Ejercicio Semanal 5

Diego Méndez Medina

1. Utilizando los predicados `Mine`*(x)* que indica que la celda x tiene una mina, `Cont`*(x,n)* que indica que la celda x contiene el número n y `Adj`*(x,y)* que indica la celda x es adyacente a la celda y, formaliza los siguientes enunciados:

   a) Hay exactamente n minas en el tablero.

   Solución:

   El universo son celdas del tablero y números, en partícular en $[1,8]$, así definimos los siguientes predicados para tipos:

   $$C(x) : x \text{ es celda}$$
   $$N(x) : x \text{ es un natural en } [1,8]$$

   Suponemos que el lenguaje tiene igualdad.

   Para alguna n fija tenemos:

   $$\exists x_1 : C\ \exists x_2 : C\ \exists\ \ldots\ \exists x_n : C.\ (Mine(x_1) \wedge Mine(x_2) \wedge \ldots \wedge Mine(x_n) \wedge x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_n \wedge$$
   $$\forall y : C \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \neg Minus(y))$$

   Ayudandonos de la transitividad de la igualdad y con ayuda de $Mine$[1] es que decimos que solo existen n celdas y que todas ellas son diferentes. Con el ultimo and decimos que los demás celdas no son minas.

   b) Si una celda contiene el número k entonces hay exactamente k minas en las celdas adyacentes.

   Solución:

   $$\forall x : C.\ (\neg Mine(x) \to \exists k : N.\ Cont(x,k) \to \exists y_1 : C\ \exists y_2 : C\ \exists \ldots \exists y_k : C.($$
   $$Mine(y_1) \wedge Mine(y_2) \wedge \ldots \wedge Mine(y_k) \wedge Adj(x,y_1) \wedge Adj(x,y_2) \wedge \ldots \wedge Adj(x,y_k) \wedge y_1 \neq y_2 \neq \ldots \neq y_k$$
   $$\wedge \forall z : C \setminus \{y_1, \ldots, y_k\} Adj(x,z) \to \neg Mine(z)))$$

   Para todas las celdas si no son minas entonces existe algún número en $[3,8] \subset [1,8]$ que indica el número de minas,distintas, las cuales son adyacentes a dicha celda y todos sus demás vecinos no son mina.

   c) Si una celda contiene una mina, entonces todas sus celdas adyacentes contienen números u otras minas.

   Solución:

   $$\forall x : C(Mine(x) \to \forall y : C(Adj(x,y) \to \exists n : N\ Cont(y,n) \vee Mine(y)))$$

2. Para cada una de las siguientes expresiones: indica el alcance de cada cuantificador, encuentra las variables libres de la expresión y aplica la sustitución $[x, y := h(u, g(z)), h(w, x)]$

   a) $\forall x(P(x) \to \exists y \neg R(f(x), y, f(y)))$

   Solución:

   - El alcance del cuantificador $\forall$ es la fórmula $(P(x) \to \exists y \neg R(f(x), y, f(y)))$.
   - El alcance del cuantificador $\exists$ es la fórmula $\neg R(f(x), y, f(y))$.
   - En la fórmula dada hay tres presencias de x las cuales estan ligadas.
   - En la fórmula dada hay tres presencias de y las cuales estan ligadas.

   Así, no hay variables libres. Las dos variables que se desean intercambiar no figuran en ninguna libre, de forma que aun que hagamos una equivalencía α no ocurre la sustitución:

$$
\begin{aligned}
\forall x(P(x) \to \exists y \neg R(f(x), y, f(y)))[x, y := h(u, g(z)), h(w, x)] &\equiv_\alpha \\
\forall p(P(p) \to \exists q \neg R(f(p), q, f(q)))[x, y := h(u, g(z)), h(w, x)] &= \\
\forall p(P(p)[x, y := h(u, g(z)), h(w, x)] \to \exists q \neg R(f(p), q, f(q))[x, y := h(u, g(z)), h(w, x)]) &= \\
\forall p(P(p)[x, y := h(u, g(z)), h(w, x)] \to \exists q \neg R(f(p), q, f(q))[x, y := h(u, g(z)), h(w, x)]) &= \\
\forall p(P(p) \to \exists q \neg R(f(p), q, f(q)))&
\end{aligned}
$$

   La sustitución no se puede hacer.

   b) $\forall z \exists x \exists y(R(z, u, h(u, y)) \vee Q(u, h(z, u)))$

   Solución:

   - El alcance del cuantificador $\forall$ es la fórmula $\exists x \exists y(R(z, u, h(u, y)) \vee Q(u, h(z, u)))$.
   - El alcance del primer cuantificador $\exists$ es la fórmula $\exists y(R(z, u, h(u, y)) \vee Q(u, h(z, u)))$
   - El alcance del segundo cuantificador $\exists$ es la fórmula $(R(z, u, h(u, y)) \vee Q(u, h(z, u)))$
   - En la fórmula dada hay tres presencias de z las cuales estan ligada.
   - En la fórmula dada hay una presencia de x la cual esta ligada. Solo figura en el cuantificador, de forma que la podemos quitar.
   - En la fórmula dada hay dos presencias de y las cuales estan ligadas.
   - En la fórmula dada hay cuatro presencias de u las cuales estan libres.

   Al igual que en el inciso anterior, no hay presencía de variables libres de las que deseamos sustituir, entonces:

$$
\begin{aligned}
\forall z \exists x \exists y(R(z, u, h(u, y)) \vee Q(u, h(z, u)))[x, y := h(u, g(z)), h(w, x)] &\equiv_\alpha \\
\forall p \exists q(R(p, u, h(u, q)) \vee Q(u, h(p, u)))[x, y := h(u, g(z)), h(w, x)] &= \\
\forall p \exists q(R(p, u, h(u, q))[x, y := h(u, g(z)), h(w, x)] \vee Q(u, h(p, u))[x, y := h(u, g(z)), h(w, x)]) &= \\
\forall p \exists q(R(p, u, h(u, q)) \vee Q(u, h(p, u)))&
\end{aligned}
$$

   No es posible hacer la sustitución.