Departamento de Física

Métodos Matemáticos
Ejercicios semana 6

Profesor: Gabriel Téllez

4 marzo 2022

1. Sea f una función integrable tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Se define $f_\epsilon(x) = \epsilon^{-1} f(x/\epsilon)$. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ una función test. Calcular el límite

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x)\phi(x)\,dx \tag{1}$$

Deducir cuál es el límite en el sentido de las distribuciones de f_ϵ cuando $\epsilon \to 0$.

2. Expresar $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ en coordenadas esféricas y cilíndricas.

3. Usando la distribución de Dirac, describir:

   a) la densidad volumétrica de carga de un hilo recto infinito sobre el eje (Oz) de densidad lineal $\lambda(z)$.

   b) la densidad volumétrica de carga de un plano infinito sobre el plano (Oxy) de densidad superficial de carga $\sigma(x, y)$.

   Comprobar la validez de su resultado aplicando la distribución a una función test.

4. Se define la distribución valor principal de $1/x$, v.p.$1/x \in \mathcal{D}'$, por su acción sobre toda función test $\phi \in \mathcal{D}$

$$\left\langle \text{v.p.}\frac{1}{x}, \phi \right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{1}{x}\,\phi(x)\,dx. \tag{2}$$

Mostrar que la derivada en el sentido de las distribuciones de $\ln|x|$ es v.p.$1/x$.

5. El producto de convolución $f * g$ de dos funciones f y g se define como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt\,. \tag{3}$$

Mostrar que:

   a) $f * g = g * f$,

   b) $(f * g)' = (f') * g = f * (g')$,

   c) $\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\phi(x)\,dx = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\phi(x+y)\,dxdy$.

6. Calcular $x\delta'(x)$ y $x^2\delta'(x)$.