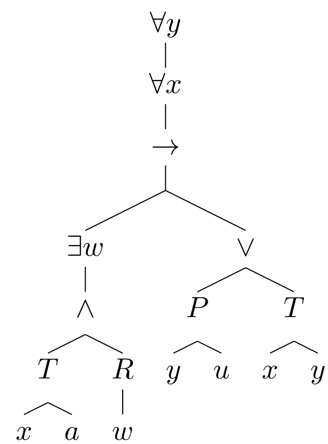
Tarea Examen 2

Diego Méndez Medina

1. **1.5 pts** Considera la siguiente fórmula:

$$\forall y \forall x \Big(\exists w (Txa \wedge Rw) \to Pyu \vee Txy \Big)$$

- Proporciona el árbol de sintaxis abstracta que representa la misma fórmula.



- Indica el alcance de cada cuantificador.
  - El alcance de $\forall y$ es:
  $$\forall x \Big(\exists w (Txa \wedge Rw) \to Pyu \vee Txy \Big)$$
  - El alcance de $\forall x$ es :
  $$\exists w (Txa \wedge Rw) \to Pyu \vee Txy$$
  - El alcance de $\exists w$ es:
  $$Txa \wedge Rw$$
- Da el conjunto de predicados y funciones, indicando su aridad.
  No existen funciones.
  Los predicados con su ariedad son: T^2, R^1 y P^2.
- Indica el conjunto de variables libres y ligadas.

$$Ligadas = \{x, y, w\}$$
$$Libres = \{u\}$$

- Aplica la sustitución $\sigma = [w, x, u := z,\ fw,\ fy]$ Debes mostrar los renombres de variables o las fórmulas α equivalentes que utilices en el proceso.
  Primera observación: $\sigma = [w := z,\ x := fw,\ u := fy]$

$$\forall y \forall x \Big(\exists w (Txa \land Rw) \to Pyu \lor Txy \Big)[w := z,\, x := fw,\, u := fy] \equiv_{\alpha}$$

$$\forall p \forall q \Big(\exists r (Tqa \land Rr) \to Ppu \lor Tqp \Big)[w := z,\, x := fw,\, u := fy] =$$

$$\forall p \forall q \Big(\exists r (Tqa \land Rr)[w := z,\, x := fw,\, u := fy] \to (Ppu \lor Tqp)[w := z,\, x := fw,\, u := fy] \Big) =$$

$$\forall p \forall q \Big(\exists r (Tqa \land Rr) \to Ppfy \lor Tqp \Big)$$

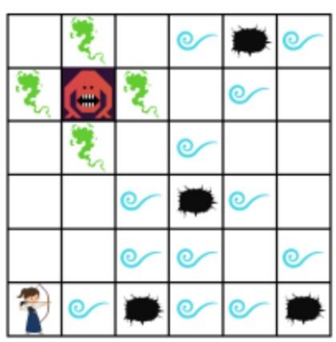
2. **0.5 pts** ¿Cuál es la simbolización más adecuada para la afirmación *Nadie está totalmente loco si un doctor lo ayuda*
   Donde: Dx se lee como *x es doctor*; Tx se lee como *x está totalmente loco*; Axy se lee como *x ayuda a y*

   a) $\forall x(\exists y(Dy \land Axy) \land \neg Tx)$
   b) $\exists x \exists y(Dx \land Ayx \to \neg Tx)$
   c) $\forall x(\exists y(Dy \land Ayx) \to Tx)$
   d) $\boxed{\forall x(Tx \to \neg \exists y(Dy \land Ayx))}$

3. **0.5 pts** ¿A qué equivale la negación lógica de: *Todos los amigos de son enemigos de Ana* ?

   a) Algún amigo de Juan es amigo de Ana.
   b) Ningún amigo de Juan es amigo de Ana.
   c) Algún enemigo de Ana no es amigo de Juan.
   d) $\boxed{\text{Algún amigo de Juan no es enemigo de Ana.}}$

4. **2 pts** *Hunting the Wumpus* Este juego se desarrolla en un tablero de dos dimensiones como el que se muestra en la siguiente figura:



El objetivo del juego es que el aventurero mate al Wunpus y tome el tesoro, para lo cuál solo dispone de una flecha.

Cada casilla del tablero puede estar vacía o contener alguno de los siguientes elementos:

- El aventurero
- El Wumpus
- Un pozo
- Viento
- Olor a pies
- Una combinación de viento y olor a pies

La especificación del juego es la siguiente:

- El aventurero inicia el juego en la casilla inferior izquierda, marcada con la coordenada $(0, 0)$
- El Wumpus no puede estar en una casilla ocupada por un pozo.
- El jugador no conoce el tablero, es decir, desconoce en donde se encuentra cada elemento. Solo puede **percibir** el contenido de la casilla en la que se encuentra y recuerda las casillas por las que paso.
- Según las percepciones del aventurero en cada casilla puede inferir información nueva:
  - Si percibe olor a pies, puede inferir que el Wumpus está en una casilla adyacente.
  - Si percibe viento, puede inferir que hay un pozo en una casilla adyacente.
  - Si percibe una combinación de olor a pies y viento, puede inferir que hay tanto un pozo como el Wumpus en las casillas adyacentes.
  - Si percibe un grito, infiere que el Wumpus ha muerto.
- Cada viento corresponde a un único pozo.
- Las únicas casillas consideradas adyacentes son las que colindan al norte, sur, oriente y poniente, mas no las diagonales.

El aventurero puede realizar una de las siguientes acciones:

- Moverse a una de las casillas adyacentes (no puede caminar en diagonal).
- Disparar al norte, sur, oriente o poniente (no en diagonal) y el alcance de la flecha es hasta donde termina la fila o la columna sobre la que disparo en la dirección del disparo. el Wumpus muere si es alcanzado por una flecha y emite un grito.
- Asesinar al Wumpus. En este caso el juego termina y el aventurero gana.
- Si entra a la casilla en donde se encuentra el Wumpus y este sigue con vida, lo devorará vivo. en este caso el juego termina y el aventurero pierde.
- Si entra a una casilla con un pozo, caerá al vacío y morirá. En este caso el juego termina y el aventurero pierde.

Puedes jugar unas partidas del juego para entenderlo mejor en el siguiente enlace `https://osric.com/wumpus/` Formaliza las siguientes reglas del juego con los siguientes predicados:

- Axy el aventurero está en la casilla (x, y).
- Wxy el Wumpus está en la casilla (x, y).
- Pxy hay un pozo en la casilla (x, y).
- Vxy hay viento en la casilla (x, y).
- Oxy hay olor a pies en la casilla (x, y).

- Lxy la casilla (x, y) está libre.

a) Si hay olor a pies en una casilla el Wumpus se encuentra en alguna de las casillas adyacentes.

$$Oxy \rightarrow (W(x, y+1) \vee W(x, y-1) \vee W(x+1, y) \vee W(x-1, y))$$

Asumimos que si $x/y\ +/-\ 1$ no figura en el tablero no causa problema.

b) Si hay viento en una casilla entonces hay un pozo en alguna de las casillas adyacentes.

$$Vxy \rightarrow (P(x, y+1) \vee P(x, y-1) \vee P(x+1, y) \vee P(x-1, y))$$

Asumimos que si $x/y\ +/-\ 1$ no figura en el tablero no causa problema.

c) Si la casilla (x, y) está libre, entonces no está el Wumpus ni hay pozos en las casillas adyacentes.

$$\begin{aligned} Lxy \rightarrow (&\neg P(x, y+1) \wedge \neg P(x, y-1) \wedge \neg P(x+1, y) \wedge \neg P(x-1, y) \wedge \\ &\neg W(x, y+1) \wedge \neg W(x, y-1) \wedge \neg W(x+1, y) \wedge \neg W(x-1, y)) \end{aligned}$$

Asumimos que si $x/y\ +/-\ 1$ no figura en el tablero no causa problema.

d) Una casilla está libre si no hay olor a pies, viento, pozo o el Wumpus en ella.

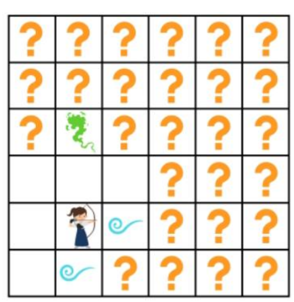
$$Lxy \leftrightarrow (\neg Oxy \wedge \neg Vxy \wedge \neg Pxy \wedge \neg Wxy)$$

e) formaliza cada uno de los movimientos permitidos del aventurero, es decir, las reglas correspondientes a su desplazamiento.
Hacemos uso de un nuevo predicado:
$Dxy =$ El aventurero puede desplazarse a la casilla (x, y)

$$Axy \rightarrow (D(x+1, y) \vee D(x-1, y) \vee D(x, y+1) \vee D(x, y-1))$$

De nuevo asumimos que si $x/y\ +/-\ 1$ no figura en el tablero no causa problema.

Formaliza el siguiente tablero y prueba que en la celda $(0, 2)$ hay un pozo.



Formalización del estado del tablero:

$$A11 \wedge V01 \wedge V12 \wedge O13 \wedge L00 \wedge L01 \wedge L02 \wedge L12 \wedge L22$$

Probando que en (0,2) hay un pozo:

$V01$	Por estado del tablero	(1)
$V12$	Por estado del tablero	(2)
$A11$	Por estado del tablero	(3)
$L00$	Por estado del tablero	(4)
$L22$	Por estado del tablero	(5)
$V01 \to P00 \vee P02 \vee P11$	Regla del juego y estado	(6)
$L00 \to \neg P00$	Regla del juego y estado	(7)
$\neg P00$	Por (7) y (4)	(8)
$V01 \to P02 \vee P11$	Por (6) y (8)	(9)
$A11 \to L11$	Sigue vivo y estado	(10)
$V01 \to P02$	Por (9) y (10)	(11)
$P02$	Por (11) y (1)	$\blacksquare$

También es facíl ver que Wumpus está en la casilla $(4,1)$.

5. **1.5 pts** Decide si los siguientes argumentos lógicos son correctos o exhibe un contraejemplo mostrando paso a paso la prueba o la construcción del contraejemplo.

- $\exists x(Ax \wedge \neg Bx), \exists x(Bx \wedge \neg Ax) / \therefore \forall x(Ax \vee Bx)$
  Mostraremos un contraejemplo. Sea:

$$Ax =_{def} x \text{ es un número primo}$$
$$Bx =_{def} x \text{ es un número impar}$$

Y $\mathcal{M} =< M, \mathcal{I} >$ tal que:

$$M = \{2, 3, 4, 9\} \qquad \Longrightarrow \mathcal{I}(A) = \{3, 2\}$$
$$\mathcal{I}(B) = \{3, 9\}$$

Entonces:

$\mathcal{I}(A2) = 1$	Pues $2 \in A^{\mathcal{I}}$	(1)
$\mathcal{I}(\neg B2) = 1$	Pues $2 \notin B^{\mathcal{I}}$	(2)
$\mathcal{I}_{[x/2]}(Ax \wedge \neg Bx) = 1$	Por (1) y (2)	(3)
$\mathcal{I}(\exists x(Ax \wedge \neg Bx)) = 1$	Por (3)	(4)
$\mathcal{I}(B9) = 1$	Pues $9 \in B^{\mathcal{I}}$	(5)
$\mathcal{I}(\neg A9) = 1$	Pues $9 \notin A^{\mathcal{I}}$	(6)
$\mathcal{I}_{[x/9]}(Bx \wedge \neg Ax) = 1$	Por (5) y (6)	(7)
$\mathcal{I}(\exists x(Bx \wedge \neg Ax)) = 1$	Por (7)	(8)

De tal forma que las premisas son correctas en $\mathcal{M}$, pero veremos que la conclusión no lo es:

$$\begin{array}{rlr}
\mathcal{I}(A4) = 0 & \text{Pues } 4 \notin A^{\mathcal{I}} & (9) \\
\mathcal{I}(B4) = 0 & \text{Pues } 4 \notin B^{\mathcal{I}} & (10) \\
\mathcal{I}_{[x/4]}(Ax \vee Bx) = 0 & \text{Por (9) y (10)} & (11) \\
\mathcal{I}(\forall x(Ax \vee Bx)) = 0 & \text{Por (11)} &
\end{array}$$

Mostramos un contraejemplo donde el modelo de las premisas no lo son para la conclusión, entonces el argumento no es correcto.

- $\exists x(Ax \to (Bx \vee Cx)), \exists x Ax / \therefore \exists x Bx$
  Mostraremos otro contraejemplo. Sea:

$$\begin{aligned}
Ax &=_{def} x \text{ es multiplo de cuatro} \\
Bx &=_{def} x \text{ es cuatro} \\
Cx &=_{def} x \text{ es mayor o igual que ocho}
\end{aligned}$$

y $\mathcal{M} =< M, \mathcal{I} >$, tal que:

$$M = \{8, 12, 16\} \qquad \Longrightarrow \begin{array}{l} B^{\mathcal{I}} = \emptyset \\ A^{\mathcal{I}} = \{8, 12, 16\} \\ C^{\mathcal{I}} = \{8, 12, 16\} \end{array}$$

Así:

$$\begin{array}{rlr}
\mathcal{I}(A8) = 1 & \text{Pues } 8 \in A^{\mathcal{I}} & (1) \\
\mathcal{I}_{[x/8]}(Ax) = 1 & \text{Por (1)} & (2) \\
\mathcal{I}(\exists x\, Ax) = 1 & \text{Por (2)} & (3) \\
\mathcal{I}(C8) = 1 & \text{Pues } 8 \in C^{\mathcal{I}} & (4) \\
\mathcal{I}_{[x/8]}(Cx) = 1 & \text{Por (4)} & (5) \\
\mathcal{I}(\exists x\,(Bx \vee Cx)) = 1 & \text{Por (5)} & (6) \\
\mathcal{I}(\exists x\,(Ax \to Bx \vee Cx)) = 1 & \text{Por (2) y (5)} & (7)
\end{array}$$

Entonces las premisas son verdaderas en $\mathcal{M}$, pero la conclusión no lo es, pues $B^{\mathcal{I}}$ no tiene elementos.

6. **1 pto** Realiza las siguientes sustituciones indicando los pasos más importantes, en particular aquellos donde se usa la α-equivalencia:

   - $\Big(\forall x(Ruvw \lor Px) \to \exists y\big(Pfy \lor Ryxa\big)\Big)[u,v,w,x,y := fa, gx, y, hu, fa]$

$$\begin{aligned}\Big(\forall x(Ruvw \lor Px) \to \exists y\big(Pfy \lor Ryxa\big)\Big)[u,v,w,x,y := fa, gx, y, hu, fa] &\equiv_\alpha \\ \Big(\forall z(Ruvw \lor Pz) \to \exists s\big(Pfs \lor Rsxa\big)\Big)[u,v,w,x,y := fa, gx, y, hu, fa] &= \\ \forall z(Ruvw \lor Pz)[u,v,w,x,y := fa, gx, y, hu, fa] \to \exists s\big(Pfs \lor Rsxa\big)[u,v,w,x,y := fa, gx, y, hu, fa] &= \\ \forall z(Rfagxy \lor Pz) \to \exists s\big(Pfs \lor Rshua\big) &=\end{aligned}$$

   - $\forall x(Sx \to (\neg Qyx \lor \exists zRzx)[y := z] \land \forall yQxy)[z := x]$

$$\begin{aligned}\forall x(Sx \to (\neg Qyx \lor \exists zRzx)[y := z] \land \forall yQxy)[z := x] &\equiv_\alpha \\ \forall x(Sx \to (\neg Qyx \lor \exists uRux)[y := z] \land \forall yQxy)[z := x] &= \\ \forall x(Sx \to (\neg Qzx \lor \exists uRux) \land \forall yQxy)[z := x] &\equiv_\alpha \\ \forall v(Sv \to (\neg Qzv \lor \exists uRuv) \land \forall yQvy)[z := x] &= \\ \forall v(Sv[z := x] \to (\neg Qzv \lor \exists uRuv)[z := x] \land \forall yQvy[z := x]) &= \\ \forall v(Sv \to (\neg Qxv \lor \exists uRuv) \land \forall yQvy)&\end{aligned}$$

   - $\big(\forall v\exists ySvyz \lor \exists zPfvgyz\big)[w := fu, u := hyz, y := b]$ en donde $f^{(1)}, g^{(1)}$

$$\begin{aligned}\big(\forall v\exists ySvyz \lor \exists zPfvgyz\big)[w := fu, u := hyz, y := b] &\equiv_\alpha \\ \big(\forall v\exists pSvpz \lor \exists xPfvgyx\big)[w := fu, u := hyz, y := b] &= \\ \forall v\exists pSvpz[w := fu, u := hyz, y := b] \lor \exists xPfvgyx[w := fu, u := hyz, y := b] &= \\ \forall v\exists pSvpz \lor \exists xPfvgyx[y := b] &= \\ \forall v\exists pSvpz \lor \exists xPfvgbx&\end{aligned}$$

7. **2 pts** Sea $M = \{1, 3, 5, 15\}$ e $\mathcal{I}$ la función de interpretación en M que interpreta los siguientes predicados como se indica:

   - Ex: x es par.
   - Mxy: x es múltiplo de y.
   - Lxy: x es menor que y.

   Verifica si se cumple lo siguiente o en caso contrario da un contraejemplo:

   a) $\models \exists yEy \lor \forall x\neg Ex$
   Sea σ una intepretación de las variablas, dado $|\mathcal{M}|$ solo hay un caso:

$$I_\sigma(E1) = 0 \qquad I_\sigma(E3) = 0$$
$$I_\sigma(E5) = 0 \qquad I_\sigma(E15) = 0$$

   Entonces $\mathcal{I}_\sigma[x/m](\neg Ex)$ para toda $m \in M$. Como σ es arbitraria, concluimos $\models \exists yEy \lor \forall x\neg Ex$.

b) $\models \forall x \forall y(Lxy \to \neg Lyx)$

Para cualquier σ estado de las variables y $m \in |\mathcal{M}|$ocurre:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\alpha(Lmm) = 0 && \implies \mathcal{I}_\alpha(\neg Lmm) = 1 \\ && \mathcal{I}_\alpha(Lmm \to \neg Lmm) = 1 \end{aligned}$$

Sean $n, m \in |\mathcal{M}|$ tales que $n \neq m$, hay dos casos:

$$\begin{aligned} &\text{Caso 1 :} \\ \mathcal{I}_\alpha(Lnm) = 1 && \implies n < m \\ && \mathcal{I}_\alpha(Lmn) = 0 \\ && \mathcal{I}_\alpha(\neg Lmn) = 1 \\ &\implies \mathcal{I}_\alpha(Lnm \to \neg Lmn) = 1 \\ &\text{Caso 2 :} \\ \mathcal{I}_\alpha(Lnm) = 0 && \implies n > m \\ && \mathcal{I}_\alpha(Lmn) = 1 \\ && \mathcal{I}_\alpha(\neg Lmn) = 0 \\ &\implies \mathcal{I}_\alpha(Lnm \to \neg Lmn) = 1 \end{aligned}$$

Para los tres casos la implicación sigue siendo verdad, entonces $\models \forall x \forall y(Lxy \to \neg Lyx)$.

c) $\models \forall x \exists y Lxy \wedge \forall x \exists y Mxy$

Contrajemplo:

Sea σ una interptretación de las variables cualesquiera, afuerza occure:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\alpha(L(15,1)) = 0 && \mathcal{I}_\alpha(L(15,3)) = 0 \\ \mathcal{I}_\alpha(L(15,5)) = 0 && \mathcal{I}_\alpha(L(15,15)) = 0 \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{I}_\sigma(\exists y L(15,y)) = 0$. Así $\not\models \forall x \exists y Lxy \wedge \forall x \exists y Mxy$

d) $\models \forall x(Ex \to Mxa) \to \neg \exists x Lxa$ en donde $\mathcal{I}(a) = 1$

Sea σ una interpretación de las variables cualesquiera.

Ninguna $m \in |\mathcal{M}|$ es par, entonces $\mathcal{I}_\sigma(\forall x Ex) = 0$. Así:

$$\mathcal{I}_\sigma(\forall x Ex \to Mxa) = 1$$

Falta ver que $\mathcal{I}_\sigma(\neg \exists x Lxa)$ sea verdadero.

$$\neg \exists x Lxa \equiv \forall x \neg Lxa$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(L(1,a)) = \mathcal{I}(L(1,1)) = 0 && \mathcal{I}(L(3,a)) = \mathcal{I}(L(3,1)) = 0 \\ \mathcal{I}(L(5,a)) = \mathcal{I}(L(5,1)) = 0 && \mathcal{I}(L(15,a)) = \mathcal{I}(L(15,1)) = 0 \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{I}_\sigma(\forall x \neg Lxa) = 1$. Concluimos $\models \forall x(Ex \to Mxa) \to \neg \exists x Lxa$, donde $\mathcal{I}(a) = 1$

8. **1 pts** Decide si los siguientes conjuntos son unificables mediante el algoritmo de Martelli-Montanari, haciendo explícito el proceso de composición de sustituciones para calcular el **umg** final en cada caso.

- $W = \{Paxfgy,\ Pzfzfw\}$ con $P^{(3)}, f^{(1)}, g^{(1)}$.

$$
\begin{array}{rl}
\{Paxfgy = Pzfzfw\} & \text{Entrada} \\
\{a = z,\ x = fz,\ fgy = fw\} & \text{DESC} \\
\{z = a,\ x = fz,\ fgy = fw\} & \text{SWAP} \\
\{x = fa,\ fgy = fw\} & \text{SUST}[z := a] \\
\{x = fa,\ fw = fgy\} & \text{SWAP} \\
\{x = fa,\ w = gy\} & \text{DESC} \\
\{x = fa\} & \text{SUST}[w := gy] \\
\emptyset & \text{SUST}[x = fa]
\end{array}
$$

El unificador es:

$$
\begin{aligned}
\mu &= [z := a][w := gy][x := fa] \\
&= [z := a,\ w := gy,\ x := fa]
\end{aligned}
$$

Comprobación:

$$
\begin{aligned}
\{Paxfgy,\ Pzfzfw\}[z := a,\ w := gy,\ x := fa] = \\
\{Paxfgy[z := a,\ w := gy,\ x := fa],\ Pzfzfw[z := a,\ w := gy,\ x := fa]\} = \\
\{Paxfgy[x := fa],\ Pzfzfw[z := a,\ w := gy]\} = \\
\{Pafafgy,\ Pafafgy\} = \{Pafafgy\}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow\ |W_\mu| = 1$, son unificables.

- $W = \{Qfahzwwhwzzu,\ Qfxwwyuz\}$ con $Q^{(4)}, f^{(3)}, h^{(2)}$.

$$
\begin{array}{rl}
\{Qfahzwwhwzzu = Qfxwwyuz\} & \text{Entrada} \\
\{fahzww = fxww,\ hwz = y,\ z = u,\ u = z\} & \text{DESC} \\
\{a = x,\ hzw = w,\ w = w,\ hwz = y,\ z = u,\ u = z\} & \text{DESC} \\
\{a = x,\ hzw = w,\ hwz = y,\ z = u,\ u = z\} & \text{ELIM} \\
\{x = a,\ hzw = w,\ hwz = y,\ z = u,\ u = z\} & \text{SWAP} \\
\{hzw = w,\ hwz = y,\ z = u,\ u = z\} & \text{SUST}[x := a] \\
\{hzw = w,\ hwz = y,\ u = u\} & \text{SUST}[z := u] \\
\{hzw = w,\ hwz = y\} & \text{ELIM} \\
\{hzw = w,\ y = hwz\} & \text{SWAP} \\
\{hzw = w\} & \text{SUST}[y := hwz] \\
\{w = hzw\} & \text{SWAP} \\
X & \text{SFALLA}
\end{array}
$$

Entonces no son unificables.

9. **Rescate: Hasta 2 puntos en la tarea examen 1** Usando el algoritmo de saturación decide si los siguientes argumentos son correctos. Debes mostrar los pasos detalladamente, desde la obtención de formas normales hasta los conjuntos de saturación indicando los resolventes obtenidos en cada iteración del algoritmo.

   - $\{p \to q,\ r \to s,\ p \lor s,\ \neg(q \land s)\} \models (q \to p) \land (s \to r)$
   - $\{\neg(\neg p \to q) \lor ((p \to r) \land (r \to q))\} \models (r \to \neg p) \land (p \to \neg q)$