UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Jose Daniel Munoz Castano <jdmunozc@unal.edu.co>

Pregunta modelo SIR

Jose Daniel Munoz Castano <jdmunozc@unal.edu.co> 16 de abril de 2020, 15:05
Para: Anny Carolina Paez Rocha <anpaezr@unal.edu.co>
Cc: Rafael German Hurtado Heredia <rghurtadoh@unal.edu.co>
Cco: Jazmine Escobar Perez <jaescobarpe@unal.edu.co>

NOTA: Comparto este correo con profesores de la Universidad, simplemente porque puede ser de interés. Sin embargo, anoto que el modelo SIR es el más sencillo existente, y los datos en los que me baso no son tan seguros, y que por lo tanto no hay que tomarlos demasiado en serio

Estimada Sra. Rocha,

Un cordial saludo. Perdón por la demora en contestar. El modelo SIR, propuesto en 1927 por W. O. Kermack & A. G. McKendrick, es el modelo más básico para simular enfermedades en las que una persona infectada, una vez recuperada (o muerta) no se puede volver a infectar.
Sean s+i+r=1 las fracciones de la población que están susceptibles (s), infectadas (i) o retiradas (r). Las ecuaciones son:

$$\frac{ds}{dt} = -\,beta\; s\; i \quad , \quad (1)$$

$$\frac{d\,i}{dt} = (beta\; s - gamma)\; i \quad . \quad (2)$$

Concentrémonos en la segunda ecuación, la de los infectados. La forma de obtener los parámetros es la siguiente. Observa que al principio de la epidemia s~1. por lo tanto

$$\frac{d\,i}{dt} = (beta - gamma)\; i \quad , \quad (3)$$

que corresponde a un crecimiento exponencial,

$$i(t)= i(0) \exp [(beta-gamma)\, t] \quad . \quad (4)$$

Si el tiempo se mide en días, al día siguiente el número de infectados es

$$i(t+1)= i(0) \exp [(beta-gamma)\, (t+1)] \quad , (5)$$

Por lo tanto, el factor de crecimiento diario (llamémoslo a) es

$$a= \frac{i(t+1)}{i(t)} = \exp[(beta - gamma) \quad . \quad (6)$$

Este factor de crecimiento diario para Bogotá estuvo oscilando alrededor de a=1.1 en Semana Santa , y en esta semana ya bajó a a=1.03 . Tomemos, por ejemplo a=1.1 :

$$1.1= \exp(beta-gamma) \quad , \quad \text{con lo que} \quad beta-gamma = \ln (1.1) = 0.0953 \quad .$$

Si tomamos un factor de 1.03, tenemos

1.03= exp(beta-gamma) , con lo que beta-gamma = ln (1.03) = 0.02956 .

Con ésto ya tenemos el primer parámetro : (beta-gamma) = ln a.

Ahora, para sacar gamma, observemos nuevamente la ecuación del crecimiento de infectados (Ec. 2)

$$\frac{d\,i}{dt} = (\text{beta } s - \text{gamma})\, i \quad . \quad (2)$$

Si no hay reinfección (es decir, si encerramos en un hospital a un conjunto de infectados, y esperamos a que se curen), la ecuación se torna

$$\frac{d\,i}{dt} = -\text{gamma } i \quad , \quad (7)$$

es decir, un decrecimiento exponencial, con solución

i(t) = i(0) exp (-gamma t) . (8)

Este decrecimiento exponencial nos da el tiempo medio que dura contagiada la persona, tau=1/gamma. Es decir, el número de contagiados decrece exponencialmente, y podemos aproximar que en tmax=3tau se han sanado casi todos. Este tmax es como el tiempo en el que los casos bajan a un 5%, desde la infección hasta que ya no se es contagioso. Según la OMS el tiempo de incubación típico es de 5 días, pero puede ir hasta 14 días, y el tiempo de recuperación típico es de 10-14 días (10 días de tiempo de contagio), pero puede ir hasta 3-4 semanas. Este es el punto crítico, pues el modelo SIR es muy sensible a sus parámetros. Si tomamos los tiempos máximos como 3 tau, estaríamos hablando de tmax=42 días, tau=14 días y gamma=1/tau=0.0714. Si tomamos los tiempos típicos como tau, tendríamos tau=15 días y gamma=0.0667. Tomemos el promedio de los dos, gamma=0.0690. Con este valor de gamma, podemos obtener beta, de lo que vimos antes.

Resumiendo,

gamma=0.0690 .
Si el factor de crecimiento diario es a=exp (beta-gamma)=1.5 , beta-gamma= 0.4055 . y beta=0.4745.
Si el factor de crecimiento diario es a=exp (beta-gamma)=1.2 , beta-gamma= 0.1823 . y beta=0.2513.
Si el factor de crecimiento diario es a=exp (beta-gamma)=1.1 , beta-gamma= 0.0953 . y beta=0.1643.
Si el factor de crecimiento diario es a=exp (beta-gamma)=1.04 , beta-gamma= 0.0296 . y beta=0.1082.

Ahora ya podemos hacer la simulación.

Anexo encuentras el programa .cpp que integra las ecuaciones (1) y (2) por Runge-Kutta. Para las condiciones iniciales tomaremos la población de Bogotá como N=8,000,000, infectados I=1291 casos, retirados R=(452 + 141)/2=296, es decir la mitad de los de Colombia,con lo que las fracciones iniciales son i=I/N=1.614 x 10^-4 , r=R/N=3.7 x 10^-5 y s=0.999799.

Los resultados para cada factor de crecimiento se muestran en las Figuras anexas. Se observa que el pico máximo de contagiados depende del factor de crecimiento diario, así:

a=1.04 I_máximo= 604,000 t_delmaximo = día 198
a=1.10 I_máximo=1,726,000 t_delmaximo = día 95

a=1.20	I_máximo=2,965,000	t_delmaximo = día 54
a=1.30	I_máximo=3,722,000	t_delmaximo = día 40
a=1.50	I_máximo=4,587,000	t_delmaximo = día 26

Sin embargo, hay que recordar que los datos reales pueden estar desfasados 15 días en el tiempo, por lo que al tiempo del pico máximo habría que restarle unos 15 días.

Si asumimos que más o menos un 5% de los infectados requiere UCI, tendríamos:

a=1.04	I_máximo= 604,000	requiriendo UCI=30,000	t_delmaximo = día 198
a=1.10	I_máximo=1,726,000	requiriendo UCI=86,500	t_delmaximo = día 95
a=1.20	I_máximo=2,965,000	requiriendo UCI=148,000	t_delmaximo = día 54
a=1.30	I_máximo=3,722,000	requiriendo UCI=188,600	t_delmaximo = día 40
a=1.50	I_máximo=4,587,000	requiriendo UCI=229350	t_delmaximo = día 26

Bueno, eso es todo. Espero que te sea de utilidad. Sin embargo, recuerda que este es el más simple de todos los modelos, y que la realidad es muchísimo mas compleja, por lo que estas cifras se deben tomar con mucha reserva y no deben causar pánico.

Cordialmente,

José Daniel Muñoz
Profesor Titular, Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia

[El texto citado está oculto]

---

8 adjuntos

SIR_Bogota_con_factor1.04.pdf
88K

Primer Taller Ejercicios 1 y 2 (Runge-Kutta) 2019-I.pdf
1727K

SIR.cpp
2K

SIR_Bogota_con_factor1.04.pdf
114K

SIR_Bogota_con_factor1.10.pdf
114K

SIR_Bogota_con_factor1.20.pdf
114K

SIR_Bogota_con_factor1.30.pdf
114K

SIR_Bogota_con_factor1.50.pdf
114K