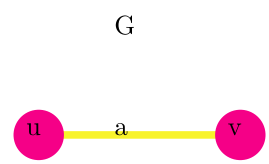
Gráficas y juegos — Tarea 4

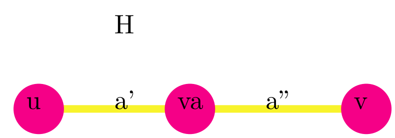
Diego Méndez , Pablo Trinidad

1. Sea G una gráfica 2-conexa, $a \in A_G$ y H la subdivision de a, demuestren que H tambíen es 2-conexa.
   Demostración:
   Como H es la subdivisión de a, tenemos:
   Sea $a = uv$

   - $V_H = V_G \cup \{v_a\}$
   - $A_H = A_G - \{a\} \cup \{a', a''\}$. Con $a' = uv_a$ y $a'' = v_a v$

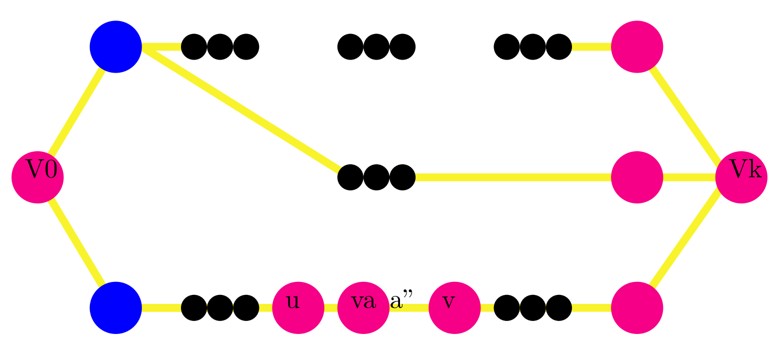
   Así:
   Antes teniamos un camino $C = (u, a, v)$ en G y lo que tenemos en H es $C' = (u, a', v_a, a'', v)$.

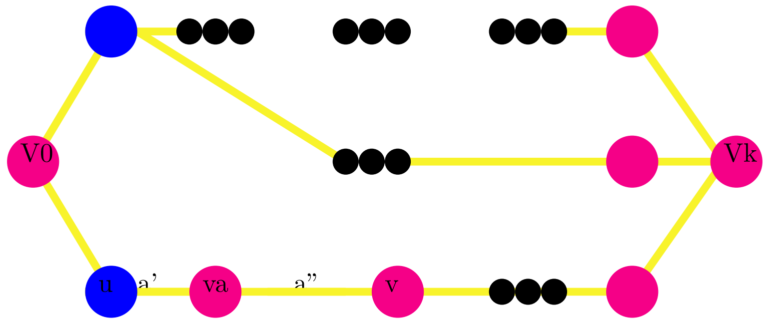
   

   Como G es 2-conexa existe un corte de vértices, sea V', tal que $|V'| = 2$
   Tenemos así dos casos:

   - $u \notin V' \wedge v \; notin V' \Rightarrow H$ sigue siendo 2conexa pues como se puede ver ni u, v ni v_a son aristas de corte y se mantienen los dos vertices azules como los vertices de corte.

   - $u \in V'$ o $v \in V' \Rightarrow$ la existencia de v_a de nuevo no es una arista de corte puesto que si la quitamos se observa que sigue siendo conexa. Y se mantienen V'(vertices azules) como corte de vertice.



$\implies$ en ambos casos se mantiene que $|V'| = 2$ más aun los mismos vertices se mantienen $\Rightarrow H$ es 2-conexa $\blacksquare$.

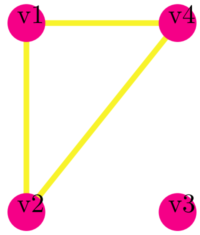
2. Den un ejemplo de una gráfica 2-conexa G con dos vértices, u y v y una $uv-$trayectoria C tal que ningúna $uv-$trayectoria de G es internamente ajena a C. ¿Esto contradice el teorema de Menger?
Sol:
No es posible. Como el enunciado lo sugiere el problema contradice el tereoma de Menger.
Como bien nos dice el teorema de Menger al ser 2-conexa existen dos trayectorias internamente ajenas que une a cualesquiera dos vertices.
Así:
Sean $u, v \in V_G, u \neq v$ y C_i una uv-trayectoria en G.
$\forall C_i \in G($ existe una uv-trayectoria C_J con $C_j \neq C_i$ tal que C_i y C_j son internamente ajenas).
Lo que nos hace imposible pedir lo solicitado.

   Si se busca que dada una uv-trayectoria= C, ninguna de las demas uv-trayectorias en G sea internamente ajena, entonces debe existir un vertice, $v_i \in V_G$ con $v_i \neq u \neq v$, que todas las uv-trayectorias utilizen. Como todas las uv-treyectorias comparten v_i y este vértice es interno, entonces todas son no internamente ajenas a C.
Al existir ese vertice tenemos que $G - v_i$ es disconexa y así:
$\{v_i\}$ es el uv-corte minimo y $|\{v_1\}| = 1$.
$\implies G$ no es 2-conexa.

3. ¿Puede existir una gráfica euleriana G con n_G par y m_G impar?. Hagan un ejemplo o muestren que no es posible.
Sol:
Recordemos que :

   - Un paseo euleriano es un recorrido que toma cada arista de la gráfica una unica vez.
   - Una gráfica es euleriana si tiene un recorrido euleriano cerrado.

   A diferencia de una hamiltoniana en una gráfica euleriana podemos no pasar por todos los vertices, la condición es recorrer todas las aristas y que exista un ciclo euleriano. En la definición nunca dice que la gráfica deba ser conexa.
Así mostramos la gráfica euleriana solicitada: $V_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} y A_G = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_1\}$



Existe el ciclo euleriano $C = \{v_1, v_2, v_3, v_1\}$.
Se observa que en el ciclo cerrado se toman todas las aristas en G.

4. Prueben que si G es euleriana entonces ninguna de sus aristas es arista de corte.
Demostración:
Como G es euleriana es conexa y existe un ciclo euleriano C:

$$C = \{v_0, a_1, v_1, a_2, ..., a_i, v_i, a_{i+1}, ..., a_{k-1}, v_{k-1}, a_k, v_0\}$$

Al quitar a la arista a_1 del ciclo euleriano nos queda un $v_1 v_0$camino $= C_2$:

$$C_2 = \{v_1, a_2, ..., a_i, v_i, a_{i+1}, ..., a_{k-1}, v_{k-1}, a_k, v_0\}$$

De la misma forma, al quitar la arista a_k del ciclo euleriano nos queda un $v_o v_{k-1}$ camino $= C_3$.

$$C_3 = \{v_0, a_1, v_1, a_2, ..., a_i, v_i, a_{i+1}, ..., a_{k-1}, v_{k-1}\}$$

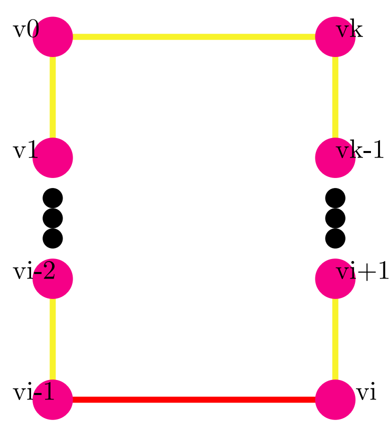
Veamos que C_2 y C_3 aun son conexas, es decir a_1 y a_k no son aristas de corte.
Sabiamos que C ya era conexa por definición, en C_2 lo que hicimos al quitar a_1 fue que ya no es un ciclo cerrado.Lo que hace el camino es comenzar en v_1 y terminar en v_0, reduciendo una unidad el numero de veces que pasamos por v_0 que por el $Teorema 4.2$ es al menos dos veces.
Lo que ocurre en C_3 es similar solo que esta vez quitamos el v_0 final y no el inicial.

Ahora veremos que pasa cuando quitamos alguna arista que desconecta a algun vertice que no sea de los extremos.
Al quitar a_i con $1 < i < k$ nos queda dos caminos:

- $C_4 = v_0 v_{i-1}$camino $= \{v_0, a_1, v_1, a_2, ..., v_{i-2}, a_{i-1}, v_{i-1}\}$

- $C_5 = v_i v_0$camino $=\{v_i, a_{i+1}, v_{i+1}, ..., v_{k-1}, a_k, v_0\}$

Garantizamos la conexidad por que al menos uno de los vertices se repite en ambos caminos. Tomemos el caso que solo es uno, es decir v_0, y cuando ocurre que $\forall v \in V_G(gra(v) = 2)$.



Vemos que a_i esta representada en rojo. Entonce si queremos llegar de alguno de los vertices de C_4 a alguno en C_5 recorremos el inverso de C_4 desde el vertice que deseamos hasta llegar a v_0 y de ahi recorremos C_5 hasta llegar a cualquier otro vertice que se encuentre en C_5.

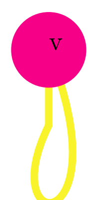
En el caso que haya algun otro vertice repetido en C_4 y C_5, es decir cuando $\exists v \in V_G(gra(v) > 2)$, puede que el camino anteriormente descrito no sea el de menor distancia, pero nos garantiza la conexidad.
Y por supuesto los vertices en C_4 estan conectados con todos los de C_4 y ocurre lo mismo en C_5.$\blacksquare$

5. Demuestren que si G es conexa con $2k > 0$ vértices de grado impar entonces existen k recorridos arista-disjuntos $C_1, ..., C_k$ tales que $A_G = A_{C_1} \cup ... \cup A_{C_K}$.
Sol: Sean $v_1, v_2, ..., v_{2k}$ los vértices de grado impar en G y G' la gráfica que obtenemos al agregar k recorridos de de longitud 2 de pares de vértices de grado impar, es decir, por cada $i = 0, ..., k-1$, agregamos un nuevo vértice w_i y dos nuevas aristas $v_{2i+1}w_i$ y w_iv_{2i}. Observemos que cada uno de los vértices w_i tiene grado 2 y dado que agregamos 1 al grado de cada vértice de grado impar, ahora todos tienen grado par en G'. Por lo tanto G' es conexa y todos los vértices tienen grado par, consecuentemente G' tiene un circuito Euleriano, es decir, un recorrido cerrado C que visita las aristas una sola vez. Este recorrido C visita cada vértice w_i exactamente una sola vez también. Sin pérdida de generalidad, $C = v_1, w_1, v_2, W_1, v_3, w_2, v_4, W_2, ..., v_{2k-1}, w_k, v_{2k}, W_k, v_1$.

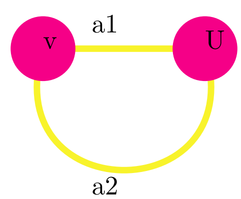
   Finalmente, a partir de este circuito Euleriano podemos remover los vértices y aristas que agregamos a G para formar G' lo cuál resulta en k recorridos de aristas disjuntas que cubren G $\blacksquare$.

6. ¿Cuando una gráfica con un solo vertice es hamiltonian?¿y con sólo dos vertices?(recuerde que un ciclo debe de ser de longitud mayor o igual a uno).
Sol:
Como el requisito es que se utilizen todos los vertices, deben tener uno y dos vertices respectivamente.

   - La gŕafica hamiltoniana de un solo vertice, $V_G = \{v\}$, es C_1 donde el unico vertice tiene un lazo, $A_G = \{vv\}$.



   - La gráfica hamiltoniana de dos vertices es C_2, que consta de dos vertices, $V_G = \{v, u\}$, y de dos multiaristas que unen ambos vertices, $\Psi(a_1) = uv$ y $\Psi(a_2) = uv$.

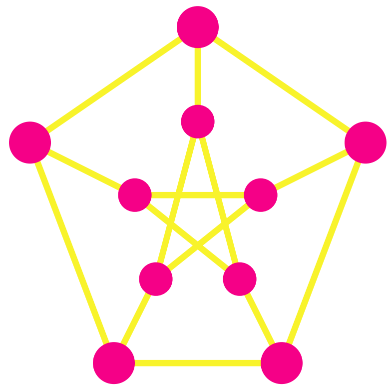


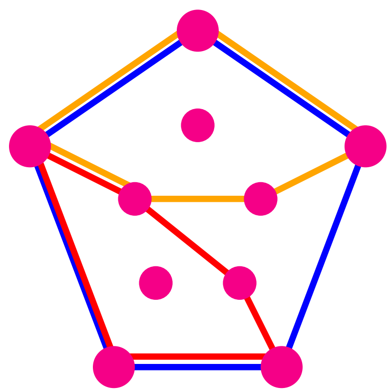
   Ambas gráficas no son simples y la longitud de ambos ciclos es mayor o igual a uno.

7. Prueben que si G es una gráfica hamiltoniana bipartita con bipartición $V_G = U \cup U'$ entonces $|U| = |U'| = \frac{V_G}{2}$.
Sol: Por contradicción. Como G es hamiltoniana, G necesita tener un ciclo hamiltoniano, es decir, un ciclo que pasa por todos los vértices de G. Como cada arista de G conecta a un vértice en U con un vértice en U', cualquier ciclo alterna entre vértices de U y U' durante su camino. Supongamos sin pérdida de generalidad, y con propósito de la demostración, que $|U| > |U'|$, es decir, hay más vértices en U que en U', digamos: $|U| = m$ y $|U'| = n$. Sea C un ciclo hamiltoniano en G que inicia en $v \in U'$, entonces, después de haber pasado por $2n$ aristas habremos llegado de vuelta a v (puesto que C es un ciclo) y todos los vértices de U' habrán sido visitados. Sin embargo, aún faltarían $m - n$ vértices por visitar en U, por lo que C no puede ser hamiltoniano. Consecuentemente $|U| = |U'| = \frac{|V_G|}{2}$ $\blacksquare$.

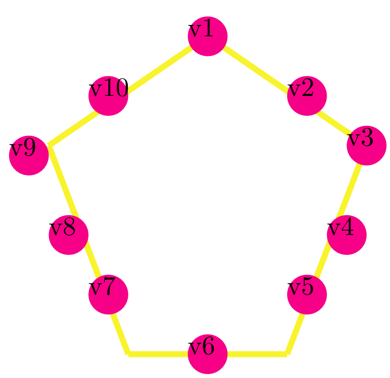
8. Demuestren que la gráfica de petersen no es hamiltoniana pero si tiene un recorrido hamiltoniano(denlo).
En la gráfica de Petersen: Se observa que:

- Existen 15 aristas.
- $\forall v \in V_G(gra(v) = 3)$
- No existen multiaristas.
- Los ciclos de menor longitus son de 5.



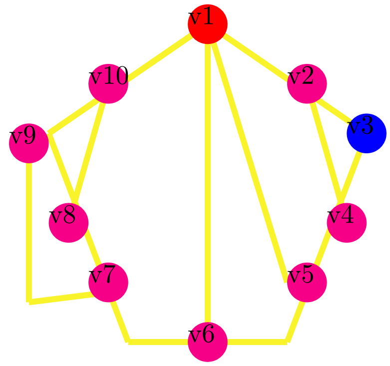


Nota: donde hay dos aristas por par de vertices no son multiaristas, solo se utilizaron diferentes colores para ejemplicar los ciclos y su longitud.
Demostración:
Por contradicción.
Supongamos que petersen si es hamiltoniana. Entonces existe un ciclo hamiltoniano C:
$C = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_1\}$
Observese que se han utilizado 10 aristas, por lo que nos faltan cinco.



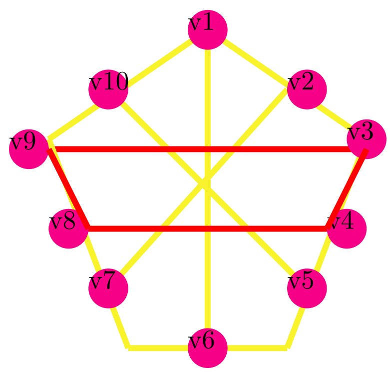
Recordemos que todos los vertices deben tener grado igual a tres. Existen dos casos:

- No se cumple que todos los vertices tengan grado tres.



  Se utilizaron las cinco aristas restantes pero almenos un vertice no tiene grado tres lo que es una contradiccón.
  Nota: La imagen de arriba solo sirve para ejemplificar; pero existen diversos casos en el que este caso se repite. Se observa que existe un vertice, el rojo, cuyo grado es igual a cuatro. Y tambien existe otro vertice, el azul, cuyo grado es igual a dos.

- Se cumple que todos los vertices tengan grado tres.



  Existen multiples ciclos de longitud cuatro, uno de ellos marcado en rojo. Lo que es una contradicción por que como ya habiamos visto: en pitersen los ciclos de menor longitud son de cinco.

En ambos casos existe contradiccón $\implies$ Petersen no es hamiltoniana.■

Recorrido(verde) hamiltoniano en petersen: