Ejercicio Semanal 6

Diego Méndez Medina

Considera el siguiente lenguaje:

Consonantes: $\{a, b, c, d, e, f\}$

Predicados: $\{\text{Sobre}^2, \text{Libre}^1, \text{Rojo}^1, \text{Blanco}^1, \text{Verde}^1\}$

1. Utilizando el lenguaje anterior formaliza los siguientes enunciados:

   a) a está sobre c y d está sobre f o sobre c.

   $$Sobre(a,c) \wedge (Sobre(d,f) \vee Sobre(d,c))$$

   b) a es verde pero c no lo es.

   $$Verde(a) \wedge \neg Verde(c)$$

   c) Todo esta sobre algo.
   Como no conocemos el universo, asumimos que se refiere a todo elemento de este, así:

   $$\forall x \exists y \; Sobre(x,y)$$

   d) No hay nada sobre todo lo que esta libre.

   $$\forall x(Libre(x) \rightarrow \neg(\exists y Sobre(y,x)))$$

   $$\equiv \forall x(Libre(x) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y,x))$$

   e) Hay algo rojo que no está libre.

   $$\exists x(Rojo(x) \rightarrow \neg Libre(x))$$

   f) Todo lo que no es verde y esta sobre b es rojo.

   $$\forall x((\neg Verde(x) \wedge Sobre(x,b)) \rightarrow Rojo(x))$$

2. Considera las siguientes interpretaciones:
   Interpretación $\mathcal{I}_1$:

   - $\mathcal{I}_1(a) = b_1$, $\mathcal{I}_1(b) = b_2$, $\mathcal{I}_1(c) = b_3$, $\mathcal{I}_1(d) = b_4$ $\mathcal{I}_1(e) = b_5$, $\mathcal{I}_1(f) = table$
   - $\mathcal{I}_1(Sobre) = \{< b_1, b_4 >, < b_4, b_3 >, < b_3, table >, < b_5, b_2 >, < b_2, table >\}$
   - $\mathcal{I}_1(Libre) = \{b_1, b_5\}$
   - $\mathcal{I}_1(Verde) = \{b_4\}$
   - $\mathcal{I}_1(Rojo) = \{b_1, b_5\}$
   - $\mathcal{I}_1(Blanco) = \{b_3, b_2\}$

   Interpretación $\mathcal{I}_2$:

   - $\mathcal{I}_2(a) = hat$, $\mathcal{I}_2(b) = Joe$, $\mathcal{I}_2(c) = bike$, $\mathcal{I}_2(d) = Jill$, $\mathcal{I}_2(e) = case$, $\mathcal{I}_2(f) = piso$.

- $\mathcal{I}_2(Sobre) = \{< hat, Joe >, < Joe, bike >, < bike, piso >, < Jill, case >, < case, piso >\}$
- $\mathcal{I}_2(Libre) = \{hat, Jill\}$
- $\mathcal{I}_2(Verde) = \{hat, piso\}$
- $\mathcal{I}_2(Rojo) = \{bike, case\}$
- $\mathcal{I}_2(Blanco) = \{Joe, Jill\}$

Para cada formula del inciso anterior decide si es verdadera en $\mathcal{I}_1$ y/o en $\mathcal{I}_2$.

$\mathcal{I}_1$

- $Sobre(a, c) \land (Sobre(d, f) \lor Sobre(d, c))$

  $\approx Sobre(b_1, b_3) \land (Sobre(b_4, table) \lor Sobre(b_4, b_3))$

  $< b_1, b_3 > \notin \mathcal{I}_1(Sobre)$
  $\Rightarrow \mathcal{I}_1(Sobre(b_1, b_3)) = 0$

  $\approx 0 \land (Sobre(b_4, table) \lor Sobre(b_4, b_3))$

  No es verdadera en $\mathcal{I}_1$

- $Verde(a) \land \neg Verde(c)$

  $\approx Verde(b_1) \land \neg Verde(b_3)$

  $b_1 \notin \mathcal{I}_1(Verde)$
  $\Rightarrow \mathcal{I}_1(Verde(b_1)) = 0$

  $\approx 0 \land \neg Verde(c)$

  No es verdadera en $\mathcal{I}_1$

- $\forall x \exists y\ Sobre(x, y)$

  a, b, c, d y f son los elementos del universo, lo que buscamos es que cada una de sus interpretaciones aparezca como primer elemento de alguna tupla en $\mathcal{I}_1(Sobre)$.

  Existe un elemento que no lo cumple, *table*, entonces no es verdadera en $\mathcal{I}_1$.

- $\forall x(Libre(x) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y, x))$

  Queremos ver que todos los elementos de $\mathcal{I}_1(Libre)$ no figuren como segundo elemento en alguna tupla de $\mathcal{I}_1(Sobre)$

  $\forall x(Libre(x) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y, x))$

  $\approx (Libre(b_1) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y, b_1)) \land (Libre(b_5) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y, b_5))$

  Es verdadera en $\mathcal{I}_1$

- $\exists x(Rojo(x) \rightarrow \neg Libre(x))$

  Para que sea verdadera debe existir un elemento que sea rojo y no este libre. Es decir $\mathcal{I}_1(Libre) \cap \mathcal{I}_1(Rojo) \neq \mathcal{I}_1(Rojo)$

No es el caso, entonces no es verdadera en $\mathcal{I}_1$.

- $\forall x((\neg Verde(x) \land Sobre(x, b)) \to Rojo(x))$

$$\approx \forall x((\neg Verde(x) \land Sobre(x, b_2)) \to Rojo(x))$$

  Solo hay un elemento que resulta estar sobre b_2. Quitando los elementos que son verdaderos por vacuidad:

$$\approx \neg Verde(b_5) \land Sobre(b_5, b_2)) \to Rojo(x)$$

  Así es verdadera en $\mathcal{I}_1$.

$\mathcal{I}_2$

$Sobre(a, c) \land (Sobre(d, f) \lor Sobre(d, c))$
$Verde(a) \land \neg Verde(c)$
$\forall x \exists y\ Sobre(x, y)$
$\forall x(Libre(x) \to \forall y \neg Sobre(y, x))$
$\exists x(Rojo(x) \to \neg Libre(x))$
$\forall x((\neg Verde(x) \land Sobre(x, b)) \to Rojo(x))$