Gráficas y juegos — Tarea 6 (pares)

Diego Méndez , Pablo Trinidad

w

2. Si G tiene componentes de conexidad $G_1, ..., G_n$ ¿Cuanto vale X_G en función de $G_1, ..., G_n$?
   Sol:
   Recordemos que :

   $$\text{Sea } X_G = \text{minimo natural } k \text{ tal que G es } k-\text{colorable.}$$

   Existe una componante cuyo número cromatico es mayor o igual al del resto de las componentes, sea X_{G_i} dicha componente.
   Demostraremos que $X_{G_i} = X_G$
   Demostración
   Por contradicción:
   Sea $X_{G_i} = max(X_{G_1}, ..., X_{G_n}) \wedge X_{G_i} \neq X_G$.

   - $X_G = k \wedge k < X_{G_i}$
     Puede que con k colores nos sea posible colorear algunas de las componentes.
     Pero lo que si podemos asegurar es que existe al menos una componente, G_i, que no colorea pues faltan $X_{G_i} - k$ colores para colorear dicha componente con el numero de colores minimo.
     $\implies G$ no es coloreable con $X_G < max(X_{G_1}, ..., X_{G_n})$.
   - $X_G = k \wedge X_{G_i} < k$
     En este caso todas las componentes se colorean pero k no es el minimo natural tal que todas las componentes esten conectados, ya que ese natural es X_i.
     $\implies X_G = k$ es una contradicción pues $X_G = max(X_{G_1}, ..., X_{G_n})$
     Lo que hay que hay que hacer es reutilizar los colores de X_{G_i} de la siguiente forma:
     Sabemos que X_{G_i} es el mayor numero cromatico de todas las componentes .
     Entonces sabemos que el numero cromatico de las demas componentes es menor o igual X_{G_i}.
     Ninguna de las componentes estan conectadas y así ningun par de vertices de dos componentes distintas son vecinos $\Rightarrow$ podemos reutilizar los colores en cada componente.

   En ambos casos existio la contradicción y en el segundo explicamos como X_{G_i} de colores son reutilizables en las demas componentes.
   $\implies X_G = max(X_{G_1}, ..., X_{G_n})\blacksquare$.

4. Demuestren que G es n_G-colorable concluyan que $X_G \leq n_G$. Demuestren también que la igualdad se da si y solo si G es supracompleta.
   Sol:
   Demostraremos que G es n_G-colorable.
   Demostración:
   $V_G = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$
   $n_G = |V_G|$
   No importa de que manera este conectada G, basta con asignarle un color distinto a cada vertice. De esta forma para todo vertice en G sucede que todos sus vecinos tienen color diferente, pues todos los vertices tienen color diferente.
   Así utilizamos n_G colores y G es n_G- coloreable.$\blacksquare$

   Dado lo anterior $X_{G_i} \leq n_G$, pues el número cromatico, que se define como el **minimo** natural k tal que G es $k-$coloreable, es forzosoamente menor o igual a un numero con el cual ya fue posible colorear a G.

Ahora demostraremos que $X_G = n_G \iff G$ es supracompleta.
Demostración

- Regreso: $\Leftarrow$:
  Demostraremos que si G es supracompleta $\implies X_G = n_G$
  Demostración:
  Por contradicción:
  Sea G supracompleta y $X_G \neq n_G$:
  - $x_G < n_G$
    Sí $X_G < n_G$ entonces almenos dos vertices comparten el mismo color con lo que no son vecinos. $\implies \exists v, u \in V_G(uv \notin A_G)$ lo cual es una contradicción pues recordemos que si G es suprayectiva para cualesquiera dos vertices distintos sucede que estan conectados.
  - $X_G > n_G$
    Esto ni si quiera es posible por que el hecho de que el numero cromatico sea mayor a la de el numero de vertices implica que algun vertice tiene dos colores lo cual no es posible.

  En ambos casos existe contradicción
  $\implies$ si G es supracompleta $\Rightarrow X_G = n_G$.■
- Ida: $\Rightarrow$:
  Demostraremos que si $X_G = n_G \Rightarrow G$ es supracompleta.
  Demostración por contrapositiva:
  Demostraremos que si G no es supracompleta $\Rightarrow X_G \neq n_G$
  Como bien mencionamos antes no es posible que $X_G > n_G$ entonces lo unico que probaremos es que si G no es supracompleta $\Rightarrow X_G < n_G$

  Inicio de la demostración:
  Sea G una gráfica no supracompleta $\Rightarrow \exists u, v \in V_G(uv \notin A_G)$
  Es decir existen al menos dos vertices que no son vecinos. Sin perdida de generalidad mostraremos el número cromatico en el caso donde ocurre que G no sea supracompleta, que es cuando :

  - $\exists u, v \in V_G(gra(u) = gra(v) = n_G - 2 \land uv \notin A_G)$
  - $V' = V_G - \{u, v\}$
  - $\forall v \in V'(gra(v) = n - 1)$

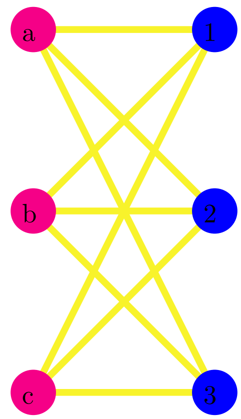
  El número cromatico se arma de la siguiente manera: A cada vertice en V' se le asigna un color diferente por que como mencionamos anteriormente todos sus elementos estan conectados con los demas vertices en G. En lo anterior se han utilizado$n_g - 2$ colores .
  Como u y v no son vecinos podemos colorear ambos con un mismo color diferente a los $n_G - 2$ antes utilizados pues ambos estan conectados a todos los vertices en V', con lo que G ya esta coloreada.
  En este caso, que es el *minimo* que ocurre que G no sea supracompleta sucede que:
  $X_G = n_G - 1 < n_G$
  $\implies$ Si G no es supracompleta $\Rightarrow X_G < n_G$.■

Ya tenemos demostrada la ida y la vuelta con lo que :

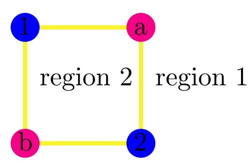
$$X_G = n_G \iff G \text{ es supracompleta.}$$

6. Demuestren que $K_{3,3}$ no es aplanable.
   La demostración sera similar a la vista en el video 27.
   Recordemos que:
   - Partimos de una región inicial, el plano.
   - Un ciclo nos da una región o cara extra

Demostración:
Tenemos a $K_{3,3}$:
$V_G = \{1,2,3\} \cup \{a,b,c\}$ y $A_G = \{a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3\}$.

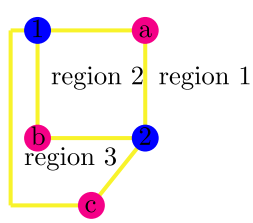


Los ciclos de menor longitud en $K_{3,3}$ son de cuatro. No pueden ser de dos por que la gráfica es simple. No pueden ser de tres por que no hay ciclos impares en gráficas bipartitas.
Entonces el primer paso es formar el ciclo de menor longitud que como mencionamos es de cuatro, por lo que debemos escojer cuatro vertices, ya que es bipartita completa sin perdida de generalidad podemos escojer los vertices $a, 1, b, 2$ para armar nuestro cuadrado. No importa como pongamos las aristas en el plano nos dara un isomorfismo de lo siguiente, esto por que no importa como hagamos las aristas siempre queda el mismo ciclo:



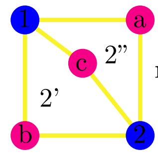
Con lo que nos quedan dos regiones la exterior (region 1) y la interior (region 2). Nos quedan dos vertices, c y 3, y cinco aristas por colocar.
Digamos que lo siguiente es poner el vertice 3, lo que ahora tenemos son dos nuevos ciclos, $\{1, c, 2, a, 1\}$ y $\{1, b, 2, c, 1\}$.

- Si ponemos a c en la region exterior, lo que ahora tenemos es una nueva región en el *exterior* del cuadrado con el ciclo $\{1, c, 2, b, 1\}$.



- Si colocamos a C en la región interior lo que sucede es que los nuevos ciclos crean una nueva región, fragmentando lo que antes era la región interior en dos, $2'$ y $2''$.

No importa como los pongamos pues ambas son isomorfas pues en ambas el vertice c esta conectada con 1 y 2. Así que para fines practicos y visuales contunaremos con la que fragmenta lo que era la



región 2.
Observemos que:

- El vertice a es ajeno a la región $2'$.
- El vertice b es ajeno a la región $2''$.
- El vertice c es ajeno a la región exterior.

No importa en que región pongamos al vertice 3 por lo anterior y el hecho de que 3 se debe conectar con a, b y c, al menos una arista chocara con otra.

- Si lo ponemosa en $2'$, a es exterior a dicha región y la arista $3a$ choca con $1c$ o $2c$
- Si lo ponemosa en $2''$, b es exterior a dicha región y la arista $3b$ choca con $1c$ o $2c$
- Si lo ponemos en la exterior al c ser ajeno a esa región alguna arista chocara con una de las aristas del cuadrado inicial, el cual *cubre* a c.

No hay forma de que $K_{3,3}$ sea aplanable.$\blacksquare$
7.- Si G es plana y $H \leq G$ entonces H tambien es plana.
Sol:
Como $H \leq G \Rightarrow V_H \subseteq V_G \wedge A_H \subseteq A_G \wedge \Psi_H = \Psi_G|_{A_H}$.
Puede ocurrir que $V_H = V_H \wedge A_H = A_G$ con lo que H tambien es plana .
Pero en el caso de que no sean iguales, H sigue siendo plana pues lo que entonces ocurre es que en H hay menos aristas y/o vertices que en G.
La unica manera de hacer que G no sea plana seria agregando aristas y/o vertices pero entonces ocurriria que $G < H$ lo cual es una contradicción.$\blacksquare$

8. Utilicen la contrapositiva del inciso anterior para probar que K_n no es plana para $n \geq 5$ y $K_{n,m}$ no es plana si $n \geq 3$ y $m \geq 3$.
De la contrapositiva del ejercicio 7 tenemos:

- $H \leq G$
- *Contrapositiva* Si H no es plana $\Rightarrow G$ no es plana

Recordemos que el hecho de que $H \leq G$ implica que en G puede haber mas aristas y/o vertices que en H, pero no al reves.
Demostración:
Al H ser subgrafica de G, en G puede ocurrir que haya mas vertices y/o aristas pero no importa por que como bien ya sabiamos H no era plana entonces por mas que agreguemos no podremos quitar las aristas que ya chocaron.
Entonces:

- Sea $H = K_5$.
  En el video 27 de la lista de reproducción en youtbe vimos que K_5 no es plana.
  Entonces si $G = K_n$, con $n > 5$, G tambien es plana por que las aristas y vertices de H se encuentran en G y sabemos que en H ya existian aristas que chocan.
  $\Longrightarrow$ en G existen aristas que chocan $\Rightarrow G$ no es plana.
  $\Longrightarrow$ K_n, con $n \geq 5$, no es plana.

- Sea $H = K_{3,3}$.
  En el ejercicio 6 ya probamos que $K_{3,3}$ no es plana. Entonces si $G = K_{n,m}$, con $n > 3 \wedge m > 3$, G tambien es plana por que las aristas y vertices de H se encuentran en G y sabemos que en H ya existian aristas que chocan.
  $\Longrightarrow$ en G existen aristas que chocan $\Rightarrow G$ no es plana.
  $\Longrightarrow$ $K_{n,m}$, con$n \geq 3 \wedge m \geq 3$, no es plana.