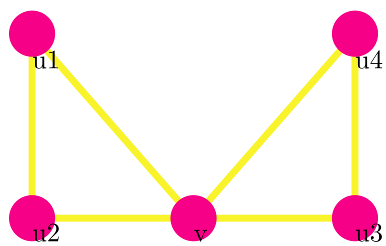
Gráficas y juegos — Tarea 3

Diego Méndez , Pablo Trinidad

1. Sea G una gráfica sin lazos, demuestra que si v es un vértice de corte de G, entonces no puede ser la hoja de ningún árbol generador.

   Demostración: Por contradicción. Sea v un vértice de corte de G y A la bipartición $A = A_1 \cup A_2$, tal que $V[A_1] \cap V[A_2] = \{v\}$. Supongamos ahora, por motivos de la demostración, que v es una hoja de cualquier árbol generador de G, es decir $g(v) = 1$. Lo anterior implica que v solo puede estar en uno de los conjuntos $V[A_1]$ y $V[A_2]$, es decir, $V[A_1] \cap V[A_2] \neq \{v\}$, por lo que v no es de corte. En el caso donde $g(v) = 0$, hablamos de la gráfica y árbol trivial, por lo que v tampoco es de corte. ■

2. Den un ejemplo de una gráfica G con un vertice de corte v de G pero tal que G no tiene aristas de corte.
   Sol:
   Considerese la siguiente gráfica:
   $V_G = u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$
   $A_G = u_1u_2, u_2v, u_1v, vu_3, u_3u_4, u_4v$

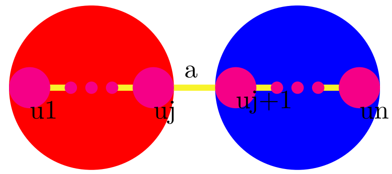
   Sean A_1 y A_2 la bipartición de A_G de tal forma que :
   $A_1 = \{u_1u_2, u_2v, u_1v\}$ y $A_2 = \{vu_3, u_3u_4, u_4v\}$
   Así:
   $V[A_1] \cap V[A_2] = \{v\}$
   $\implies$ v es vértice de corte.
   Observación:
   $\forall a \in A_G(w(G - a) = 1)$
   $\implies$ No hay aristas de corte.

3. Suponga que a es una arista de corte de G y v es un extremo de a con $g(v) > 1$, prueba que v es de corte.

   Demostración: Por contradicción. Sabemos que $g(v) > 1$. Asumamos ahora, por motivos de la demostración, que $G - v$ es conexa, es decir, v no es de corte. Sea a la arista de corte que conecta a v con $u \in V_G$, $a = vu$. Como $g(v) > 2$, entonces v tiene que ser adyacente a al menos otro vértice $w \in V_G$. Observemos ahora que como $G - v$ es conexa, entonces debe existir un uw-camino en $G - v$. Finalmente, como también existe un uw-camino $C_1 = (u, v, w)$ en G, podemos concluir que existe un ciclo en G y que a es parte de ese ciclo llegando así a una contradicción; a no es de corte puesto que pertenece a un ciclo de G[1]. ■

4. Demuestren que si G es conexa y tiene una arista de corte a y $n > 2$ entonces uno de los vertices incidentes en a es un vértice de corte de G. **Sol:**
   Como a es de corte, $n > 2$ y a no puede ser un lazo.
   Sea $a = u_ju_{j+1}$ con $j < n$
   Como G es conexa y existe una arista de corte, pensemos en la bipartición de vertices de tal forma que si quitamos a a de la gráfica tenemos dos componentes de conexidad. $w(G - a) = 2$

[1]**Teorema 2.8** - Una arista a es de corte $\iff$ a no pertenece a ningún ciclo



$$V_G = \{u_1, ..., u_j\} \cup \{u_{j+1}, ..., u_n\}$$

Así $A[\{u_1, ..., u_j\}]$ nos da las aristas incidentes en dicho conjunto, ocurre lo mismo con $A[\{u_{j+1}, ..., u_n\}]$. Para tener una biparticion de aristas basta con agregar a la arista de corte, a, en alguno de los conjuntos:

- $A_1 = A[\{u_1, ..., u_j\}]$
- $A_2 = A[\{u_{j+1}, ..., u_n\}] + \{a\} = A[\{u_j, u_{j+1}, ..., u_n\}]$

$\implies A_G = A_1 \cup A_2$
$\implies V[A_1] = \{u_1, ..., u_j\}$ y $V[A_2] = \{u_j, u_{j+1}, ..., u_n\}$

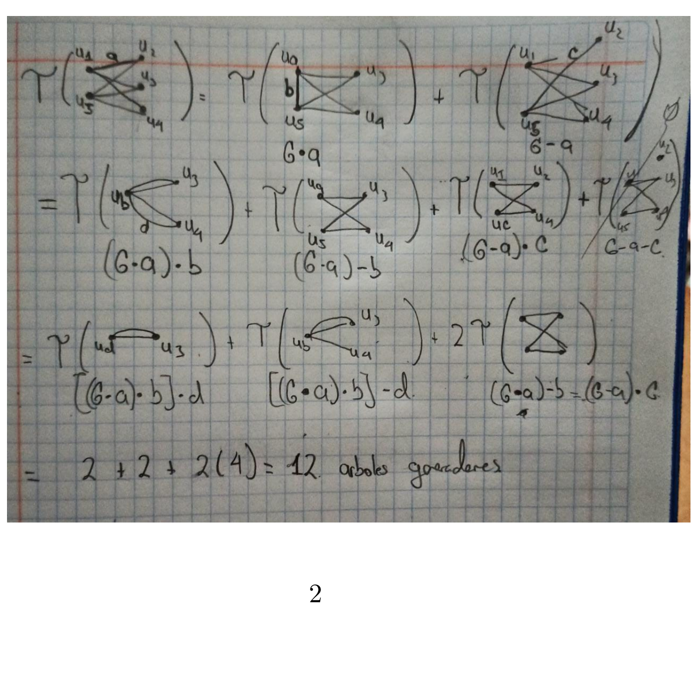
$$V[A_1] \cap V[A_2] = \{u_j\}$$

$\implies u_j$ es incidente en a y es vertice de corte. ■
$Nota$: u_{j+1} seria de corte si tomamos $A_1 = A[\{u_1, ..., u_j, u_{j+1}\}]$ y $A_2 = A[\{u_{j+1}, ..., u_n\}]$ con $j+1 < n$.

5. Demuestra que si G es un árbol y $a \in A_G$, entonces $G \cdot a$ también es un árbol.

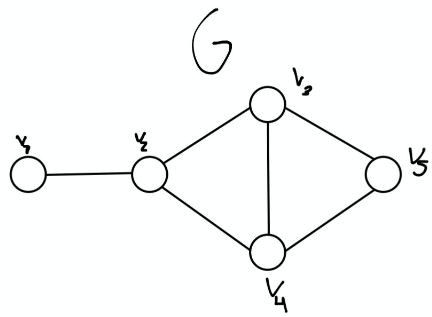
   Demostración: Como G es árbol, entonces a es de corte y por lo tanto a no pertenece a ningún ciclo ni G tiene ningún ciclo. Sean u y v los extremos de a y V_1 todos los vértices conectados a u que no pasan por a y V_2 todos los vértices conectados a v que no pasan por a, es decir, V_1 son todos los vértices *del lado de* u y V_2 son todos *los del lado* de V_2. Notamos entonces que, sin pérdida de generalidad, cualquier wy-camino para $w \in V_1$ y $y \in V_2$ es una trayectoria (por ser árbol) y que necesariamente contiene a la sección (u, a, v). Podemos entonces generalizar todo camino de este tipo como $C = (w, ..., a_i, u, a, v, a_j, ..., y)$. Finalmente por la definición de $G \cdot a$ notamos que todo camino de este tipo se convierte en $C = (w, ..., a_i, v_a, a_j, ..., y)$ y que necesariamente sigue siento una trayectoria por lo que G sigue siendo conexo y acíclico, es decir, un sigue siendo árbol ■.

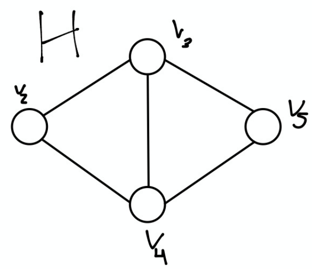
6. Apoyándose de la fórmula de recursión viste en clase, calculen la cantidad de árboles generadores de K_{2-3}.
   Sol:
   $T(K_{2-3}) =$



7. Es cierto que si $H \leq G$, entonces $\kappa(H) \leq \kappa(G)$ Demuestre o de un contraejemplo.

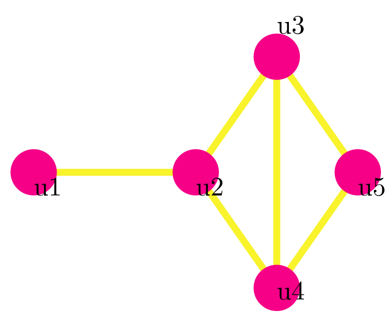
   Contraejemplo El el siguiente ejemplo $H \leq G$, sin embargo $\kappa(H) = 2 > \kappa(G) = 1$:





8. ¿Es cierto que si $H \leq G$ entonces $K'(H) \leq K'(G)$? Desmuestrenlo o den un contraejemplo.
   Sol: Contraejemplo
   Considerense las siguientes gráficas:
   $G = (V_G, A_G)$ y $H = (V_H, A_H)$

   $V_G = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y $A_G = \{u_1u_2, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_5, u_4u_5, u_3u_4\}$



   $V_H = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$ y $A_G = \{u_2u_3, u_2u_4, u_3u_5, u_4u_5, u_3u_4\}$

   Se observa que $H \leq G$ pero tambien que $K'(G) = 1$ por que basta con quitar la arista u_1u_2 y $K'(H) = 2$. Así $K'(H) > K'(G)$.