

Formas Normales en Lógica de Predicados

Lógica Computacional 2022-1, Nota de clase 10

Favio Ezequiel Miranda Perea Araceli Liliana Reyes Cabello
Lourdes Del Carmen González Huesca Pilar Selene Linares Arévalo

29 de noviembre de 2021
Facultad de Ciencias UNAM

En esta nota desarrollaremos diversas formas normales para la Lógica de Predicados, las cuales son transformaciones sintácticas de una fórmula que conservan ciertas propiedades semánticas. Las fórmulas en forma normal, si bien pueden ser sintácticamente más complejas o artificiales a la intuición, ayudan a semiautomatizar en ciertos casos el proceso para tratar de verificar si un argumento es correcto (por ejemplo usando el método de resolución) además son de gran importancia en programación lógica.

1. Discusión preliminar

Recordemos que el objetivo es llegar a definir el método de resolución binaria para la lógica de predicados. En lógica proposicional lo primero era transformar una fórmula cualquiera a la forma normal conjuntiva para luego obtener las cláusulas y aplicar resolución binaria. Aquí ese es también el objetivo sólo que los cuantificadores nos están estorbando. Queremos eliminar los cuantificadores pero de manera correcta, es decir, preservando el significado de las fórmulas. El proceso completo consiste en aplicar los siguientes procedimientos en el orden dado.

- Rectificación de fórmulas: con este proceso aseguramos que cada cuantificador tenga nombres de variables distintos y que las variables ligadas no aparezcan también como variables libres. Además de eliminar algunas tonterías como cuantificadores vacuos (es decir que no cuantifican realmente) o bien cuantificadores repetidos.
- Forma normal negativa: Al igual que en la lógica proposicional, este proceso se encarga de empujar las negaciones hacia las fórmulas atómicas, además de quitar implicaciones y bicondicionales.
- Forma normal prenex: Esta forma se encarga de “factorizar” los cuantificadores en una fórmula. Es decir, transforma a una fórmula dada en una fórmula equivalente que tenga la forma

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\varphi$$

donde Q_i es un cuantificador \forall o \exists y la fórmula φ no tiene ningún cuantificador.

- Skolemización: en este caso vamos a eliminar los cuantificadores existenciales con un bonito y romántico truco llamado “skolemización”. La idea es ponerle nombre al bicho que existe. Es decir, si tenemos una fórmula $\exists x\varphi$ la vamos a reemplazar por la fórmula $\varphi[x := c]$ donde c es una constante fresca como lechuga, es decir no aparece anteriormente en las fórmulas que estamos manejando. Cuando la fórmula es de la

forma $\forall x \exists y \varphi$ el truco es más complicado pues el cuantificador universal no lo podemos quitar, y el bicho y que existe depende del bicho x cuantificado universalmente. Aquí usamos una función en vez de una constante para eliminar el existencial, es decir, reemplazamos a la fórmula $\forall x \exists y \varphi$ por la fórmula $\varphi[y := fx]$. Esta función también debe ser fresca como lechuga. Lo mismo sucede en el caso general $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi$ pero ahora la función dependerá de las variables $x_1 \dots x_n$. Es decir la fórmula nueva es $\varphi[y := fx_1 \dots x_n]$. Estas nuevas constantes y funciones se llaman, respectivamente, constantes y funciones de Skolem y al proceso en sí se le llama “skolemización”.

- Forma normal de Skolem: Después de aplicar todos los procesos anteriores se obtiene una fórmula de la siguiente forma:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$$

donde todos los cuantificadores son universales y φ no tiene cuantificadores. La forma normal de Skolem consiste en una simple burocracia, que es transformar a φ a la forma normal conjuntiva.

- Forma normal conjuntiva: ésta se obtiene de manera idéntica que en lógica proposicional cuando la fórmula a transformar no tiene cuantificadores y ya estaba en forma normal negativa.
- Forma clausular: nuevamente el proceso es idéntico al de la lógica proposicional cuando la fórmula a transformar ya está en la forma normal conjuntiva.

El resultado final de estos procesos es una fórmula de la forma

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (C_1 \wedge \dots \wedge C_k)$$

donde C_1, \dots, C_k son cláusulas. Finalmente convenimos en no escribir los cuantificadores puesto que todos son universales y separamos las cláusulas. Hay algunos detalles más que veremos en el resto de la nota.

2. Rectificación

Antes de construir formas normales se aplica un proceso de simplificación a las fórmulas llamado *rectificación*, el cual permite facilitar la transformación a la forma normal de interés.

Definición 1 Una fórmula φ está rectificada si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- φ no tiene presencias libres y ligadas de una misma variable, es decir, $FV(\varphi) \cap BV(\varphi) = \emptyset$.
- φ no tiene cuantificadores de la misma variable con alcances ajenos.
- φ no tiene cuantificadores múltiples de la misma variable, es decir, subfórmulas de la forma $\forall x \forall x \psi$, $\exists x \exists x \psi$, $\exists x \forall x \psi$, $\forall x \exists x \psi$
- φ no tiene cuantificadores vacuos (tontos), es decir, cuantificadores de la forma $\forall x \psi$ o $\exists x \psi$ donde $x \notin FV(\psi)$.

Nuestro primer objetivo es mostrar que cualquier fórmula es rectificable para lo cual nos serviremos del siguiente:

Lema 1 Se cumplen las siguientes equivalencias lógicas:

1. Eliminación de cuantificadores múltiples.

$$\forall x \forall x \varphi \equiv \forall x \varphi$$

$$\exists x \exists x \varphi \equiv \exists x \varphi$$

$$\exists x \forall x \varphi \equiv \forall x \varphi$$

$$\forall x \exists x \varphi \equiv \exists x \varphi$$

2. *Renombre de variables.* Si y no figura libre en φ , es decir, $y \notin FV(\varphi)$ entonces:

$$\forall x \varphi \equiv \forall y(\varphi[x := y]) \quad \exists x \varphi \equiv \exists y(\varphi[x := y])$$

3. *Eliminación de cuantificadores vacuos.* Si $x \notin FV(\varphi)$ entonces:

$$\forall x \varphi \equiv \varphi \quad \exists x \varphi \equiv \varphi$$

Demostración. Se deja como ejercicio. ⊢

Una consecuencia inmediata de los lemas anteriores es la siguiente proposición.

Proposición 1 *Siempre es posible transformar mediante un algoritmo una fórmula dada φ en una fórmula $\text{rec}(\varphi)$ de manera que $\text{rec}(\varphi)$ está rectificada y $\text{rec}(\varphi) \equiv \varphi$.*

Demostración. Sea φ una fórmula. Si $FV(\varphi) \cap BV(\varphi) \neq \emptyset$ podemos aplicar el lema 1 (parte 2) para renombrar las presencias ligadas de todas las variables que figuraban libres y ligadas en φ , análogamente si existían en φ cuantificadores con alcances ajenos de la misma variable.

Los cuantificadores múltiples se eliminan mediante el lema 1 (parte 1) y los cuantificadores vacuos con el lema 1 (parte 3).

Cualquier fórmula obtenida al terminar estos procesos se denota $\text{rec}(\varphi)$, obsérvese que no es única. ⊢

Nuestro objetivo principal, dirigido a tener un método de prueba en Lógica de Predicados usando resolución, es transformar una fórmula dada en la lógica de predicados en una fórmula *esencialmente proposicional* que sea en cierto sentido equivalente a la fórmula original. Las siguientes transformaciones hacen que esto se logre parcialmente.

3. Forma Normal Negativa

El objetivo de esta forma normal es obtener una fórmula equivalente a una fórmula dada de manera que las negaciones sólo afecten a fórmulas atómicas, es decir a predicados.

Definición 2 *Una fórmula φ está en forma normal negativa si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. φ no contiene símbolos de equivalencia ni implicaciones y
2. las negaciones que figuran en φ afectan sólo a fórmulas atómicas.

La transformación a forma normal negativa es prácticamente igual que en el caso de la lógica proposicional, basta considerar adicionalmente las leyes de negación para los cuantificadores.

Proposición 2 (Leyes de la Negación) *Se cumplen las siguientes equivalencias lógicas.*

- *Doble Negación:* $\neg \neg \varphi \equiv \varphi$.
- *De Morgan:* $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg \varphi \wedge \neg \psi$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg \varphi \vee \neg \psi$.

- $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg\psi$
- $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv \neg\varphi \leftrightarrow \psi \equiv \varphi \leftrightarrow \neg\psi$.
- $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
- $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$

Demostración. Ejercicio ⊢

Proposición 3 Sea φ una fórmula. Podemos encontrar de manera algorítmica una fórmula ψ que es lógicamente equivalente a φ y tal que ψ está en forma normal negativa. En tal caso ψ se denota con $\text{fnn}(\varphi)$.

Demostración. Dada la fórmula φ , aplicarle exhaustivamente las leyes de negación de manera adecuada. La fórmula ψ obtenida es $\text{fnn}(\varphi)$. ⊢

Ejemplo 1 Sea $\varphi = \forall x(Px \vee \neg\exists y(Qy \wedge Rxy)) \vee \neg(Py \wedge \neg\forall zPx)$.

El primer paso es rectificar φ , para ello se renombrarán las variables y ligadas y x ligadas del segundo cuantificador:

$$\varphi \equiv \text{rec}(\varphi) = \forall x(Px \vee \neg\exists w(Qw \wedge Rxw)) \vee \neg(Py \wedge \neg\forall zPz)$$

La forma normal negativa de $\neg\exists w(Qw \wedge Rxw)$ se obtiene así:

$$\neg\exists w(Qw \wedge Rxw) \equiv \forall w\neg(Qw \wedge Rxw) \equiv \forall w(\neg Qw \vee \neg Rxw)$$

La forma normal negativa de $\neg(Py \wedge \neg\forall zPz)$ se obtiene así:

$$\neg(Py \wedge \neg\forall zPz) \equiv \neg Py \vee \neg\neg\forall zPz \equiv \neg Py \vee \forall zPz$$

Por lo tanto tenemos que

$$\text{fnn}(\text{rec}(\varphi)) = \forall x(Px \vee \forall w(\neg Qw \vee \neg Rxw)) \vee (\neg Py \vee \forall zPz)$$

4. Forma Normal Prenex

Al buscar una fórmula en lógica de predicados que se parezca a una proposicional se deben eliminar los cuantificadores. El primer paso para eliminarlos de una fórmula consiste en *factorizarlos* de manera que todos queden juntos al principio de la fórmula, esto se logra con la llamada forma normal prenex.

El siguiente lema describe las propiedades básicas de factorización o prenexación de cuantificadores.

Lema 2 Se cumplen las siguientes equivalencias lógicas.

1. Si x no figura libre en φ entonces:

- $\varphi \wedge \forall x\psi \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$.
- $\varphi \wedge \exists x\psi \equiv \exists x(\varphi \wedge \psi)$.
- $\varphi \vee \forall x\psi \equiv \forall x(\varphi \vee \psi)$.
- $\varphi \vee \exists x\psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$.

- $\varphi \rightarrow \forall x\psi \equiv \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$.
- $\varphi \rightarrow \exists x\psi \equiv \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$.

2. Si x no figura libre en ψ entonces:

- $\forall x\varphi \rightarrow \psi \equiv \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$.
- $\exists x\varphi \rightarrow \psi \equiv \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$.

Demostración. Se deja como ejercicio. ⊥

Obsérvese que no se dieron equivalencias lógicas para factorizar un cuantificador en una equivalencia, como en la fórmula $\varphi \leftrightarrow \forall x\psi$. De manera que primero se deben eliminar las equivalencias mediante la implicación y la conjunción, y luego prenexar.

De mayor importancia es tener en cuenta que al prenexar un cuantificador en el antecedente de una implicación éste se intercambia por el cuantificador contrario o dual.

Definición 3 Una fórmula φ está en forma normal prenex si y sólo si φ es de la forma $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi$ donde ψ es una fórmula sin cuantificadores y $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ para toda $1 \leq i \leq n$. En tal caso, la cadena de cuantificadores $Q_1x_1 \dots Q_nx_n$ se conoce como el prefijo de φ mientras que ψ es la matriz de φ .

Proposición 4 Sea φ una fórmula. Se puede construir mediante un algoritmo una fórmula ψ en forma normal prenex tal que $\varphi \equiv \psi$. A ψ se le denota con $\text{fnp}(\varphi)$. Obsérvese que $\text{fnp}(\varphi)$ no es única.

Demostración. Dada φ eliminar las bicondicionales o equivalencias ¹ obteniendo una fórmula φ' . Aplicarle el lema 2 a la fórmula rectificada $\text{rec}(\varphi')$ hasta factorizar todos sus cuantificadores. La fórmula obtenida es $\text{fnp}(\varphi)$. ⊥

Ejemplo 2 Sea φ la misma fórmula del ejemplo 1.

Tenemos $\text{rec}(\varphi) = \forall x(Px \vee \neg \exists v(Qv \wedge Rxv)) \vee \neg(Py \wedge \neg \forall zPz)$.

La forma normal prenex de $\neg \exists v(Qv \wedge Rxv)$ es $\forall v \neg(Qv \wedge Rxv)$.

La forma normal prenex de $\forall x(Px \vee \forall v \neg(Qv \wedge Rxv))$ es $\forall x \forall v(Px \vee \neg(Qv \wedge Rxv))$.

La forma normal prenex de $\neg \forall zPz$ es $\exists z \neg Pz$.

La forma normal prenex de $Py \wedge \exists z \neg Pz$ es $\exists z(Py \wedge \neg Pz)$.

La forma normal prenex de $\neg \exists z(Py \wedge \neg Pz)$ es $\forall z \neg(Py \wedge \neg Pz)$.

Por lo tanto la forma normal prenex de φ es

$$\text{fnp}(\varphi) = \forall x \forall v \forall z (Px \vee \neg(Qv \wedge Rxv) \vee \neg(Py \wedge \neg Pz))$$

Ejemplo 3 Sea $\varphi = \forall xPx \rightarrow \exists y \forall z Ryz$. Entonces

$$\begin{aligned} \forall xPx \rightarrow \exists y \forall z Ryz &\equiv \\ \exists y (\forall xPx \rightarrow \forall z Ryz) &\equiv \\ \exists y \forall z (\forall xPx \rightarrow Ryz) &\equiv \\ \exists y \forall z \exists x (Px \rightarrow Ryz). \end{aligned}$$

$$\therefore \text{fnp}(\varphi) = \exists y \forall z \exists x (Px \rightarrow Ryz).$$

¹De la manera más conveniente en cada caso particular, ya sea usando la equivalencia $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ o bien $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg \varphi \wedge \neg \psi)$

5. Forma Normal de Skolem

Ahora nuestro interés se centra en los cuantificadores existenciales. Buscamos un método para eliminarlos de una fórmula, de manera que se preserve la satisfacibilidad. Para esto utilizaremos el proceso de *skolemización*², el cual consiste en sustituir las fórmulas existenciales por **testigos** nuevos de las cuantificaciones existenciales de la fórmula, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \exists x \varphi & \text{se sustituye por } \varphi[x := c] \\ \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi & \text{se sustituye por } \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi[y := g(x_1, \dots, x_n)] \end{array}$$

aquí, c es un símbolo de constante **nuevo**, llamado *constante de Skolem* y $g^{(n)}$ es un símbolo de función **nuevo** llamado *función de Skolem*. Con $\text{Sko}(\varphi)$ denotamos a la skolemización de φ que se obtiene al eliminar mediante este proceso, de izquierda a derecha, todos los cuantificadores existenciales de la fórmula φ .

Ejemplo 4

φ	$\text{Sko}(\varphi)$
$\exists y R y$	$R c$
$\forall x \exists y P x y$	$\forall x P x g x$
$\forall x \forall z \exists y R x g y f z$	$\forall x \forall z R x g h x z f z$

Hasta ahora hemos visto que una fórmula φ es lógicamente equivalente a cualquiera de sus formas normales, situación muy conveniente pues si hallamos un modelo de una de las formas normales, éste mismo nos servirá como modelo de φ . Desafortunadamente no sucede lo mismo con la skolemización, ya que tenemos una relación más débil entre φ y $\text{Sko}(\varphi)$, pero la cual resultará suficiente para nuestros propósitos.

Definición 4 Sean φ, ψ dos fórmulas, decimos que φ, ψ son *equisatisfacibles* cuando se cumple que: φ es satisfacible si y sólo si ψ es satisfacible. Esta propiedad será denotada con $\varphi \sim_{\text{sat}} \psi$.

Es claro que $\varphi \equiv \psi$ implica que $\varphi \sim_{\text{sat}} \psi$, mas no al revés, veamos unos ejemplos.

Ejemplo 5 Claramente $\forall x P x a \sim_{\text{sat}} \forall x P a x$ pero si interpretamos la constante a como 0 y el predicado P como \leq sobre \mathbb{N} observamos que $\forall x P x a \not\equiv \forall x P a x$.

Ejemplo 6 Considere la fórmula $\exists x Q x \sim_{\text{sat}} Q c$, este ejemplo muestra que una fórmula equisatisfacible a la fórmula existencial dada, resulta mucho más fácil de analizar.

Proposición 5 Si φ es una fórmula entonces $\varphi \sim_{\text{sat}} \text{Sko}(\varphi)$

Demostración. Ejercicio. ⊥

Finalmente podemos construir la forma normal de Skolem de cualquier fórmula.

Definición 5 Una enunciado de la forma $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ donde φ no tiene cuantificadores y además φ está en forma normal conjuntiva es una fórmula en forma normal de Skolem.

Obsérvese que en la definición anterior se pide que la fórmula sea un enunciado, es decir, que no tenga variables libres. Si de entrada existiera alguna variable libre se deberá cuantificar universalmente, situación que no cambia en absoluto los resultados pues el buscar modelos para fórmulas con variables libres equivale a buscar modelos para sus cerraduras universales.

²El nombre es debido a su creador, Thoralf Skolem (1887-1963).

Proposición 6 Para cada fórmula φ podemos construir efectivamente una fórmula ψ en forma normal de Skolem de manera que $\varphi \sim_{sat} \psi$. En tal caso ψ se denota con $\text{fns}(\varphi)$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de los resultados anteriores de esta nota. \dashv

Ejemplo 7 Sea $\varphi = \forall x \exists y (\exists z \forall w Rxyzw \rightarrow \exists v Pv)$, obtener la forma normal de Skolem para φ .

Primero obtenemos la forma normal prenex de φ :

$$\varphi \equiv \forall x \exists y \exists v (\exists z \forall w Rxyzw \rightarrow Pv) \equiv \forall x \exists y \exists v \forall z (\forall w Rxyzw \rightarrow Pv) \equiv \forall x \exists y \exists v \forall z \exists w (Rxyzw \rightarrow Pv) = \text{fnp}(\varphi)$$

Ahora aplicamos el proceso de skolemización a $\text{fnp}(\varphi)$:

1. Eliminamos el primer existencial $\exists y$ mediante la función de skolem $f^{(1)}$, obteniendo

$$\forall x \exists v \forall z \exists w (Rxfxzw \rightarrow Pv)$$

2. Eliminamos el segundo existencial $\exists v$ mediante la función de skolem $g^{(1)}$, obteniendo

$$\forall x \forall z \exists w (Rxfxzw \rightarrow Pgx)$$

3. Eliminamos el tercer existencial $\exists w$ mediante la función de skolem $h^{(2)}$, obteniendo

$$\forall x \forall z (Rfxzhxz \rightarrow Pgx)$$

Por lo tanto, $\text{Sko}(\varphi) = \forall x \forall z (Rfxzhxz \rightarrow Pgx)$.

Finalmente para obtener $\text{fns}(\varphi)$ basta poner la matriz de $\text{sko}(\varphi)$ en forma normal conjuntiva ³.

$$\text{fnc}(Rfxzhxz \rightarrow Pgx) \equiv \neg Rfxzhxz \vee Pgx.$$

Por lo tanto la forma normal de Skolem buscada es

$$\text{fns}(\varphi) = \forall x \forall z (\neg Rfxzhxz \vee Pgx)$$

6. Forma Clausular

Finalmente llegamos a la forma normal necesaria para el método de resolución binaria y para la programación lógica, la llamada forma clausular.

Definición 6 Sean φ una fórmula y $\text{fns}(\varphi) = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$ la forma normal de Skolem de φ . Si ψ es $\mathcal{C}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{C}_n$ entonces la forma clausular de φ , denotada $Cl(\varphi)$ es la secuencia de cláusulas

$$Cl(\varphi) = \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$$

donde sin perder generalidad las variables en cualesquiera dos cláusulas son distintas. Es decir, cualesquiera dos cláusulas tienen variables ajenas.

³La transformación a forma normal conjuntiva es exactamente igual que en el caso de la lógica de proposiciones sólo que en lugar de variables proposicionales ahora se manejan predicados.

De manera que la forma clausular de una fórmula φ se obtiene de la matriz de su forma normal de Skolem. Observemos que $Cl(\varphi)$ es una secuencia (conjunción) de cláusulas, libre de cuantificadores; además es inmediato que existe un proceso efectivo para construir $Cl(\varphi)$ y que $Cl(\varphi) \sim_{sat} \varphi$. Con esto hemos logrado el objetivo planteado, cada fórmula φ puede transformarse en una fórmula esencialmente proposicional $Cl(\varphi)$, satisfaciéndonos que es equivalente a φ .

Ejemplo 8 Sea φ la fórmula del ejemplo 7. La forma clausular de φ es

$$Cl(\varphi) = \neg R x f x z h x z \vee P g x$$

Esto concluye nuestra exposición de formas normales, por medio de la cual ahora podemos transformar cualquier fórmula en su forma clausular, la cual es una fórmula en forma normal conjuntiva sin cuantificadores y equisatisfacible a la fórmula original.

7. Algoritmo de conversión a la Forma Clausular

La conversión a forma clausular de cualquier fórmula φ se obtiene al aplicar todas las formas normales anteriores. Damos aquí un algoritmo que se sirve además de ciertas heurísticas para facilitar el proceso.

1. Rectificar φ .
2. Transformar a la forma normal negativa.
3. Prenexar obteniendo una fórmula de la forma $Qz_1 \dots Qz_m \chi$.
4. Skolemizar obteniendo una fórmula de la forma $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$.
5. Transformar ψ (la matriz de la skolemización anterior) a la forma normal conjuntiva obteniendo $\text{fnc}(\psi) = \mathcal{C}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{C}_k$.
6. Renombrar las variables de cada cláusula \mathcal{C}_i obteniendo una cláusula \mathcal{C}'_i de manera que las variables en cada una de éstas sean distintas.
7. La forma clausular de φ es

$$Cl(\varphi) = \mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_k$$

De esta manera concluimos que cualquier fórmula de la lógica de predicados puede transformarse en un conjunto de fórmulas de la lógica clausular.

Ahora ya estamos preparados para nuestro siguiente tema, que versa sobre otro método sintáctico para verificar la correctud de un argumento dentro de la lógica clausular, la *resolución binaria*, método que es también el fundamento principal del paradigma de programación lógica.