# 1.1

lunes, 7 de febrero de 2022 21:25

Demostrar (con rigor matemático) los siguientes teoremas:

1. Si $f(t)$ es continua cuando $-T/2 \leq t \leq T/2$ con $f(-T/2) = f(T/2)$, y si la derivada $f'(t)$ es continua por tramos y diferenciable; entonces la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(n\omega_0 t) + b_n sin(n\omega_0 t)) \tag{1}$$

se puede diferenciar término por término para obtener:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0(-a_n sin(n\omega_0 t) + b_n cos(n\omega_0 t)) \tag{2}$$

Sea $f(t)$ continua por tramos en el intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$ y sea $f(t+T) = f(t)$. Demostrar que la serie de Fourier se puede integrar término por término para obtener:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \frac{1}{2}a_0(t_2-t_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}[-b_n(cos(n\omega_0 t_2)-cos(n\omega_0 t_1))+a_n(sen(n\omega_0 t_2)-sen(n\omega_0 t_1))] \tag{3}$$

como f es continua, si esta acotada y definida, entonces en el intervalo el signo de $f'(t)$ será constante, por lo cual habrá una cantidad finita de maximos y minimos.

Debemos ver que la sumatoria es convergente, por tanto debemos verificar que:

$$|g_n(t)| \leq M_n \mid \forall n \geq 1, \ t \in [-T/2, T/2]$$

y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge.}$$

Planteando la serie de Fourier como...

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

que corresponde a una serie convergente.

Podemos decir que:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{0} C_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}.$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C(-n) e^{-in\omega_0 t} + \sum_{n=y}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}$$

$$= C_0 + \sum_{n=y}^{\infty} C(-n) e^{-in\omega_0 t} + \sum_{n=y}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t}.$$

Tambien se puede decir que:

$$g_n(t) = C_n e^{in\omega_0 t} \longrightarrow |g_n(t)| = |C_n|$$

Como $C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$ se concluye que la integral converge y que su valor esta acotado $\forall n \in \mathbb{N}$.

Luego usando el teorema de Parseval:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \leq \left| \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right| \leq \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt \leq \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt.$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \text{ sumatoria convergente.}$$

$$\Longrightarrow M_n = |C_n|^2 \longrightarrow |C_n e^{i\omega_0 n t}| \leq |C_n|^2$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(t) \text{ converge uniformemente.}$$

tendremos entonces:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t))$$

$$\frac{d}{dt} f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt}[a_n cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$$

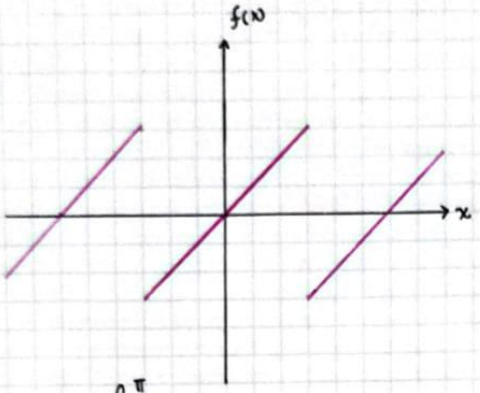
$$\Longrightarrow \boxed{f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 [-a_n sen(n\omega_0 t) + b_n cos(n\omega_0 t)]}$$

De igual manera para la integral tendremos:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)] \right) + \frac{a_0}{2} dt$$

por convergencia uniforme:

$$\Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \boxed{\frac{a_0}{2}(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0}[-b_n(cos(n\omega_0 t_2) - cos(n\omega_0 t_1)) + a_n(sen(n\omega_0 t_2) - sen(n\omega_0 t_1))]}$$




$$f(x) = x \,, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$T = 2\pi$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos\left(\frac{2n\pi}{2\pi}t\right)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\,\frac{t\sin(nt)}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

$$U = t \qquad dU = dt$$
$$dV = \cos(nt) \qquad V = \frac{\sin(nt)}{n}$$

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{\pi}\,\frac{\pi\sin(n\pi)}{n} - \frac{1}{\pi}\,\frac{(-\pi)\sin(-n\pi)}{n}}_{0} - \frac{1}{\pi n}\left[\underbrace{-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\cos(-n\pi)}{n}}_{0}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin\left(\frac{2n\pi}{2\pi}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt$$

$$U = t \qquad dU = dt$$
$$dV = \sin(nt) \qquad V = -\frac{\cos(nt)}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t\cos(nt)}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\,dt\right] = \frac{-\pi\cos(n\pi)}{\pi n} - \frac{\pi\cos(-n\pi)}{\pi n} + \frac{\sin(n\ )}{\pi n^2} - \frac{\sin(-n\pi)}{\pi n^2}$$

$$b_n = -\frac{2\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}}{n} + \underbrace{\frac{2\sin(n\pi)}{\pi n^2}}_{0}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-2)\,\frac{-1^n}{n}\,\sin\left(\frac{2n\pi}{2\pi}t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,\sin(nt)$$