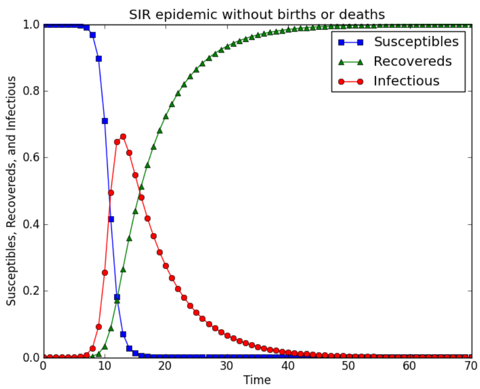
MÉTODOS DE SIMULACIÓN – FÍSICA Taller 1, Ejercicios 1 y 2

Nota: la presentación en .pdf del taller debe contener las gráficas y respuestas que se solicitan, además de información adicional que enriquezca el problema (pertinencia, aplicaciones, conclusiones, etc). El envío debe ir acompañado de los programas .cpp que se solicitan.

Ejercicio 1: MODELO SIR

Uno de los modelos más sencillos para la evolución de una epidemia es el modelo SIR, propuesto en 1927 por W. O. Kermack & A. G. McKendrick que se utiliza para simular enfermedades en las que una persona infectada, una vez recuperada (o muerta) no se puede volver a infectar.

Considere una población con un número constante de personas donde cada una puede estar *susceptible*, *infectada (casos activos)* o *retirada*. Sean *s, i, r* las fracciones de la población que están susceptibles, infectadas o retiradas, respectivamente ($s + i + r = 1$). Asumamos que, a cada momento, la cantidad de susceptibles que se infecta por unidad de tiempo es proporcional a la cantidad e susceptibles multiplicada por la cantidad de infectados, βsi, donde β es una constante que nos dice qué tan contagiosa es la enfermedad. Por el contrario, la cantidad de infectados que dejan de serlo por unidad de tiempo es solamente proporcional al número de infectados, γi, donde $1/\gamma$ da el tiempo característico de recuperación. Las ecuaciones diferenciales acopladas que rigen el comportamiento son, por lo tanto:



$$\frac{ds}{dt} = -\beta si$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i$$

, de las cuales sólo las dos primeras son independientes.

a) Implemente la simulación del modelo utilizando Runge-Kutta para las dos primeras ecuaciones acopladas, y grafique la evolución temporal de las tres cantidades $s(t)$, $i(t)$ y $r(t)$ para $s(0) = 0.999$, $i(0) = 0.001$, $\beta = 0.35$, $\gamma = 0.08$.

b) El modelo SIR tiene solución analítica (https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology). Reconstruya la solución analítica para el modelo, y compare su simulación numérica contra esta solución analítica.

c) El archivo CoronavirusColombiayBogota.xmls contiene los datos de los casos reportados de Covid-19 para Colombia y para Bogotá en la actual pandemia.

- Escoja un grupo de datos (Colombia o Bogotá) y utilice los datos del inicio de la pandemia para deducir una rata de crecimiento diario $a = i(t+1)/i(t)$ e identifique un día en el que este valor ya esté estable. Identifique ese día como el momento inicial de la pandemia $t = 0$. Calcule los valores de iniciales como $r = 0$, $s = 1 - i$ e $i = I/N$, utilizando el número de casos activos I en ese momento y una población de N=45,000,000 para Colombia o N=8,000,000 para Bogotá.

Cómo optimizarlo
Aleja & Santiago

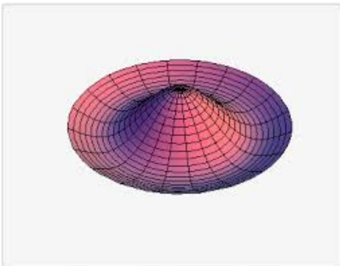
- Luego, considere el siguiente procedimiento, que se puede considerar como si fuera una función $f(\gamma)$: Dado un valor de γ, calcule β a partir de α. Con estos valores de β y γ, corra la simulación del modelo SIR. Como resultado de la simulación, calcule el número de días t_{simulado} en el que se presenta el pico en la simulación, y defina la función $f(\gamma) = t_{\text{simulado}} - t_{\text{datos}}$, donde t_{datos} es el número de días desde el momento inicial en el que ocurre el pico.
- Finalmente, utilice el método de la bisección de esta "función" para identificar el valor de γ que predice correctamente el momento de aparición del pico ($f(\gamma) = 0$).

El envío debe contener:

- El programa .cpp que resuelve el punto a), junto con la gráfica de evolución de las tres cantidades.
- El desarrollo del punto b).
- El programa .cpp que resuelve el punto c), junto con los valores hallados para α, β y γ, y la curva de los datos experimentales y de la simulación que mejor ajusta esos datos.

Ejercicio 2: LOS MODOS DE VIBRACION DE UN TAMBOR

Considere la membrana circular de un tambor de radio $a = 1$, e imagine que estamos interesados en los modos normales $R(r)$ que no dependen de la coordenada angular θ, como la que se muestra en la figura. En este caso, la función $R(r)$ cumple la ecuación diferencial



$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + \lambda^2 r^2 R(r) = 0 \quad ,$$

que resulta ser una ecuación de Bessel con parámetro $\alpha = 0$, con condiciones de frontera $\frac{dR}{dr}_{r=0} = 0$ y $R(a) = 0$.

a) Construya un programa que resuelva esta ecuación diferencial por Runge-Kutta de 4º orden para $\lambda = 1$, $R(0) = 1$ y $\frac{dR}{dr}_{r=0} = 0$, y grafique $R(r)$ en el intervalo $r \in [0.01\,, 10.0]$.

b) Defina la función $f(\lambda) = R(r = 1; \lambda)$ (donde hemos hecho explícito el hecho de que $R(r)$ también es función del parámetro λ), grafíquela para $\lambda \in [0.1\,, 15.0]$ e identifique aproximadamente dónde están los ceros de la función en ese intervalo (es decir, los valores aproximados de λ para los cuales $f(\lambda) = 0$)

c) Utilizando el método de hallar ceros por bisección, precise los valores de λ para los cuales se logra que $R(r = a) = 0$ (con $a = 1$), es decir para los que se cumplen las condiciones de frontera del tambor, y grafique las funciones $R(r)$ correspondientes en el intervalo $r \in [0.01\,, 1.0]$. Estos son los modos normales que deseábamos encontrar.

Aleja

d) Haga un programa que grafique las funciones de Bessel que son solución teórica de este problema, halle su ceros por bisección y compárelos con los valores que encontró en el punto c.

El envío se debe hacer en un solo correo electrónico, que contenga:

- El programa .cpp que resuelve el punto a), junto con la gráfica de $R(r)$.
- El programa .cpp que resuelve el punto b), junto con la gráfica de $f(\lambda)$.
- El programa .cpp que resuelve el punto c), junto con la gráfica de los modos normales y los valores de λ para cada uno de ellos.
- El programa del punto d, junto con una tabla que compare los valores de λ hallados por los dos métodos.