Gráficas y juegos — Tarea 5

Diego Méndez , Pablo Trinidad

1. Múestre que un árbol tiene a lo más un emparejamiento perfecto.

   Demostración: Sean E y E' dos emparejamientos perfectos del un árbol G. Consideremos ahora a la gráfica inducida por $E \cup E'$. Puesto que tanto E como E' cubren todos los vértices de G cada componente conexa de la gráfica inducida o es una sola arista aislada (presente tanto en E como en E') o un ciclo. Dado que G es un árbol, no pueden existir ciclos, por lo tanto $E = E'$.

2. Muestren que K_{2n} tiene $\frac{2n!}{2^n n!}$ emparejamientos perfectos.
   Demostración:
   Al iniciar el emparejamiento tenemos $2n$ vertices, no importa en el vertice que empecemos tenemos $2n-1$ posibilidades, esto por que $\forall v \in V_G(gra(v) = 2n-1)$. Despues de haberlo emprarejado con algun vertice nos quedan $2n-2$ vertices y para cada uno tenemos $2n-3$ posiblidades restantes, esto por que los dos anteriores ya se encuentran emparejados y no nos podemos emparejar el vertice consigomismo.
   Para el i-esimo emparejamiento tenemos $2n-i$ vertices y $2n-i-1$ posibilidades restantes.
   Llegara el momento en que nos queden dos vertices y asi para cada uno solo una opción.
   Así por la regla del producto tenemos que :

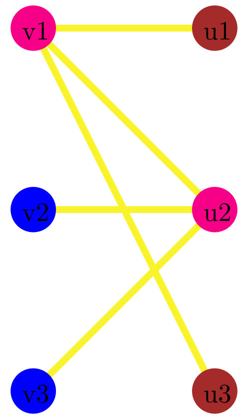
   emparejamientos perfectos $= (2n-1) * (2n-3) * ... * 1.$
   $=\{(2n-1) * (2n-3) * ... * 1\} * \frac{(2n)*(2n-2)*...*2}{(2n)*(2n-2)*...*2}$ Multiplicando por uno.
   $= \frac{2n!}{2(n)*2(n-1)*...*2(1)}$ Agrupando arriba y factorizando el dos n veces abajo.
   $= \frac{2n!}{2^n*(n)!}$ Desde el paso anterior se ve que el dos se multplica n veces y se multiplica por el factorial de n.$\blacksquare$

3. Suponga que E es un emparejamiento tal que $E \cup \{a\}$ ya no es emparejamiento para cualquier $a \in A_G - E$. Demuestre que si E^* es un emparejamiento máximo entonces $|E| \geq \frac{|E^*|}{2}\blacksquare$.

   Demostración: Por contradicción. Como $E \cup a$ para cualquier arista en $a \in A_G - E$ no es emparejamiento, tenemos que $|E| = |E^*|$, es decir, E ya es máximo y por lo tanto $|E| \geq \frac{|E^*|}{2}$ o que $E \not\subset E^*$ puesto que eso violaría la proposición inicial de que no existe $a \in A_G - E$ que podamos agregar a E tal que E siga siendo emparejamiento. En otras palabras, E^* no puede contener a todas las aristas de E. Supongamos, por motivos de la demostración, que $|E| < \frac{|E^*|}{2}$, esto implica que existe por lo menos un pár de vértices conectados por una arista en E^* que no son incidentes a ninguna arista de E, puesto que E^* ya es máximo, y que encontramos una arista $a \in A_G - E$ que podemos agregar a E de tal manera que E siga siendo un emparejamiento, llegando así a una contradicción. $\therefore |E| \geq \frac{|E^*|}{2}\blacksquare$.

4. Den un ejemplo de una gráfica bipartita coenxa G con bipartición (X, Y) con $|X| = |Y|$ pero sin emparejamientos que saturen a X ni emparejamientos que saturen a Y (justifiquen su ejemplo).
   Sol :
   En nuestra gráfica deben existir dos conjuntos, $S_X \subseteq X \wedge S_Y \subseteq Y$ tal que $|S_X| > |ve(S_X) \wedge |S_Y| > |ve(S_Y)|$.
   Sea $G = (V_G, A_G), V_G = \{v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3\} \wedge A_G\{v_1u_1, v_1u_2, v_1u_3, v_2u_2, v_3u_2\}$.
   Vemos que G es conexa. Tenemos la bipartición (X, Y) con $X = \{v_1, v_2, v_3\} \wedge Y = \{u_1, u_2, u_3\}$. Sea $S_X = \{v_2, v_3\} \wedge S_Y = \{u_1, u_3\}$. Observese que :

   - $|S_X| = 2 \wedge |ve(S_X)| = 1$
   - $|S_Y| = 2 \wedge |ve(S_Y)| = 1$



Así: $|S_X| > |ve(S_X)| \wedge |S_Y| > |ve(S_Y)|$.
$\Longrightarrow$ en G no hay emparejamientos que saturen a X ni a Y.

5. Una línea de una mátriz es una fila o una columna de la matriz. Sea M una matriz con 0 o 1 en todas las entradas, demuestra que el mínimo número de líneas que contienen a todos los 1's es igual al máximo número de 1's para los cuales ningún par está en la misma línea.

   Demostración: Sea G la gráfica bipartita dada por V_G como todas las líneas presentes en M, con la bipartición X, Y tal que X son las filas y Y las columnas. Y A_G como el conjunto de aristas que representan los 1s presentes en M de tal forma que una arista a une a un vértice x de X con uno y de Y si la entrada en la fila x y columna y es 1. Entonces ahora es fácil notar la relación entre *el número mínimo de líneas que contiene a todos los 1's* como una cubierta mínima de G y la relación entre *el número máximo de 1's para los cuales ningún par está en la misma línea* con un emparejamiento máximo de G, puesto que por definición una cubierta mínima de G es un conjunto de vértices (líneas en nuestro caso) de mínima cardinalidad que incluye al menos un extremo de cada arista de G (en nuestro caso una entrada en M con un 1), y al emparejamiento máximo como un conjunto de cardinalidad máxima de aristas que contiene a tantas aristas posibles (entradas de M con un 1) tal que ninguna arista de tal conjunto incide más de una vez el mismo vértice (filas y columnas de M). Por lo tanto, por el teorema de Kōnig sabemos que el mínimo número de líneas que contienen a todos los 1's es igual al máximo número de 1's para los cuales ningún par está en la misma línea. ■.

6. Demuestren que si H es subgráfica generadora de G entonces $w_i(G) \leq w_i(H)$.
   Demostración:
   Recordemos que:

   - Decimos que H es subgráfica generadora de G si $H \leq G \wedge V_H = V_G$

   Sea $w_i(H) = l$

   - **Caso 1:** Si $l = 0$.
     $\Longrightarrow$ en H solo existen componentes de conexidad con cantidad de vertices pares.
     Recordemos que G es supragrafica de H entonces en G puede haber mas aristas que en H pero no al reves. De esta forma en G las posibles aristas que no se encuentren en H unen a la o las misma(s) componente de conexidad.
     Con lo que tendriamos solo sumas de cantidades pares de vertices.
     $\Longrightarrow w_i(G) = 0$.
   - **caso 2:** $l = 1$.
     Existe una unica componente de conexidad con cantidad de vertices impar en H.
     Sean $r = w(H) - w_i(H)$ la cantidad de componentes con cantidad de vertices par en H .

- **r = 0**
  $\implies n_H = n_G = impar$
  Solo existe una componente de conexidad y su cantidad de vertices es impar. De nuevo ya que $V_G = V_H$ en G no existen vertices de más y las posibles aristas en G que no se encuentren en H solo unen la misma componente de conexidad.
  $\implies w_i(H) = w_i(G) = 1.$
- $r \geq 1$
  Existe al menos una componente par en H.
  - En G no hay aristas de mas $A_G = A_H$. $\implies w_i(G) = w_i(H) = 1.$
  - Las aristas de más en G solo unen las componentes pares en H, con esto solo reduciriamos el numero de componentes de conexidad con vertices pares en G pues sumariamos unicamente cantidad de pares dejandonos con una cantidad par, dejando intacta en G la componente con vertices impar.
    $\implies w_i(G) = w_i(H) = 1.$
  - Las aristas de más en G unen la componente impar con x componentes pares en H. La union de las x componentes pares en G nos dan una componente par, esto por que la suma de dos numeros pares nos da un numero par y al sumarle los vertices impares de la unica componente conexa impar en H nos da un numero impar, esto por que la suma de un par más un impar da un impar.
    $\implies w_i(G) = w_i(H) = 1.$

- **caso 3:** $l > 1$.
  - Como H es subgrafica de G, puede ocurrir que en G alguna arista una lo que en H son dos componentes de conexidad con vertices impares, lo que nos dejaria en G una componente cuya cantidad de vertices es la suma de dos numeros impares es decir un numero par. Así:
    $w_i(G) = l - 2 \Rightarrow w_i(G) < w_i(H)$
  - No existen aristas en G que unan dos componentes impares en H. Es decir: las mismas componentes de conexidad con vertices impares existen en G.
    $w_i(G) = w_i(H) = l$
  - Existen x aristas en G que unen y, y par componentes impares en H
    $\implies w_i(G) = w_i(H) - y \Rightarrow w_i(G) < w_i(H)$
  - Si una arista de más en G une lo que era una componente par y una componente impar en H nos sigue dejando con la misma cantidad de componentes impares en G esto por que la suma de un numero par con otro impar nos da un numero impar.
    $\implies w_i(G) = w_i(H)$

Vemos que nunca ocurre el caso que $w_i(G) > w_i(H)$.$\blacksquare$

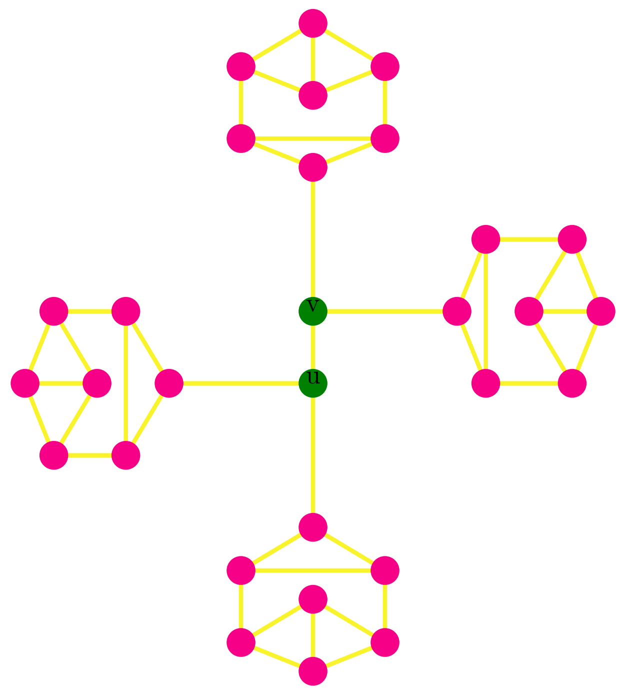
7. Muestra que si G es una gráfica simple conexa que no es completa, entonces existen tres vértices distintos $x, y, z \in V_G$ tales que $xy, yz \in A_G$ pero $xz \notin A_G$

   Demostración: Comencemos notando que necesariamente $n_G \geq 3$ puesto que de lo contrario G tendría que ser o conexa o completa. Sean x y w dos vértices no vecinos en G y $C = \{x, v_1, v_2, ..., v_l = w\}$ una xw-geodésica donde necesariamente $l > 1$ puesto que x y w no son vecinos, es decir, la distancia entre d y w es al menos 2. Si $n_G = 3$, entonces $z = w$ y por lo tanto $xz \notin A_G$ puesto que de lo contrario G sería completa. Si $n_G > 3$ y $d(C) > 2$, Si $v_1 = y$ pero $xz \in A_G$, entonces llegamos a la contradicción de que C es geodésica. Por lo tanto $xz \notin A_G$$\blacksquare$.

8. Den un ejemplo de una gráfica simple 3-regular conexa sin emparejamientos perfectos.
   Sol:
   Recordemos :

   - G tiene emparejamiento perfecto $\iff \forall S \subseteq V_G(w_i(G - S) \leq |S|)$.

Entonces debemos encontrar una gráfica 3-regular conexa con un subconjunto S tal que $w_i(G-S) > |S|$.
Sea G la siguiente gráfica:



Vemos que G es conexa y $\forall v \in V_G(gra(v) = 3) \Rightarrow$ es 3-regular.
Sea $S = \{u, v\}$, es decir los vertices verdes.
Vemos que si quitamos a S de la grafica nos quedan cuatro componentes con 7 vertices cada una.
Así:

- $w_i(G - S) = 4$
- $|S| = 2$

$\implies w_i(G - S) > |S| \Rightarrow G$ no tiene emparejamientos perfectos.

9. Sea G una gráfica simple con n_G par y sea $U = \{v \in V_G | g(v) = n - 1\}$, supongan que todas las componentes de $G - U$ son gráficas completas impares y $w(G - U) = w_i(G - U) = |U| + 2$.
Demuestren que G no tiene emparejamientos perfectos pero si $u.v \in V_G$ son tales que $uv \notin A_G$ entonces $G + uv$ si tiene emparejamientos perfectos.
Sol:
Primero demostraremos que en G no hay emparejamientos perfectos.
Sean $\{H_1, H_2, ..., H_{|U|+1}, H_{|U|+2}\}$ las componentes de conexidad impares.
Sabemos que para cada H_i sucede:

- $\forall v \in V_{H_i}(gra(v) = |V_{H_i}| - 1 + |U|)$. Es decir todos los vertices de las componentes impares estan conectados con los vertices de sus componentes excepto consigo mismos y tambien con cada vertice en U.
- $\forall v_i \in H_i \forall v_j \in H_j (v_j v_i \notin A_G)$, con $i \neq j$. Es decir las componentes estan desconectadas.

Al H_i ser completa podemos intentar armar el emparejamiento entre sus vertices, pero como es una componente impar tienen numero impar de vertices. Con lo que para cada H_i, despues de hacer lo

anterior nos van a quedar $|U|+2$ vertice en las componentes impares sin emparejar.
Recordemos que todos los vertices en U estan conectadas con todos los demas en la gráfica, esto por que rn U se encuentran todos los vertices con grado igual a $n-1$.
Lo que podriamos intentar hacer es emparejar todos los vertices de las componentes impares sin emparejar con algun elemento de U de tal forma que no utilicemos repetidos , es decir buscando el emparejamiento perfecto.
Pero como ya sabemos existen $|U|+2$ componentes impares y en cada una existe un vertice sin emparejar y solo $|U|$ vertices en U. Con lo que nos quedan dos vertices sin emparejar, uno se encuentra en alguna H_i y otro en alguna H_j, con $j \neq i$.
$\Longrightarrow$ En G no hay emparejamientos perfectos.$\blacksquare$

Ahora veremos que si $u, v \in V_G$ son tales que $uv \notin A_G \Rightarrow G+uv$ si tiene emparejamiento perfecto.
Sea $u, v \in V_G$ tales que $uv \notin A_G$.
Vemos que $u.v \notin U$ pues:

- Si $u \in U \Rightarrow \forall v \in V_G - u(uv \in A_G)$.
- Si $v \in U \Rightarrow \forall u \in V_G - v(vu \in A_G)$.

$\Longrightarrow$ $v \in V_{H_i} \wedge u \in V_{H_j}$, con $i \neq j$ de tal forma que en $w_i(G+uv-U)$ $H_i \wedge H_j$ no existen y ahora en $G+uv-U$ tenemos a H_{ij} que es una componente de conexidad par.
Ahora $\{H_1, H_2, ..., H_{i-1}, H_{i+1}, ..., H_{j-1}, H_{j+1}, ..., H_{|U|}\}$ son las componentes de conexidad impar.
Para construir el emparejamiento perfecto empezamos con uv, es decir uniendo a u y v con la arista nueva, $|H_{ij}|$ es par y $H_{ij} - \{u, v\}$ es completa, entonces nos es posible hacer el emparejamiento perfecto en H_{ij} sin ocupar ningun vertice de U.
Posteriormente hacemos lo que habiamos intentado antes:
Hacemos el emparejamiento perfecto en cada componente impar de tal forma que para cada componente nos queda un vertice sin emparejar(antes ya habiamos mencionado por que).
Pero ahora tenemos que $w_i(G+uv-U) = |U|$.
Con lo que nos es posible emparejar cada vertice sin emparejar de las componentes impares con algun diferente en U, por que los vertices en Uestan emparejados con todos ls demás vertices en la gráfica.
$\Longrightarrow$ G tiene emparejamiento perfecto.