiento de las redes multiplexas, primero desde un enfoque multilíneal para redes donde no hay correlación y luego a través del formalismo de los multilinks desarrollado en [1] para redes con correlación. Se presenta el formalismo de ensambles canónicos y microcanónicos para estos sistemas y se determina la forma de la entropía de Gibbs para ambos casos, mostrando algunos ejemplos que ilustran las características de las descripciones utilizadas, donde se evidencia la similitud en el tratamiento del formalismo de multilinks para sistemas correlacionados con el tratamiento multilíneal, pues el planteamiento de los ensambles sobre el sistema se desarrolla de la misma manera. Finalmente se da una introducción a la difusión en redes multiplexas, se construye el operador supralaplaciano y se da un ejemplo de la importancia del análisis espectral en el estudio de la dinámica de difusión en redes multiplexas.

II. INTRODUCCIÓN

A. ¿por qué redes multiplexas?

La teoría de redes complejas ha demostrado ser una poderosa herramienta para el modelamiento de sistemas sociales, biológicos y complejos en general. Sin embargo al estudiar este tipo de sistemas surge rápidamente la necesidad de incorporar una descripción que permita incluir distintos tipos de relaciones, por ejemplo al estudiar el sistema de transporte es claro que se puede ir de un lugar a otro por varios medios de transporte y aún más, habrá lugares a los cuales sólo se podrá llegar alternando entre medios de transporte. Otro ejemplo son los medios de comunicación, dos personas se pueden comunicar por medio de llamadas, mensajes o en persona. También podemos pensar en las relaciones entre las personas, dos personas pueden ser amigos, familiares, pareja, enemigos, etc y muchas veces habrá solapamiento de estas relaciones y aún más habrá correlaciones, como el hecho de que tu pareja sea también tu amigo.

Dada la abundancia de sistemas en los que los actores están relacionados de distintas maneras y nuestro interés por hacer cada vez un modelamiento más detallado de los mismos, se hace necesaria la construcción de un formalismo para las redes multiplexas. El desarrollo de este formalismo es aún un campo en desarrollo y la generalización de las redes de un único tipo de relación a varios tipos de relación y varios tipos de nodos no es directa, tal como se encontró en [5] estas generalizaciones inspiradas en analogías con las

redes de un único tipo, como la dada para la robustez de las redes en términos de clusterización y alcance, pueden dar predicciones que los sistemas reales como el cerebro, que está conformado por una red de redes [5] comprueban no son adecuadas.

B. Revisión bibliográfica del estado del arte de la teoría alrededor de las redes multiplexas

Para la revisión bibliográfica se seleccionaron cuatro artículos que desarrollen aspectos teóricos generales correspondientes con las características estructurales y el modelamiento de las redes multiplexas. El primero de estos artículos, [3], se encarga de brindar una perspectiva general sobre el desarrollo del estudio de las redes multiplexas en la literatura científica, identificando estudios que muestran el impacto de considerar este formalismo en el estudio de las relaciones en diversos sistemas reales. El segundo [1] y tercer [4] artículo corresponden a descripciones teóricas basadas en la teoría de grafos sobre esta clase de redes, sus actores y los vínculos que los relacionan, así como el modelamiento de la correlación entre las múltiples relaciones a través de los ensambles traídos del formalismo mecánico estadístico. El cuarto artículo [2] corresponde a un compendio donde se presentan y caracterizan algunas medidas estructurales definidas para redes multiplexas.

Es importante aclarar que para redes donde las distintas relaciones no presentan correlación el enfoque multilíneal es suficiente, sin embargo para redes donde existe correlación es necesario introducir medidas de estas correlaciones, por ejemplo en [3] se introduce para este fin el coeficiente de correlación de Pearson.

[6] es un artículo que desarrolla un estudio espectral de los autovalores de la matriz supralaplaciana que es la nueva entidad de interés que contendrá la información de la dinámica difusiva en redes multiplexas.

Finalmente [4] es un review que resume todo lo antes mencionado y lo extiende para incluir temas como el de sincronización y en general la dinámica y estructura de este tipo de redes.

C. Objetivos de este trabajo

1. Introducir al modelamiento de redes multiplexas para relaciones no dirigidas, no pesadas y en las cuales los actores son los mismos en todas las relaciones.
2. Introducir algunas medidas estructurales para las redes multiplexas con las propiedades antes mencionadas.

3. Introducir el formalismo Microcanónico y Canónico para ensambles de redes multiplexas con correlación y sin correlación.
4. Dar una introducción a la difusión en redes multiplexas

III. MODELO

A. Definición de redes multiplexas

Considere un conjunto de N nodos etiquetados $i = 1, 2, \dots, N$ con M tipos de relaciones indirectas y no pesadas entre ellos. Según [1] podemos representar una red multiplexa como $\vec{G} = (G^1, G^2, \dots, G^M)$ que corresponde al conjunto de todas las redes G^α donde $\alpha = 1, 2, \dots, M$. Para cada tipo de relación habrá una matriz de adyacencia A^α cuyos elementos a_{ij}^α son iguales a 1 si hay relación entre el nodo i y el nodo j para el tipo de relación α ; cero en el caso contrario. Entonces un sistema multiplexo queda completamente especificado por el vector de matrices de adyacencia para las M relaciones.

$$\vec{A} = (A^1, \dots, A^M) \quad (1)$$

B. Algunas medidas estructurales de las redes multiplexas

Como se mencionó en la introducción para las redes no correlacionadas el enfoque multilíneal es suficiente, a continuación se darán dos ejemplos de esto:

El grado en una red multiplexa [2] se define como el vector

$$\vec{k}_i = (k_i^1, \dots, k_i^\alpha, \dots, k_i^M) \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

donde $k_i^\alpha = \sum_j a_{ij}^\alpha$ es el grado como se define en las redes de un sólo tipo de relación.

El coeficiente de clusterización para un nodo i en una red multiplexa se puede definir según [2] como:

$$C_i = \frac{\sum_{j \neq i, m \neq i} a_{ij} a_{jm} a_{mi}}{\sum_{j \neq i, m \neq i} a_{ij} a_{mi}} = \frac{\sum_{j \neq i, m \neq i} a_{ij} a_{jm} a_{mi}}{k_i(k_i - 1)} \quad (3)$$

Esta cantidad nos habla de que tan probable es que dos nodos conectados al nodo i estén conectados entre sí. Si promediamos esta cantidad sobre todos los nodos obtenemos el coeficiente de clusterización de la red

$$C = \frac{\sum_i C_i}{N} \quad (4)$$

Para empezar a cuantificar la correlación definamos el solapamiento [1] que vendrá dado por el número total de pares de nodos que están conectados en un tipo de relación α y β , entonces:

$$O^{\alpha, \beta} = \sum_{i < j} a_{ij}^\alpha a_{ij}^\beta \quad (5)$$

Así mismo podemos definir una medida de solapamiento local [1] $O_i^{\alpha, \beta}$ la cual mide la cantidad de nodos que están conectados con el nodo i en las relaciones α y β y se calcula como:

$$O_i^{\alpha, \beta} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^\alpha a_{ij}^\beta \quad (6)$$

estas medidas de solapamiento serán de particular importancia a la hora de cuantificar las correlaciones, las cuales se comparan respecto a una hipótesis nula de no correlación.

Sin embargo para adoptar un lenguaje más apropiado para trabajar con redes multiplexas correlacionadas, recordemos que para redes de un sólo tipo $M = 1$ cuando queremos hacer ensambles donde hay correlación entre distintas relaciones, caso ejemplificado por "el amigo de mi amigo es mi amigo" el formalismo se desarrolla tomando una parametrización que considera no sólo relaciones independientes, sino subgrafos, un ejemplo de esto es la consideración de cuantificar triángulos en la medida de clusterización. Con esto en mente, para considerar correlación entre relaciones de distinto tipo consideraremos una parametrización, por lo cual es necesario introducir la noción de multilink.

Para las redes multiplexas se puede definir el multilink o vector de relaciones de la siguiente manera, sea el vector $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_\alpha, \dots, m_M)$ donde cada elemento m_α puede tomar los valores 0 o 1. Entonces \vec{m} es el multilink que corresponde al conjunto de relaciones que conectan un par de nodos dado sólo si $m_\alpha = 1$ y $m_\alpha = 0$ si no está el par de nodos conectados por la relación α .

Una forma de pensar la utilidad de esta definición es que cada multilink \vec{m} caracteriza una forma particular de relacionarse, por ejemplo en términos de una red de personas pertenecientes a la Universidad Nacional de Colombia donde la relación puede ser el medio de comunicación que utilizan, los medios que utilicen para comunicarse los actores de esta red puede darnos información de los atributos de su relación, por ejemplo, si dos personas se comunican sólo en persona y por correo institucional se podría inferir que su relación es principalmente académica, así mismo si dos personas se comunican por Whatsapp, llamadas y en persona, pero no por correo podríamos inferir que su relación es más parecida a una amistad.

Para continuar con la parametrización introduzcamos también la matriz de multiadyacencia $A^{\vec{M}}$ la cual dado un multilink \vec{m} sus componentes $A_{ij}^{\vec{M}}$ son iguales a 1 si entre el nodo i y el nodo j las relaciones de distinto tipo que los conectan son tal como establece el multilink dado. Esta matriz en resumen lo que hace es comparar la casilla ij de cada una de las matrices de adyacencia A^α con las componentes del multilink, si son iguales entonces $A_{ij}^{\vec{M}} = 1$ en caso contrario $A_{ij}^{\vec{M}} = 0$, así:

$$A_{ij}^{\vec{M}} = \prod_{\alpha=1}^M (a_{ij}^\alpha m_\alpha + (1 - a_{ij}^\alpha)(1 - m_\alpha)) \quad (7)$$

Note que tanto el primer término como el segundo dentro de la productoria se anulan si $a_{ij}^\alpha \neq m_\alpha$, en caso de que ambos

sean iguales uno de estos dos términos se anula y el otro se hará igual a 1.

Note que si imponemos la condición de que dos nodos sólo pueden estar conectados por un único multilink entonces la matriz de multiadycencia debe cumplir la siguiente condición de normalización:

$$\sum_{\vec{m}} A_{ij}^{\vec{m}} = 1 \quad (8)$$

Podemos definir [1] el multigrado $k_i^{\vec{m}}$ que es el total de multilinks \vec{m} que tiene un nodo i y queda definido como:

$$k_i^{\vec{m}} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{\vec{m}} \quad (9)$$

IV. MECÁNICA ESTADÍSTICA DE LAS REDES MULTIPLEXAS

Dado un ensamble de redes multiplexas, el cual para una red \vec{G} tiene una probabilidad $P(\vec{G})$ de tener esa red, entonces, se puede definir la entropía del ensamble de la siguiente manera:

$$S = - \sum_{\vec{G}} P(\vec{G}) \ln(P(\vec{G})) \quad (10)$$

A. Ensamble Canónico

El ensamble canónico se construye a partir de maximizar la entropía bajo la imposición de ciertas condiciones sobre los valores esperados, así:

$$\sum_{\vec{G}} P(\vec{G}) F_{\mu}(\vec{G}) = C_{\mu} \quad ; \quad \mu = 1, 2, \dots, K \quad (11)$$

Donde K es la cantidad de ligaduras impuestas sobre los valores esperados y $F_{\mu}(\vec{G})$ es una característica estructural de la red a la cual haremos la imposición sobre su promedio. También es necesario imponer la condición $\sum_{\vec{G}} P(\vec{G}) = 1$, esta condición se impondrá incluyendo todas las constantes dentro de un factor que nombraremos como $\frac{1}{Z_c}$ el cual se conoce como función de partición y exigiremos que sea tal que cumpla la condición de normalización de la probabilidad.

Sean los multiplicadores de Lagrange λ_{μ} tal que cumplen las condiciones:

$$\begin{aligned} \nabla S &= \sum_{\mu=1}^K \lambda_{\mu} \nabla C_{\mu} \\ \frac{\partial}{\partial P(\vec{G})} S &= \sum_{\mu=1}^K \lambda_{\mu} \frac{\partial}{\partial P(\vec{G})} C_{\mu} \end{aligned} \quad (12)$$

Reemplazando S usando la expresión (10)

$$- \sum_{\vec{G}} \frac{\partial}{\partial P(\vec{G})} \left[P(\vec{G}) \ln(P(\vec{G})) \right] = - \sum_{\vec{G}} \left[\ln(P(\vec{G})) + 1 \right] \quad (13)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (14) y reemplazando C_{μ} acorde a la ecuación (13) entonces:

$$- \sum_{\vec{G}} \left[\ln(P(\vec{G})) + 1 \right] = \sum_{\vec{G}} \sum_{\mu=1}^K \lambda_{\mu} F_{\mu}(\vec{G}) \quad (14)$$

Esta igualdad se debe cumplir para cada termino del sumatorio, teniendo en cuenta esto, despejando $P(\vec{G})$ y agrupando todas las constantes bajo el nombre de $\frac{1}{Z_c}$.

$$P(\vec{G}) = \frac{1}{Z_c} \exp \left(- \sum_{\mu=1}^K \lambda_{\mu} F_{\mu}(\vec{G}) \right) \quad (15)$$

Para hallar los valores de λ_{μ} se reemplazan los $F_{\mu}(\vec{G})$ particulares acorde a las restricciones que imponamos y se utilizan las ecuaciones dadas en (13).

1. Ensamble Canónico para redes multiplexas no correlacionadas

Si no hay correlación entre las relaciones de distintos tipos, entonces la probabilidad de tener una red multiplexa se puede expresar como:

$$P(\vec{G}) = \prod_{\alpha=1}^M P_{\alpha}(G^{\alpha}) \quad (16)$$

Reemplazando esta ecuación en la ecuación (10) se llega a:

$$S = \sum_{\alpha=1}^M S^{\alpha} = - \sum_{\alpha=1}^M \sum_{G^{\alpha}} P_{\alpha}(G^{\alpha}) \ln(P_{\alpha}(G^{\alpha})) \quad (17)$$

Esta ecuación expresa que la entropía del ensamble de una red multiplexada es igual a la suma de las entropías de los ensambles de cada una de las relaciones.

Como se mencionó antes para las redes no correlacionadas el enfoque multilineal es suficiente, por lo cual asumiremos $F_{\mu}(\vec{G})$ como una combinación lineal de ligaduras $f_{\mu,\alpha}(G^{\alpha})$ sobre las redes G^{α} de cada uno de los tipos de relación, i.e.,

$$F_{\mu}(\vec{G}) = \sum_{\alpha=1}^M f_{\mu,\alpha}(G^{\alpha}) \quad (18)$$

2. Ejemplo de ensamble Canónico para redes multiplexas no correlacionadas

Podemos pensar en fijar para cada relación $\alpha = 1, 2, \dots, M$ el número promedio de arcos o links L^α que unen a los N nodos. En este caso el número de ligaduras que se imponen al sistema es $K = M$ por cada L^α , y las ecuaciones 11 se reescriben como,

$$\sum_{\vec{G}} F_\alpha(\vec{G}) P(\vec{G}) = \sum_{\vec{G}} \sum_{i < j} a_{ij}^\alpha P(\vec{G}) = L^\alpha$$

Donde se logró expresar el número promedio de links en cada grafo G^α a través de la probabilidad del sistema multiplexo $P(\vec{G})$ teniendo en cuenta la expresión 16. La función F_α de correlación viene dada por,

$$F_\alpha(\vec{G}) = \sum_{i < j} a_{ij}^\alpha$$

Con $a_{ij}^\alpha = 0, 1$. La probabilidad del sistema multiplexo viene dada a través del ensamble canónico como,

$$P_C(\vec{G}) = \frac{1}{Z_C} \exp \left\{ - \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha \sum_{i < j} a_{ij}^\alpha \right\}$$

Siendo Z_C la función de partición canónica y λ_α el multiplicador de Lagrange asociado con la ligadura de L^α . Para hallar esta constante, podemos sumar sobre todos los posibles \vec{G} y manteniendo un $a_{ij}^\alpha = 1$ fijo, determinar la probabilidad p_{ij}^α de que exista un arco entre los nodos i y j en la relación α , que en este caso corresponde con el valor del link promedio entre los nodos,

$$p_{ij}^\alpha = p^\alpha = \langle a_{ij}^\alpha \rangle = \frac{e^{-\lambda_\alpha}}{1 + e^{-\lambda_\alpha}}$$

En términos de esta probabilidad o link promedio, reconocemos que la ligadura sobre las relaciones consideradas puede escribirse como,

$$\sum_{i < j} \langle a_{ij}^\alpha \rangle = \sum_{i < j} p_{ij}^\alpha = \frac{N(N-1)}{2} p^\alpha = L^\alpha$$

Así, $p^\alpha = 2L^\alpha/[N(N-1)]$ y $e^{-\lambda_\alpha} = p^\alpha/(1-p^\alpha)$ determinando el multiplicador de Lagrange. En términos de p^α , la función de partición canónica Z_C se escribe de la forma,

$$Z_C = \sum_{\vec{G}} \exp \left\{ - \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha \sum_{i < j} a_{ij}^\alpha \right\} = \prod_{\alpha=1}^M \left(\frac{1}{1-p^\alpha} \right)^{\frac{N(N-1)}{2}}$$

Para hallar la entropía de este ensamble multiplexo, recordemos la expresión 17, según la cual,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\alpha} \lambda_\alpha L^\alpha + \ln Z_C \\ &= - \frac{N(N-1)}{2} \sum_{\alpha=1}^M [p^\alpha \ln p^\alpha + (1-p^\alpha) \ln (1-p^\alpha)] \end{aligned}$$

Donde $p^\alpha = 2L^\alpha/[N(N-1)]$. Si el número de relaciones consideradas M es finito, en el límite de $N \rightarrow \infty$, la expresión anterior es,

$$S = \sum_{\alpha=1}^M \ln \left(\frac{N(N-1)}{2 L^\alpha} \right)$$

3. Ensamble Canónico para redes multiplexas correlacionadas

En el caso de que la red multiplexa posea correlación entre las relaciones de distintos tipos entonces:

$$P(\vec{G}) \neq \prod_{\alpha=1}^M P_\alpha(G^\alpha) \quad (19)$$

Para trabajar este caso se introdujo la noción de multilink que nos caracterizara las formas de multirelacionarse en un grafo multiplexo, de tal manera que la red ya no se describe por M matrices de adyacencia, una por cada tipo de relación, sino por 2^M matrices de multiadyacencia, una por cada multilink tal como se definieron en (2). La forma más simple de empezar a trabajar estos ensambles de redes multiplexas correlacionadas consiste en imponer las restricciones sobre las nuevas entidades que se han definido, por ejemplo fijar el valor esperado del total de multilinks en la red.

4. Ejemplo de ensamble canónico para redes multiplexas correlacionadas

Podemos utilizar la parametrización dada por los multilinks \vec{m} y estudiar el caso el en cual se fija el número promedio $L^{\vec{m}}$ de estos a través de las matrices de multiadyacencia $A^{\vec{m}}$, donde por la forma en que estas se definen, los promedios deben cumplir la condición $\sum_{\vec{m}} L^{\vec{m}} = N(N-1)/2$. El número de ligaduras impuestas al sistema corresponde con el número de todos los posibles multilinks en el sistema, es decir $K = 2^M$, con M relaciones a estudiar entre los N nodos. Las ecuaciones de ligadura tienen la forma,

$$\sum_{\vec{G}} F_{\vec{m}}(\vec{G}) P(\vec{G}) = \sum_{\vec{G}} \sum_{i < j} A_{ij}^{\vec{m}} P(\vec{G}) = L^{\vec{m}}$$

Donde se escribió el número promedio de links en cada grafo G^α a través de la probabilidad del sistema multiplexo correlacionado $P(\vec{G})$. La función $F_{\vec{m}}$ de correlación viene dada por,

$$F_{\vec{m}}(\vec{G}) = \sum_{i < j} A_{ij}^{\vec{m}}$$

Con $A_{ij}^{\vec{m}} = 0, 1$ la componente ij de la matriz de multiadyacencia. La probabilidad del sistema multiplexo viene dada a través del ensamble canónico como,

$$P_C(\vec{G}) = \frac{1}{Z_C} \exp \left\{ - \sum_{\vec{m}} \lambda_{\vec{m}} \sum_{i < j} A_{ij}^{\vec{m}} \right\}$$

Siendo Z_C la función de partición canónica y $\lambda_{\vec{m}}$ el multiplicador de Lagrange asociado con la ligadura de $L^{\vec{m}}$. Buscamos encontrar la entropía del sistema, así que en este caso conviene determinar la probabilidad $p_{ij}^{\vec{m}}$ de que las relaciones entre los nodos i y j pertenezcan a aquellas del multilink \vec{m} , que en este caso corresponde con el valor del link promedio entre los nodos de la matriz $A^{\vec{m}}$. Para determinar esta probabilidad, hay que tener en cuenta que existe una condición sobre estas matrices, tal que $\sum_{\vec{m}} A_{ij}^{\vec{m}} = 1$, para todo i y j ,

$$p_{ij}^{\vec{m}} = p^{\vec{m}} = \langle A_{ij}^{\vec{m}} \rangle = \frac{e^{-\lambda_{\vec{m}}}}{\sum_{\vec{m}} e^{-\lambda_{\vec{m}}}}$$

En términos de esta probabilidad o link promedio, reconocemos que la ligadura sobre las relaciones consideradas puede escribirse como,

$$\sum_{i < j} \langle A_{ij}^{\vec{m}} \rangle = \sum_{i < j} p_{ij}^{\vec{m}} = \frac{N(N-1)}{2} p^{\vec{m}} = L^{\vec{m}}$$

Así, $p^{\vec{m}} = 2L^{\vec{m}}/[N(N-1)]$. La función de partición canónica Z_C , puede obtenerse asociando los términos de la matriz de multiadyacencia para cada par de nodos, y teniendo en cuenta la condición $\sum_{\vec{m}} A_{ij}^{\vec{m}} = 1$. Z_C se escribe de la forma,

$$Z_C = \sum_{\vec{G}} \exp \left\{ - \sum_{\vec{m}} \lambda_{\vec{m}} \sum_{i < j} A_{ij}^{\vec{m}} \right\} = \left(\sum_{\vec{m}} e^{-\lambda_{\vec{m}}} \right)^{\frac{N(N-1)}{2}}$$

Para hallar la entropía de este ensamble multiplexo, recordemos la expresión 17, según la cual,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} L^{\alpha} + \ln Z_C \\ &= - \frac{N(N-1)}{2} \sum_{\vec{m}} p^{\vec{m}} \ln p^{\vec{m}} \end{aligned}$$

Donde $p^{\vec{m}} = 2L^{\vec{m}}/[N(N-1)]$. Si el número de relaciones consideradas M es finito, la expresión anterior es,

$$S = \ln \left\{ \frac{\left(\frac{N(N-1)}{2} \right)!}{\prod_{\vec{m}} L^{\vec{m}}!} \right\}$$

B. Ensamble Microcanónico

El ensamble microcanónico impone ligaduras más restrictivas que las del ensamble canónico, ahora no impondremos condiciones sobre los valores esperados, si no, sobre los valores directamente. Para esto consideremos la probabilidad de un ensamble microcanónico $P_M(\vec{G})$ como:

$$P_M(\vec{G}) = \frac{1}{Z_M} \prod_{\mu=1}^K \delta(F_{\mu}(\vec{G}), C_{\mu}) \quad (20)$$

Donde la función de partición Z_M viene dada por:

$$Z_M = \sum_{\vec{G}} \prod_{\mu=1}^K \delta(F_{\mu}(\vec{G}), C_{\mu}) \quad (21)$$

Como se observa en la ecuación (21) esta función de partición está contando el número de redes multiplexas que satisfacen las ligaduras $F_{\mu}(\vec{G}) = C_{\mu}$. La entropía asociada a estos sistemas S_M multiplexos puede escribirse utilizando la expresión 10 y teniendo en cuenta la ecuación para P_M , como

$$S_M = N\Sigma = - \sum_{\vec{G}} P_M(\vec{G}) \ln P_M(\vec{G}) = \ln Z_M$$

Donde S_M se puede escribir en términos de la entropía de Gibbs por nodo en el sistema Σ . ¿Cuál es la relación entre esta entropía S_M y aquella dada anteriormente por el ensamble canónico S_C ? Esta viene dada por la expresión,

$$S_M = S_C - N\Omega$$

La entropía del ensamble canónico, se plantea considerando las ligaduras fijas $F_{\mu}(\vec{G}) = C_{\mu}$ en la perspectiva microcanónica, como promedios sobre las cantidades a las que se aplican, de tal forma que,

$$N\Omega = - \ln \left\{ \sum_{\vec{G}} P_C(\vec{G}) \prod_{\mu=1}^K \delta(F_{\mu}(\vec{G}), C_{\mu}) \right\}$$

$$P_C(\vec{G}) = \frac{1}{Z_C} \exp \left(- \sum_{\mu=1}^K \lambda_{\mu} F_{\mu}(\vec{G}) \right) \quad (22)$$

Es posible observar que $N\Omega$ en general es una cantidad positiva mayor que cero, la cual relaciona las fluctuaciones del ensamble canónico respecto a los promedios que conforman las ligaduras fijas en el ensamble microcanónico. Observe que conforme las probabilidades canónicas $P_C(\vec{G})$ de los sistemas multiplexos \vec{G} que satisfacen las condiciones fijas C_{μ} acumulan gran parte de la probabilidad de todo el ensamble, entonces $N\Omega \rightarrow 0$ y la entropía de Gibbs coincide con la del sistema canónico S_C . Si $N\Omega$ es mayor que cero en el límite $N \gg 1$, los ensambles en principio no serán equivalentes.

1. Ensemble microcanónico para redes multiplexas no correlacionadas

Al igual que en el caso Canónico para las redes no correlacionadas podemos expresar la probabilidad de tener una red multiplexa como el producto de las probabilidades de tener cada una de las subredes, así:

$$P_M(\vec{G}) = \prod_{\alpha=1}^M P_M^\alpha(G^\alpha) \quad (23)$$

con el fin de escribir la ecuación (20) acorde a la forma de la ecuación (22) escribamos las ligaduras como ligaduras multilíneas, es decir, no habrá ninguna ligadura que imponga restricciones sobre relaciones de distinto tipo. Así introduzcamos el índice ν el cual para un tipo de relación α dado nos indicará el tipo de ligadura en ese tipo de relación, lo cual se escribe como $F_{\nu,\alpha}(G^\alpha)$, esto nos permite escribir la probabilidad y la función de partición para cada tipo de relación como:

$$\begin{aligned} P_M^\alpha(G^\alpha) &= \frac{1}{Z_M^\alpha} \prod_{\nu=1}^K \delta(F_{\nu,\alpha}(G^\alpha), C_{\nu,\alpha}) \\ Z_M^\alpha &= \sum_{G^\alpha} \prod_{\nu=1}^K \delta(F_{\nu,\alpha}(G^\alpha), C_{\nu,\alpha}) \end{aligned} \quad (24)$$

y así la probabilidad de obtener una red multiplexa sería:

$$P_M(\vec{G}) = \prod_{\alpha=1}^M \left[\frac{1}{Z_M^\alpha} \prod_{\nu=1}^K \delta(F_{\nu,\alpha}(G^\alpha), C_{\nu,\alpha}) \right] \quad (25)$$

Dado que la probabilidad se puede expresar como un producto de probabilidades independientes, la entropía es aditiva, por lo cual:

$$S_M = \sum_{\alpha=1}^M S_M^\alpha$$

donde

$$S_M^\alpha = - \sum_{G^\alpha} P_M^\alpha(G^\alpha) \ln P_M^\alpha(G^\alpha) = \ln Z_M \quad (26)$$

2. Ejemplo de ensemble canónico para redes multiplexas no correlacionadas

Siguiendo lo mencionado anteriormente, esta vez podemos por ejemplo imponer valores fijos L^α para el número total de links en cada una de las relaciones consideradas $\alpha = 1, 2, \dots, M$; así el número total de restricciones será $K = M$. Las ligaduras se pueden escribir como,

$$F_\alpha(\vec{G}) = L^\alpha$$

Donde F_α se define en términos de las diferentes matrices de adyacencia a^α para cada relación,

$$F_\alpha(\vec{G}) = \sum_{i < j} a_{ij}^\alpha$$

La función de partición microcanónica Z_M se obtiene considerando todos los posibles sistemas multiplexos que se pueden formar. En este caso tenemos para cada relación $N(N-1)/2$ posibles links entre los nodos, de los cuales la restricción nos limita solo a escoger L^α , y como solo tenemos M de estas redes, entonces el resultado será,

$$Z_M = \prod_{\alpha=1}^M \binom{N}{L^\alpha}$$

Utilizando la definición dada por 26, la entropía de Gibbs para este ensemble se escribe como,

$$N\Sigma = \sum_{\alpha=1}^M \ln \binom{N}{L^\alpha}$$

3. Ensemble microcanónico para redes multiplexas correlacionadas

Como ya se mencionó antes, en el caso de que haya correlación la probabilidad no se puede expresar como el producto de probabilidades para cada red, entonces:

$$P(\vec{G}) \neq \prod_{\alpha=1}^M P_\alpha(G^\alpha) \quad (27)$$

Para trabajar este tipo de ensambles de forma simplificada se pueden imponer las restricciones sobre las nuevas entidades definidas en función del multilink \vec{m} , a continuación se presenta un ejemplo de esto:

4. Ejemplo de ensemble canónico para redes multiplexas correlacionadas

De acuerdo a la parametrización dada por los multilinks, podemos imponer valores fijos $L^{\vec{m}}$ para el número de relaciones entre los nodos dictados por la clase del multilink \vec{m} ; donde los $L^{\vec{m}}$ deben satisfacer la condición $\sum_{\vec{m}} L^{\vec{m}} = N(N-1)/2$. El número total de restricciones será $K = 2^M$, y las ligaduras se pueden escribir como,

$$F_{\vec{m}}(\vec{G}) = L^{\vec{m}}$$

Donde $F_{\vec{m}}$ se define en términos de las diferentes matrices de multiadycencia $A^{\vec{m}}$ para cada multilink,

$$F_{\vec{m}}(\vec{G}) = \sum_{i < j} A_{ij}^{\vec{m}}$$

La función de partición microcanónica Z_M se obtiene considerando todos los posibles sistemas multiplexos que se

pueden formar. Tenemos un total de $\sum_{\vec{m}} L^{\vec{m}} = N(N-1)/2$ posibles clases de relaciones entre los N nodos, donde $L^{\vec{m}}$ de ellas deben estar asociadas al multilink \vec{m} . Entonces el número total de posibilidades viene dado por el coeficiente multinomial,

$$Z_M = \frac{\binom{N}{2}!}{\prod_{\vec{m}} L^{\vec{m}}!}$$

Utilizando la definición dada por 26, aplicable también para la parametrización de los multilinks, la entropía de Gibbs para este ensamble se escribe como,

$$N\Sigma = \ln \left\{ \frac{\binom{N}{2}!}{\prod_{\vec{m}} L^{\vec{m}}!} \right\}$$

V. INTRODUCCIÓN A LA DIFUSIÓN EN REDES MULTIPLEXAS

Los procesos de difusión en redes son de vital importancia puesto que brindan una buena aproximación a fenómenos dinámicos de distinto tipo como la sincronización y otros procesos no-lineales susceptibles de linealización [6]. Esta dinámica es capturada en las redes de un solo tipo por los autovalores de la matriz Laplaciana, por ejemplo el tiempo necesitado para sincronizar la fase de una red de osciladores está relacionada con el segundo autovalor más pequeño de la matriz Laplaciana, incluso la estabilidad del mismo estado de sincronización viene determinado por $\frac{\lambda_N}{\lambda_2}$, por esto se afirma que el estudio espectral de las redes complejas constituye hoy en día una prominente área de investigación [6].

Empecemos por considerar que el proceso de difusión es lineal y que incluye dos términos, uno que cuantifica el proceso de difusión entre nodos conectados por relaciones de un mismo tipo y otro que cuantifica el proceso de difusión entre nodos conectados por relaciones de distinto tipo. Denotemos por $x_i^\alpha(t)$ el estado de los nodos en la propiedad de interés en la difusión, donde el superíndice α denota el tipo de relación y el subíndice i denota el nodo. Así:

$$\frac{dx_i^\alpha(t)}{dt} = D_\alpha \sum_{j=1}^N a_{ij}^\alpha (x_j^\alpha - x_i^\alpha) + \sum_{L=1}^M D_{\alpha L} (x_i^L - x_i^\alpha) \quad (28)$$

Donde D_α denota el coeficiente de difusión entre un sólo tipo de relación, $D_{\alpha L}$ el coeficiente de difusión entre relaciones de distinto tipo y a_{ij}^α son las componentes de la matriz de adyacencia para cada tipo de relación. Con el fin de escribir esto de la forma $\dot{\vec{X}} = -L\vec{X}$ con \vec{X} un vector, se escribirá la ecuación de tal forma que se haga explícito su carácter tensorial, es decir, un tensor de segundo orden x_j^L que contraído junto a un tensor de cuarto orden nos devuelve un tensor de segundo orden $\frac{dx_i^\alpha(t)}{dt}$.

Empecemos por multiplicar a_{ij}^α para darle al primer término la forma de las matrices Laplacianas para cada subgrafo de cada relación y al segundo termino multipliquemoslo por $1 = (-1)(-1)$.

$$\frac{dx_i^\alpha(t)}{dt} = D_\alpha \sum_{j=1}^N (a_{ij}^\alpha - \delta_{ij} k_i^\alpha) x_j^\alpha - \sum_{L=1}^M D_{\alpha L} (x_i^\alpha - x_i^L) \quad (29)$$

Donde podemos definir $L_{ij}^\alpha = -(a_{ij}^\alpha - \delta_{ij} k_i^\alpha)$ siendo L_{ij}^α la matriz Laplaciana para cada subgrafo de un tipo de relación. Ahora introduzcamos deltas de kronecker con el fin de agrupar todo dentro de los dos sumatorios y factorizar el termino x_j^L por lo tanto:

$$\frac{dx_i^\alpha(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^N \sum_{L=1}^M \left[D_\alpha L_{ij}^\alpha \delta^{\alpha L} + \sum_L D_{\alpha L} \delta^{\alpha L} \delta_{ij} - D_{\alpha L} \delta_{ij} \right] x_j^L \quad (30)$$

Donde al tensor de cuarto orden $D_\alpha L_{ij}^\alpha \delta^{\alpha L} + \sum_L D_{\alpha L} \delta^{\alpha L} \delta_{ij} - D_{\alpha L} \delta_{ij}$ corresponde a una generalización multilineal de la matriz laplaciana. Ahora si escogemos una base para un espacio vectorial de dimensión $M \times N$ podemos escribir x_i^α en ese espacio como el vector $\vec{X} = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1 | x_1^2, x_2^2, \dots, x_N^2 | \dots | x_1^M, x_2^M, \dots, x_N^M)$ y el tensor laplaciano de cuarto orden en esta base se puede escribir como una matriz que se conoce como matriz supralaplaciana [6], finalmente:

$$L = D_\alpha L^\alpha \delta^{\alpha L} + \sum_{\beta}^M D_{\alpha \beta} \delta^{\alpha L} \mathbb{1} - D_{\alpha L} \mathbb{1} \quad (31)$$

Donde $\mathbb{1}$ es la matriz identidad de dimensión $N \times N$ y L^α la matriz laplaciana de dimensión $N \times N$ de la subred con relación de tipo α .

Finalmente podemos escribir:

$$\frac{dX^\alpha(t)}{dt} = - \sum_L^{M \times N} \left[D_\alpha L^\alpha \delta^{\alpha L} + \sum_{\beta}^M D_{\alpha \beta} \delta^{\alpha L} \mathbb{1} - D_{\alpha L} \mathbb{1} \right] X^L \quad (32)$$

y con esto logramos nuestro objetivo de escribir la ecuación (27) de la forma:

$$\dot{\vec{X}} = -L\vec{X} \quad (33)$$

Para dar un ejemplo tomemos el caso en el que $M = 2$ usaremos la base de un espacio de dimensión $2N$ en la cual $\vec{X} = (x_1^1, \dots, x_N^1 | x_1^2, \dots, x_N^2)$ y la matriz supralaplaciana se escribiría como:

$$L = \begin{bmatrix} D_1 L_1 + D_{12} I & -D_{12} I \\ -D_{12} I & D_2 L_2 + D_{12} I \end{bmatrix} \quad (34)$$

Finalmente para acabar está introducción a la difusión mostremos un ejemplo de la importancia del análisis espectral en el estudio de la dinámica difusiva en redes multiplexas.

Según [4] el hecho de que la matriz supralaplaciana sea simétrica nos permite expresar la solución del sistema de ecuaciones en términos de los autovectores y autovalores, i.e. en términos de los modos normales, así la evolución temporal de los modos normales:

$$\phi_i(t) = \phi_i(0)\exp(-\lambda_i t) \quad (35)$$

De esta expresión podemos extraer que la escala de tiempo de la difusión, es decir el tiempo τ que le toma a la red multiplexa llegar a un estado estacionario, está dado por el valor más pequeño del primer autovalor distinto de 0. Para una red multiplexa con difusión entre redes de distinto tipo este tiempo de relajación viene dado por el segundo autovalor $\tau = 1/\lambda_2$.

-
- [1] BIANCONI, Ginestra. Statistical mechanics of multiplex networks: Entropy and overlap. *Physical Review E*, 2013, vol. 87, no 6, p. 062806.
 - [2] BATTISTON, Federico; NICOSIA, Vincenzo; LATORA, Vito. Structural measures for multiplex networks. *Physical Review E*, 2014, vol. 89, no 3, p. 032804.
 - [3] LEE, Kyu-Min; MIN, Byungjoon; GOH, Kwang-Il. Towards real-world complexity: an introduction to multiplex networks. *The European Physical Journal B*, 2015, vol. 88, no 2, p. 48.
 - [4] BOCCALETTI, Stefano, et al. The structure and dynamics of multilayer networks. *Physics Reports*, 2014, vol. 544, no 1, p. 1-122.
 - [5] Martínez, Johann. *Analysing Brain Dynamics by Means of Networks*. Science.UPM Editorial Press, 2015
 - [6] Gómez, S, et al. Diffusión Dynamics on Multiplex Networks. *Physical Review Letters*, 2013, vol 110.