Gráficas y juegos — Tarea 6

Diego Méndez , Pablo Trinidad

1. Demuestren que si G es $k-$cromatica entonces tiene una subgrafica $k-$critica.
   Haremos inducción sobre las aristas.
   Caso base:
   $|A_G| = 1 \Rightarrow G$ es 2-cromatica.
   Hipotesis de inudicción:
   Si G es k-critica $\Rightarrow G$ es su misma subrafica k-critica.
   De lo contrario existe una arista, a, tal que $X_{G-\{a\}} = k$
   Paso inductivo:
   Por hipotesis de inducción como $|A_G - \{a\}| < A_G$ y $X_{G-\{a\}} = k$.
   $\implies G - \{a\}$ es $k-$cromatica y tiene una subgrafica k-critica.$\blacksquare$

2. Si G tiene componentes de conexidad $G_1, ..., G_n$ ¿Cuanto vale X_G en función de $G_1, ..., G_n$?
   Sol:
   Recordemos que : X_G = minimo natural k tal que G es $k-$colorable. Existe una componante cuyo número cromatico es mayor o igual al del resto de las componentes, sea X_{G_i} dicha componente.
   Demostraremos que $X_{G_i} = X_G$
   Demostración
   Por contradicción:
   Sea $X_{G_i} = max(X_{G_1}, ..., X_{G_n}) \wedge X_{G_i} \neq X_G$.

   - $X_G = k \wedge k < X_{G_i}$
     Puede que con k colores nos sea posible colorear algunas de las componentes.
     Pero lo que si podemos asegurar es que existe al menos una componente, G_i, que no colorea pues faltan $X_{G_i} - k$ colores para colorear dicha componente con el numero de colores minimo.
     $\implies G$ no es coloreable con $X_G < max(X_{G_1}, ..., X_{G_n})$.
   - $X_G = k \wedge X_{G_i} < k$
     En este caso todas las componentes se colorean pero k no es el minimo natural tal que todas las componentes esten conectados, ya que ese natural es X_{G_i}.
     $\implies X_G = k$ es una contradicción pues $X_G = max(X_{G_1}, ..., X_{G_n})$
     Lo que hay que hay que hacer es reutilizar los colores de X_{G_i} de la siguiente forma:
     Sabemos que X_{G_i} es el mayor numero cromatico de todas las componentes .
     Entonces sabemos que el numero cromatico de las demas componentes es menor o igual X_{G_i}.
     Ninguna de las componentes estan conectadas y así ningun par de vertices de dos componentes distintas son vecinos $\Rightarrow$ podemos reutilizar los colores en cada componente.

   En ambos casos existio la contradicción y en el segundo explicamos como X_{G_i} de colores son reutilizables en las demas componentes.
   $\implies X_G = max(X_{G_1}, ..., X_{G_n})\blacksquare$.

3. Demuestren que si G es $k-$critica entonces es simple y conexa.
   Si G es k-critica en alguna subgrafica propia, H, quitamos algun vertice y/o arista de tal forma que $X_H < X_G$.

   - Probaremos que G es conexa.
     Por contradicción: Supogamos que G no es conexa y $k-$critica, entonces existen r componentes de conexidad.
     Entonces por el ejercicio anterior X_G es igual al maximo de las componentes de conexidad.
     Sea H una subgrafica de G, tal que en V_H solo se encuentra la componente con mayor numero de vertices y A_H esta acotada a sus vertices.

$\implies X_H = X_G$
Acabamos de mostrar una subgrafica propia de G que tiene el mismo numero cromatico, lo cual es una contradicción pues entonces G no seria X_G-critica. $\implies$ G es conexa. ■

- Probaremos que G es simple.
  Por contradicción: Supongamos que G es $k-$critica y no es simple, entonces existen lazos y/o multiaristas.
  - Supongamos que existe alguna multiarista.
    Sean $u, v \in V_G \wedge \Psi(a_1) = uv \wedge \Psi(a_2) = uv$ Sea H una grafica tal que, $V_H = V_G \wedge A_H = A_G - \{a_1\}$
    En cuanto a conexidad y la coloración en H respecto a G no cambio pues en H solo quitamos la arista a_1 de esta forma en H siguen conectados u y v por a_2.
    $\implies X_G = X_H$
    Acabamos de mostrar una subgrafica propia de G que tiene el mismo numero cromatico, lo cual es una contradicción pues entonces G no seria X_G-critica.
    $\implies$ G no tiene multiaristas.
  - Supongamos que existe algun lazo.
    Sea a dicho lazo. Sea $H = (V_H, A_H) \wedge A_H = V_G - \{a\}$.
    No afecta en el numero cromatico la eliminación de el lazo, por que como vimos la coloración depende de los vecinos diferentes a simismo.
    $\implies X_G = X_H$
    Acabamos de mostrar una subgrafica propia de G que tiene el mismo numero cromatico, lo cual es una contradicción pues entonces G no seria X_G-critica.
    $\implies$ G no tiene lazos.

Por todo lo anterior tenemos que si G es $k-$critica entonces es simple y conexa. ■

4. Demuestren que G es n_G-colorable concluyan que $X_G \leq n_G$. Demuestren también que la igualdad se da si y solo si G es supracompleta.
   Sol:
   Demostraremos que G es n_G-colorable.
   Demostración:
   $V_G = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$
   $n_G = |V_G|$
   No importa de que manera este conectada G, basta con asignarle un color distinto a cada vertice. De esta forma para todo vertice en G sucede que todos sus vecinos tienen color diferente, pues todos los vertices tienen color diferente.
   Así utilizamos n_G colores y G es n_G- coloreable.■

   Dado lo anterior $X_{G_i} \leq n_G$, pues el número cromatico, que se define como el **minimo** natural k tal que G es $k-$coloreable, es forzosoamente menor o igual a un numero con el cual ya fue posible colorear a G.
   Ahora demostraremos que $X_G = n_G \iff G$ es supracompleta.
   Demostración

   - Regreso: $\Leftarrow$:
     Demostraremos que si G es supracompleta $\implies X_G = n_G$
     Demostración:
     Por contradicción:
     Sea G supracompleta y $X_G \neq n_G$:
     - $x_G < n_G$
       Sí $X_G < n_G$ entonces almenos dos vertices comparten el mismo color con lo que no son vecinos. $\implies \exists v, u \in V_G(uv \notin A_G)$ lo cual es una contradicción pues recordemos que si G es suprayectiva para cualesquiera dos vertices distintos sucede que estan conectados.

- $X_G > n_G$
  Esto ni si quiera es posible por que el hecho de que el numero cromatico sea mayor a la de el numero de vertices implica que algun vertice tiene dos colores lo cual no es posible.

  En ambos casos existe contradicción
  $\implies$ si G es supracompleta $\Rightarrow X_G = n_G.\blacksquare$

- Ida: $\Rightarrow$:
  Demostraremos que si $X_G = n_G \Rightarrow G$ es supracompleta.
  Demostración por contrapositiva:
  Demostraremos que si G no es supracompleta $\Rightarrow X_G \neq n_G$
  Como bien mencionamos antes no es posible que $X_G > n_G$ entonces lo unico que probaremos es que si G no es supracompleta $\Rightarrow X_G < n_G$

  Inicio de la demostración:
  Sea G una gráfica no supracompleta $\Rightarrow \exists u, v \in V_G(uv \notin A_G)$
  Es decir existen al menos dos vertices que no son vecinos. Sin perdida de generalidad mostraremos el número cromatico en el caso donde ocurre que G no sea supracompleta, que es cuando :

  - $\exists u, v \in V_G(gra(u) = gra(v) = n_G - 2 \wedge uv \notin A_G)$
  - $V' = V_G - \{u, v\}$
  - $\forall v \in V'(gra(v) = n - 1)$

  El número cromatico se arma de la siguiente manera: A cada vertice en V' se le asigna un color diferente por que como mencionamos anteriormente todos sus elementos estan conectados con los demas vertices en G. En lo anterior se han utilizado$n_g - 2$ colores .
  Como u y v no son vecinos podemos colorear ambos con un mismo color diferente a los $n_G - 2$ antes utilizados pues ambos estan conectados a todos los vertices en V', con lo que G ya esta coloreada.
  En este caso, que es el *minimo* que ocurre que G no sea supracompleta sucede que:
  $X_G = n_G - 1 < n_G$
  $\implies$ Si G no es supracompleta $\Rightarrow X_G < n_G.\blacksquare$

Ya tenemos demostrada la ida y la vuelta con lo que :

$$X_G = n_G \iff G \text{ es supracompleta.}$$

5. Demuestren que para gráficas simples, la unica grafica $1-$critica es K_1 , la unica gráfica $2 - critica$ es K_2 y las unicas gráficas $3-$criticas son los ciclos impares.
   Sol:
   Recordemos:
   Sea G una grafica y H una subgrafica propia, entonces tenemos que $V_G \neq V_H$ y $A_G \neq A_H$.

   - K_1 es la unica gráfica $1-$critica.
     Una grafica es 1-critica si en alguna subgrafica propia H quitamos algun vertice y/o arista de tal forma que $X_H < X_G$. En G tenemos que $X_G = 1$, entonces el valor a este es cero, es decir que no se utilicen colores.
     $\implies$ En G no existen aristas pues entonces existirian almenos dos colores y forzozamente existe un vertice por que si existieran más entonces existe una subgrafica H en la cual quitamos algun vertice y $X_H = 1$, pues existen vertice(s) y deben ser coloreados.
     Entonces tenemos que la unica gráfica 1-critica es la que tiene un unico vertice y sin aristas, es decir $K_1.\blacksquare$.
   - K_2 es la unica grafica 2-critica.
     Sea G una gráfica 2-critica. En G deben existir al menos dos vertices y una arista que los una.
     Demostraremos que en G solo existen dos vertices y una arista.

- $P.D$ En G existe una unica arista.
  Supongamos que existen dos aristas, como G es simple entonces existen almenos tres vertices. Pero entonces existe la subgrafica propia de G, H, de tal forma que quitamos una arista y $X_H = 2$ pues existen dos vertices conectados por la arista restante y reciclamos alguno de esos colores para colorear al desconectado. $\implies$ en G hay una unica arista. ■
  $Nota$:No puede haber cero aristas pues entonces $X_G = 1$
- $P.D$ En G solo debe haber dos vertices.
  Ya probamos que debe existir por lo menos una arista y por lo menos dos vertices.
  Supongamos que existen mas.
  Existe la subgrafica propia, H, de tal forma que quitamos algun vertice de los que no forman la unica arista y $X_H = 2$. $\implies$ En G existen solo dos vertices.■

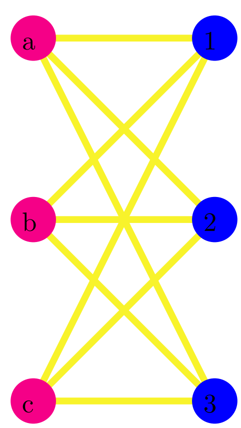
Por lo anterior tenemos que en G solo existen dos vertices y una arista es decir $G = K_2$.

- Las unicas gráficas 3-criticas son los ciclos impares. Sea G una gráfica 3-critica. Entonces en G existen al menos tres vertices. Tambien tenemos que :
  $\forall v \in V_G(gra(v) = 2)$
  Esto por que todo vertice debe estar conectado a otros dos de tal forma que el color de cada uno de los dos es uno de los dos colores cromaticos restantes.
  El hecho de que todos los vertices tengan grado dos nos indica que en G hay un ciclo.
  $C = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n, v_1\}$
  ¿Pero como garantizamos que los dos vertices a los que esta conectado cualquier vertice sean de los dos colores restantes?
  Probaremos que $|V_G|$ es impar. Por contradicción:
  Supongamos que $|V_G|$ es par, entonces en la grafica existe un ciclo par. $\implies$ $X_G = 2$, pues como el numero de vertices es par y $v_n v_1 \in A_G$, lo que hacemos es colorear a los vertices impares de un color y a los pares de otro. Lo anterior es una contradicción pues como G era 3-cromatica no 2-cromatica$\Rightarrow$ $|V_G|$ debe ser impar.■ Se ve que cualquier ciclo impar es 3-critica pues existe la subgrafica, H, propia la cual se le quita la arista $v_n v_1$ y de esta forma $X_H = 2$.

6. Demuestren que $K_{3,3}$ no es aplanable.
   La demostración sera similar a la vista en el video 27.
   Recordemos que:

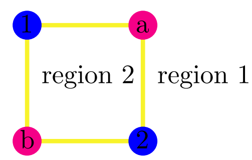
   - Partimos de una región inicial, el plano.
   - Un ciclo nos da una región o cara extra

   Demostración:
   Tenemos a $K_{3,3}$:
   $V_G = \{1, 2, 3\} \cup \{a, b, c\}$ y $A_G = \{a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3\}$.



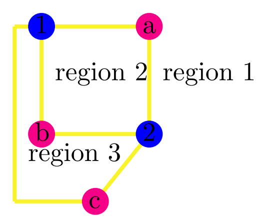
   Los ciclos de menor longitud en $K_{3,3}$ son de cuatro. No pueden ser de dos por que la gráfica es simple.

No pueden ser de tres por que no hay ciclos impares en gráficas bipartitas.
Entonces el primer paso es formar el ciclo de menor longitud que como mencionamos es de cuatro, por lo que debemos escojer cuatro vertices, ya que es bipartita completa sin perdida de generalidad podemos escojer los vertices $a, 1, b, 2$ para armar nuestro cuadrado. No importa como pongamos las aristas en el plano nos dara un isomorfismo de lo siguiente, esto por que no importa como hagamos las aristas siempre queda el mismo ciclo:

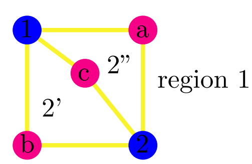


Con lo que nos quedan dos regiones la exterior (region 1) y la interior (region 2). Nos quedan dos vertices, c y 3, y cinco aristas por colocar.
Digamos que lo siguiente es poner el vertice 3, lo que ahora tenemos son dos nuevos ciclos, $\{1, c, 2, a, 1\}$ y $\{1, b, 2, c, 1\}$.

- Si ponemos a c en la region exterior, lo que ahora tenemos es una nueva región en el *exterior* del cuadrado con el ciclo $\{1, c, 2, b, 1\}$.



- Si colocamos a C en la región interior lo que sucede es que los nuevos ciclos crean una nueva región, fragmentando lo que antes era la región interior en dos, $2'$ y $2''$.



No importa como los pongamos pues ambas son isomorfas pues en ambas el vertice c esta conectada con 1 y 2. Así que para fines practicos y visuales contunaremos con la que fragmenta lo que era la región 2.
Observemos que:

- El vertice a es ajeno a la región $2'$.
- El vertice b es ajeno a la región $2''$.
- El vertice c es ajeno a la región exterior.

No importa en que región pongamos al vertice 3 por lo anterior y el hecho de que 3 se debe conectar con a, b y c, al menos una arista chocara con otra.

- Si lo ponemosa en $2'$, a es exterior a dicha región y la arista $3a$ choca con $1c$ o $2c$
- Si lo ponemosa en $2''$, b es exterior a dicha región y la arista $3b$ choca con $1c$ o $2c$

- Si lo ponemos en la exterior al c ser ajeno a esa región alguna arista chocara con una de las aristas del cuadrado inicial, el cual *cubre* a c.

No hay forma de que $K_{3,3}$ sea aplanable.$\blacksquare$

7. Si G es plana y $H \leq G$ entonces H tambien es plana.
Sol:
Como $H \leq G \Rightarrow V_H \subseteq V_G \wedge A_H \subseteq A_G \wedge \Psi_H = \Psi_G|_{A_H}$.
Puede ocurrir que $V_H = V_H \wedge A_H = A_G$ con lo que H tambien es plana .
Pero en el caso de que no sean iguales, H sigue siendo plana pues lo que entonces ocurre es que en H hay menos aristas y/o vertices que en G.
La unica manera de hacer que G no sea plana seria agregando aristas y/o vertices pero entonces ocurriria que $G < H$ lo cual es una contradicción.$\blacksquare$

8. Utilicen la contrapositiva del inciso anterior para probar que K_n no es plana para $n \geq 5$ y $K_{n,m}$ no es plana si $n \geq 3$ y $m \geq 3$.
De la contrapositiva del ejercicio 7 tenemos:

   - $H \leq G$
   - *Contrapositiva* Si H no es plana $\Rightarrow$ G no es plana

   Recordemos que el hecho de que $H \leq G$ implica que en G puede haber mas aristas y/o vertices que en H, pero no al reves.
Demostración:
Al H ser subgrafica de G, en G puede ocurrir que haya mas vertices y/o aristas pero no importa por que como bien ya sabiamos H no era plana entonces por mas que agreguemos no podremos quitar las aristas que ya chocaron.
Entonces:

   - Sea $H = K_5$.
En el video 27 de la lista de reproducción en youtbe vimos que K_5 no es plana.
Entonces si $G = K_n$, con $n > 5$, G tambien es plana por que las aristas y vertices de H se encuentran en G y sabemos que en H ya existian aristas que chocan.
$\Longrightarrow$ en G existen aristas que chocan $\Rightarrow G$ no es plana.
$\Longrightarrow$ K_n, con $n \geq 5$, no es plana.
   - Sea $H = K_{3,3}$.
En el ejercicio 6 ya probamos que $K_{3,3}$ no es plana. Entonces si $G = K_{n,m}$, con $n > 3 \wedge m > 3$, G tambien es plana por que las aristas y vertices de H se encuentran en G y sabemos que en H ya existian aristas que chocan.
$\Longrightarrow$ en G existen aristas que chocan $\Rightarrow G$ no es plana.
$\Longrightarrow$ $K_{n,m}$, con$n \geq 3 \wedge m \geq 3$, no es plana.

9. Demuestren que una gráfica es plana si y solo si su gráfica simple subyacente es plana.
Sol:
Que una grafica H sea subyacente a otra G implica que H es la subgrafica simple de G.

   - Ida: $\Rightarrow$
P.D : Si una grafica es plana $\Rightarrow$ su grafica simple subyacente es plana
Sea H la grafica subyacente de G, entonces en H existen los mismos vertices y las mismas aristas que en G salvo las multiaristas y los lazos.
$\Longrightarrow$ Si al dibujar a G en el plano ningun par de aristas chocaba (es decir G es plana), no hay forma de que en H choquen algun par, pues en H existen menos o la misma cantidad de aristas que en G. Entonces H tambien es plana.$\blacksquare$

- Regreso $\Leftarrow$
  $P.D$: Si una grafica simple subyacente es plana $\Rightarrow$ la grafica tambien es plana
  Sea H la grafica subyacente de G, entonces en H existen los mismos vertices y las mismas aristas que en G salvo las multiaristas y los lazos.
  $\Longrightarrow$ Si al dibujar a H en el plano ningun par de aristas chocaba (es decir H es plana). En G pueden existir multiaristas o lazos. Recordemos lo dicho en el ejericicio 6: Cada ciclo nos genera una nueva región.
  Los lazos nos generan un ciclo pero es claro ver que nos dejan "*libre*" una parte del vertice la cual pueden llegar las demas aristas. Entonces lo que ocurre en G es que la región generada por el lazo vive dentro de otra que ya existia en H de tal forma que las demas aristas que vayan a los vertices con lazos pueden ser graficadas sin chocar con el lazo.
  Las multiaristas tambien nos generan un ciclo y asi otra región. Pero si H es plana eso significa que en H existen regióne(s) las cuales no son atrevesadas por ninguna aristas, con lo que las multiaristas en G lo que hacen es estar dentro de otras regiónes o encapsular alguna de las regiónes ya existentes en H.
  Entonces lo que ocurre con los lazos y multiaristas es que cada uno existente en G nos genera una nueva región pero esa región esta *encapsulada* dentro de otra(lazos y/o multiaristas) o la nueva región en G encapsula alguna existente en H (multiaristas en algunos casos). De tal forma que ningun par de aristas choca. $\Longrightarrow$ G tambien es plana.$\blacksquare$