Ejercicio Semanal 2

López Miranda Angel Mauricio   Diego Méndez Medina

1. Defina recursivamente las siguientes funciones:

   a) $\texttt{ni}$ que recibe una fórmula φ y regresa el número de símbolos de implicación que tiene la fórmula. Por ejemplo:

   $$\texttt{ni}(p \wedge r \to \neg(q \to r)) = 2$$

   Solución:

   $$\texttt{ni} :: \texttt{PROP} \to \mathbb{N}$$

   $$\begin{aligned} \texttt{ni}(\varphi) &= 0 && \texttt{si } \varphi \texttt{ es atomíca} \\ \texttt{ni}(\neg\varphi) &= \texttt{ni}(\varphi) \\ \texttt{ni}(\varphi \to \psi) &= 1 + \texttt{ni}(\varphi) + \texttt{ni}(\psi) \\ \texttt{ni}(\varphi * \psi) &= \texttt{ni}(\varphi) + \texttt{ni}(\psi) && \texttt{donde } * \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

   `Ejemplo:`

   $$\begin{aligned} \texttt{ni}(p \wedge r \to \neg(q \to r)) &= 1 + \texttt{ni}(p \wedge r) + \texttt{ni}(\neg(q \to r)) \\ &= 1 + \texttt{ni}(p) + \texttt{ni}(r) + \texttt{ni}(q \to r) \\ &= 1 + 0 + 0 + 1 + \texttt{ni}(q) + \texttt{ni}(r) \\ &= 2 + 0 + 0 = 2 \end{aligned}$$

   b) $\texttt{nd}$ que recibe una fórmula φ y regresa el número de símbolos de disyunción que tiene la fórmula. Por ejemplo

   $$\texttt{nd}(p \vee r \to \neg(q \vee r) \wedge (s \vee \neg t)) = 3$$

   Solución:

   $$\texttt{nt} :: \texttt{PROP} \to \mathbb{N}$$

   $$\begin{aligned} \texttt{nd}(\varphi) &= 0 && \texttt{si } \varphi \texttt{ es atomíca} \\ \texttt{nd}(\neg\varphi) &= \texttt{nd}(\varphi) \\ \texttt{nd}(\varphi \vee \psi) &= 1 + \texttt{nd}(\varphi) + \texttt{nd}(\psi) \\ \texttt{nd}(\varphi * \psi) &= \texttt{nd}(\varphi) + \texttt{nd}(\psi) && \texttt{donde } * \in \{\wedge, \to, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

`Ejemplo:`

$$
\begin{aligned}
\texttt{nd}(p \lor r \to \neg(q \lor r) \land (s \lor \neg t)) &= \texttt{nd}(p \lor r \to \neg(q \lor r) \land (s \lor \neg t)) \\
&= \texttt{nd}(p \lor r) + \texttt{nd}(\neg(q \lor r) \land (s \lor \neg t)) \\
&= 1 + \texttt{nd}(p) + \texttt{nd}(r) + \texttt{nd}(\neg(q \lor r)) + \texttt{nd}(s \lor \neg t)) \\
&= 1 + 0 + 0 + \texttt{nd}(q \lor r) + 1 + \texttt{nd}(s) + \texttt{nd}(\neg t) \\
&= 2 + \texttt{nd}(q \lor r) + \texttt{nd}(s) + \texttt{nd}(\neg t) \\
&= 2 + 1 + \texttt{nd}(q) + \texttt{nd}(r) + 0 + \texttt{nd}(t) \\
&= 3 + 0 + 0 + 0 = 3
\end{aligned}
$$

c) `qi` que recibe una fórmula y regresa una fórmula en que no figura el símbolo $\to$, usando la equivalencia lógica $A \to B \equiv \neg A \lor B$. Por ejemplo:

$$\texttt{qi}(p \land r \to \neg(q \to r)) = \neg(p \land r) \lor \neg(\neg q \lor r)$$

Solución:

$$\texttt{qi} :: \texttt{PROP} \to \texttt{PROP}$$

$$
\begin{aligned}
\texttt{qi}(\varphi) &= \varphi && \texttt{si } \varphi \texttt{ es atomíca} \\
\texttt{qi}(\neg\varphi) &= \neg(\texttt{qi}(\varphi)) \\
\texttt{qi}(\varphi \to \psi) &= \neg(\texttt{qi}(\varphi)) \lor \texttt{qi}(\psi) \\
\texttt{qi}(\varphi * \psi) &= \texttt{qi}(\varphi) * \texttt{qi}(\psi) && \texttt{donde } * \in \{\land, \lor, \leftrightarrow\}
\end{aligned}
$$

`Ejemplo:`

$$
\begin{aligned}
\texttt{qi}(p \land r \to \neg(q \to r)) &= \neg(\texttt{qi}(p \land r)) \lor \texttt{qi}(\neg(q \to r)) \\
&= \neg(\texttt{qi}(p) \land \texttt{qi}(r)) \lor \neg(\texttt{qi}(q \to r) \\
&= \neg(p \land r) \lor \neg(\neg(\texttt{qi}(q)) \lor \texttt{qi}(r)) \\
&= \neg(p \land r) \lor \neg((\neg q) \lor r)
\end{aligned}
$$

2. Utilizando las definiciones anteriores demuestre mediante inducción estructural que para cualquier fórmula φ, se cumple:

$$\mathtt{nd}(\mathtt{qi}\,(\varphi)) = \mathtt{nd}(\varphi) + \mathtt{ni}(\varphi)$$

Solución:

Sea a un elemento cualquiera de ATOM, dadas las definiciones de ni, nd y qi, la variable entra en los casos basos de las tres funciones y tenemos:

$$\mathtt{qi}(a) = a \qquad \mathtt{nd}(a) = 0$$
$$\mathtt{ni}(a) = 0$$

Así:

$$\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(a)) = \mathtt{nd}(a) = 0 = 0 + 0 = \mathtt{nd}(a) + \mathtt{ni}(a)$$

Como a era un elemento cualquiera de ATOM, no importa si es alguna variable o alguna constante lógica. Para cualquiera se cumple.

Ahora supogamos φ y ψ son dos elementos cualesquiera de PROP tales que:

$$\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\varphi)) = \mathtt{nd}(\varphi) + \mathtt{ni}(\varphi) \tag{1}$$
$$\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\psi)) = \mathtt{nd}(\psi) + \mathtt{ni}(\psi) \tag{2}$$

Lo que ahora buscaremos es constuir elementos de PROP, con φ y ψ. ¿Como hacemos eso?, con los conectivos lógicos.

Negación:

Si construimos γ como la negación de φ, tambien es un elemento de PROP. Con lo que ahora, siguiendo la construcción de nd , ni y γ tenemos:

$$\mathtt{nd}(\gamma) = \mathtt{nd}(\neg\varphi) = \mathtt{nd}(\varphi) \tag{3}$$
$$\mathtt{ni}(\gamma) = \mathtt{ni}(\neg\varphi) = \mathtt{ni}(\varphi) \tag{4}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\gamma)) &= \mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\neg\varphi)) && \text{Por la construcción de } \gamma \\ &= \mathtt{nd}(\neg\mathtt{qi}(\varphi)) && \text{Por definición de qi} \\ &= \mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\varphi)) && \text{Por definición de nd} \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\mathtt{nd}(\gamma) + \mathtt{ni}(\gamma) = \mathtt{nd}(\varphi) + \mathtt{ni}(\varphi) \qquad \text{Por (3)(4)}$$

Así,

$$\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\gamma)) = \mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\varphi)) = \mathtt{nd}(\varphi) + \mathtt{ni}(\varphi) = \mathtt{nd}(\gamma) + \mathtt{ni}(\gamma)$$

Con lo que $\gamma = \neg\varphi$ cumple con la propiedad.

Conjunción:

Ahora construimos $\gamma_1 = \varphi \wedge \psi$. De acuerdo a las nuestras definiciones de la preguna anterior tenemos:

$$\mathtt{nd}(\gamma_1) = \mathtt{nd}(\varphi \wedge \psi) = \mathtt{nd}(\varphi) + \mathtt{nd}(\psi) \tag{5}$$
$$\mathtt{ni}(\gamma_1) = \mathtt{ni}(\varphi \wedge \psi) = \mathtt{ni}(\varphi) + \mathtt{ni}(\psi) \tag{6}$$

Ahora, desarrollando:

$$\begin{aligned}\texttt{nd}(\texttt{qi}(\gamma_1)) &= \texttt{nd}(\texttt{qi}(\varphi \wedge \psi)) && \text{Por la construcción de } \gamma_1\\ &= \texttt{nd}(\texttt{qi}(\varphi) \wedge \texttt{qi}(\psi)) && \text{Por definición de qi}\\ &= \texttt{nd}(\texttt{qi}(\varphi)) + \texttt{nd}(\texttt{qi}(\psi)) && \text{Por definición de nd}\end{aligned}$$

Seguimos desarrollando:

$$\begin{aligned}\texttt{nd}(\texttt{qi}(\varphi)) + \texttt{nd}(\texttt{qi}(\psi)) &= \texttt{nd}(\varphi) + \texttt{ni}(\varphi) + \texttt{nd}(\psi) + \texttt{ni}(\psi) && \text{Por } (1)(2)\\ &= \texttt{nd}(\varphi) + +\texttt{nd}(\psi) + \texttt{ni}(\varphi) + \texttt{ni}(\psi) && \text{Agrupando}\\ &= \texttt{nd}(\gamma_1) + \texttt{ni}(\gamma_1) && \text{Por } (5)(6)\end{aligned}$$

Así, γ_1 cumple con la propiedad descrita:

$$\texttt{nd}(\texttt{qi}(\gamma_1) = \texttt{nd}(\gamma_1) + \texttt{ni}(\gamma_1)$$

Equivalecía:

Es similar a la conjunción. Construimos $\gamma_2 = \varphi \leftrightarrow \psi$, siguiendo nuestras definiciones:

$$\texttt{nd}(\gamma_2) = \texttt{nd}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \texttt{nd}(\varphi) + \texttt{nd}(\psi) \tag{7}$$
$$\texttt{ni}(\gamma_2) = \texttt{ni}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \texttt{ni}(\varphi) + \texttt{ni}(\psi) \tag{8}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}\texttt{nd}(\texttt{qi}(\gamma_2)) &= \texttt{nd}(\texttt{qi}(\varphi \leftrightarrow \psi)) && \text{Por la construcción de } \gamma_2\\ &= \texttt{nd}(\texttt{qi}(\varphi) \leftrightarrow \texttt{qi}(\psi)) && \text{Por definición de qi}\\ &= \texttt{nd}(\texttt{qi}(\varphi)) + \texttt{nd}(\texttt{qi}(\psi)) && \text{Por definición de nd}\end{aligned}$$

Desarollamos:

$$\begin{aligned}\texttt{nd}(\texttt{qi}(\varphi)) + \texttt{nd}(\texttt{qi}(\psi)) &= \texttt{nd}(\varphi) + \texttt{ni}(\varphi) + \texttt{nd}(\psi) + \texttt{ni}(\psi) && \text{Por } (1)(2)\\ &= \texttt{nd}(\varphi) + \texttt{nd}(\psi) + \texttt{ni}(\varphi) + \texttt{ni}(\psi) && \text{Agrupando}\\ &= \texttt{nd}(\gamma_2) + \texttt{ni}(\gamma_2) && \text{Por } (7)(8)\end{aligned}$$

γ_2 cumple con la propiedad descrita:

$$\texttt{nd}(\texttt{qi}(\gamma_2) = \texttt{nd}(\gamma_2) + \texttt{ni}(\gamma_2)$$

Disyunción:

Ahora construimos $\gamma_3 = \varphi \vee \psi$. De acuerdo a nuestras respuestas al inciso anterior:

$$\texttt{nd}(\gamma_3) = \texttt{nd}(\varphi \vee \psi) = 1 + \texttt{nd}(\varphi) + \texttt{nd}(\psi) \tag{9}$$
$$\texttt{ni}(\gamma_3) = \texttt{ni}(\varphi \vee \psi) = \texttt{ni}(\varphi) + \texttt{ni}(\psi) \tag{10}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}\texttt{nd}(\texttt{qi}(\gamma_3)) &= \texttt{nd}(\texttt{qi}(\varphi \vee \psi)) && \text{Por la construcción de } \gamma_3\\ &= \texttt{nd}(\texttt{qi}(\varphi) \vee \texttt{qi}(\psi)) && \text{Por definición de qi}\\ &= 1 + \texttt{nd}(\texttt{qi}(\varphi)) + \texttt{nd}(\texttt{qi}(\psi)) && \text{Por definición de nd}\end{aligned}$$

Desarollamos:

$$\begin{aligned}
1+\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\varphi))+\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\psi)) &= 1+\mathtt{nd}(\varphi)+\mathtt{ni}(\varphi)+\mathtt{nd}(\psi)+\mathtt{ni}(\psi) && \texttt{Por (1)(2)}\\
&= 1+\mathtt{nd}(\varphi)+\mathtt{nd}(\psi)+\mathtt{ni}(\varphi)+\mathtt{ni}(\psi) && \texttt{Agrupando}\\
&= \mathtt{nd}(\gamma_3)+\mathtt{ni}(\gamma_3) && \texttt{Por (9)(10)}
\end{aligned}$$

γ_3 cumple con la propiedad descrita:

$$\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\gamma_3) = \mathtt{nd}(\gamma_3)+\mathtt{ni}(\gamma_3)$$

Implicación:

Ahora construimos $\gamma_4 = \varphi \to \psi$. Siguiendo nuestras definiciones de ni y nd:

$$\mathtt{nd}(\gamma_4) = \mathtt{nd}(\varphi \to \psi) = \mathtt{nd}(\varphi)+\mathtt{nd}(\psi) \tag{11}$$

$$\mathtt{ni}(\gamma_4) = \mathtt{ni}(\varphi \to \psi) = 1+\mathtt{ni}(\varphi)+\mathtt{ni}(\psi) \tag{12}$$

Ahora, desarrollando:

$$\begin{aligned}
\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\gamma_4)) &= \mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\varphi \to \psi)) && \texttt{Por la construcción de } \gamma_4\\
&= \mathtt{nd}(\neg(\mathtt{qi}(\varphi)) \vee \mathtt{qi}(\psi)) && \texttt{Por definición de qi}\\
&= 1+\mathtt{nd}(\neg\mathtt{qi}(\varphi))+\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\psi)) && \texttt{Por definición de nd}\\
&= 1+\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\varphi)+\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\psi)) && \texttt{Por definición de nd}
\end{aligned}$$

Seguimos desarrollando:

$$\begin{aligned}
1+\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\varphi))+\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\psi)) &= 1+\mathtt{nd}(\varphi)+\mathtt{ni}(\varphi)+\mathtt{nd}(\psi)+\mathtt{ni}(\psi) && \texttt{Por (1)(2)}\\
&= \mathtt{nd}(\varphi)++\mathtt{nd}(\psi)+1+\mathtt{ni}(\varphi)+\mathtt{ni}(\psi) && \texttt{Agrupando}\\
&= \mathtt{nd}(\gamma_4)+\mathtt{ni}(\gamma_4) && \texttt{Por (11)(12)}
\end{aligned}$$

Por ultimo, γ_4 cumple con la propiedad descrita:

$$\mathtt{nd}(\mathtt{qi}(\gamma_4) = \mathtt{nd}(\gamma_4)+\mathtt{ni}(\gamma_4)$$

Dados φ y ψ acabamos de construir todos los elementos *inmediatos* posibles de PROP utilizando los conectivos lógicos sin repetir.

El hecho que φ y ψ cumplieran con la propiedad implique que los elementos *inmediatos* también la cumplan y que φ y ψ eran elementos cualesquiera concluimos que para todos los elementos, fórmulas, de PROP se cumple:

$$\mathtt{nd}(\mathtt{qi}\,(\varphi)) = \mathtt{nd}(\varphi)+\mathtt{ni}(\varphi)$$