Lógica Computacional 2022-I
Boletin de Ejercicios 1

Favio E. Miranda Perea Javier Enríquez Mendoza Daniel Lugo Cano
Ramón Arenas Ayala

15 de octubre de 2021
Facultad de Ciencias UNAM

1. Sintaxis de la Lógica Proposicional

1. Da una definición recursiva de cada una de las siguientes funciones:

   a) `grado`: recibe una fórmula lógica y regresa el número de conectivos lógicos que tiene.

   b) `atom`: recibe una fórmula y regresa el conjunto de subfórmulas atómicas.

   c) `sub`: Recibe una fórmula y regresa el conjunto de todas sus subfórmulas.

   d) `eln`: recibe una fórmula φ y regresa la fórmula que resulta de reemplazar en φ cada subfórmula de la forma $\neg\psi$ por $\psi \to \bot$

2. Elimina los paréntesis innecesarios en las siguientes expresiones:

   a) $((p \lor q) \to r) \leftrightarrow ((\neg r) \to (\neg(p \lor q)))$

   b) $\neg(((p \land (p \to (\neg q))) \land q) \land p)$

   c) $(p \to (q \land (\neg q))) \to ((\neg p) \to p)$

   d) $(\neg s) \to ((\neg t) \land \neg(p \lor q))$

3. Demuestra que para cualquier fórmula proposicional φ, el número de paréntesis izquierdos es igual al número de símbolos de disyunción en φ si la gramática para fórmulas proposicionales es la siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \varphi,\ \psi & ::= & VarP \mid \bot \mid \top \mid \neg\varphi \mid (\varphi \lor \psi) \\ VarP & ::= & p \mid q \mid r \mid \ldots \mid p_1 \mid p_2 \mid \cdots \end{array}$$

   Debes dar las funciones recursivas para calcular el número de paréntesis izquierdos de una fórmula y el número de símbolos de disyunción de una fórmula de la gramática anterior.

4. Demuestra que $\neg(p_0 \lor p_1 \lor \ldots \lor p_n) \equiv \neg p_0 \land \neg p_1 \land \ldots \land \neg p_n$, para todo n natural mayor o igual a 1. [Hint: la inducción es sobre n]

5. Aplica las siguientes sustituciones. Muestra a detalle los pasos realizados.

   a) $\big((p \to (s \to q)) \leftrightarrow (((\neg p) \lor q) \lor (\neg s))\big)[p, q := s \to p, s \lor r]$

   b) $(p \lor q) \to ((\neg r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow s))[r, p, q := p, p \land q, p \land q \land r]$

   c) $((p \land q)[p, q := p \land q, s] \lor (p \lor s))[s := q \lor r]$

   d) $\big((q \land r)[q, p := \neg p, s] \to (r \land \neg(r \leftrightarrow p))\big)[r, p := \neg r, s \land p]$

   e) $\Big((p \to q \to s)[q := \neg r \land q] \to \big((p \to q) \leftrightarrow (p \land r)\big)\Big)[q, r, p := s, q \land p, (r \lor q)]$

6. Decide si la siguiente propiedad de sustituciones es verdadera o falsa. Si es verdadera demuéstralo y proporciona una condición suficiente para que la proposición sea verdadera, si no, da un contraejemplo.

$$\varphi[p, q := \psi, \gamma] \equiv \varphi[p := \psi][q := \gamma]$$

2. Semántica de la Lógica Proposicional

7. Considera el siguiente argumento:

8. Formalice el siguiente argumento con lógica proposicional, una vez hecha la especificación formal decida si el argumento es correcto o no, indicando claramente el método utilizado. Defina previamente el glosario, es decir, el significado de las variables empleadas en la especificación formal.

   Si el programa es eficiente, se ejecuta rápidamente. El programa es eficiente, o tiene un error. Sin embargo, el programa no se ejecuta rápidamente. Por lo tanto tiene un error.

9. Socrates solía decir:

   Si soy culpable, debo ser castigado.

   Soy culpable. Entonces debo ser castigado

   también decía:

   Si soy culpable, debo ser castigado.

   No soy culpable. Entonces debo no ser castigado

   ¿Son correctos los argumentos anteriores? Para decidir esto traduce ambos argumentos a lógica proposicional. [Hint: Uno de estos argumentos es un viejo conocido]

10. Defina utilizando los conectivos lógicos vistos en clase el operador $\oplus$ (ó exclusivo), cuya propiedad es:

$$\mathcal{I}(\phi \oplus \psi) = 1 \text{ si y sólo si } \mathcal{I}(\psi) \neq \mathcal{I}(\phi)$$

11. Decida si los siguientes conjuntos de proposiciones son satisfacibles por medio de interpretaciones:

    a) $\{p \to q,\ (s \vee p) \wedge \neg q,\ \neg s\}$
    b) $\{(p \to r) \vee (\neg s \wedge p),\ s \to \neg(p \wedge r),\ r \vee \neg s\}$
    c) $\{p \vee (q \wedge s),\ (\neg r \vee s) \wedge (s \to t),\ \neg p \vee \neg t\}$
    d) $\{\neg s,\ p \to (q \vee r),\ q \to r,\ r \to s,\ \neg p\}$
    e) $\{\neg t \to q, \neg q \wedge p, t \wedge p \to s, \neg s\}$

12. Pruebe la correctud de los siguientes argumentos de la lógica proposicional. Resuelva por interpretaciones apoyándose del principio de refutación.

    a) $p \vee q, \neg r \to \neg p$ entonces $q \to \neg r$
    b) $p \to q \vee r, r \to \neg p, q \to \neg p$ entonces $\neg(p \wedge \neg s)$

13. Demuestre las siguientes propiedades de la consecuencia lógica:

    a) Si $\Gamma \models \phi$ entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible.
    b) Si $\Gamma, \phi \models \psi$ entonces $\Gamma, \neg\psi \models \neg\phi$.
    c) Si $\Gamma, \phi \vee \psi \models \neg\phi$ entonces $\Gamma, \phi \vee \psi \models \psi$.
    d) $\Gamma, \phi \wedge \psi \models \phi$
    e) $\Gamma, \psi \models \psi \vee \phi$

14. Analice la consecuencia lógica en cada caso:

    a) $\{p \to q,\ q \to r \to s,\ p \to q \to r\} \models p \to s$
    b) $\{p \to q,\ q \wedge r \to s,\ r\} \models p \to s$

c) $\{p \to q \to r,\ p \vee s,\ t \to q,\ \neg s\} \models \neg r \to \neg t$

d) $\{t \to p \vee q,\ p \to s \wedge u,\ q \to \neg u\} \models t \to s \vee \neg u$

e) $\{(s \to q) \to s \wedge r,\ p \to \neg\big((r \to \neg q) \wedge (p \to r)\big) \to \neg q\} \models p \wedge \neg s$

f) $\{p \to q \vee r,\ \neg p \to t,\ (\neg t \vee s) \wedge \neg q\} \models r \vee s$

15. Te ofrecen tres cajas. Una de ellas tiene oro, mientras que las otras dos están vacías. Cada caja tiene una nota sobre ella con una pista sobre su contenido. Las pistas son:

    Caja 1 *No encontraras el oro aquí dentro.*

    Caja 2 *No encontraras el oro aquí dentro.*

    Caja 2 *El oro se encuentra dentro de la caja 2.*

    Solo uno de los mensajes dice la verdad, los otros dos son falsos.

    Formaliza el problema con lógica proposicional y encuentra la caja que contiene el oro.

16. Demuestra que las siguientes fórmulas son equivalentes utilizando interpretaciones.

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \qquad\qquad (\varphi_1 \to \neg\varphi_2) \to \varphi_3$$

3. Formas Normales y Resolución Binaria

17. Un algoritmo para verificar si $\models \varphi$, cuando φ está en forma normal conjuntiva, digamos $\varphi = \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_n$, es el siguiente:

    - Para cada $1 \leq i \leq n$, buscar en $\mathcal{C}_i$ un par de literales complementarias.
    - Si tal par existe para cada clausula $\mathcal{C}_i$ entonces $\models \varphi$.
    - En otro caso $\not\models \varphi$, es decir, φ no es tautología.

    De acuerdo al principio de refutación se sigue que φ es satisfacible si y sólo si $\not\models \neg\varphi$, es decir, si y sólo si $\neg\varphi$ es tautología.

    Decide si los argumentos de los ejercicios 7 y 8 son correctos usando este método.

18. Define recursivamente la funciones que calculan la forma normal negativa y la forma normal conjuntiva respectivamente, dada una fórmula proposicional.

19. Obtener la forma normal conjuntiva de las siguientes fórmulas

    a) $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$

    b) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \to r)$

    c) $(p \wedge q \to p) \to ((q \vee r) \wedge \neg(q \vee r))$

    d) $p \wedge \neg(\neg p \vee \neg q)$

    e) $\neg\big(((p \vee q) \wedge \neg r) \to \neg p \vee r\big)$

    f) $\neg(\neg s \to \neg(t \vee (p \vee q)))$

    g) $\neg((\neg q \wedge (p \to r)) \wedge (r \to q))$

20. Decidir si los siguientes conjuntos son satisfacibles:

    a) $\Gamma = \{p \vee q \to r, \neg((p \vee q) \vee r)\}$

    b) $\Gamma = \{q \vee r \vee s, \neg(q \vee r), \neg(r \vee s), \neg(s \vee q)\}$

    c) $\Gamma = \{(p \to q) \vee \neg(q \to p), \neg(p \vee (p \to q)), p \to (p \to q)\}$

    d) $\Gamma = \{(p \wedge \neg(\neg q \vee p)) \wedge (p \to (\neg q \leftrightarrow (p \vee q))), (p \wedge q) \to (r \vee s)\}$

21. Decide si las siguientes fórmulas son tautologías al transformarlas en cláusulas:

   a) $\neg p \vee q \to (q \to p)$
   b) $(p \to r) \to (q \to r) \to (p \vee q \to r)$
   c) $p \wedge (q \vee p) \leftrightarrow p$
   d) $((p \to q) \to p) \to p$
   e) $(p \leftrightarrow \neg q) \vee q$
   f) $(p \vee q) \wedge \neg r \to \neg p \vee r$

22. Decidir si los siguientes argumentos son correctos:

   a) $\{p \to q,\ r \to s,\ p \vee s,\ \neg(q \wedge s)\} \models (q \to p) \wedge (s \to r)$
   b) $\{p \to \neg q,\ (r \vee s) \to t,\ t \to q\} \models p \to (\neg r \wedge \neg s)$
   c) $\{b \wedge z,\ z \to (c \wedge d),\ (c \wedge b) \to q\} \models q \vee t$
   d) $\{\neg(\neg p \to q) \vee ((p \to r) \wedge (r \to q))\} \models (r \to \neg p) \wedge (p \to \neg q)$
   e) *Tengo sueño o no tengo hambre. Sólo si tengo hambre me duele la cabeza. Sólo si he dormido ocho horas no tengo sueño. No he dormido ocho horas. Por tanto, no es el caso de que me duela la cabeza o haya dormido ocho horas.*
   f) *Si la gente no estuviera embrutecida, rechazaría el mundo en que vivimos o desesperaría. Por otra parte, la gente no rechaza a este mundo. Luego la gente anda embrutecida o desesperada.*

23. Para los siguientes conjuntos de fórmulas, decidir si son satisfacibles o no calculando los conjuntos de saturación.

   a) $\{p \vee q,\ \neg q \vee r,\ r \vee \neg p,\ \neg p \vee q,\ \neg q\}$
   b) $\{p \wedge q \wedge r \to s, t \wedge w \to r, q, v \wedge r \to p, t, v, v \to w\}$
   c) $\{p \wedge q \to r, w \to r, p, s \to w\}$
   d) $\{\neg p \wedge q, ((r \to p) \to \neg q) \vee \neg r, \neg(r \vee \neg p)\}$
   e) $\{r \to \neg(p \wedge \neg q), ((p \to r) \to (\neg q \to r)) \wedge \neg r, \neg(q \wedge q)\}$
   f) $\{(p \wedge r) \vee (\neg r \to q), (q \to r) \to \neg q \to r, \neg p \wedge q \wedge \neg r\}$

24. Una fórmula F está en forma normal *disyuntiva* si es de la forma $F = \mathcal{D}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{D}_n$ donde cada $\mathcal{D}_i$ es un conjunción de literales, $\mathcal{D}_i = \ell_{i1} \wedge \ldots \wedge \ell_{ik}$

   a) Demuestre que para cualquier fórmula A existe una fórmula D tal que $A \equiv D$ y D está en forma normal disyuntiva.
   b) Defina un algoritmo para hallar formas normales disyuntivas.
   c) Defina un algoritmo para decidir satisfacibilidad mediante formas normales disyuntivas.

25. Repita el ejercicio 11 usando el algoritmo del ejercicio 24c.

26. Defina un algoritmo que reciba una tabla de verdad llena y devuelva la fórmula correspondiente a dicha tabla de verdad.

4. Especificación SATy algoritmo DPLL

27. Decidir si el siguiente conjunto de fórmulas tiene al menos un modelo utilizando el **algoritmo DPLL**. Debes mostrar los pasos detalladamente.

$$\{r \to \neg(p \wedge \neg q),\ ((p \to r) \to (\neg q \to r)),\ \neg(q \wedge q)\}$$

28. Para cada uno de los siguientes problemas, define variables proposicionales y formaliza el problema como una fórmula proposicional cuyo modelo lo resuelva.

   - Aladdin encuentra dos baúles en una cueva. Él sabe que cada uno de ellos contiene un tesoro o bien, una trampa mortal. El bául A dice *Al menos uno de estos baúles contiene un tesoro*, y en el baúl B: *En el baúl A hay una trampa*. Aladdin sabe que ambas inscripciones son verdaderas o ambas son falsas. ¿Puede Aladdin escoger un baúl estando seguro de encontrar un tesoro?
   - Dada una gráfica $G = (V, E)$, un conjunto $C \subset V$ de vértices es una *cubierta* de G si cada arista en E incide con al menos un vértice de C. ¿Como encuentras a C?
   - Lourdes quiere invitar a algunas de las siguientes personas a una reunión para ver películas: Alejandro, Brenda, Cristina y Daniela. Si Lourdes invita a Alejandro, también debe invitar a Brenda. Lourdes no puede invitar a Brenda y a Cristina a la misma reunión. Lourdes quiere invitar al menos a tres de estas personas.
   - Caminando en un laberinto y te encuentras con tres posibles caminos: el camino a tu izquierda está cubierto de oro, el del centro con mármol y el de la derecha está hecho de pequeñas piedras. Cada camino está protegido por un guardián, al hablar con ellos te dicen:
     - El guardia del camino de oro: *Este camino te llevará directo al centro. Además, si el de piedras te lleva al centro, entonces el de mármol también.*
     - El guardia del camino de mármol: *Ni el camino de oro, ni el camino de piedra te lleva al centro.*
     - El guardia del camino de piedra: *Sigue el camino de oro y llegarás al centro, sigue el camino de mármol y estarás perdido.*

     Ya que sabes que todos los guardias mienten, ¿puedes elegir un camino con la certeza de llegar al centro?
   - Lourdes debe crear un grupo, conformado por k personas, que realizarán algunas pruebas psicométricas. Ninguno de los integrantes del grupo puede conocer a algún otro miembro. Existen n candidatos y $C(x, y)$ es el predicado que indica que x conoce a y. Se descartan aquellos candidatos que han pertenecido al mismo grupo de estudio anteriormente; el predicado $S(x, y)$ indica si los candidatos x y y han estado en el mismo grupo.

29. Usa el algoritmo DPLL para encontrar un modelo a los problemas del ejercicio anterior.

30. Usa el algoritmo DPLL para decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfacibles o no. En cada paso indica que regla usaste.

   - $S = \{p \vee q, r \vee \neg q \vee \neg s, \neg p \vee s, \neg r\}$
   - $S = \{p, q, \neg p \vee x \vee \neg z, \neg q \vee \neg x \vee z, r \vee \neg z, s\}$
   - $S = \{p, q, \neg p \vee x \vee z, \neg q \vee \neg x \vee z, r \vee \neg z, \neg r \vee \neg z\}$
   - $S = \{p \vee \neg q, \neg p \vee q, q \vee \neg r, s, \neg s \vee \neg q \vee \neg r, s \vee r\}$
   - $S = \{p \vee q \vee s \vee t, p \vee s \vee \neg t, q \vee s \vee t, p \vee \neg s \vee \neg t, p \vee \neg q, \neg r \vee \neg p, r\}$