Ejercicio Semanal 7

Diego Méndez Medina

Sea $\mathcal{L} = \{C^2, D^1, f^2, r^1\}$ y $\mathcal{M} =< Lista_{NAT}, \mathcal{I} >$ donde el mundo es el conjunto de listas finitas de números naturales y el signidicado de los simbolos es:

- $C^{\mathcal{I}} = \{(l, l')|l'$ es la cola de $l\}$
- $D^{\mathcal{I}} = \{l|l$ tiene longitud dos $\}$
- $r^{\mathcal{I}}$ calcula la reversa de L.
- $f^{\mathcal{I}}(l, l')$ deuelve la concatenación de l con l'

1. Para cada una de las siguientes fórmulas da un estado en donde se satisfaga y uno en donde no, mostrando paso a paso la apliación de la definición de satisfacción.

   a) $D(f(x,y)) \vee C(z, r(y))$
   Considere los siguientes estados:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{I}_\alpha(x) = [1] & \mathcal{I}_{\alpha'}(x) = [0,0] \\ \mathcal{I}_\alpha(y) = [1] & \mathcal{I}_{\alpha'}(y) = [1,1] \\ \mathcal{I}_\alpha(z) = [] & \mathcal{I}_{\alpha'}(z) = [0,1] \end{array}$$

$\mathcal{I}_\alpha$: Siguiendo la definición 5 de las notas del curso que se basan en la definición de satisfacción de Tarski:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\alpha(D(f(x,y)) \vee C(z, r(y))) &= 0 && \text{si y solo si } \mathcal{I}_\alpha(D(f,(x,y))) = \mathcal{I}_\alpha(C(z, r(y))) = 0 \\ \mathcal{I}_\alpha(f(x,y)) &= \mathcal{I}_\alpha(f([1],[1])) \\ &= [1,1] \\ \mathcal{I}_\alpha(D(f(x,y)) &= 1 && \text{si y solo si } \mathcal{I}_\alpha([1,1]) \in D^{\mathcal{I}_\alpha} \\ \to \mathcal{I}_\alpha(D(f(x,y)) &= 1 \neq 0 \\ \therefore \mathcal{I}_\alpha(D(f(x,y)) \vee C(z, r(y))) &= 1 \end{aligned}$$

Así $D(f(x,y)) \vee C(z, r(y))$ es satisfasible en $\mathcal{M}$ pues $\mathcal{M} \models_\alpha D(f(x,y)) \vee C(z, r(y))$

$\mathcal{I}_{\alpha'}$: Siguiendo la definición de satisfacción:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\alpha'}(D(f(x,y)) \vee C(z, r(y))) &= 0 && \text{si y solo si } \mathcal{I}_{\alpha'}(D(f,(x,y))) = \mathcal{I}_{\alpha'}(C(z, r(y))) = 0 \\ \mathcal{I}_{\alpha'}(f(x,y)) &= \mathcal{I}_{\alpha'}(f([0,0],[1,1])) \\ &= [0,0,1,1] \\ \mathcal{I}_{\alpha'}(D(f(x,y)) &= 1 && \text{si y solo si } \mathcal{I}_{\alpha'}([0,0,1,1]) \in D^{\mathcal{I}_{\alpha'}} \\ \to \mathcal{I}_{\alpha'}(D(f(x,y)) &= 0 \\ \mathcal{I}_{\alpha'}(C(z, r(y))) &= 1 && \text{si y solo si } \mathcal{I}_{\alpha'}([0,1],[1,1]) \in C^{\mathcal{I}_{\alpha'}} \\ [1] &\neq [1,1] \\ \to \mathcal{I}_{\alpha'}(C(z, r(y))) &= 0 \\ \therefore \mathcal{I}_{\alpha'}(D(f(x,y)) \vee C(z, r(y))) &= 0 \end{aligned}$$

Así $D(f(x,y)) \vee C(z, r(y))$ bajo $\mathcal{I}_{\alpha'}$ no es satisfasible en $\mathcal{M}$.

b) $\exists y(f(x,y) = f(y,x) \wedge D(r(x)))$

Sea $\psi = f(x,y) = f(y,x) \wedge D(r(x))$. Considere los siguientes estados y constantes:

$$\{x, z, w\} \in \mathcal{M}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\chi(x) &= [0,0] & \qquad \mathcal{I}_{\chi'}(x) &= [0,0,0] \\ \mathcal{I}_\chi(z) &= [0] & \mathcal{I}_{\chi'}(z) &= [] \\ \mathcal{I}_\chi(w) &= [2] & \mathcal{I}_{\chi'}(w) &= [1] \end{aligned}$$

$\mathcal{I}_\chi$: Siguiendo el método del inciso anterior:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\chi(\exists y(f(x,y) = f(y,x) \wedge D(r(x)))) = 1 &\qquad \text{si y solo si } \mathcal{I}_\chi[y/m](\psi) = 1 \text{ para alguna } m \in \mathcal{M} \\
\text{Intentemos con } \mathcal{I}_\chi[y/z](\psi) : & \\
\mathcal{I}_\chi(f(x,z) = f(z,x) \wedge D(r(x))) = 1 &\qquad \text{si y solo si } \mathcal{I}_\chi(f(x,z) = f(z,x)) = \mathcal{I}_\chi(D(r(x)) = 1 \\
\mathcal{I}_\chi(f(x,z) = f(z,x)) = 1 &\qquad \text{si y solo si } f(x,z) = f(z,x) \\
f(x,z) = [0,0,0] & \\
= f(z,x) & \\
\rightarrow \mathcal{I}_\chi(f(x,z) = f(z,x)) = 1 & \\
\mathcal{I}_\chi(D(r(x)) = 1 &\qquad \text{si y solo si } \mathcal{I}_\chi(r(x)) \in D^{\mathcal{I}_{chi}} \\
\mathcal{I}_\chi(r(x)) = [0,0] & \\
\rightarrow \mathcal{I}_\chi(D(r(x)) = 1 & \\
\therefore \mathcal{I}_\chi(\exists y(f(x,y) = f(y,x) \wedge D(r(x)))) = 1 &
\end{aligned}$$

Así $\exists y(f(x,y) = f(y,x) \wedge D(r(x)))$ es satisfasible en $\mathcal{M}$ pues:

$$\mathcal{M} \models_\chi \exists y(f(x,y) = f(y,x) \wedge D(r(x)))$$

$\mathcal{I}_{\chi'}$: Siguiendo la definición de satisfacción:

$$
\begin{array}{rl}
\mathcal{I}_{\chi'}(\exists y(f(x,y) = f(y,x) \wedge D(r(x)))) = 1 & \text{si y solo si } \mathcal{I}_{\chi'}[y/m](\psi) = 1 \text{ para alguna } m \in \mathcal{M} \\
\text{Intentemos con } \mathcal{I}_{\chi'}[y/z](\psi): & \\
\mathcal{I}_{\chi'}(f(x,z) = f(z,x) \wedge D(r(x))) = 1 & \text{si y solo si } \mathcal{I}_{\chi'}(f(x,z) = f(z,x)) = \mathcal{I}_{\chi'}(D(r(x)) = 1 \\
\mathcal{I}_{\chi'}(D(r(x)) = 1 & \text{si y solo si } \mathcal{I}_{\chi'}(r(x)) \in D^{\mathcal{I}_{\chi'}} \\
\mathcal{I}_{\chi}(r(x)) = [0,0,0] & \\
\rightarrow \mathcal{I}_{\chi}(D(r(x)) = 0 & \\
\text{Intentemos con } \mathcal{I}_{\chi'}[y/w](\psi): & \\
\mathcal{I}_{\chi'}(f(x,w) = f(w,x) \wedge D(r(x))) = 1 & \text{si y solo si } \mathcal{I}_{\chi'}(f(x,w) = f(w,x)) = \mathcal{I}_{\chi'}(D(r(x)) = 1 \\
\mathcal{I}_{\chi'}(D(r(x)) = 1 & \text{si y solo si } \mathcal{I}_{\chi'}(r(x)) \in D^{\mathcal{I}_{\chi'}} \\
\mathcal{I}_{\chi}(r(x)) = [0,0,0] & \\
\rightarrow \mathcal{I}_{\chi}(D(r(x)) = 0 & \\
\text{Por último, intentemos con } \mathcal{I}_{\chi'}[y/x](\psi): & \\
\mathcal{I}_{\chi'}(f(x,x) = f(x,x) \wedge D(r(x))) = 1 & \text{si y solo si } \mathcal{I}_{\chi'}(f(x,x) = f(x,x)) = \mathcal{I}_{\chi'}(D(r(x)) = 1 \\
\mathcal{I}_{\chi'}(D(r(x)) = 1 & \text{si y solo si } \mathcal{I}_{\chi'}(r(x)) \in D^{\mathcal{I}_{\chi'}} \\
\mathcal{I}_{\chi}(r(x)) = [0,0,0] & \\
\rightarrow \mathcal{I}_{\chi}(D(r(x)) = 0 & \\
\therefore \mathcal{I}_{\chi}(\exists y(f(x,y) = f(y,x) \wedge D(r(x)))) = 0 &
\end{array}
$$

Así $\exists y(f(x,y) = f(y,x) \wedge D(r(x)))$ bajo $\mathcal{I}_{\chi'}$ no es satisfasible en $\mathcal{M}$.

2. Decida si $\mathcal{M} \models \forall x \forall y(D(x) \wedge C(x,y) \to y = r(y))$

   Lo primero que vemos es que no figura ninguna variable libre en $\forall x \forall y(D(x) \wedge C(x,y) \to y = r(y))$. Entonces podemos ver a $\psi = (D(x) \wedge C(x,y) \to y = r(y))$. De forma que, de acuerdo a la última propiedad de la sección 6 de las notas del curso:

   $$\mathcal{M} \models \forall x \forall y(D(x) \wedge C(x,y) \to y = r(y)) \iff \mathcal{M} \models \psi$$

   PD. $\mathcal{M} \models (D(x) \wedge C(x,y) \to y = r(y))$

   Sea $\mathcal{I}_\chi$ un estado cualquiera.

   PD. $\mathcal{M} \models_\chi (D(x) \wedge C(x,y) \to y = r(y))$

   PD. $\mathcal{I}_\chi(D(x) \wedge C(x,y) \to y = r(y)) = 1$

   Supogamos que $\mathcal{I}_\chi(D(x) \wedge C(x,y)) = 1$.

   Entonces por definición de C y D, x es una lista con dos elementos e y una con un único elemento, que resulta ser el ultimo de x. Como y tiene un único elemento su reveresa es ella misma, es decir $y = r(y)$. Por lo tanto $\mathcal{I}_\chi(D(x) \wedge C(x,y) \to y = r(y)) = 1$

   Como χ era un estado cualquiera, y y x constantes cualesquiera y que $\mathcal{I}_\chi(D(x) \wedge C(x,y)) = 1$ implica que $\mathcal{I}_\chi(y = r(y)) = 1$:

   $$\mathcal{M} \models \psi$$

   Lo que, por la propiedad enunciada al inicio de la solución, implica :

   $$\mathcal{M} \models \forall x \forall y(D(x) \wedge C(x,y) \to y = r(y))$$