Ejercicio Semanal 8

Diego Méndez Medina

Decide si los siguientes argumentos lógicos son correctos o exhibe un contraejemplo mostrando paso a paso la prueba o la construcción del contraejemplo.

1. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)), \exists x(P(x) \wedge R(x)) / \therefore \exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$

   El argumento es incorrecto si existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que:

$$\mathcal{M} \models \exists x(P(x) \wedge Q(x))$$
$$\mathcal{M} \models \exists x(P(x) \wedge R(x))$$
$$\mathcal{M} \not\models \exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$$

   Lo que ocurre si $\{\exists x(P(x) \wedge Q(x)),\ \exists x(P(x) \wedge R(x)),\ \neg\exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))\}$ tiene un modelo. Construyamos ese modelo:

   Sea $\mathcal{M} =< M, \mathcal{I} >$, tal que:

$$M = \{a, b\} \qquad P^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$$
$$Q^{\mathcal{I}} = \{a\} \qquad R^{\mathcal{I}} = \{b\}$$

   Antes de continuar hagamos una observación:

$$\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg R(x))$$

   Ahora, veremos que en efecto $\mathcal{M}$ es modelo de

$$\{\exists x(P(x) \wedge Q(x)),\ \exists x(P(x) \wedge R(x)),\ \forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg R(x))\}$$

   Dada nuestra $\mathcal{M}$ antes descrita, tenemos:

1.	$\mathcal{I}(\exists x(P(x) \wedge Q(x))) = 1$	Pues $a \in P^{\mathcal{I}}$y $a \in Q^{\mathcal{I}}$
2.	$\mathcal{I}(\exists x(P(x) \wedge R(x))) = 1$	Pues $b \in P^{\mathcal{I}}$y $b \in R^{\mathcal{I}}$
3.	$\mathcal{I}_{[x/a]}(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg R(x))) = 1$	Pues $a \notin R^{\mathcal{I}}$
4.	$\mathcal{I}_{[x/b]}(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg R(x))) = 1$	Pues $b \notin Q^{\mathcal{I}}$
5.	$\mathcal{I}(\forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg R(x))\}) = 1$	Por 3 y 4

   Así existe un modelo, $\mathcal{M}$, de las premisas unión la conclusión negada. Con lo que el argumento dado no es correcto.

2. $\forall x(G(x) \to H(x)), \forall x(H(x) \to F(x)), G(a) / \therefore \exists x(G(x) \land F(x))$

Sea $\mathcal{M}$ un modelo de $\{\forall x(G(x) \to H(x)),\ \forall x(H(x) \to F(x)),\ G(a)\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models \forall x(G(x) \to H(x)) \\
&\mathcal{M} \models \forall (x)(H(x) \to F(x)) \\
&\mathcal{M} \models G(a)
\end{aligned}$$

Queremos ver que $\mathcal{M} \models \exists x(G(x) \land F(x))$.

Sea χ un estado cualquiera. tenemos:

1.	$\mathcal{I}_\chi(\forall x(G(x) \to H(x))) = 1$	Por hipótesis
2.	$\mathcal{I}_\chi(\forall x(H(x) \to F(x))) = 1$	Por hipótesis
3.	$\mathcal{I}_\chi(G(a)) = 1$	Por hipótesis
4.	$\mathcal{I}_{\chi[x/a]}(G(x) \to H(x)) = 1$	Por 1
5.	$\mathcal{I}_\chi(H(a)) = 1$	Por 3 y 4
6.	$\mathcal{I}_{\chi[x/a]}(H(x) \to F(x)) = 1$	Por 2
7.	$\mathcal{I}_\chi(F(a)) = 1$	Por 5 y 6
8.	$\mathcal{I}_\chi(G(a) \land F(a)) = 1$	Por 3 y 7
9.	$\mathcal{I}_{\chi[x/a]}(G(x) \land F(x)) = 1$	Por 8
10.	$\mathcal{I}_\chi(\exists x(G(x) \land F(x))) = 1$	Por 9

Como χ era arbitrario, concluimos que $\mathcal{M} \models \exists x(G(x) \land F(x))$, así el argumento es correcto.

3. *Los violinistas que tocan bien son músicos de alcurnia. Hay algunos violinistas en la orquesta. Entonces algunos músicos son de alcurnia.* $(V^{(1)}, T^{(1)}, A^{(1)}, M^{(1)}, O^{(1)})$

Definimos los predicados:

$$\begin{aligned} V(x) &= x \text{ es violinista} \\ T(x) &= x \text{ toca bien} \\ A(x) &= x \text{ es de alcurnia} \\ M(x) &= x \text{ es músico} \\ O(x) &= x \text{ está en la orquesta} \end{aligned}$$

Dados los predicados tenemos el siguiente argumento:

$$\begin{array}{l} \forall x(V(x) \wedge T(x) \to M(x) \wedge A(x)) \\ \exists x(V(x) \wedge O(x)) \\ \hline \therefore \exists x(M(x) \to A(x)) \end{array}$$

Observación:

$$\begin{aligned} \neg\exists x(M(x) \to A(x)) &\equiv \forall x(\neg(\neg M(x) \vee A(x))) \\ &\equiv \forall x(M(x) \wedge \neg A(x)) \end{aligned}$$

Veremos que el argumento es incorrecto mostrando un modelo para

$$\Sigma = \{\forall x(V(x) \wedge T(x) \to M(x) \wedge A(x)),\ \exists x(V(x) \wedge O(x)),\ \forall x(M(x) \wedge \neg A(x))\}$$

Sea $\mathcal{M} =< Mundo, \mathcal{I} >$, tal que:

$$\begin{array}{ccc} Mundo = \{Ziggy, Leo\} & V = \{Ziggy\} & O = \{Ziggy, Leo\} \\ T = \emptyset & A = \emptyset & M = \{Ziggy, Leo\} \end{array}$$

Veamos que si satisfase a Σ:

$$\begin{array}{rl} \mathcal{I}(\forall x(V(x) \wedge T(x) \to M(x) \wedge A(x))) = 1 & \text{Por vacuidad, pues ninguno toca bien} \\ \mathcal{I}(\exists x(V(x) \wedge O(x))) = 1 & \text{Pues } Ziggy \in V \text{ y } Ziggy \in O \\ \mathcal{I}(\forall x(M(x) \wedge \neg A(x))) = 1 & \text{Pues } Ziggy, Leo \in M \text{ y } Ziggy, Leo \notin A \end{array}$$

Mostramos un modelo que satisface a las premisas y a la conclusión negada, con lo que el argumento es incorrecto.