Gráficas y juegos — Tarea 2

Diego Méndez , Pablo Trinidad

1. Demuestra que si $C = (v_0, a_1, v_1, ..., a_k, v_k)$ es una geodésica de G, y $0 \leq i \leq j \leq k$, entonces la v_iv_j-sección de C: $C' : (v_i, a_{i+1}, v_{i+1}, ..., a_j, v_j)$ es también una geodésica.

   Demostración: Por contradicción, como C es geodésica, entonces la longitud de C es mínima e igual a $d(v_0, v_k) = d(v_0, v_i) + d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k)$. Supongamos ahora que C' no es geodésica, es decir, la longitud de $C' \geq d(v_i, v_j)$ y consecuentemente la longitud de C sería mayor a $d(v_0, v_k)$ llegando así a una contradicción. Por lo tanto C' es geodésica también. ■

2. Muestren que para cualesquiera tres vértices $u, v, w \in V_G$ se cumple la desigualdad del triangulo: $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, 2)$ ¿Cuando se da la igualdad?
   Sol:
   Existen:
   C_1 t.q $l(c_1) = d(u, v) \Rightarrow C_1$ es una $uv - geodesica$
   C_2 t.q $l(c_2) = d(v, w) \Rightarrow C_2$ es una $vw - geodesica$
   C_e t.q $l(c_e) = d(u, w) \Rightarrow C_3$ es una $uw - geodesica$

   Así:

   - $l(C_1) + l(C_2) = l(C_1C_2)$
   - Con C_1C_2 un $uw - camino$

   Recordemos la definición de distancia:

   $$d(a, b) = \min\{l(C)|C \text{ es un } ab - camino\}$$

   Si ocurre que:

   - $C_1C_2 \neq C_3 \Rightarrow$ por la definicion de distancia $d(u, w)$ es el menor $uw - camino$
     $\Longrightarrow d(u, v) + d(v, w) > d(u, w)$
   - En otro caso, $C_1C_2 = C_3 \Rightarrow d(u, v) + d(v, w) = d(u, w)$

   Se da la igualdad cuando ocurre que $C_1C_2 = C_3$ como vimos anteriormente y cuando:

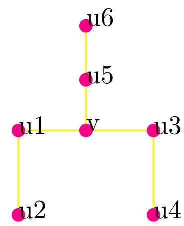
   - $u = v \neq w$
     Así:
     $d(u, v) = 0$ y $d(u, w) = d(v, w)$
     $\Longrightarrow 0 + d(v, w) = d(u, w)$
   - $u \neq v = w$
     Así:
     $d(v, w) = 0$ y $d(u, v) = d(u, w)$
     $\Longrightarrow d(u, v) + 0 = d(u, w)$

   Por todo lo anterior queda demostrada la desigualdad del triangulo. ■

3. Sea G una gráfica conexa y $a \in A_G$ una arista de G, demuestra que si la subgráfica $G - a$ es disconexa, entonces tiene dos componentes de conexidad.

   Demostración: Puesto que G es conexa y $G - a$ no lo es, entonces necesariamente a es de corte. Como a es de corte, entonces $\omega(G - a) > \omega(G) \implies \omega(G - a) > 1$. Puesto que a es de corte, a no puede ser un lazo, a también necesariamente es incidentes a dos vértices distintos u y v, y finalmente no existe uv-camino en $G - a$ por lo que u y v terminan en exactamente dos componentes de conexidad distintas, es decir $\omega(G - a) = 2$■.

4. Den una gráfica conexa G con un vértice v tal que $G - v$ tiene más de dos componentes de conectividad distintas.
   Sol:
   Considerese la siguiente gráfica:



   $V_G = \{v, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$
   $A_G = \{vu_1, vu_3, vu_5, u_1u_2, u_3u_4, u_5u_6\}$
   $w(G - v) > 2$.

5. Demuestra que si G es un árbol, $H \leq G$, y H es conexa, entonces H también es un árbol.

   Demostración: Por contradicción, como $H \leq G$, entonces $V_H \subseteq V_H$, $A_H \subseteq A_G$ y $\psi_H(a) = \psi_G(a) \forall a \in A_H$, es decir, toda arista de H está presente en G. Supongamos ahora, por motivos de la demostración, que H no es un árbol, entonces tenemos o que H no es conexo (falso por el planteamiento del problema) o que H contiene un ciclo. Si H contiene un ciclo $C = (v, v_2, ..., u)$ y a la vez H comparte todas las aristas que G tiene, entonces G contiene el mismo ciclo llegando a la contradicción de que G no es un árbol. ■

6. Un hidrocarburo saturado es una molécula C_jH_k en la que cada carbono tiene 4 enlaces, cada hidrogeno tiene un enlace y ninguna secuencia de enlaces forma un ciclo. Mutren que en este caso necesariamente $k = 2j + 2$.
   Sol:
   Recordemos que una molecula es una secuencia de elementos químicos en los que cada elemento esta conectado con al menos otro elemento.
   Por lo anterior y el hecho de que un hidrocarburo saturado no tienen ciclos vemos a este como un árbol.
   Podemos pensar en los Vertices como la union de los carbonos y los hidrogenos.
   Así:

   - hidorcarburo saturado $= G(V_G, A_G)$
   - $V_G = C \cup H$
   - $\forall h \in H(gra(h) = 1)$
   - $\forall c \in C(gra(c) = 4)$

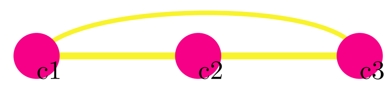
   Corolario. Al ser un arbol no ocurre que dos hidrogenos esten conectados.
   Demostración:
   Sean h_1 y $h_2 \in H$
   Supongamos que $h_1h_2 \in A_H \Rightarrow gra(h_1) = gra(h_2) = 1$. Ambos hidrogenos ya tienen grado uno entonces no pueden estar conectado con algun otro elemento, carbono o hidrogeno, con lo que tendriamos dos componentes conexas y asi no seria arbol.
   $\Longrightarrow$ como G es arból no ocurre que dos hidrogenos esten conectados. Fin de la demostración.
   De lo anterior sale que:

   $$\forall h \in H \ \exists! c_j \in C \text{ tal que } hc_j \in A_G$$

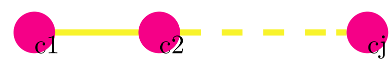
   Si $j = 1$ deben existir cuatro hidrogenos de tal forma que $gra(c_1) = 4$, es decir los cuatro conectados a c_1.

$$4 = 2 * 1 + 2 = 2j + 2$$

No puede ocurrir que dos carbonos conectados esten conectados a un tercero pues asi existiria un ciclo.



Así, sin contar los hidrogenos, lo que tenemos es una $c_1 c_j - trayectoria$



Por lo anterior si $j \geq 3 \Rightarrow \exists c \in C \wedge i \in N$ tal que $C_{i-1}C_i \in A_G$ y $C_iC_{i+1} \in A_G$.
De hecho los unicos que no van a cumplir con la propiedad antes mencionada son lo de los extremos,C_1 y C_j, esto por que el primero no tienen anterior, j no tiene un siguiente y no hay ciclos.
$\Longrightarrow$ Para cada carbono en $\{C_1, C_3, ..., C_{j-1}\}$ existen dos hidrogenos $\wedge$ para c_1 y c_j existen seis hidrogenos, tres para cada uno, con lo que:

$$\forall c \in C gra(c) = 4$$

Así:

$$k = (\sum_{i=2}^{j-1} 2) + 6 = 2(j-2) + 6 = 2j - 4 + 6 = 2j + 2. \blacksquare$$

7. Prueba que si G es conexa, entonces $m \geq n - 1$.

   Demostración: Puesto que G es conexa, tenemos que G puede o no tener ciclos. Si G no tiene ciclos, entonces sabemos que[1] $m = n - 1$ puesto que G es un árbol. Si G tiene ciclos y G es conexa, entonces sabemos que $m > n - 1$ puesto que toda gráfica conexa tiene un árbol generador[2]. Por lo tanto, si G es conexa, entonces $m \geq n - 1 \blacksquare$.

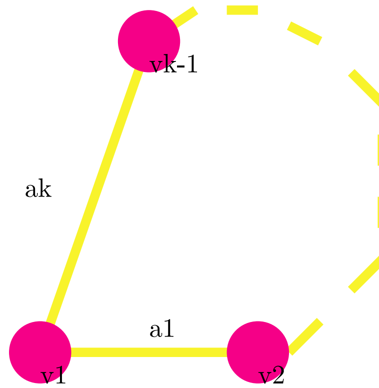
8. Sea G una gráfica conexa sin lazos, demuestren que toda arista en G está en algun arbol generador de G.
   Sol:
   Sea H un arbol generador de G.

   1. Si en G no hay ciclos.
      $\Longrightarrow$ G es arbol $\Rightarrow H = G \Rightarrow A_H = A_G$.
      $\Longrightarrow$ toda arista en G forma parte del arbol generador.

   2. En G si hay ciclos.

      a) Si solo existiera un ciclo, sea C este ciclo.

$$C = \{v_1, a_1, v_2, ..., v_{k-1}, a_k, v_k = v_1\}$$



Bastaría con quitar una arista para tener al arbol generador:

- Si queremos que a_1 forme parte del arbol generador $\Rightarrow A_H = A_G - a_k$.
- Si queremos que a_k forme parte del arbol generador $\Rightarrow A_H = A_G - a_1$.

Al ser un ciclo y urilizar vertices arbitrarios v_1 varia segun la arista que queremos utilizar.
$\Longrightarrow$ Cualquier arista de G forma parte de un arbol generador, basta con elegir bien segun lo anterior.

b) Existe mas de un ciclo.
Ocurre lo mismo que en el caso pasado solo que con mas de un ciclo, debemos quitar una arista por cada ciclo existente en G para que H sea arbol generador, esto por que G es conexa.
Sean $C_1, C_2, ..., C_k$ los ciclos existente, llamaremos $a_1, a_2, ..., a_k$ a las aristas respectivas de cada ciclo seleecionandolas de tal forma que la arista que queremos no sea alguna de ellas.

$$A_H = A_G - \{a_1, a_2, ..., a_k\}$$

Nota: Si la arista que queremos que pertenezca a A_H, sea a, no forma parte del ciclo entonces podemos escojer a las aristas sin cuidado alguno ya que así a es arista de corte y va a formar parte del arbol generador.

9. Demuestra que si G es una gráfica conexa y a pertenece a algún ciclo de G, entonces $G - a$ sigue siendo conexa.

   Demostración. Sea C el ciclo $v_1, a_1, v_2, ...v_k, a_k, v_1$, entonces tenemos que a puede ser aquella arista que se encuentra en uno de los extremos conectado a v_1 o dentro de v_1v_1-camino sin ser incidente a v_1. En el primer caso, donde eliminamos a_1 o a_k, sigue existiendo un camino para cada par de vértices dentro del Ciclo, por lo tanto G sigue siendo conexa. En el caso contrario, donde eliminamos una arista a_i dentro del v_1v_1-camino, podemos observar que todos los vértices las secciones $U' : v_1, ..., v_i$ y $U'' : v_{i+1}, ..., v_1$ siguen contando con un camino al unir $U' \cup U''^{-1}$ o $U'^{-1} \cup U''$ por lo que G sigue siendo conexa.

10. Demuestren que si G es una gráfica conexa con $m = n - 1$ entonces es un árbol.
    Sol:
    Supongamos que G no es un arbol, como es conexa entonces tiene al menos un ciclo, sea $C = \{u_0, a1, u_1, a_2, ..., u_{k-1}, a_k, u_k = u_0\}$ dicho ciclo.
    Al igual que en el ejericio 8 podemos librarnos de una arista de tal forma que no exista el ciclo y así sea arbol, en este caso a_1 o a_k.
    Sea $A' = A_G - a_k$, $G[A']$ es un arbol y por la eliminacion de una arista tenemos que :

$$m_{G[A']} = m - 1 = n_G - 1 - 1 = n_G - 2$$

    Pero si $G[A']$ es un arbol entonces su numero de aristas debe ser $n - 1$ por el teorema 2.4 de las notas.
    $\Longrightarrow$ $m_{G[A']} = n_G - 2 \neq n_G - 1$ lo cual es una contradiccion.
    $\Longrightarrow$ G ya es arbol.$\blacksquare$

[1]**Teorema 2.4** de las notas del curso
[2]**Corolario 2.11** de las notas del curso