

Análisis de series de tiempo para el reconocimiento de ciclos económicos.

Pablo Santoro, Diego Kozlowski

October 14, 2018

Abstract

falta

1 Introducción

La teoría económica no existe una posición inequívoca respecto de las formas de existencia cíclicas del desenvolvimiento económico. En particular, las ondas largas propuestas por [Kondratieff \(1979\)](#) de aproximadamente 50 años de duración y las ondas medias propuestas por [Kuznets and Others \(1930\)](#) han sido fruto de polémica a lo largo del siglo XX. En buena medida este debate se debe a que no existe una expresión unívoca de lo que se denomina *desenvolvimiento económico*. En primer lugar, no existe una única variable que permita reconocer dicho concepto en su integridad, sino que sólo se puede representar de forma fragmentaria en variables como el Producto Bruto Interno (PBI), o el Nivel de Salarios. Pero incluso si existiera una variable que nos permitiera reconocer este fenómeno en su totalidad desde el punto de vista de la medición de agregados económicos, queda pendiente aún la delimitación nacional de las mediciones. Esto último viene a cuento de que aquello que se considera como el ciclo económico refiere a una característica fundamental de la economía, que no necesariamente se encuentra mediada por las divisiones nacionales. Es decir, es un fenómeno propio del capitalismo como sistema, y no necesariamente se reproduce exactamente al interior de cada país. Estas complejidades para la medición del ciclo han sido en parte los motivos por los cuales no existe consenso en la literatura respecto de la existencia del mismo. El objetivo del presente trabajo es hacer uso de nuevas herramientas cuantitativas del análisis de series de tiempo, para revisar la evidencia empírica respecto de la existencia del ciclo económico. Dadas las limitaciones arriba mencionadas, se optó por utilizar series de Estados Unidos, por ser un país que por su tamaño en términos económicos, es el que mejor puede expresar las tendencias generales de la economía a su interior. En este sentido, las conclusiones obtenidas tienen mayor relevancia a partir del siglo XX, que es el momento en el cual dicho país cobra dicha característica. Sin embargo, por cuestiones metodológicas, es necesario que la información utilizada se remonte al siglo XIX. El trabajo se estructura de la siguiente manera: Luego de esta introducción se presenta una síntesis de los principales debates respecto al ciclo económico acaecidos durante el siglo XX. En la tercer sección se realiza un análisis exploratorio de datos, donde se observa las características de la serie

del precio del oro y los efectos sobre las demás series, así como se contrastan las series de tiempo con las crisis conocidas en la historiografía económica. En la cuarta sección se presentan los resultados de la econometría de serie de tiempo, en las funciones de autocorrelación y el modelo ARIMA. En la sección quinta se propone la utilización de la técnica de wavelets para modelizar el ciclo económico y se observan los resultados de aplicar esta metodología a las series del PBI y el Salario. Finalmente, en la sexta y última sección se presentan las conclusiones y futuras líneas de investigación.

2 Debates en torno al ciclo económico

No abundan en la literatura económica polémicas en las cuales se haya sentado posición desde prácticamente el conjunto de las escuelas del pensamiento económico, y en dónde, a la vez, se pueda vislumbrar la estructura lógica subyacente a las mismas. La discusión en torno a ¿qué es el ciclo económico?, ¿cómo se origina? y ¿qué implicancias tiene a nivel de política económica? es, definitivamente, una de esas polémicas. Desde todas las escuelas del pensamiento económico se han buscado explicaciones a estos interrogantes. Por un lado, encontramos las explicaciones que se centran en el rol de la demanda, en particular de los bienes de inversión, como punto de partida del ciclo económico. Allí, en la obra de [Kalecki \(2013\)](#) el ciclo surge por la dinámica particular que tiene la demanda de bienes de inversión a partir de las diferencias temporales entre que se toman las decisiones de demanda de dichos bienes y el momento en que estos son finalmente puestos en marcha. Luego [Keynes \(2018\)](#) plantea que los *animal spirits* dominan la escena, siendo la eficiencia marginal del capital la que guía el trayecto del ciclo. También pertenecen a esta escuela [Harrod \(1936\)](#), [Kaldor \(1940\)](#) y [Samuelson \(1939\)](#), quienes proponen modelos donde hay una interacción entre el multiplicador keynesiano y el principio de aceleración, es decir, donde el producto define la demanda de bienes de consumo, y ésta a la demanda de bienes de inversión, que finalmente terminan por operar sobre el producto, generando una espiral de sobre-determinaciones que terminan por generar un ciclo. Desde una escuela distinta [Schumpeter and Others \(1939\)](#) parte del rol de los empresarios innovadores para llegar a un “modelo tricíclico” donde opera una superposición de ondas cortas, medias y largas. La teoría austríaca del ciclo, encabezada por [Hayek \(1933\)](#) y [von Mises \(1943\)](#), considera un origen puramente monetario, basado en la creación endógena de poder adquisitivo y variaciones de los precios relativos. Por último, se encuentra la teoría neoclásica del ciclo, que surge a partir de la crítica de Lucas a la macroeconomía keynesiana. En los modelos de esta teoría se prioriza la microfundamentación de los supuestos de comportamiento, y por lo tanto, que los individuos sean agentes racionales, y que en todo momento existan equilibrios competitivos. Estos modelos se dividen entre los planteados por el propio [Lucas Jr \(1975\)](#), dónde el shock inicial es monetario, y los modelos del real business cycle [Plosser \(1989\)](#), dónde el impulso original está dado por cambios aleatorios en la tecnología. Desde el punto de vista del análisis empírico, existen múltiples autores que han encontrado evidencia, ya sea mediante el estudio de las series sin aplicarles alguna transformación particular ([Kuznets and Others, 1930](#); [Kondratieff, 1979](#); [Schumpeter and Others, 1939](#)), utilizando el modelos autorregresivos, de medias móviles, y ARIMA ([Hamilton, 1989](#); [Kaiser and Maravall, 2012](#)), o más recientemente mediante el

uso de wavelets (Yogo, 2008; Soares and Others, 2011).

3 Análisis Exploratorio de Datos

En la presente sección realizaremos un breve análisis exploratorio de datos, para observar las características generales de las series. Todas las series utilizadas fueron tomadas de la web *Measuring worth*¹ y corresponden a Officer and Williamson (2018a) para la serie anual del PBI de Estados Unidos entre 1790 y 2017, Officer and Williamson (2018b) para el la serie anual del oro en el mercado de Nueva York entre 1791 y 2017, y Officer and Williamson (2018c) para la serie anual del salario horario nominal de obreros de la producción, entre 1791 y 2017.

En particular, resulta interesante para caracterizar el ciclo económico medir el Producto Bruto interno (PBI) y el salario. Sin embargo, es importante reconocer el fenómeno que se observa en la figura 1. Allí se marca la salida del patrón oro de la economía mundial en 1971. Luego de la segunda guerra mundial y hasta ese punto, la estructura monetaria global se basaba en la paridad con el dólar, y el *ancla nominal* del mismo con las reservas de oro de la *FED* (Federal Reserve Board). Esto quiere decir que Estados Unidos no podía emitir dólares que no estuvieran respaldados por su equivalente en oro en las reservas del banco central de dicho país. Por ello, la relación dólar-oro se mantuvo prácticamente inamovible hasta este 1971. Luego de que eliminó este ancla, la capacidad de emisión de libre de respaldo implicó que la FED emita por encima de las reservas, y en general del oro en circulación, lo cual implicó un aumento del precio del oro expresado en dólares, o lo que es equivalente, una caída del dólar estadounidense expresado en oro.

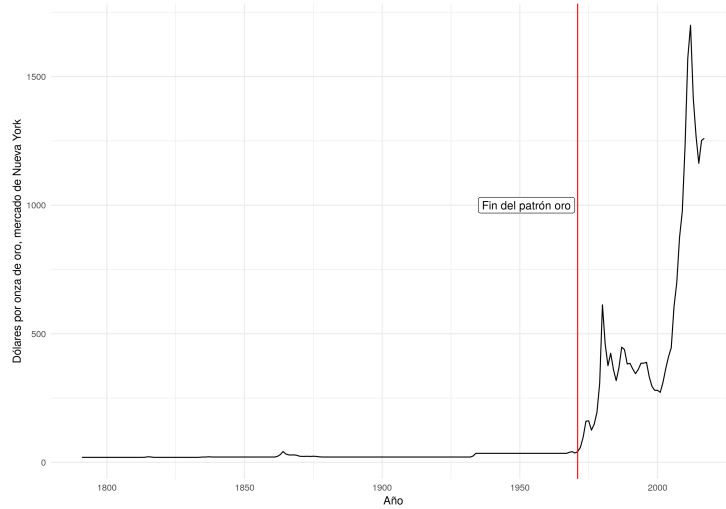


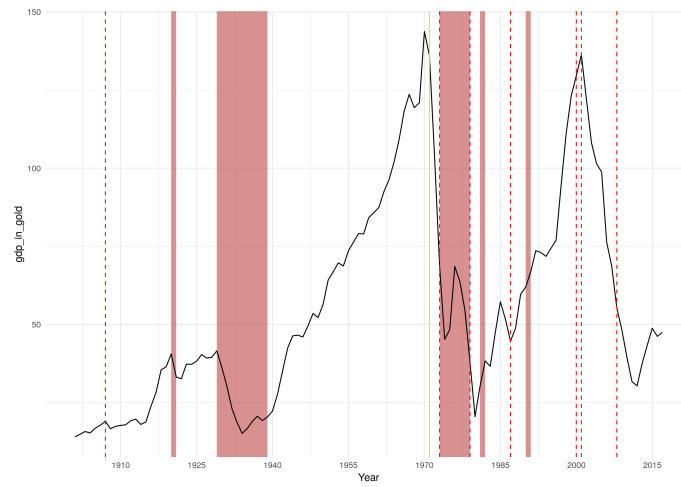
Figure 1: Precios del oro por onza en el mercado de Nueva York

Dado que lo que se busca en el presente trabajo es realizar un análisis de largo plazo del ciclo económico, esta perturbación nominal oscurece el fenómeno

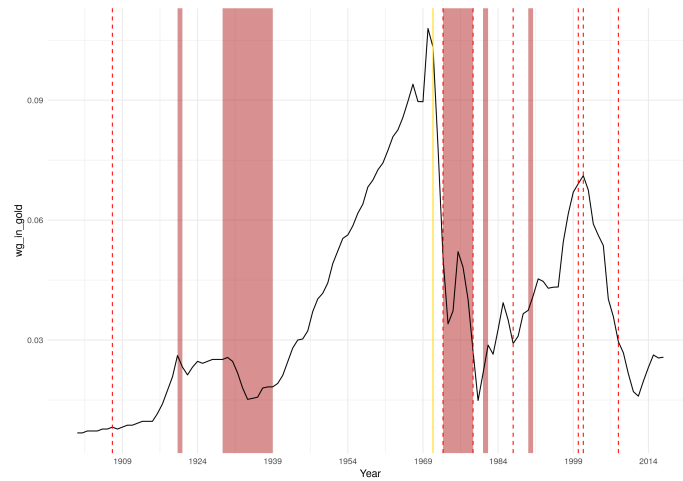
¹<https://www.measuringworth.com/>

subyacente que se esta buscando. Es por ello que se opto por normalizar las series del PBI y el salario por el precio del oro. De esta forma las series se leen como el producto y el salario expresado en su capacidad de compra de oro. Una alternativa a esto sería dividir por el Índice de Precios al Consumidor, de forma tal que ambas series se expresen en capacidad de poder adquisitivo constante. Sin embargo, dado que el precio de las mercancías no esta determinado exclusivamente por fenómenos de tipo nominal, tal como la relación dólar-oro, sino por los cambios tecnológicos, y estos últimos juegan un rol central en el desenvolvimiento del ciclo económico, consideramos que esta normalización no sería la adecuada.

De acuerdo con lo anterior, la figura 2(a) muestra la serie de el PBI de Estados Unidos entre el 1900 y 2017, expresado en oro. Por su parte la figura 2(b) muestra la serie del salario horario de un obrero de la producción en Estados Unidos entre 1900 y 2017, expresado en Oro. En ambos casos se resaltan en rojo los períodos de crisis conocidos en la literatura económica, y en líneas punteadas aquellas crisis puntuales que se extienden en un año en particular.



(a) PBI expresado en Oro



(b) Salario expresado en Oro

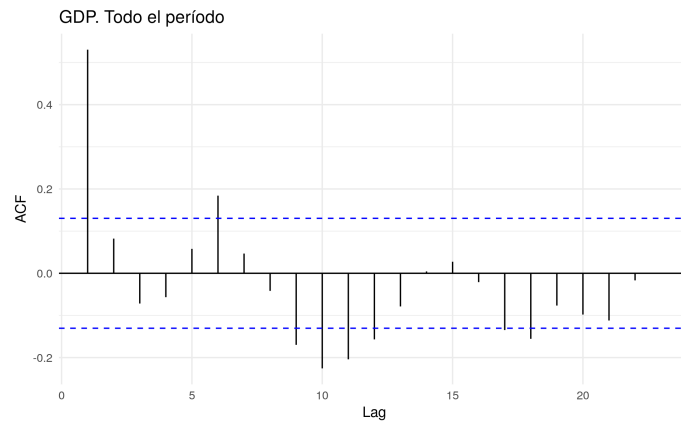
Figure 2: Series Expresadas en Oro. Destacado de crisis conocidas

En primer lugar lo que se observa es la similitud de ambas series, en términos generales. Ambas muestran tres picos, durante los 20', en 1970 y el 200, seguidos de caídas profundas. La normalización por el precio del oro permite ver un gran ciclo con tres oscilaciones, por lo menos de manera aparente, durante el siglo XX. Las crisis revisadas por la literatura de historia económica parecen tener su correlato en los movimientos observados en ambas series. Por su parte, también es interesante resaltar que el tercer movimiento ascendente, cuyo punto álgido se encuentra en el año 2000, lleva a un valor similar al del movimiento oscilatorio previo para el caso del PBI, pero no para el salario. Esto expresa que la distribución del PBI en salario y ganancia se modificó en el último período.

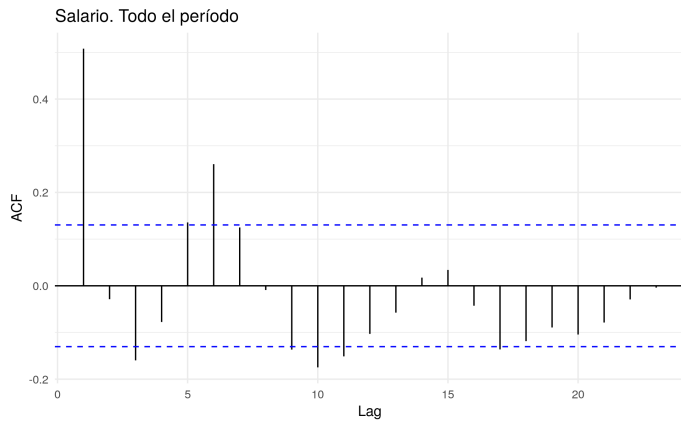
4 Autocorrelación y ARIMA

En la presente sección se analizará la autocorrelación de las series anteriores, para observar su comportamientos desde un punto de vista sistemático. Para ello también se observará un modelo ARIMA.

En primer lugar, se calculó la autocorrelación para el total del período en ambas series. Esto se puede observar en la figura 3. Ambas series tienen un comportamiento similar, con una fuerte correlación con el período anterior, una correlación positiva con respecto a 6 lags, y una relación negativa con 10 lags.



(a) PBI expresado en Oro



(b) Salario expresado en Oro

Figure 3: Autocorrelación de las series

Si embargo, dada la importancia de la caída del patrón oro en el 71', se decidió recalculó las autocorrelaciones para antes y después de dicho año. Esto puede observarse en la figura 4. Aquí nuevamente las series presentan un comportamiento similar entre sí, y sin embargo muy distinto antes y después del período. En particular, antes de 1971 se observa una fuerte correlación positiva con períodos anteriores, en particular para el PBI, que mantiene una relación positiva con hasta los 12 primeros lags. Esto esta reflejando una fuerte tenden-

cia ascendente. Es importante considerar que el quiebre de la serie se realiza en un pico, por lo que antes del 71' queda un fuerte crecimiento observado desde la segunda guerra mundial hasta dicho punto. Lo notable es que ambas series luego de este punto sólo muestran una correlación significativa con el período anterior, es decir parecieran ser un *random walk*.

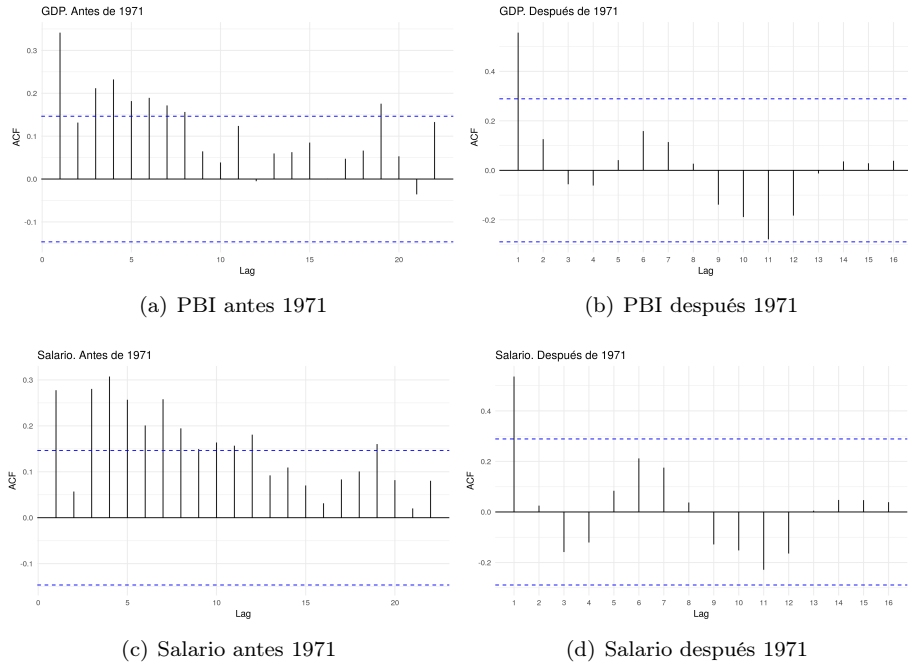
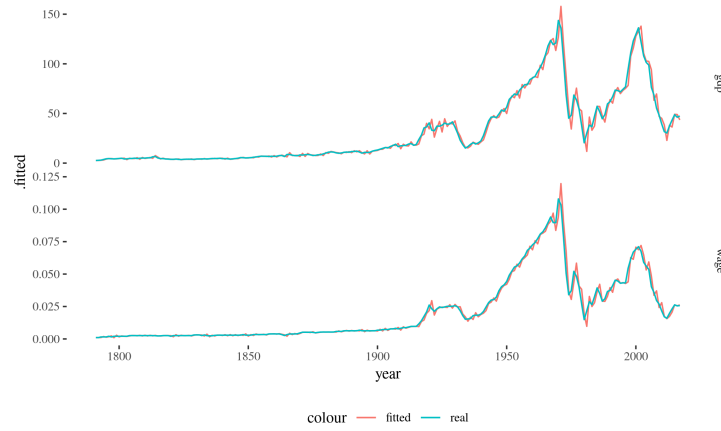
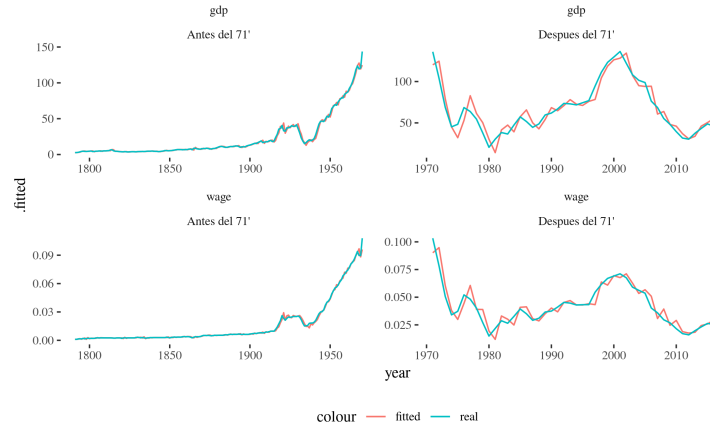


Figure 4: Autocorrelación de las series

En la figura 5 se observa el modelo ajustado por ARIMA para las series en su conjunto y divididas por períodos. Los modelos reflejados en 5(a) son en ambos casos un modelo ARIMA(1,1,2). Es decir, un modelo autoregresivo de orden 1, integrado de orden uno y Media Móvil de orden 2. Este modelo pareciera ser más volátil que la serie original, en particular para el período posterior a 1971.



(a) ARIMA total



(b) ARIMA por grupos

Figure 5: Predicción ARIMA

Lo observado en 5(b) son los siguientes cuatro modelos:

	tipo	group	model.desc	sigma	RMSE
1	wage	Antes del 71'	ARIMA(2,2,1)	0.00	0.00
2	wage	Despues del 71'	ARIMA(1,0,2) with non-zero mean	0.01	0.01
3	gdp	Antes del 71'	ARIMA(0,2,2)	2.48	2.45
4	gdp	Despues del 71'	ARIMA(2,0,0) with non-zero mean	9.59	9.27

Se observa tanto un mayor desvío como un mayor error cuadrático medio para ambas series después de 1971. A su vez, las series antes del 71' son integradas de orden dos, producto de lo mencionado arriba de que hasta este punto se toma la fuerte fase ascendente del ciclo en la posguerra, en y lo convierte en una serie divergente. Al contrario, los ARIMA óptimos para las series posteriores a 1971 no requieren ser integrados, sino simplemente tener un término de nivel (*non-zero mean*). A su vez, el modelo también pareciera ser más volátil

que las observaciones en este período. Como conclusión, estas herramientas tradicionales de la econometría no bastan para dar cuenta del fenómeno cíclico.

5 Wavelets

Por lo anterior, se decidió explorar nuevas herramientas del análisis de series de tiempo para poder caracterizar el ciclo económico. En particular, los espectrogramas producidos mediante *wavelets* parecen ser una herramienta propicia para encontrar ciclos bien definidos a lo largo del período analizado. Las wavelets son un tipo de transformación sobre la serie original que puede pensarse como una rotación de un espacio de funciones a un dominio diferente. A diferencia de la transformada de Fourier, que tiene como base de funciones los senos y cosenos, la transformada Wavelet tiene como base de funciones una base de Wavelets [Castro and Castro \(1995\)](#). Una base de este tipo se construye a partir de una función madre, que es una onda corta, de duración finita, a diferencia de las funciones seno y coseno que se extienden infinitamente, es decir, tienen *sopORTE compacto*. Otra característica de las funciones wavelet es que el área debajo de la curva debe ser igual a cero, es decir que esta centrada en cero.

que se traslada y dilata para construir una base ortonormal. Si denominamos a la función madre como $\psi(x) \in L^2(R)$, la misma se puede expandir en escalas que son potencia de dos mediante:

$$\psi_{a,b}(x) = 2^{-a/2} \psi(2^{-a}x - b) \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

En general, mientras la transformada de Fourier de una serie del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia toma la forma de:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

La transformada wavelet lleva del dominio del tiempo al dominio de escala y traslación:

$$X(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{a,b}^*(t) dt$$

La escala describe la frecuencia (inversa de la extensión o período) del ciclo, mientras que la traslación describe el movimiento a lo largo de la serie. Dado que las series de baja frecuencia (más ciclos largos) ocupan una porción mayor de la serie, son más difíciles de ubicar en un momento particular del tiempo. El wavelet logra definir la presencia de una determinada frecuencia en un determinado momento del tiempo. Por lo mencionado, la resolución en bajas frecuencias es mala en el dominio del tiempo, pero buena en el dominio de la frecuencia, mientras que los ciclos de alta frecuencia tienen alta resolución en el dominio del tiempo, pero menos resolución en el dominio de la frecuencia. Si lo comparamos con las transformadas de Fourier, podríamos pensar que ésta tiene muy alta resolución en el dominio de la frecuencia, pero ninguna resolución en el dominio del tiempo. Otra forma de pensar los Wavelets es que lo que se hace es analizar la correlación entre la serie de tiempo y una función base (el wavelet), para cada momento del tiempo (el efecto de la traslación). Luego, se modifica la función base reescalándola para que tenga una frecuencia más baja, y se vuelve

a calcular la correlación entre esta y la serie. Finalmente lo que obtenemos es un valor de la asociación lineal entre la serie original y la función base, para cada valor del tiempo y la frecuencia. La función base que utilizamos para el presente trabajo es la denominada *Morlet Wavelet*, que tal como se implementa en la librería WaveletComp (Roesch and Schmidbauer, 2018) tiene la siguiente forma:

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} e^{i\omega t} e^{-t^2/2}$$

Donde ω es la frecuencia angular (tasa de rotación en radianes por unidad de tiempo). Esta es una función continua, compleja, frecuentemente utilizada en la literatura (Conraria and Soares, 2011). Por su parte, las base a partir de la traslación, a , y el escalado, b , implementada es:

$$X(a, b) = \sum_t x(t) \frac{1}{b} \psi^*\left(\frac{t-a}{b}\right) dt$$

Visualmente, las traslaciones y reescalados de la función base se pueden observar en la figura 6. Allí se aprecia que las traslaciones se definen en el dominio del tiempo, mientras que los reescalados lo hacen en el dominio de la frecuencia. Luego, si se reconstruye el plano tiempo-frecuencia y se calcula la correlación de cada punto del dicho plano con la serie original, se obtiene una nueva dimensión que representa el grado de ajuste de nuestra serie a cada frecuencia, para los distintos momentos del tiempo.

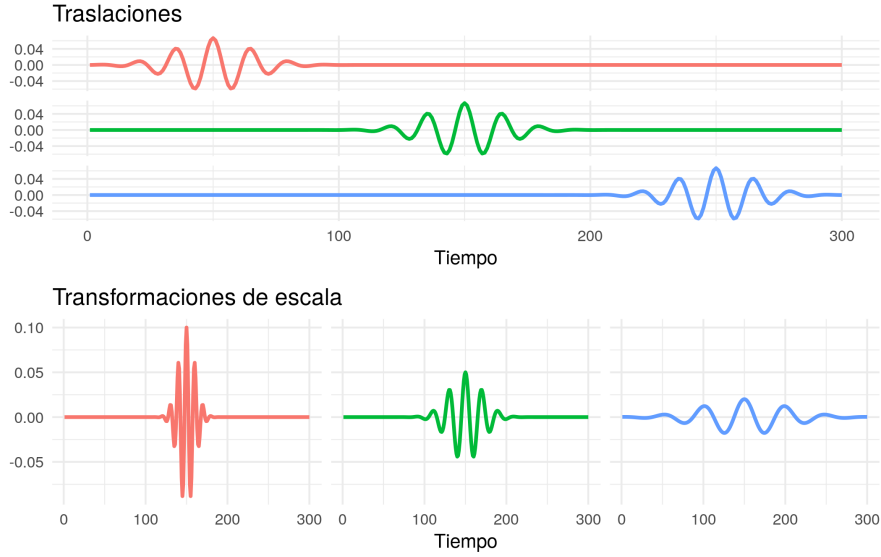


Figure 6: Traslaciones y reescalados de la función base Morlet

Para visualizar las wavelets en el análisis del ciclo económico es propicio definir un modelo teórico de una economía cíclica, con los diferentes componentes vistos de por separado y en su composición, para observar las características del espectrograma en este modelo, y luego compararlo con los datos reales.

En la figura 7 se observan 100 valores de los distintos componentes con los que construiremos la serie:

- **impulso:** Una serie con un valor constante de 50, que en período en particular tomar el valor 100.
- **Tendencia**
- **ciclo corto:** Un ciclo de amplitud y extensión pequeña
- **ciclo medio:** Un ciclo de amplitud y extensión media
- **ciclo largo:** Un ciclo de amplitud y extensión grande
- **ruido:** Ruido generado a partir de una distribución normal, poco significativo respecto a la amplitud de los ciclos y la pendiente de la tendencia.

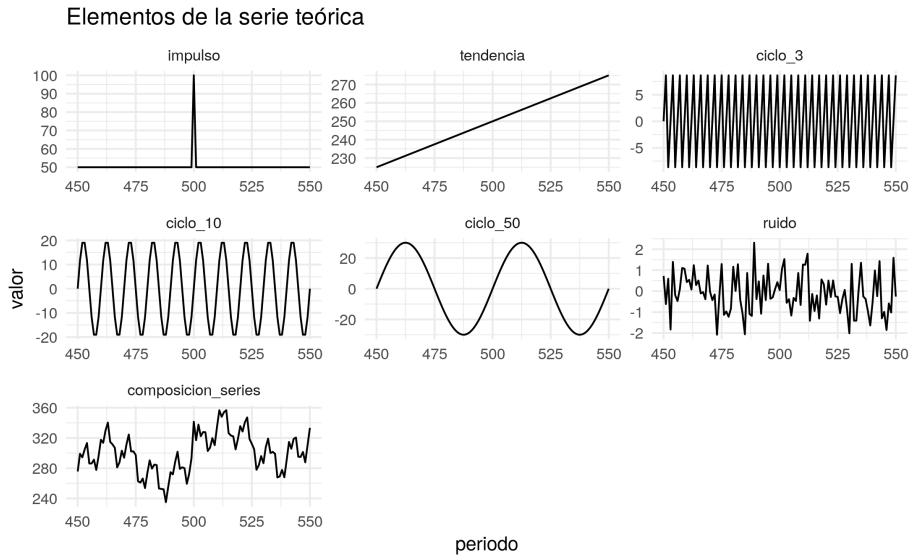
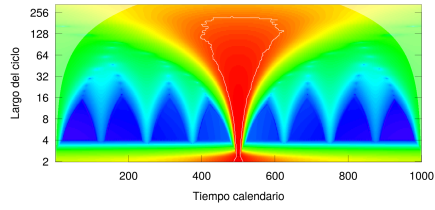


Figure 7: Serie Teórica

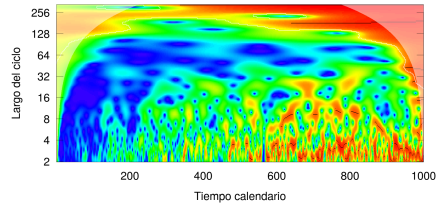
En la figura 8 se observa el espectograma de cada uno de los elementos mencionados. Dicho gráfico muestra en el eje vertical el período, la inversa de la frecuencia de onda, que corresponde a la distancia entre los valles o picos de un ciclo. La escala cromática (de los azules para los valores más bajos a los rojos en los valores más altos) representa la amplitud del ciclo. el eje horizontal representa el tiempo calendario. Es decir, para cada tiempo calendario podemos observar la amplitud del ciclo en cada una de las posibles frecuencias de onda. El impulso se presenta como un ciclo de amplitud grande en todas las frecuencias, en el momento correspondiente. La tendencia, por su parte, se presenta básicamente como ruido, dado que es estrictamente un comportamiento no cíclico. Sin embargo, presenta la particularidad de presentar valores de amplitud mayores

hacia el final del período para frecuencias bajas, y valores de amplitud particularmente bajos en las frecuencias altas de los primeros momentos. Los tres ciclos definidos marcan claramente una línea horizontal en el correspondiente período, que luego se diluye hacia las demás frecuencias. Finalmente, el normal presenta un comportamiento muy particular, mostrando mayores amplitudes, de forma irregular, en las frecuencias altas, y homogeneizándose hacia valor de amplitud baja en las frecuencias más bajas. Esto se debe a que el ruido normal se puede parecer a un ciclo de períodos muy cortos debido a una sucesión de subas y bajas, pero dado que es aleatorio es cada vez más improbable que se asemeje a ciclos de períodos mayores, dado que ello implicaría una mayor cantidad de sucesiones de subas y bajas. Por último, en la composición se series se observa como los ciclos de mayor amplitud y frecuencia se expresan en la escala cromática de forma más nítida que los ciclos de menor amplitud y frecuencia. Es importante resaltar que la concordancia entre amplitud y frecuencia es producto de la forma en que construimos las series, dado que esperamos que los ciclos económicos más largos se correspondan también con movimientos de mayor amplitud.

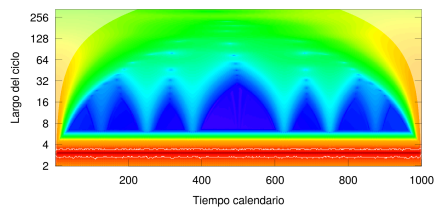
Vale mencionar que la elección para el modelo teórico de estos tres niveles y amplitudes cíclicas no es arbitraria, sino que se corresponde con lo considerado por la literatura: [Kondratieff \(1979\)](#) estudia las series largas, de unos 50 años, mientras que [Kuznets and Others \(1930\)](#) propone movimientos seculares de entre 15 y 25 años. Finalmente el Real business cycle ([Kydland and Prescott, 1982](#)) considera un ciclo corto. Por ello, decidimos modelar ciclos de 50, 10 y 3 años.



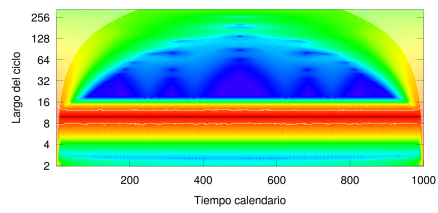
(a) impulso



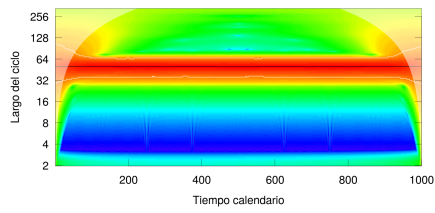
(b) tendencia



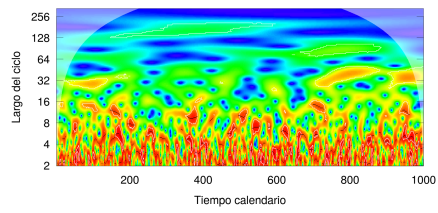
(c) ciclo de 3 años



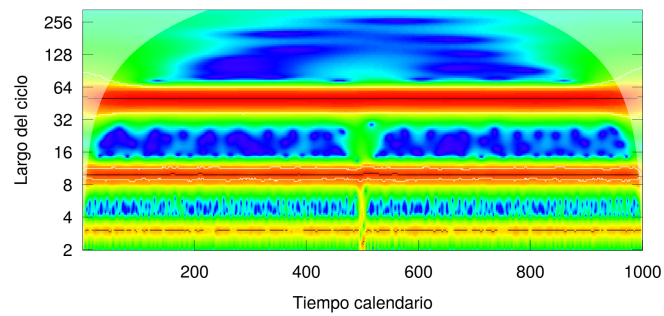
(d) ciclo de 10 años



(e) ciclo de 50 años



(f) ruido normal



(g) composición de series

Figure 8: Espectogramas Teóricos

Con lo analizado de la figura 8 podemos observar los resultados de las series originales. En la figura 9(a) se puede observar el espectrograma correspondiente al PBI de estados unidos expresado en oro. Allí se marca claramente la diferencia en la serie antes y después del 1900, y en particular también se marca el quiebre estudiado de los años 70'. No obstante lo cual, para ese período se observan 3 frecuencias donde se registra un comportamiento cíclico, en los períodos aproximados de 8 y 50 años, y un ciclo diferenciado de este último, de aproximadamente 30 años. Dada la heterocedasticidad de las series, en 9(b) se propone el espectrograma de la misma serie tomada en logaritmo de base 10. De esta forma lo que se observa es que el ciclo de 50 años se extiende más allá en el tiempo, hasta mediados del S XIX. Por su parte, aparece brevemente un ciclo más corto, de aproximadamente tres años, en la década del 70.

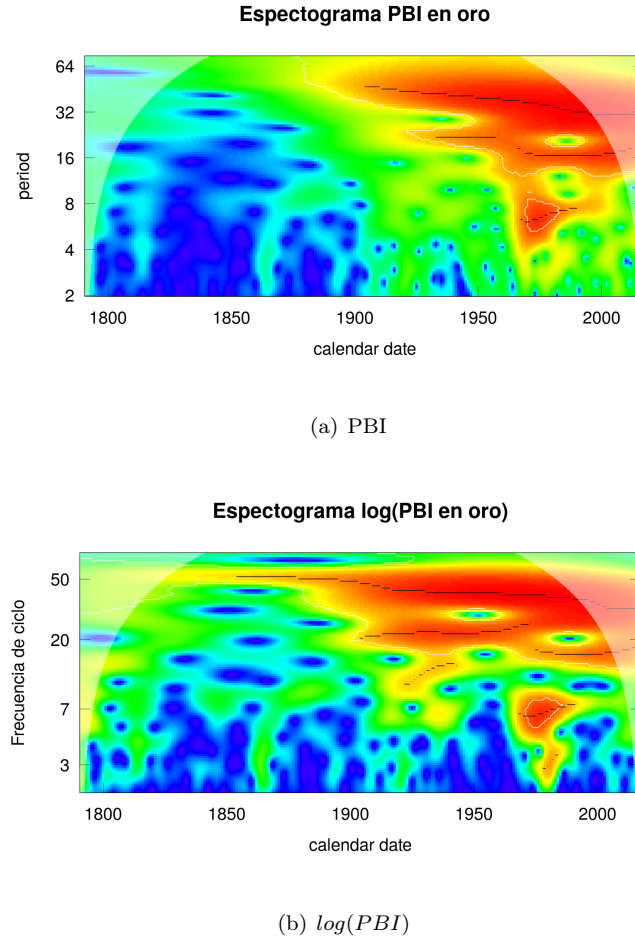
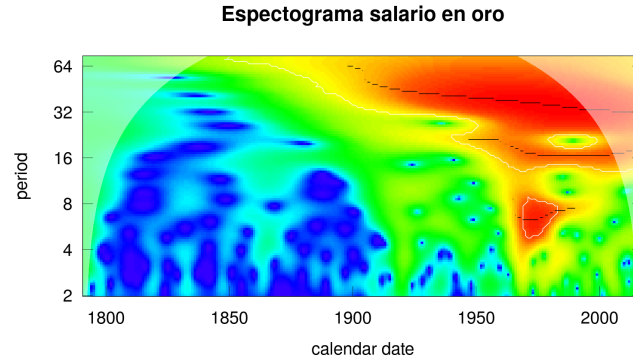


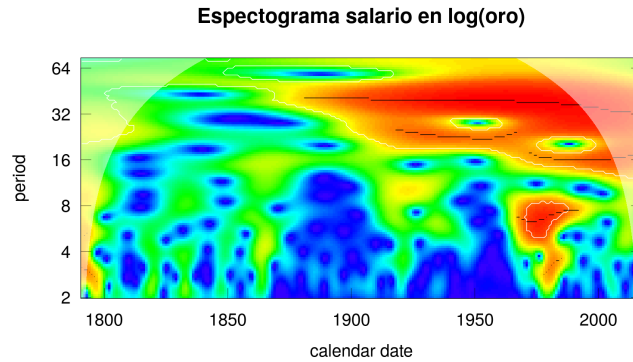
Figure 9: Espectrograma PBI en oro

las figuras 10 muestran los espectrogramas de la serie del salario expresado en oro 10(a) y el mismo tomado en logaritmo en 10(b). Para esta serie nuevamente se observa un ciclo largo bien definido en torno a los 50 años, especialmente si

se observa la serie tomada en base logarítmica. Este ciclo largo parece oscilar entre las frecuencias de $1/32$ y $1/64$, cayendo en el tiempo. Por su parte, se delimita un segundo ciclo, en torno a los 16 años de extensión, y finalmente un ciclo corto de entre 6 y 8 años. Al tomar la escala logarítmica, también aparece un ciclo de mayor frecuencia, de unos 3 años de duración.



(a) Salario



(b) $\log(\text{Salario})$

Figure 10: Espectograma Salario en oro

6 Conclusiones

Es interesante remarcar el siguiente punto: el objetivo del presente trabajo es buscar evidencia empírica respecto de la frecuencia y amplitud del comportamiento cíclico de la economía. Se toma las series de salario y PBI por ser buenos aproximadores de movimiento económico general, pero no son los únicos. A su vez, como las estadísticas tienen una base nacional, el PBI siempre es de un país en particular, así como las estadísticas del salario, debimos decidir tomar un país particular, como expresión de la economía mundial. En este

falta

sentido, al ser Estados Unidos la unidad nacional de la economía mundial de mayor envergadura, optamos por este país como representante de la economía mundial. No obstante, si bien la economía estadounidense es un buen reflejo de los movimientos de la economía mundial durante el siglo XX, lo mismo no se sostiene para el siglo XIX, dado que no se había constituido aún como la primera potencia de la economía mundial. En este sentido, es natural que no se expresen las determinaciones generales de la economía, como el ciclo, para dicho siglo, y observemos evidencia sólo a partir del 1900.

References

- Liliana Raquel Castro and Silvia Mabel Castro. Wavelets y sus Aplicaciones. In *I Congreso Argentino de Ciencias de la Computación*, 1995.
- Luís Aguiar Conraria and Maria J Soares. The continuous wavelet transform: A primer. *NIPE Working Paper*, 16:1–43, 2011.
- James D Hamilton. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 357–384, 1989.
- Roy Forbes Harrod. *The trade cycle*. Clarendon Press, 1936.
- Friedrich Hayek. *Monetary Theory and the Trade Cycle*. 1933.
- Regina Kaiser and Agustín Maravall. *Measuring business cycles in economic time series*, volume 154. Springer Science & Business Media, 2012.
- Nicholas Kaldor. A model of the trade cycle. *The Economic Journal*, pages 78–92, 1940.
- Michal Kalecki. *Essays in the theory of economic fluctuations*. Routledge, 2013.
- John Maynard Keynes. *The general theory of employment, interest, and money*. Springer, 2018.
- Nikolai D Kondratieff. The long waves in economic life. *Review (Fernand Braudel Center)*, pages 519–562, 1979.
- Simon Smith Kuznets and Others. Secular movements in production and prices. 1930.
- Finn E Kydland and Edward C Prescott. Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1345–1370, 1982.
- Robert E Lucas Jr. An equilibrium model of the business cycle. *Journal of political economy*, 83(6):1113–1144, 1975.
- Lawrence H Officer and Samuel H Williamson. What was the US GDP then? *Measuring Worth*, 2018a.
- Lawrence H Officer and Samuel H Williamson. The Price of Gold, 1257-2014. *MeasuringWorth. com*, 2018b.

- Lawrence H Officer and Samuel H Williamson. Annual Wages in the United States, 1774-Present, 2018c.
- Charles I Plosser. Understanding real business cycles. *Journal of Economic Perspectives*, 3(3):51–77, 1989.
- Angi Roesch and Harald Schmidbauer. *WaveletComp: Computational Wavelet Analysis*, 2018. URL <https://cran.r-project.org/package=WaveletComp>.
- Paul A Samuelson. A Synthesis of the Principle of Acceleration and the Multiplier. *Journal of Political Economy*, 47(6):786–797, 1939.
- Joseph Alois Schumpeter and Others. *Business cycles*, volume 1. McGraw-Hill New York, 1939.
- Maria Joana Soares and Others. Business cycle synchronization and the Euro: A wavelet analysis. *Journal of Macroeconomics*, 33(3):477–489, 2011.
- Ludwig von Mises. " Elastic Expectations" and the Austrian Theory of the Trade Cycle. *Economica*, 10(39):251–252, 1943.
- Motohiro Yogo. Measuring business cycles: A wavelet analysis of economic time series. *Economics Letters*, 100(2):208–212, 2008.