

Bachillerato Internacional

Monografía

Asignatura: Física

”Relación entre el momento lineal de un vórtice toroidal y su distancia de viaje”

Autor: Diego de Jesús Ramírez Rodríguez

Pregunta de investigación: ¿En qué medida un anillo de vórtice pierde momento lineal en relación a su distancia de viaje en aire?

Número de palabras: 3532

Tabla de Contenidos

1	Introducción y desarrollo teórico	4
1.1	Marco Teórico	5
1.2	Modelos del momento del anillo \vec{P}	7
2	Experimentación	10
2.1	Diseño del experimento	10
2.2	Cañón	11
2.3	Péndulo	16
3	Resultados	18
3.1	Presentación de datos	18
3.2	Comparación con el modelo	19
3.3	Interpretación de los resultados	23
4	Conclusión	26
	Apéndice A	27

Apéndice B	28
Apéndice C	29
5 Bibliografía y programas utilizados	31

1 Introducción y desarrollo teórico

Esta monografía tiene el objetivo de determinar la relación que existe entre el momento lineal anillo de vórtice y su distancia de viaje. Un anillo de vórtice es un volumen de aire concentrado en una forma toroidal que se desplaza con una velocidad de traslación aproximadamente constante y perpendicular al plano del anillo (figura 1). Este tipo de vórtice tiene la característica de ser especialmente estable después de su formación y conservar en gran medida sus condiciones iniciales (Akhmetov, 2009). Esta excepcional estabilidad es el sujeto de estudio de esta monografía.

Los anillos de vórtice han fascinado a los físicos durante décadas por su impresionante estabilidad y capacidad para conservar su momento durante largas distancias de vuelo. Sin embargo, muchas de las investigaciones se han hecho con anillos a pequeña escala, en el orden de los milímetros o menores. En esta monografía se propone investigar la pregunta ¿En qué medida un anillo de vórtice pierde momento lineal en relación a su distancia de viaje? utilizando anillos de vórtice de aproximadamente 8 centímetros de diámetro.

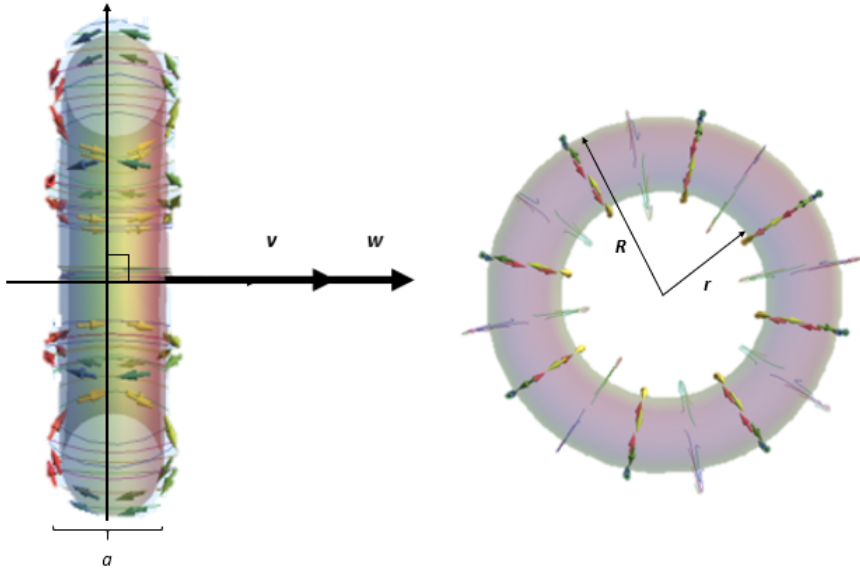


Figura 1: Simulación de un anillo de vórtice, generado en Wolfram Demonstration Project. \vec{v} y \vec{w} representan la velocidad traslacional y la velocidad angular respectivamente.

1.1 Marco Teórico

El estudio de los anillos de vórtice (también referidos como vórtices toroidales) surgió de las predicciones teóricas de Hermann von Helmholtz y sus iniciales observaciones del fenómeno en 1858. Durante los años siguientes, la investigación del fenómeno fue en su mayora teórica, con algunos experimentos cualitativos para describir su forma. Las investigaciones modernas del fenómeno comenzaron cerca de 1960 y se enfocaban en la formación del vórtice. (Glezer y Coles 1990; Maxworthy 1972; Glezer 1988; Didden 1979)

Los anillos de vórtice se pueden dividir en dos categorías principales, los boyantes y los impulsivos. Los boyantes se mueven a través de otro fluido gracias

a una diferencia de densidad entre el anillo y el medio, un ejemplo de este tipo de vórtice se puede encontrar en las nubes de hongo formadas por la detonación de una bomba nuclear. Esta monografía se enfoca en los anillos de vórtice impulsivos, que deben su movimiento únicamente al impulso obtenido durante su formación.

Fenómenos que funcionan bajo los mismos principios tienen aplicaciones importantes en la ingeniería, Akhmetov (2009) discute los usos que se le dieron a estos anillos en la Unión Soviética para extinguir fuegos extremos en pozos de petróleo o gas de alta energía. Esto es especialmente útil en áreas desérticas donde el transporte de agua es más complicado. La cualidad que hace especial a estos anillos para extinguir los fuegos es su capacidad de transferir suficiente momento para apagarlos. Los anillos de vórtice también se han observado ocurriendo naturalmente, se han observado que los delfines los forman para un propósito desconocido (Shariff, Karim. 1996), y también se forman en el ventrículo izquierdo del corazón (referencia).

1.2 Modelos del momento del anillo \vec{P}

Los anillos de vórtice son especiales por su estabilidad, la cual es una consecuencia directa de su rotación. Al igual que con objetos rígidos, la fricción viscosa entre el anillo y el aire a su alrededor depende de la velocidad relativa entre los dos objetos. La circulación del anillo reduce esta diferencia de velocidad, y por lo tanto, la fricción que el anillo sufre. Esta circulación también reduce la diferencia de momento al colisionar con el aire estacionario frente a él.

Dos mecanismos principales han sido identificados como los principales responsables de la pérdida de velocidad. Uno es el efecto de la fricción viscosa entre el anillo en movimiento y el aire estacionario. La fuerza de fricción experimentada por el anillo es aproximada por Sullivan (2008) como

$$F_f = \frac{1}{2}\rho v^2 AC_o \quad (1)$$

Por las limitaciones experimentales, no podemos medir el área o el coeficiente de fricción, pero podemos expresar esta relación en términos de la velocidad y dejar el resto como una constante que podemos determinar experimentalmente en base a los datos, por lo tanto

$$F_f = -\frac{d\vec{p}}{dt} \propto \vec{V}^2 \quad (1.1)$$

Si asumimos una masa constante durante el vuelo encontramos la ecuación diferencial

$$-m \frac{d\vec{V}}{dt} = k\vec{V}^2$$

Si resolvemos esta ecuación diferencial (apéndice C) encontramos

$$|\vec{V}(t)| = \frac{1}{C_3 + \frac{k}{m}t}$$

$$\therefore -\frac{d\vec{p}}{dt} \propto \vec{V}^2 \implies |\vec{V}(t)| \propto \frac{1}{t}$$

Asumiendo que el momento del anillo decae proporcionalmente a la velocidad traslacional del anillo encontramos que la velocidad del anillo es proporcional a $\frac{1}{t}$. Sin embargo, este es sólo uno de los mecanismos que reducen el momento del anillo. El otro es el propuesto por Maxworthy (1972) que afirma que la velocidad del anillo se reduce por la expansión del radio del anillo. Maxworthy llegó a la expresión

$$|\vec{V}(t)| = V_o e^{-aD} \quad (1.2)$$

Donde V_o es la velocidad traslacional del anillo en la boca del cañón y a es una constante. Y si modificamos esta expresión y la aplicamos a tiempos largos encontramos según Sullivan 2008

$$|\vec{V}(t)| = \frac{V_o}{1 + V_o a t}$$

$$\therefore |\vec{V}(t)| = V_o e^{-aD} \implies |\vec{V}(t)| \propto \frac{1}{t}$$

Vemos que las ecuaciones (1.1) y (1.2) implican las mismas consecuencias, que la velocidad decae proporcionalmente al tiempo de vuelo. Por lo tanto, utilizaremos la ecuación (1.2) que es la que relaciona la velocidad con la distancia de viaje, la cual es nuestra variable independiente.

Si consideramos la masa del anillo como constante, a partir de la ecuación (1.2) esperamos que el anillo pierda momento de forma exponencial con respecto a la distancia de viaje. Para comprobar esto mediremos el momento del anillo a diferentes distancias.

2 Experimentación

2.1 Diseño del experimento

Para crear los anillos de vrtice utilizaré el método descrito por Linden, P.F. (Linden, 2001). Este consiste en utilizar un pistón para dar impulso al aire dentro de un contenedor, este aire es impulsado a través de un orificio de menor radio, el cambio de radio aumenta la velocidad del flujo y crea una diferencia de presión entre el interior y exterior que permite la formación del anillo. El anillo generado tiene forma de un toroide con velocidad angular constante a través de este, esta rotación proporciona estabilidad y permite que la velocidad traslacional perpendicular al plano de este toro sea relativamente constante.

El momento es definido como el producto de la masa por la velocidad, pero medirlo explícitamente en el anillo es muy complicado por dos razones: el anillo se mueve a alta velocidad y es difícil de ver. Las mediciones que haré del momento del vórtice serán deducidas de sus efectos, no calculadas explícitamente. En específico, utilizaré un péndulo balístico de hielo seco para medir la energía transferida a este por el vórtice. Y para convertir esta transferencia de energía a transferencia de momento usaré una aproximación de la masa del anillo basada en el volumen de aire impulsado por el cañón. Con esta información podré deducir

el momento que el anillo transfiere al péndulo al momento de la colisión.

La variable independiente es D , la distancia entre la boca del cañón y el péndulo, la dependiente es el desplazamiento horizontal del péndulo ΔX , y las controladas son el radio de la boca del cañón, temperatura y distancia de tensión del elástico, L .

Llevareé a cabo 10 repeticiones para cada distancia de 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, y 150 *cm* para un cañón de diametro de 5 *cm* y otro de 9 *cm*, las mediciones de D y del diametro tienen un error de $\pm 0.05 \text{ cm}$

2.2 Cañón

Al principio de la investigación diferentes modelos para el cañón fueron explorados. Primero se intentó uno a base de aire a presión comprimido a través de una bomba de aire para bicicleta. Pero no había una válvula lo suficientemente rápida para liberar el aire sin interrumpir su flujo. El siguiente que se intentó fue una combinación de cañón a combustión y a presión (figura 2). Consistía de un tubo de pvc de 2 pulgadas de diámetro y un metro de largo. En la parte trasera utiliza un chispero de estufa, modificado para conectarse a corriente alterna de 110V, para generar una chispa dentro del tubo y encender las gotas de gasolina que eran introducidas por la parte trasera. Después de agregar la gasolina se au-

mentaba la presión dentro del cañón a 10 PSI y luego se encendía la chispa. Este diseño si funcionó y generaba los anillos, pero era muy difícil hacer consistentes las explosiones. Estos diseños complicados fueron finalmente reemplazados por el siguiente simple modelo.



Figura 2: Cañón a base de combustión y presión. A pesar de funcionar, no fue utilizado por la inconsistencia de los anillos que generaba y por su innecesaria complejidad.

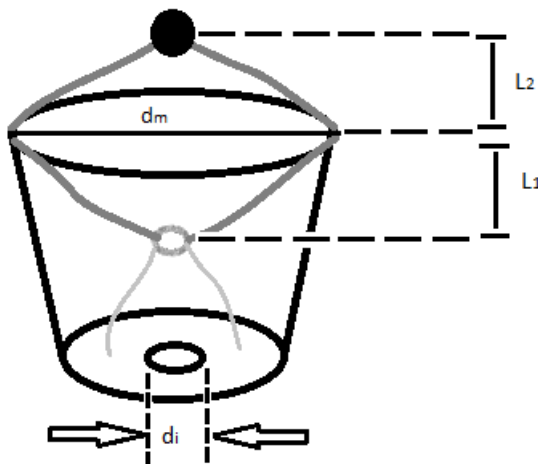


Figura 3: Diagrama del cañón utilizado

Este cañón tiene forma cilíndrica (figura 3 y 4), impulsa el aire con una mem-

brana de plástico flexible que funciona como pistón, esta es conectada con elásticos a la base del cañón, es estirada $L = (18 \pm 0.1) \text{ cm}$ desde su posición relajada, y al ser liberada impulsa un volumen de aire igual al volumen desplazado por la membrana a través de una salida circular. Esta membrana tiene forma de dos conos, uno dentro del cañón y otro fuera, por lo tanto, el volumen total desplazado es $V_I = \frac{1}{3}\pi r^2(L_1 + L_2) = (3881.5 \pm 35.2) \text{ cm}^3$ Este volumen de aire es el que formará el anillo al salir del cañón, por lo tanto podemos aproximar el volumen inicial del anillo como

$$V_{iA} \approx V_I$$

y, por ende

$$M_{Ai} \approx V_I \rho = (4.5 \pm 0.04) \text{ g}$$

Para determinar la velocidad inicial del anillo podemos utilizar la velocidad a la que el aire es impulsado dentro del cañón por acción de la membrana plástica. Sabemos que esta membrana se desplaza una distancia L , para encontrar la velocidad promedio necesitamos el tiempo en que se mueve. Este tiempo fue calculado grabando en cámara lenta el movimiento de la membrana al lado de un cronometro con precisión de 10^{-2} segundos, se encontró que el tiempo es aproximadamente $t = (4 \pm 1) \times 10^{-2} \text{ s}$ Combinando esto con la distancia L tenemos



Figura 4: Cañón utilizado. Se construyó una base de madera para tener el cañón a la altura adecuada y un soporte extra para mantener al plano de la boca del cañón perpendicular al piso.

$$v_1 = \frac{L}{t} = (4.5 \pm 1.2) \text{ m/s}$$

Esta velocidad es la que adquiere el volumen de aire (que todavía no se forma como anillo) dentro del cañón, al salir el aire pasa por la boca del cañón que es de menor diametro que su interior, es conocido que en una corriente de aire continua, el flujo volumetrico Q de masa debe permanecer constante.

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

Podemos aplicar esto en el punto 1 (dentro del cañón) y en el punto 2 (en la boca del cañón)

$$\begin{aligned}
A_1 v_1 &= A_2 v_2 \\
v_2 &= v_1 \frac{A_1}{A_2} = v_1 \frac{\pi \left(\frac{d_c}{2}\right)^2}{\pi \left(\frac{d_i}{2}\right)^2} \\
v_2 &= v_1 \frac{d_c^2}{d_i^2}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

donde d_i es el diametro de la salida del cañón. Reemplazando los valores medidos obtenemos las velocidades iniciales para $d_1 = (5 \pm 0.05)cm$ de

$$V_o = v_2 = (35.08 \pm 6.02) \text{ m/s}$$

y para $d_2 = (9 \pm 0.05)cm$

$$V_o = v_2 = (13.20 \pm 6.17) \text{ m/s}$$

Estos valores parecen demasiado altos, probablemente como consecuencia de las aproximaciones que se hicieron para encontrarlas y las imperfecciones del experimento. También es probable que mucha de la velocidad dentro del cañón se pierda, o que el pistón, al no ser cilíndrico, no desplace a la misma velocidad a toda la masa de aire. Después compararemos estos resultados con el modelo experimental.

2.3 Péndulo

Este aire impulsado crea una diferencia de presión al salir del cañón, lo cual forma el anillo de vórtice, el cual viajará una distancia variable D hasta encontrarse con el péndulo balístico. La colisión es perfectamente inelástica (ya que el vórtice viaja con el péndulo después de la colisión) y la energía del vórtice es transferida como velocidad al péndulo, que a su vez se convierte en energía potencial que se puede medir fácilmente. Para medir esta energía potencial necesito el desplazamiento vertical del péndulo, este lo obtendré grabando el impacto desde un lado y midiendo el desplazamiento horizontal (figura 2.1) que después puede ser fácilmente convertido a vertical conociendo el largo del péndulo. La cámara utilizada es una Sony Cyber-Shot de 12.2 mega pixeles, y las distancias del péndulo se medirán con el programa IC Measure, el cuál mide los pixeles de una fotografía, en este caso la fotografía del estado final del péndulo como se muestra en la figura 5. La distancia que mediré es entre el punto inferior derecho del péndulo y la cuerda que está en la posición en la que inició, el cual es denotado por ΔX .

Como vemos en la figura 5, el cambio de altura del péndulo está dado por

$$\Delta H = L_p - \sqrt{L_p^2 - \Delta X^2}$$

donde L_p es la longitud del péndulo (no se muestra completo en la imagen) con un valor de $L_p = (50.9 \pm 0.05)cm$.

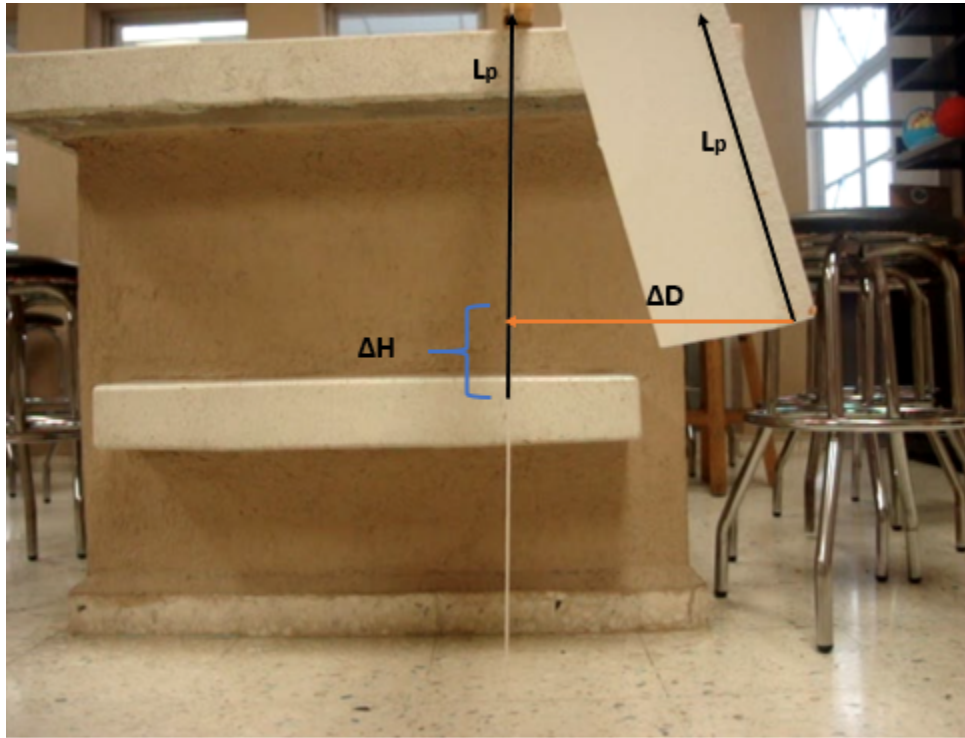


Figura 5: Análisis de dimensiones en la vista lateral del péndulo en su posición final después de una colisión

El momento inicial del anillo puede ser calculado analizando la colisión con el péndulo. El momento es conservado durante la colisión, y tomando en cuenta que es una colisión perfectamente inelástica tenemos

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$\vec{P}_A = (M_A + M_P)\vec{V}_P$$

Donde V_P es la velocidad del péndulo inmediatamente después de la colisión. El

sistema péndulo-anillo si conserva la energía después de la colisión, por lo tanto

$$\frac{1}{2}(M_A + M_P)\vec{V}_P^2 = (M_A + M_P)g\Delta H$$

y si despejamos V_P y reemplazamos en la ecuación de conservación de momento y la expresión de la altura encontramos que el momento del anillo inmediatamente antes de la colisión está dado por

$$|\vec{P}_A| = (M_A + M_P)\sqrt{2g\left(L_p - \sqrt{\Delta X_i^2 + L_p^2}\right)}$$

encontramos el momento final del anillo de la prueba número i en termino de variables que podemos medir experimentalmente, y la unica que varia entre cada repetición es ΔX_i . El péndulo fue pesado y tiene una masa de

$$M_P = (52.6 \pm 0.2) g$$

3 Resultados

3.1 Presentación de datos

En la figura 5 podemos ver graficados el desplazamiento horizontal promedio $\Delta\bar{X}$ que sufrió el péndulo al colisionar con un anillo que ha viajado una distancia D variable. Los puntos rojos de la parte superior representan las pruebas que se hicieron con el diametro de salida del cañón de $d_2 = (9 \pm 0.05)cm$ y los puntos

azules de la parte inferior el diametro de $d_1 = (9 \pm 0.05)cm$

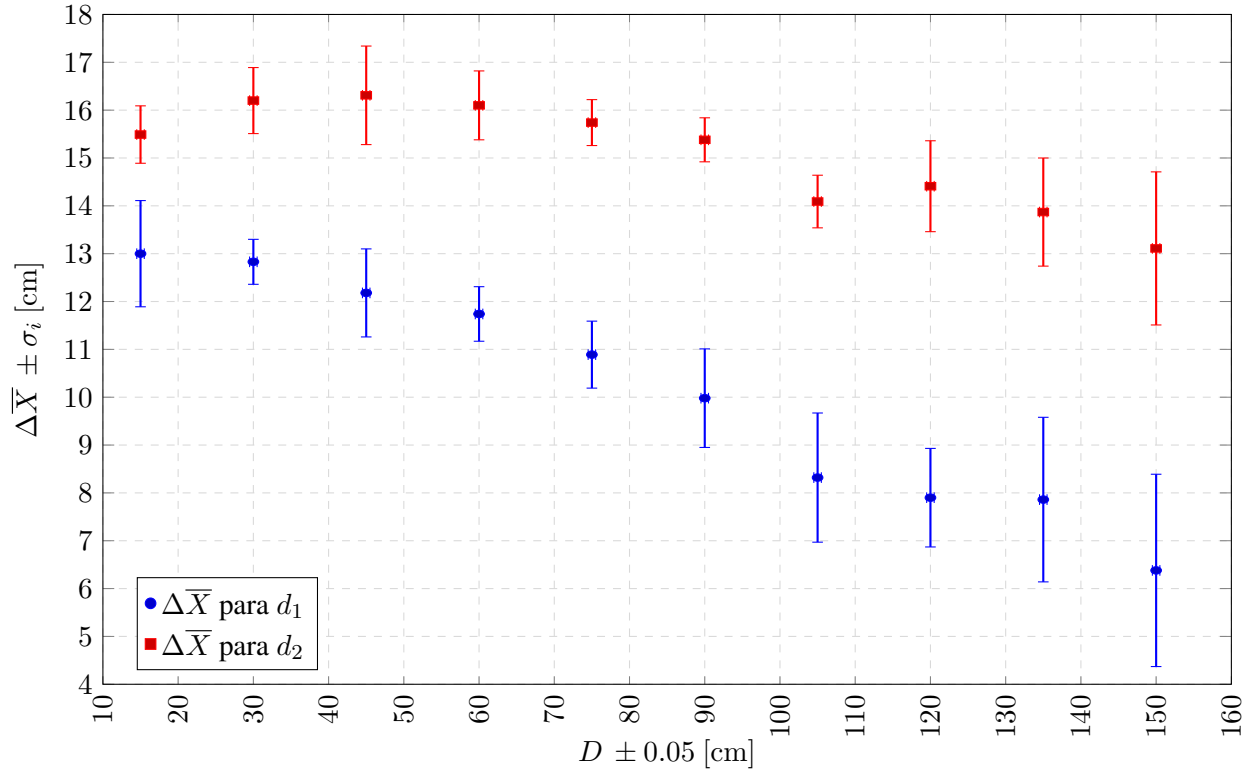


Figura 6: Distancia de viaje del anillo D contra el promedio del desplazamiento horizontal del péndulo ΔX con la desviación estándar como la incertidumbre.

3.2 Comparación con el modelo

Para poder utilizar los datos de la figura 3.1 tenemos que restar de todos ellos el ancho del péndulo para tomar en cuenta que la esquina derecha inferior no comenzó en la misma posición que la izquierda. Después, para encontrar el momento final del anillo en cada caso, podemos pasar esta información ajustada por la formula

2.31. Para comparar estos datos con nuestro modelo, asumiermos que la ecuación que relaciona la distancia D con el momento P tiene la forma

$$P(D) = P_o e^{aD}$$

que es de estructura identica a nuestro modelo de la ecuación 2.1, y podemos reemplazar la velocidad de la ecuación 2.1 por momento porque la masa es constante durante el vuelo. La forma más facil de determinar las constantes P_o y a es linealizando estos datos, esto lo logramos tomando el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación, después de aplicar las leyes de exponentes encontramos

$$\ln(P) = bD + \ln P_o \quad (3.21)$$

si los graficamos y aplicamos regresión lineal encontramos la grafica 3.2.

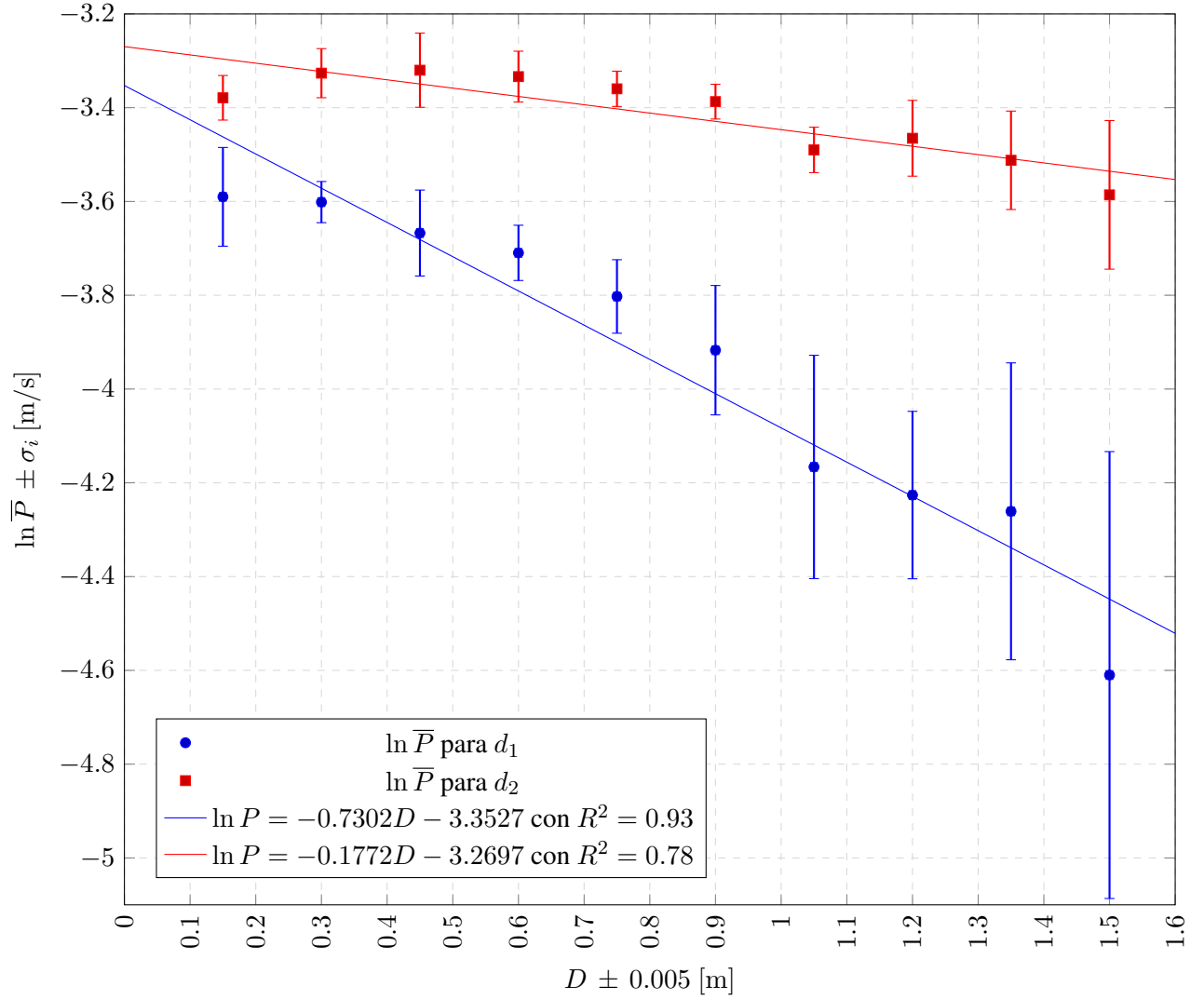


Figura 7: Datos de $\ln P$ contra D . Grafica linealizada para encontrar los coeficientes del modelo exponencial.

La regresión lineal a los dos grupos de datos nos da las ecuaciones, para el diametro d_1 y para el diametro d_2 respectivamente

$$\ln P = -0.7302D - 3.3527$$

$$\ln P = -0.1772D - 3.2697$$

basandonos en la ecuación 3.21 podemos ver que para el d_1 y para el d_2 respecti-

vamente

$$P_o(d_1) = e^{-3.3527} \quad y \quad a = -0.7302$$

$$P_o(d_2) = e^{-3.2697} \quad y \quad a = -0.1772$$

Con los valores de estas constantes y porque asumimos una masa constante, podemos construir las funciones de momento lineal con respecto a la distancia de viaje para ambos diámetros

$$P_{d_1} = P_i e^{-0.173D} \approx 0.034 e^{-0.679D}$$

$$P_{d_2} = P_i e^{-0.679D} \approx 0.038 e^{-0.173D}$$

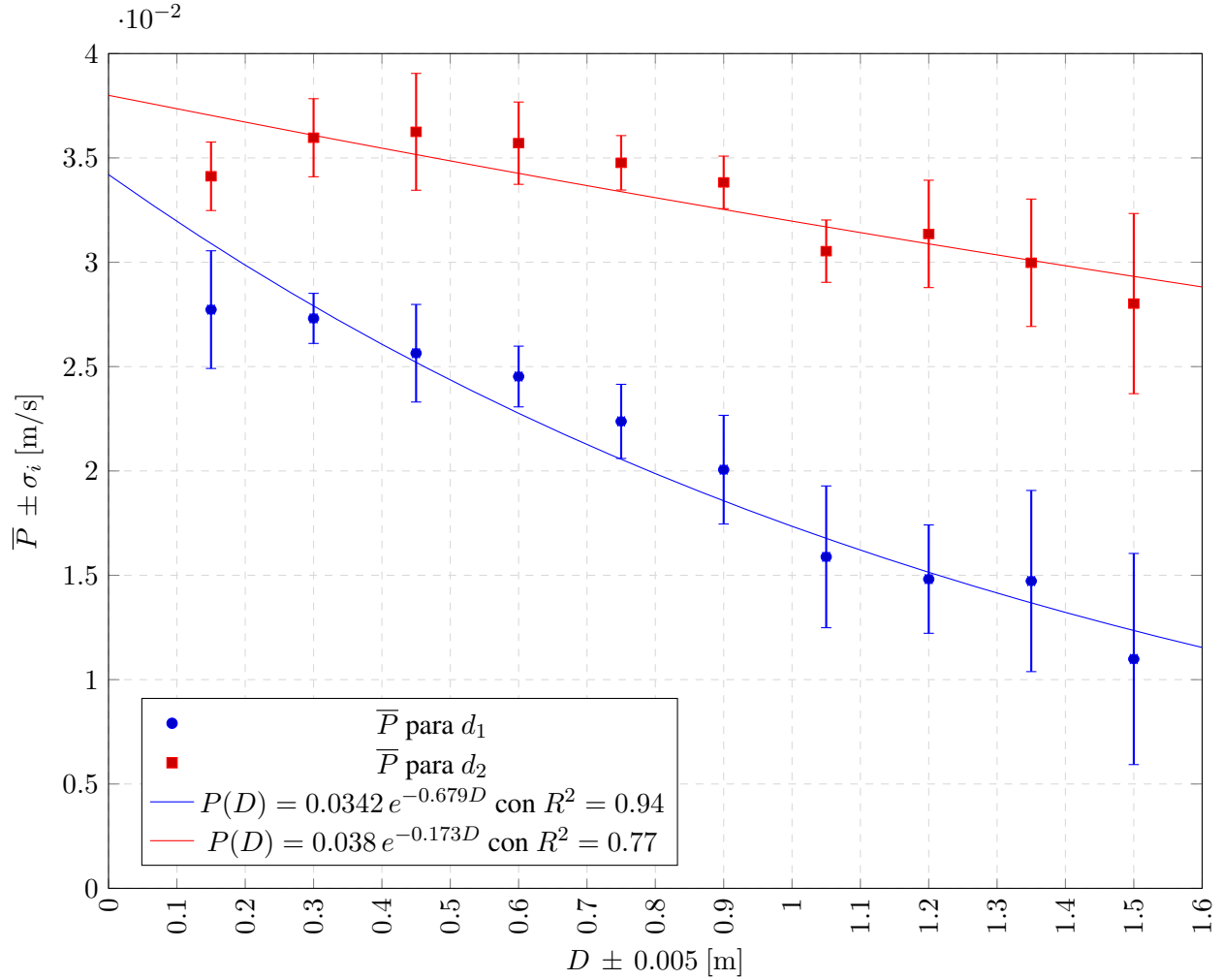


Figura 8: Velocidad final del vórtice con respecto a su distancia de viaje. Las funciones son las construidas a partir del modelo teórico y se muestra su ajuste con los datos para ambos diámetros.

3.3 Interpretación de los resultados

Los datos originales tienen la forma que calculamos en nuestro modelo teórico, un decaimiento exponencial con exponente negativo para ambos radios de la boca del cañón. Algo interesante es que la desviación estándar de los datos aumenta cuando aumenta la distancia de viaje, esto tiene mucho sentido si tomamos en cuenta los

descubrimientos de Kambe (1974). Kambe encontró que después de cierta distancia de viaje, los anillos de vórtice comienzan a cambiar su dirección de vuelo por cierto ángulo. Esto debido a que su circulación afecta la velocidad de las corrientes de aire alrededor y crea una diferencia de presión que mueve el anillo. Si esto es así, el anillo golpea el péndulo no perpendicularmente, pero con un ángulo. Esto distribuye la fuerza del impacto en fuerza perpendicular que es la que genera la torca y en fuerza paralela al péndulo, que sólo aumenta la tensión del mismo. Por lo tanto, si este ángulo aumenta con la distancia D , esperaríamos que los golpes a largas distancias tengan una mayor variación en su fuerza de impacto, y por lo tanto, en el desplazamiento horizontal que generan en el péndulo.

La fuerza perpendicular al péndulo puede ser expresada como

$$F_{\perp} = F_T \cos(\theta)$$

Y según Kambe, la el ángulo es proporcional a la distancia, por lo tanto, a mayor distancia de viaje menor fuerza perpendicular por el cambio de ángulo y la distribución de la fuerza total.

Otro factor importante es el rol que juega el diámetro de la boca del cañón.

Por limitaciones de tiempo y espacio sólo pudimos hacer las 100 pruebas de cada diámetro con dos valores, uno de $d_1 = (5 \pm 0.05) \text{ cm}$ y otro de $d_2 = (9 \pm 0.05) \text{ cm}$.

Por la ecuación 2.2 vemos que un diámetro mayor genera una mayor velocidad, y por la ecuación 1.1 vemos que mayor velocidad incrementa la rapidez del cambio de momento del anillo. Sin embargo, eso no es lo que encontramos.

De la figura 3.2 vemos que la velocidad de los anillos generados con d_1 decaen más rápido que los de d_2 . Esto lo podemos ver cuantitativamente en el coeficiente de decaimiento, para los anillos de d_1 es -0.679 y para los de d_2 es -0.173 . Esto puede deberse a varios factores, es posible que las mediciones en los 15 cm para el d_2 no sean completamente precisas, pues parecen tener aproximadamente la misma velocidad que los anillos que viajaron 15 cm desde la boca d_1 . Otra posibilidad es que la velocidad inicial de los anillos generados por d_2 fuese tan grande que hayan sido frenados en 15 cm y se acercaran a la velocidad de los anillos de d_1 a esa distancia.

4 Conclusión

A partir de esta investigación llegamos a interesantes resultados. Primeramente, desarrollamos un modelo teórico que relaciona el momento lineal \vec{P} del anillo de vórtice con la distancia que ha viajado (D). Este tiene la forma $\vec{P}(D) = \vec{P}_o e^{-aD}$ donde a es la constante de decaimiento exponencial. Otro descubrimiento fue que la velocidad inicial calculada a partir de las propiedades del cañón es una sobre estimación de la velocidad inicial experimental. También encontramos que para el diametro mayor de la salida del cañón existía un coeficiente de decaimiento a menor que para el de diametro menor. En conjunto estos descubrimientos nos proporcionas una idea de como viaja un anillo de vórtice en aire.

Sin embargo, existen algunas limitaciones en este experimento. Para empezar, las mediciones no son directamente del anillo, sino de sus consecuencias en el péndulo, por lo tanto, las velocidad reales son mayores que las medidas. También tenemos las limitaciones en las mediciones y en la consistencia de los anillos generados por el cañón. El modelo teórico que se desarrollo es simple y asume una masa constante, pero se justifica por la buena correspondencia que tiene con los datos experimentales.

Quedan preguntas por responder y han surgido nuevas a partir de esta investi-

gación. ¿Cómo se comportan estos anillos en un medio diferente, por ejemplo el agua? ¿Qué determina el coeficiente de decaimiento? ¿Qué relación tiene con el movimiento del anillo su velocidad angular? Un modelo teórico tomando en cuenta la forma del anillo sería apropiado. También investigar a mayor profundidad el efecto de las dimensiones iniciales del anillo es importante, medir directamente el radio de los anillos sería un importante paso para verificar la teoría de expansión del radio de Maxworthy (1972).

Apéndice A

Las siguientes tablas muestran los datos originales del desplazamiento horizontal del péndulo ΔX con respecto a la distancia de viaje D . Las columnas Δx_i denotan la prueba número i , todas con una incertidumbre omitida por espacio de ± 0.05 cm.

Tabla 1: Datos originales para $d_1 = (5 \pm 0.05) \text{ cm}$

$D \pm 0.5 \text{ cm}$	Δx_1	Δx_2	Δx_3	Δx_4	Δx_5	Δx_6	Δx_7	Δx_8	Δx_9	Δx_{10}	<i>Promedio</i>
15	13.28	11.03	11.86	14.25	13.76	11.80	13.92	13.84	13.65	12.56	13.00
30	12.01	12.97	13.13	12.79	12.74	13.72	13.22	12.65	12.37	12.72	12.83
45	11.47	12.94	11.86	13.59	12.28	10.93	10.93	12.76	11.89	13.11	12.18
60	12.65	12.59	11.87	11.16	10.98	11.95	11.50	11.14	11.79	11.75	11.74
75	10.70	10.49	10.17	10.82	11.28	12.26	9.87	11.22	10.57	11.53	10.89
90	9.82	11.25	8.95	9.78	10.45	11.25	7.85	9.66	10.29	10.47	9.98
105	7.09	8.62	9.06	6.44	8.50	9.78	9.58	8.92	9.29	5.95	8.32
120	7.77	7.45	9.04	8.88	6.49	6.49	7.44	9.34	7.43	8.67	7.90
135	10.75	4.97	7.39	6.87	9.78	6.34	8.09	8.67	6.86	8.90	7.86
150	4.27	5.77	9.65	6.89	6.33	5.46	9.40	7.51	4.59	3.90	6.38

Tabla 2: Datos originales para $d_2 = (9 \pm 0.05) \text{ cm}$

$D \pm 0.5 \text{ cm}$	Δx_1	Δx_2	Δx_3	Δx_4	Δx_5	Δx_6	Δx_7	Δx_8	Δx_9	Δx_{10}	<i>Promedio</i>
15	15.96	15.08	15.80	15.82	15.74	14.71	14.89	16.75	14.88	15.25	15.49
30	15.51	16.82	16.51	16.22	17.32	16.28	16.91	14.93	15.69	15.85	16.20
45	16.29	16.17	16.34	18.11	16.06	16.43	17.51	15.62	14.02	16.57	16.31
60	17.71	15.53	15.03	15.70	15.89	16.15	16.84	16	15.64	16.54	16.10
75	16.37	15.02	15.99	15.13	16.01	15.86	15.23	15.94	16.42	15.42	15.74
90	15.30	15.81	15.65	15.40	15.28	14.98	16.32	15.44	14.54	15.03	15.38
105	14.22	13.47	14.02	14.18	14.32	15.31	14.45	13.63	14.10	13.22	14.09
120	13.41	15.28	14.71	16.36	15.17	14.11	14.45	13.19	13.35	14.10	14.41
135	15.73	11.52	13.46	12.80	14.04	15.01	13.46	14.48	14.63	13.60	13.87
150	13.10	13.87	13.08	14.73	14.61	15.76	12.24	11.94	11.59	10.14	13.11

Apéndice B

Las siguientes tablas muestran los datos procesados del logaritmo natural del momento final del anillo $\ln(P)$ con respecto a la distancia de viaje $D \pm 0.5 \text{ cm}$. Las columnas $\ln(P)_i$ denotan la prueba número i, las incertidumbres fueron omiti-

das donde se utilizó la desviación estandard. Estos datos fueron los utilizados en la figura 3.2 para linealizar los datos. No todos los dígitos se muestran en estas tablas.

Tabla 3: Datos linearizados para $d_1 = (5 \pm 0.05) \text{ cm}$

D	$\ln(P)_1$	$\ln(P)_2$	$\ln(P)_3$	$\ln(P)_4$	$\ln(P)_5$	$\ln(P)_6$	$\ln(P)_7$	$\ln(P)_8$	$\ln(P)_9$	$\ln(P)_{10}$	<i>Promedio</i>
0.15	0.03	0.02	0.02	0.03	0.03	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.30	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.45	0.02	0.03	0.02	0.03	0.03	0.02	0.02	0.03	0.02	0.03	0.03
0.60	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.75	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.90	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02
1.05	0.01	0.02	0.02	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.02
1.20	0.01	0.01	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01	0.02	0.01
1.35	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01	0.02	0.02	0.01	0.02	0.01
1.50	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01	0.01	0.00	0.01

Tabla 4: Datos linearizados para $d_2 = (9 \pm 0.05) \text{ cm}$

D	$\ln(P)_1$	$\ln(P)_2$	$\ln(P)_3$	$\ln(P)_4$	$\ln(P)_5$	$\ln(P)_6$	$\ln(P)_7$	$\ln(P)_8$	$\ln(P)_9$	$\ln(P)_{10}$	<i>Promedio</i>
0.15	0.04	0.03	0.03	0.04	0.03	0.03	0.03	0.04	0.03	0.03	0.03
0.30	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.04	0.04
0.45	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.04	0.04
0.60	0.04	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.04	0.04
0.75	0.04	0.03	0.04	0.03	0.04	0.04	0.03	0.04	0.04	0.03	0.03
0.90	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03
1.05	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
1.20	0.03	0.03	0.03	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
1.35	0.03	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
1.50	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.03

Apéndice C

Comenzamos con la ecuación diferencial

$$-m \frac{d\vec{V}}{dt} = k\vec{V}^2$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \left(-\frac{k}{m}\right) \vec{V}^2$$

$$\frac{1}{\vec{V}^2} dV = \left(-\frac{k}{m}\right) dt$$

$$-\frac{1}{\vec{V}} + C_1 = \left(-\frac{k}{m}\right) t + C_2$$

$$\frac{1}{\vec{V}} = C_3 - \left(-\frac{k}{m}\right) t$$

$$|\vec{V}(t)| = \frac{1}{C_3 + \frac{k}{m}t}$$

5 Bibliografía y programas utilizados

- Akhmetov, D.G. (2009). Vortex Rings. Russia, Lavrentiev Institute of Hydrodynamics. Recuperado el 05/07/2017
- ImagingSource (2015) "IC Measure" Software de computadora para medir las distancias.
- Linden, P.F.(2001). The Formation of optimal vortex rings, and the efficiency of propulsion devices. Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, San Diego. Recuperado el 11/08/2017
- McErlean, M.R. (2011). Scalability of the force of a normally impacting vortex ring on a planar surface. (Masters Thesis). The Pennsylvania State University. Recuperado el 18/09/2017
- Rosenfeld, M. (2009). Circulation Generation and Vortex Ring Formation by Conic Nozzles. Journal of Fluids Engineering. Recuperado el 12/08/2017
- Shariff, Karim. (1996). Ring Bubbles of Dolphins. NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA United States. Recuperado el 24/09/2017
- Sullivan, I.S. (2008). Dynamics of thin vortex rings. Department of Physics, University of Oregon. Recuperado el 02/09/2017

- T. Kambe (1974) "Generation and Decay of Viscous Vortex Rings" Universidad de Tokio. Recuperado el 20/09/2017
- T.Maxworthy (1972) The structure and stability of vortex rings. University of Southern California. Recuperado el 17/08/2017
- "Vortex Rings" Wolfram Demonstration Project <http://demonstrations.wolfram.com/VortexRings/> Recuperado el 27/09/2017