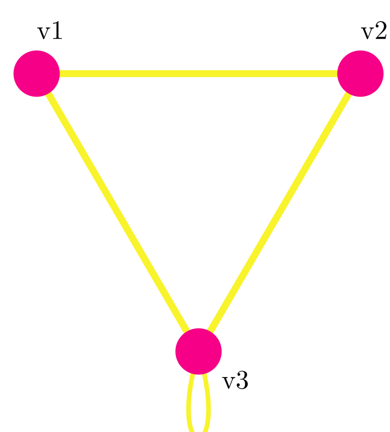
Gráficas y juegos — Tarea 1 (impares)

Diego Méndez , Pablo Trinidad

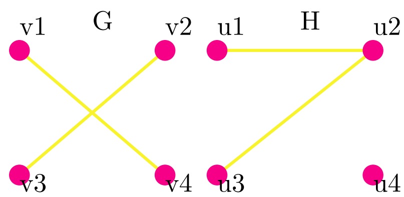
1. Muestra que si G es una gráfica simple, entonces $m_G \leq \binom{n_G}{2}$.
Sol: Dado que G es simple, entonces número máximo de aristas al que cada vértice puede estar conectado es $n-1$, en otras palabras, está conectado con todos los demás vértices excepto consigo mismo. Como tenemos n vértices, entonces el número máximo m de aristas es $\frac{n(n-1)}{2}$ puesto que cada arista es contada dos veces. Otra forma de verlo es que el primer vértice lo podemos contactar con $n-1$ aristas, el segundo con $n-2$ pues no contamos el vértice anterior, el tercero con $n-3$ y así sucesivamente:
$$(n-1)+(n-2)+...+0 = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$
Dado lo anterior, tenemos que demostrar que:
$$\frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n!}{2!(n-2)!}$$
Por lo que:
$$\frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n!}{2(n-2)!}$$
$$\frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}$$
$$\frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2} \quad \blacksquare$$

2. Den un ejemplo de una gráfica tal que $m > \binom{n}{2}$.
Sol:
Sea n = 3.
$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3\times 2}{2} = 3$
$\implies m > 3$
Así:
$V_G = \{v_1, v_2, v_3\}$
$A_G = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, v_3v_3\}$



3. Muestre que si G y H son dos gráficas isomorfas, entonces $n_G = n_H$ y $m_G = m_H$.
Sol: Como $G \cong H$, entonces existen dos functions biyectivas $f_V : V_G \to V_H$ y $f_A : A_G \to A_H$, y puesto a que son biyectivas, entonces necesariamente $|V_G| = |V_H| = n_G = n_H$ y $|V_H| = |A_H| = m_G = m_H$. $\blacksquare$

4. Den un ejemplo de dos gráficas distintas G y H tales que $n_G = nH$ y $m_G = m_H$ pero $G \ncong H$.
Sol:
Considerese la siguiente gráfica:



$V_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ $\qquad$ $V_H = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$
$A_G = \{v_1v_4, v_2v_3\}$ $\qquad$ $A_H = \{u_1u_2, u_2u_3\}$

Veamos por que no son isomorfas:
Como f_A debe ser biyectiva omitiremos los casos donde f_A no es inyectiva. Así:
Caso 1:
Si $\Psi_G(a_1) = v_1v_3 \Rightarrow \Psi_H(f_A(a_1)) = u_2u_3 = f_V(v_1)f_V(v_3)$

$\implies \Psi_G(a_2) = v_2v_4 \Rightarrow \Psi_H(f_A(a_2)) = u_1u_3 = f_V(v_2)f_v(v_4)$

$\implies f_V(v_3) = f_V(v_4) = u_3$. Con lo que f_v no es inyectiva.

Caso 2:
Si $\Psi_G(a_1) = v_2v_4 \Rightarrow \Psi_H(f_A(a_1)) = u_2u_3 = f_V(v_1)f_V(v_3)$

$\implies \Psi_G(a_2) = v_1v_3 \Rightarrow \Psi_H(f_A(a_2)) = u_1u_3 = f_V(v_2)f_v(v_4)$

$\implies f_V(v_4) = f_V(v_3) = u_3$. Con lo que f_v no es inyectiva.

Recordemos que un ismorfismo ocurre cuando f_V y f_A son biyectivas. f_V no es inyectiva por lo antes mencionado y f_V no es suprayectica por que u_4 no forma parte de la imagen debido a que es el unico vertice de ambas graficas con grado igual a cero.

5. Demuestre que $m(K_{j,k}) = j \cdot k$. (Donde $K_{j,k}$ es la gráfica bipartita completa).
Sol: Por definición sabemos que la gráfica bipartita $K_{j,k}$ es aquella con el conjunto de vértices V con una bipartición $V = U \cup U'$, tal que $|U| = j$ y $|U'| = k$ y el conjunto de aristas $A = \{uu' | u \in U \wedge u' \in U'\}$. En otras palabras cada vértice de U está unido con todos los vértices de U' y viceversa, sin que hayan vértices dentro de la misma partición que estén conectados. Por lo tanto, tenemos $j \cdot k = m(K_{j,k})$ aristas. ■

6. Muestren que si G es bipartita, $H \leq G$ y H no es trivial entonces H tambien es bipartita.
Sol:
Vamos a dar por hecho las premisas, negaremos lo que queremos demostrar y buscaremos alguna contradiccion. Es decir:

- G es una gráfica bipartita.
- $H \leq G$.
- H no es trivial.
- H **no** es bipartita

Debido a que G es bipartita existen dos conjuntos de vertices, X y Y, t.q $V_G \subseteq X \cup Y$, con $X \neq \emptyset \neq Y$ y $X \cap Y = \emptyset$.

Asi H $\subseteq$ G $\Rightarrow V_H \subseteq X \cup Y$

Definimos a los conjuntos X' y Y' como:
$X' = X \cap V_H$.
$Y' = Y \cap V_H$.
Se observa que:
$X' \cup Y' = \emptyset$.
Como H no es bipartita:
$\exists v_x \in X' \wedge \exists u(u \in V_H \backslash Y') \wedge \exists a \in A_H$ t.q $\Psi_H(a) = v_x u$

Así:
Existe una partición en V_H entre los conjuntos $X'' = X' \cup u$ y Y' y existe una arista que une dos vertices en una partición.

Pero estamos afirmando que existe un elemento en V_H, u, que no existe en V_G y al hacer eso no ocurre que $H \leq G$ sino que $H \geq G$ lo cual contradice una de las premisas.

El hecho de que si H no es bipartita conlleve incongruencias, prueba que H debe ser bipartita tambien. ■

7. Sea A la matriz de adyacencia de G, demuestra que si G es simple, entonces los los elementos de la diagonal de A^2 son los grados de los vértices correspondientes de G.
   Sol: Como G es simple sabemos que:

   1. La diagonal de la matriz de adyacencia solo tiene 0 como valor puesto que no hay lazos.
   2. El valor máximo de una celda de la matriz es 1 puesto que G no es multi-arista.
   3. La matriz es simétrica[1].
   4. Podemos observar que la suma de los elementos de cualquier columna (o fila) de la matriz será igual al número de aristas que inciden en el vértice representado por esa columna, en otras palabras, será igual al grado del vértice.

   Tenemos entonces que el valor de una celda a_{ij} después de realizar la multiplicación $A \times A$ será:

$$a_{ij} = a_{i1}a_{1j} +_{i2} a_{2j} + ... +_{in} a_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$$

   Pero como la matriz de adyacencia es simétrica, entonces tenemos que $a_{ik} = a_{kj}$ siempre que $i = j$, en otras palabras, cuando estamos analizando una celda de la diagonal:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2$$

   Así, y tomando en cuenta las observaciones del principio, tenemos que $a_{ij} \in \{0, 1\}$ puesto que $0^2 = 0$ y $1^2 = 1$, y finalmente, las celdas ubicadas en cada diagonal serán igual a la suma de todos los valores de la columna (o fila), igual al grado del vértice. ■

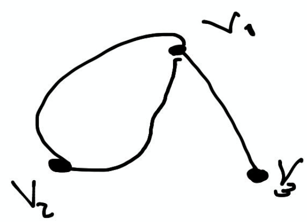
8. Muestren que en un gráfica simple no trivial siempre hay dos vértices(por lo menos) que tienen el mismo grado.
   Sol:
   Como G no es trivial existen por lo menos dos vertices.
   Sea $v \in V_G$ t.q $\forall u \in V_G \backslash v(\ gra(v) \geq gra(u))$. Es decir v es el o uno de los vertice(s) con grado máximo.

[1] **Observación 1.14** de las notas del curso.

- **caso gra(v) = 0**
  Si ocurre que $gra(v) = 0$
  $\implies \forall u \in V_G(grad(u) = 0) \equiv \neg \exists u \in V_G(grad(v) > 0)$
  Es decir que n, con $n \geq 2$, vertices tienen grado 0.
- **caso gra(v) = n-1**
  Si gra(v) = n - 1
  $\forall u \in V_G \backslash v(vu \in A_G) \equiv \neg \exists u \in V_G(vu \notin A_G)$

Con los casos anteriores queda demostrado que no puede ocurrir que un vertice tenga grado 0 y otro n-1. Entonces al tener n vertices y $n-1$ posibilidaes al menos dos vertices deben repetir.

9. Da un ejemplo de una gráfica no trivial en el que todos sus grados sean distintos.
   Sol: La gráfica G dada por la terna (V, E, ψ):
   $V = \{v_1, v_2, v_3\}$,
   $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ y
   $\psi(e_1) = v_1v_2$, $\psi(e_2) = v_1v_3$, $\psi(e_3) = v_1v_2$
   Tal que $g(v_1) = 3$, $g(v_2) = 2$ y $g(v_3) = 1$



10. Demuestren que si k es un número impar entonces no puede existir una gráfica G $k-regular$ con n_G impar.
    Sol:
    Sea G una gŕafica k-regular y M la matriz de incidencia.
    Recordemos que por la ecuación de grados:

$$\sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{m} M_i] = \sum_{i=1}^{n} gra(v_i) = 2m$$

Como G es k-regular $\Rightarrow \forall v \in V_G(gra(v) = k)$
Así:

$$\sum_{i=1}^{n} k = 2m$$

$$n \times k = 2m$$

Como k es impar y 2m es par la unica forma de que se cumpla la igualdad es que n sea par.
$\implies$ No hay manera de que n sea impar por que forzosamente debe ser par. ■

11. Demuestra que un uv-camino C contiene a una uv-trayectoria, es decir, la trayectoria. usa a un subconjunto de los vértices y aristas usados por C.
    Sol: Por inducción: Sea C un camino entre u y v y $|C| = l(C)$.

- **Caso base:** Si $|C| = 1$, entonces C representa solo la arista uv, la cual es una uv-trayectoria.
- **Paso inductivo:** Supongamos, con motivos de la inducción, que todo uv-camino de longitud menor a $|C|$ contiene una uv-trayectoria. Si todos los vértices de C son distintos, entonces C es la uv-trayectoria y terminamos. Si no, C tiene un vértice repetido w. Sea entonces C' el camino que se obtiene al eliminar la sección que ocurre entre las dos repeticiones de w. Como C' es un uv-camino de longitud menor a $|C|$, entonces (por la hipótesis de inducción) C' tiene una uv-trayectoria y consecuentemente también C. ■

12. Muestren que si G es simple y $m > \binom{n-1}{2}$ entonces G es conexa. **Sol:**
Sea G una gráfica simple disconecta tal que $V_G = V_1 \cup V_2$ con $G[V_1]$ desconectada de $G[V_2]$s.
Es facil intuir que $G[V_1]$ tiene mayor numero de aristas cuando esta es completa y tiene el mayor numero posible de vertices.
Vamos a demostrar lo anterior:
Sea $|V_1| = n_1$ y $|V_2| = n2$ De tal forma que $n_1 + n_2 = n$.
El mayor número posible de aristas en G, sea $m(n_1, n_2)$,, sera cuando en alguno de las particiones exita el mayor numero de vertices posibles y $G[V_1]$ y $G[V_2]$:

Formula que nos da el numero de aristas de ambas graficas completas:
$m_G \leq \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2}$

Despejando n_2 tenemos :

$$f(n_1) = n_2 = n - n_1 \tag{1}$$

Ahora lo que queremos obtener es cuando existe el mayor numero de aristas que como habiamos mencionado antes ocurre cuando hay el mayor numero posible de vertices en alguno de las particiones.
Hay que considerar que:
$n_1, n_2 \geq 1$ y que n es fija.
Resultado de derivar la función :

$$f'(n_1) = 2(n_1 - n)$$

Y ahora debemos encontrar cuando es que $f'(n_2) = 0$.
$f(n) = 0$ sii $n_1 = n$.
Pero eso no puede pasar por que entonces n_2 seria cero y V_2 seria vacio.
Entonces tomamos como maximo cuando $n_1 = n - 1$ y $n_2 = 1$
Así:
$m_G \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{1(0)}{2}$
Este es el numero maximo de aristas donde se cumple que $G[V_1]$ esta desconectada de $G[V_2]$.
Para que sea conexa basta con unir el unico elemento de V_2 con alguno de V_1.
$\Longrightarrow$ El numero minimo de aristas para garantizar la conexidad de una grafica simple es $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + \mathbf{1} > \binom{n-1}{2}$ ■