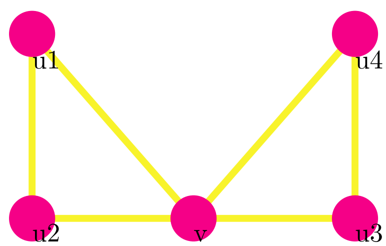
Gráficas y juegos — Tarea 2 (pares)

Diego Méndez , Pablo Trinidad

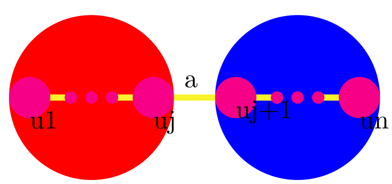
w

2. Den un ejemplo de una gráfica G con un vertice de corte v de G pero tal que G no tiene aristas de corte.
   Sol:
   Considerese la siguiente gráfica:
   $V_G = u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$
   $A_G = u_1u_2, u_2v, u_1v, vu_3, u_3u_4, u_4v$

   Sean A_1 y A_2 la bipartición de A_G de tal forma que :
   $A_1 = \{u_1u_2, u_2v, u_1v\}$ y $A_2 = \{vu_3, u_3u_4, u_4v\}$
   Así:
   $V[A_1] \cap V[A_2] = \{v\}$
   $\implies$ v es vértice de corte.
   Observación:
   $\forall a \in A_G(w(G-a) = 1)$
   $\implies$ No hay aristas de corte.

4. Demuestren que si G es conexa y tiene una arista de corte a y $n > 2$ entonces uno de los vertices incidentes en a es un vértice de corte de G. **Sol:**
   Como a es de corte y $n > 2$, a no puede ser un lazo.
   Sea $a = u_ju_{j+1}$ con $j < n$
   Como G es conexa y existe una arista de corte, pensemos en la bipartición de vertices. Observemos que si quitamos a a de la gráfica tenemos dos componentes de conexidad. $w(G-a) = 2$

   $$V_G = \{u_1, ..., u_j\} \cup \{u_{j+1}, ..., u_n\}$$

   Así $A[\{u_1, ..., u_j\}]$ nos da las aristas incidentes en dicho conjunto, ocurre lo mismo con $A[\{u_{j+1}, ..., u_n\}]$.
   Para tener una biparticion de aristas basta con agregar a la arista de corte, a, en alguno de los conjuntos:

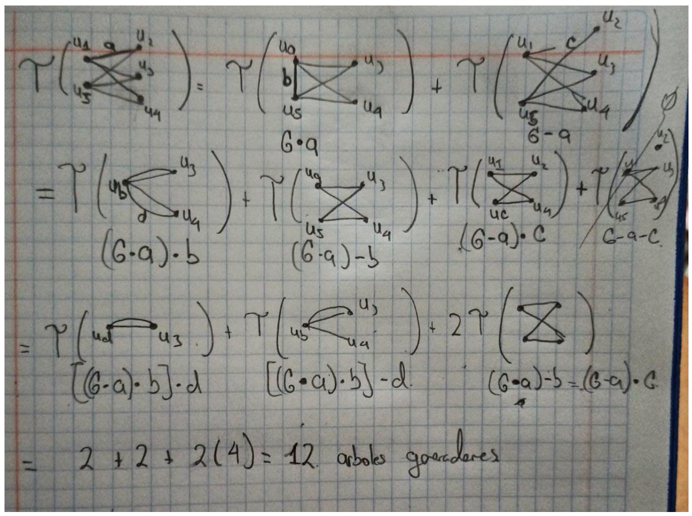
   - $A_1 = A[\{u_1, ..., u_j\}]$
   - $A_2 = A[\{u_{j+1}, ..., u_n\}] + \{a\} = A[\{u_j, u_{j+1}, ..., u_n\}]$

$\implies A_G = A_1 \cup A_2$
$\implies V[A_1] = \{u_1, ..., u_j\}$ y $V[A_2] = \{u_j, u_{j+1}, ..., u_n\}$

$$V[A_1] \cap V[A_2] = \{u_j\}$$

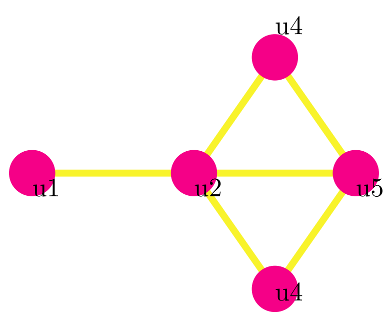
$\implies u_j$ es incidente en a y es vertice de corte. $\blacksquare$
$Nota$: u_{j+1} seria de corte si tomamos $A_1 = A[\{u_1, ..., u_j, u_{j+1}\}]$ y $A_2 = A[\{u_{j+1}, ..., u_n\}]$ con $j+1 < n$.

6. Apoyándose de la fórmula de recursión viste en clase, calculen la cantidad de árboles generadores de K_{2-3}.
Sol:
$T(K_{2-3}) =$

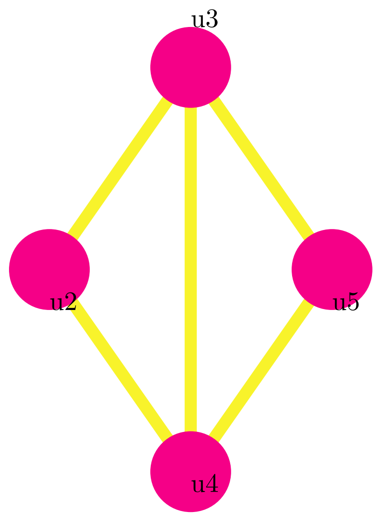


8. ¿Es cierto que si $H \leq G$ entonces $K'(H) \leq K'(G)$? Desmuestrenlo o den un contraejemplo.
Sol: Contraejemplo
Considerense las siguientes gráficas:
$G = (V_G, A_G)$ y $H = (V_H, A_H)$

$V_G = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y $A_G = \{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_5, u_4u_5, u_3u_4\}$



$V_H = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y $A_G = \{u_2u_3, u_2u_4, u_3u_5, u_4u_5, u_3u_4\}$



Se observa que $H \leq G$ pero tambien que $K'(G) = 1$ por que basta con quitar la arista u_1u_2 y $K'(H) = 2$. Así $K'(H) > K'(G)$.