Gráficas y juegos — Tarea 5 (pares)

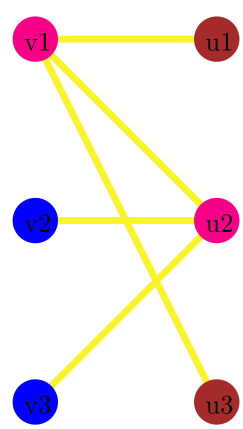
Diego Méndez , Pablo Trinidad

w

2. Muestren que K_{2n} tiene $\frac{2n!}{2^n n!}$ emparejamientos perfectos.
Demostración:
Al iniciar el emparejamiento tenemos $2n$ vertices, no importa en el vertice que empecemos tenemos $2n-1$ posibilidades, esto por que $\forall v \in V_G(gra(v) = 2n-1)$. Despues de haberlo emprarejado con algun vertice nos quedan $2n-2$ vertices y para cada uno tenemos $2n-3$ posiblidades restantes, esto por que los dos anteriores ya se encuentran emparejados y no nos podemos emparejar el vertice consigomismo.
Para el i-esimo emparejamiento tenemos $2n-i$ vertices y $2n-i-1$ posibilidades restantes.
Llegara el momento en que nos queden dos vertices y asi para cada uno solo una opción.
Así por la regla del producto tenemos que :

$$\text{emparejamientos perfectos} = (2n-1) * (2n-3) * ... * 1.$$
$$=\{(2n-1) * (2n-3) * ... * 1\} * \frac{(2n)*(2n-2)*...*2}{(2n)*(2n-2)*...*2} \text{ Multiplicando por uno.}$$
$$= \frac{2n!}{2(n)*2(n-1)*...*2(1)} \text{ Agrupando arriba y factorizando el dos n veces abajo.}$$
$$= \frac{2n!}{2^n*(n)!} \text{ Desde el paso anterior se ve que el dos se multplica n veces y se multiplica por el factorial de n.} \blacksquare$$

4. Den un ejemplo de una gráfica bipartita coenxa G con bipartición (X, Y) con $|X| = |Y|$ pero sin emparejamientos que saturen a X ni emparejamientos que saturen a Y (justifiquen su ejemplo).
Sol :
En nuestra gráfica deben existir dos conjuntos, $S_X \subseteq X \wedge S_Y \subseteq Y$ tal que $|S_X| > |ve(S_X) \wedge |S_Y| > |ve(S_Y)|$.
Sea $G = (V_G, A_G), V_G = \{v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3\} \wedge A_G\{v_1u_1, v_1u_2, v_1u_3, v_2u_2, v_3u_2\}$.
Vemos que G es conexa. Tenemos la bipartición (X, Y) con $X = \{v_1, v_2, v_3\} \wedge Y = \{u_1, u_2, u_3\}$. Sea



$S_X = \{v_2, v_3\} \wedge S_Y = \{u_1, u_3\}$. Observese que :

- $|S_X| = 2 \wedge |ve(S_X)| = 1$
- $|S_Y| = 2 \wedge |ve(S_Y)| = 1$

Así: $|S_X| > |ve(S_X)| \wedge |S_Y| > |ve(S_Y)|$.
$\implies$ en G no hay emparejamientos que saturen a X ni a Y.

6. Demuestren que si H es subgráfica generadora de G entonces $w_i(G) \leq w_i(H)$.
Demostración:
Recordemos que:

- Decimos que H es subgráfica generadora de G si $H \leq G \wedge V_H = V_G$

Sea $w_i(H) = l$

- **Caso 1:** Si $l = 0$.
  $\implies$ en H solo existen componentes de conexidad con cantidad de vertices pares.
  Recordemos que G es supragrafica de H entonces en G puede haber mas aristas que en H pero no al reves. De esta forma en G las posibles aristas que no se encuentren en H unen a la o las misma(s) componente de conexidad.
  Con lo que tendriamos solo sumas de cantidades pares de vertices.
  $\implies w_i(G) = 0$.
- **caso 2:** $l = 1$.
  Existe una unica componente de conexidad con cantidad de vertices impar en H.
  Sean $r = w(H) - w_i(H)$ la cantidad de componentes con cantidad de vertices par en H .
  - $\mathbf{r = 0}$
    $\implies n_H = n_G = impar$
    Solo existe una componente de conexidad y su cantidad de vertices es impar. De nuevo ya que $V_G = V_H$ en G no existen vertices de más y las posibles aristas en G que no se encuentren en H solo unen la misma componente de conexidad.
    $\implies w_i(H) = w_i(G) = 1$.
  - $r \geq 1$
    Existe al menos una componente par en H.
    - En G no hay aristas de mas $A_G = A_H$. $\implies w_i(G) = w_i(H) = 1$.
    - Las aristas de más en G solo unen las componentes pares en H, con esto solo reduciriamos el numero de componentes de conexidad con vertices pares en G pues sumariamos unicamente cantidad de pares dejandonos con una cantidad par, dejando intacta en G la componente con vertices impar.
      $\implies w_i(G) = w_i(H) = 1$.
    - Las aristas de más en G unen la componente impar con x componentes pares en H. La union de las x componentes pares en G nos dan una componente par, esto por que la suma de dos numeros pares nos da un numero par y al sumarle los vertices impares de la unica componente conexa impar en H nos da un numero impar, esto por que la suma de un par más un impar da un impar.
      $\implies w_i(G) = w_i(H) = 1$.

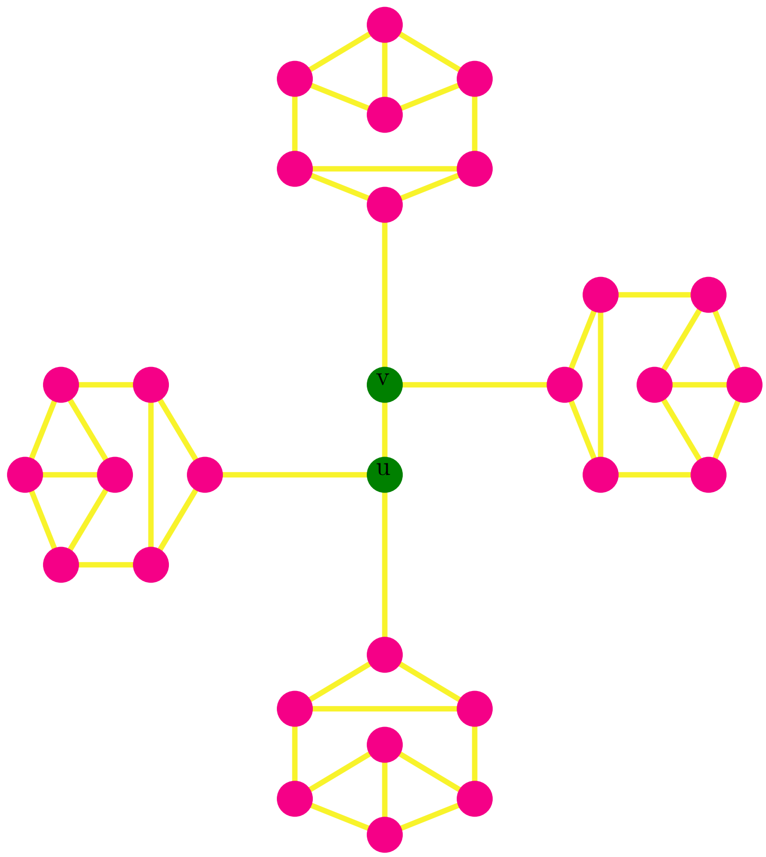
- **caso 3:** $l > 1$.
  - Como H es subgrafica de G, puede ocurrir que en G alguna arista una lo que en H son dos componentes de conexidad con vertices impares, lo que nos dejaria en G una componente cuya cantidad de vertices es la suma de dos numeros impares es decir un numero par. Así:
    $w_i(G) = l - 2 \Rightarrow w_i(G) < w_i(H)$
  - No existen aristas en G que unan dos componentes impares en H. Es decir: las mismas componentes de conexidad con vertices impares existen en G.
    $w_i(G) = w_i(H) = l$
  - Existen x aristas en G que unen y, y par componentes impares en H
    $\implies w_i(G) = w_i(H) - y \Rightarrow w_i(G) < w_i(H)$
  - Si una arista de más en G une lo que era una componente par y una componente impar en H nos sigue dejando con la misma cantidad de componentes impares en G esto por que la suma de un numero par con otro impar nos da un numero impar.
    $\implies w_i(G) = w_i(H)$

Vemos que nunca ocurre el caso que $w_i(G) > w_i(H)$.$\blacksquare$

8. Den un ejemplo de una gráfica simple 3-regular conexa sin emparejamientos perfectos.
Sol:
Recordemos :

- G tiene emparejamiento perfecto $\iff \forall S \subseteq V_G(w_i(G-S) \leq |S|)$.

Entonces debemos encontrar una gráfica 3-regular conexa con un subconjunto S tal que $w_i(G-S) > |S|$.
Sea G la siguiente gráfica:
Vemos que G es conexa y $\forall v \in V_G(gra(v) = 3) \Rightarrow$ es 3-regular.



Sea $S = \{u, v\}$, es decir los vertices verdes.
Vemos que si quitamos a S de la grafica nos quedan cuatro componentes con 7 vertices cada una.
Así:

- $w_i(G-S) = 4$
- $|S| = 2$

$\implies w_i(G-S) > |S| \Rightarrow G$ no tiene emparejamientos perfectos.