Graficas y juegos. Tarea 1(pares).

Diego Méndez Medina, Pablo Trinidad... .

2. Den un ejemplo de una gráfica tal que $m > \binom{n}{2}$.

Solución:

Sea n = 3.

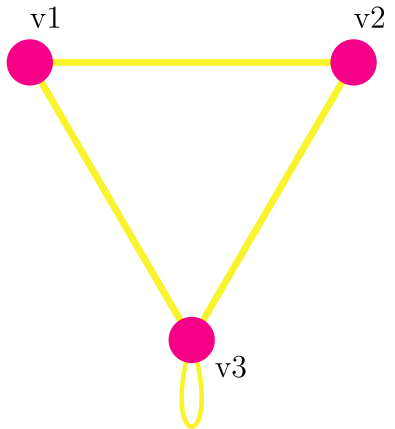
$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \tag{1}$$

$\implies m > 3$

Así:

$V_G = \{v_1, v_2, v_3\}$

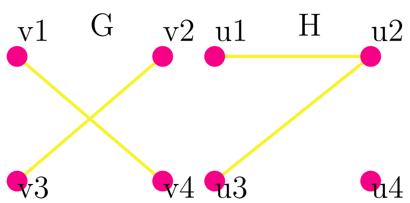
$A_G = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, v_3v_3\}$



4. Den un ejemplo de dos gráficas distintas G y H tales que $n_G = nH$ y $m_G = m_H$ pero $G \ncong H$.

Solución:

Considerese la siguiente gráfica:



$V_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ $V_H = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

$A_G = \{v_1v_4, v_2v_3\}$ $A_H = \{u_1u_2, u_2u_3\}$

Veamos por que no son isomorfas:
Como f_A debe ser biyectiva omitiremos los casos donde f_A no es inyectiva.
Así:
Caso 1:
Si $\Psi_G(a_1) = v_1v_3 \Rightarrow \Psi_H(f_A(a_1)) = u_2u_3 = f_V(v_1)f_V(v_3)$

$\Longrightarrow \;\Psi_G(a_2) = v_2v_4 \Rightarrow \Psi_H(f_A(a_2)) = u_1u_3 = f_V(v_2)f_v(v_4)$

$\Longrightarrow \; f_V(v_3) = f_V(v_4) = u_3$. Con lo que f_v no es inyectiva.

Caso 2:
Si $\Psi_G(a_1) = v_2v_4 \Rightarrow \Psi_H(f_A(a_1)) = u_2u_3 = f_V(v_1)f_V(v_3)$

$\Longrightarrow \;\Psi_G(a_2) = v_1v_3 \Rightarrow \Psi_H(f_A(a_2)) = u_1u_3 = f_V(v_2)f_v(v_4)$

$\Longrightarrow \; f_V(v_4) = f_V(v_3) = u_3$. Con lo que f_v no es inyectiva.

Recordemos que un ismorfismo ocurre cuando f_V y f_A son biyectivas. f_V no es inyectiva por lo antes mencionado y f_V no es suprayectica por que u_4 no forma parte de la imagen debido a que es el unico vertice de ambas graficas con grado igual a cero.

6. Muestren que si G es bipartita, $H \leq G$ y H no es trivial entonces H tambien es bipartita.
Solución:
Vamos a dar por hecho las premisas, negaremos lo que queremos demostrar y buscaremos alguna contradiccion. Es decir:

- G es una gráfica bipartita.
- $H \leq G$.
- H no es trivial.
- H **no** es bipartita

Debido a que G es bipartita existen dos conjuntos de vertices, X y Y, t.q $V_G \subseteq X \cup Y$, con $X \neq \emptyset \neq Y$ y $X \cap Y = \emptyset$.

Asi H $\subseteq$ G $\Rightarrow V_H \subseteq X \cup Y$

Definimos a los conjuntos X' y Y' como:

$$X' = \forall x(x \in X \wedge x \in V_H).$$
$$Y' = \forall y(y \in Y \wedge y \in V_H).$$

Se observa que:

- $X' \subseteq X$, $X' \subseteq V_H$.
- $Y' \subseteq Y$, $Y' \subseteq V_H$.
- $X' \cup Y' = \emptyset$.

Como H no es bipartita:
$\exists v_x \in X' \wedge \exists u(u \in V_H \backslash Y' \wedge u \in V_H) \wedge \exists a \in A_H$ t.q $\Psi_H(a) = v_x u$

Así: existe una partición en V_H entre los conjuntos $X'' = X' \cup u$ y Y'.

Pero estamos afirmando que existe un elemento en V_H, u, que no existe en V_G y al hacer eso no ocurre que $H \leq G$ sino que $H \geq G$ lo cual contradice una de las premisas.

El hecho de que si H no es bipartita conlleve incongruencias, prueba que H debe ser bipartita tambien. ■

8. Muestren que en un gráfica simple no trivial siempre hay dos vértices(por lo menos) que tienen el mismo grado.

Solución:
Como G no es trivial existen por lo menos dos vertices.
Sea $v \in V_G$ t.q $\forall u \in V_G \backslash v(\ gra(v) \geq gra(u))$. Es decir v es el o uno de los vertice(s) con grado máximo.

- **caso gra(v) = 0**
  Si ocurre que $gra(v) = 0$
  $\implies \forall u \in V_G(grad(u) = 0) \equiv \neg \exists u \in V_G(grad(v) > 0)$
  Es decir que n, con $n \geq 2$, vertices tienen grado 0.

- **caso gra(v) = n-1**
  Si gra(v) = n - 1
  $\forall u \in V_G \backslash v(vu \in A_G) \equiv \neg \exists u \in V_G(vu \notin A_G)$
  $\implies \forall u \in V_G(gra(v) \geq 1))$

- **caso** $0 < gra(v) < n - 1$**.**

10. Demuestren que si k es un número impar entonces no puede existir una gráfica G $k-regular$ con n_G impar.
Solución:
12. Muestren que si G es simple y $m > \binom{n-1}{2}$ entonces G es conexa.
Solución: