

Ejercicio Semanal 2

López Miranda Angel Mauricio

Diego Méndez Medina

1. Defina recursivamente las siguientes funciones:

- a) **ni** que recibe una fórmula φ y regresa el número de símbolos de implicación que tiene la fórmula.
Por ejemplo:

$$\text{ni}(p \wedge r \rightarrow \neg(q \rightarrow r)) = 2$$

Solución:

$$\text{ni} :: \text{PROP} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \text{ni}(\varphi) &= 0 && \text{si } \varphi \text{ es atómica} \\ \text{ni}(\neg\varphi) &= \text{ni}(\varphi) \\ \text{ni}(\varphi \rightarrow \psi) &= 1 + \text{ni}(\varphi) + \text{ni}(\psi) \\ \text{ni}(\varphi * \psi) &= \text{ni}(\varphi) + \text{ni}(\psi) && \text{donde } * \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{ni}(p \wedge r \rightarrow \neg(q \rightarrow r)) &= 1 + \text{ni}(p \wedge r) + \text{ni}(\neg(q \rightarrow r)) \\ &= 1 + \text{ni}(p) + \text{ni}(r) + \text{ni}(q \rightarrow r) \\ &= 1 + 0 + 0 + 1 + \text{ni}(q) + \text{ni}(r) \\ &= 2 + 0 + 0 = 2 \end{aligned}$$

- b) **nd** que recibe una fórmula φ y regresa el número de símbolos de disyunción que tiene la fórmula.
Por ejemplo

$$\text{nd}(p \vee r \rightarrow \neg(q \vee r) \wedge (s \vee \neg t)) = 3$$

Solución:

$$\text{nt} :: \text{PROP} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \text{nd}(\varphi) &= 0 && \text{si } \varphi \text{ es atómica} \\ \text{nd}(\neg\varphi) &= \text{nd}(\varphi) \\ \text{nd}(\varphi \vee \psi) &= 1 + \text{nd}(\varphi) + \text{nd}(\psi) \\ \text{nd}(\varphi * \psi) &= \text{nd}(\varphi) + \text{nd}(\psi) && \text{donde } * \in \{\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
\text{nd}(p \vee r \rightarrow \neg(q \vee r) \wedge (s \vee \neg t)) &= \text{nd}(p \vee r \rightarrow \neg(q \vee r) \wedge (s \vee \neg t)) \\
&= \text{nd}(p \vee r) + \text{nd}(\neg(q \vee r) \wedge (s \vee \neg t)) \\
&= 1 + \text{nd}(p) + \text{nd}(r) + \text{nd}(\neg(q \vee r)) + \text{nd}(s \vee \neg t) \\
&= 1 + 0 + 0 + \text{nd}(q \vee r) + 1 + \text{nd}(s) + \text{nd}(\neg t) \\
&= 2 + \text{nd}(q \vee r) + \text{nd}(s) + \text{nd}(\neg t) \\
&= 2 + 1 + \text{nd}(q) + \text{nd}(r) + 0 + \text{nd}(t) \\
&= 3 + 0 + 0 + 0 = 3
\end{aligned}$$

c) **qi** que recibe una fórmula y regresa una fórmula en que no figura el símbolo \rightarrow , usando la equivalencia lógica $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$. Por ejemplo:

$$\text{qi}(p \wedge r \rightarrow \neg(q \rightarrow r)) = \neg(p \wedge r) \vee \neg(\neg q \vee r)$$

Solución:

$$\text{qi} :: \text{PROP} \rightarrow \text{PROP}$$

$$\begin{aligned}
\text{qi}(\varphi) &= \varphi && \text{si } \varphi \text{ es atómica} \\
\text{qi}(\neg\varphi) &= \neg(\text{qi}(\varphi)) \\
\text{qi}(\varphi \rightarrow \psi) &= \neg(\text{qi}(\varphi)) \vee \text{qi}(\psi) \\
\text{qi}(\varphi * \psi) &= \text{qi}(\varphi) * \text{qi}(\psi) && \text{donde } * \in \{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}
\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
\text{qi}(p \wedge r \rightarrow \neg(q \rightarrow r)) &= \neg(\text{qi}(p \wedge r)) \vee \text{qi}(\neg(q \rightarrow r)) \\
&= \neg(\text{qi}(p) \wedge \text{qi}(r)) \vee \neg(\text{qi}(q \rightarrow r)) \\
&= \neg(p \wedge r) \vee \neg(\neg(\text{qi}(q)) \vee \text{qi}(r)) \\
&= \neg(p \wedge r) \vee \neg((\neg q) \vee r)
\end{aligned}$$

2. Utilizando las definiciones anteriores demuestre mediante inducción estructural que para cualquier fórmula φ , se cumple:

$$\text{nd}(\text{qi}(\varphi)) = \text{nd}(\varphi) + \text{ni}(\varphi)$$

Solución:

Sea a un elemento cualquiera de ATOM , dadas las definiciones de ni , nd y qi , la variable entra en los casos basos de las tres funciones y tenemos:

$$\begin{aligned}\text{qi}(a) &= a & \text{nd}(a) &= 0 \\ \text{ni}(a) &= 0\end{aligned}$$

Así:

$$\text{nd}(\text{qi}(a)) = \text{nd}(a) = 0 = 0 + 0 = \text{nd}(a) + \text{ni}(a)$$

Como a era un elemento cualquiera de ATOM , no importa si es alguna variable o alguna constante lógica. Para cualquiera se cumple.

Ahora supongamos φ y ψ son dos elementos cualesquiera de PROP tales que:

$$\text{nd}(\text{qi}(\varphi)) = \text{nd}(\varphi) + \text{ni}(\varphi) \quad (1)$$

$$\text{nd}(\text{qi}(\psi)) = \text{nd}(\psi) + \text{ni}(\psi) \quad (2)$$

Lo que ahora buscaremos es construir elementos de PROP , con φ y ψ . ¿Como hacemos eso?, con los conectivos lógicos.

Negación:

Si construimos γ como la negación de φ , también es un elemento de PROP . Con lo que ahora, siguiendo la construcción de nd , ni y γ tenemos:

$$\text{nd}(\gamma) = \text{nd}(\neg\varphi) = \text{nd}(\varphi) \quad (3)$$

$$\text{ni}(\gamma) = \text{ni}(\neg\varphi) = \text{ni}(\varphi) \quad (4)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\text{nd}(\text{qi}(\gamma)) &= \text{nd}(\text{qi}(\neg\varphi)) && \text{Por la construcción de } \gamma \\ &= \text{nd}(\neg\text{qi}(\varphi)) && \text{Por definición de } \text{qi} \\ &= \text{nd}(\text{qi}(\varphi)) && \text{Por definición de } \text{nd}\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\text{nd}(\gamma) + \text{ni}(\gamma) = \text{nd}(\varphi) + \text{ni}(\varphi) \quad \text{Por (3)(4)}$$

Así,

$$\text{nd}(\text{qi}(\gamma)) = \text{nd}(\text{qi}(\varphi)) = \text{nd}(\varphi) + \text{ni}(\varphi) = \text{nd}(\gamma) + \text{ni}(\gamma)$$

Con lo que $\gamma = \neg\varphi$ cumple con la propiedad.

Conjunción:

Ahora construimos $\gamma_1 = \varphi \wedge \psi$. De acuerdo a las nuestras definiciones de la pregunta anterior tenemos:

$$\text{nd}(\gamma_1) = \text{nd}(\varphi \wedge \psi) = \text{nd}(\varphi) + \text{nd}(\psi) \quad (5)$$

$$\text{ni}(\gamma_1) = \text{ni}(\varphi \wedge \psi) = \text{ni}(\varphi) + \text{ni}(\psi) \quad (6)$$

Ahora, desarrollando:

$$\begin{aligned}
\text{nd}(\text{qi}(\gamma_1)) &= \text{nd}(\text{qi}(\varphi \wedge \psi)) && \text{Por la construcción de } \gamma_1 \\
&= \text{nd}(\text{qi}(\varphi) \wedge \text{qi}(\psi)) && \text{Por definición de qi} \\
&= \text{nd}(\text{qi}(\varphi)) + \text{nd}(\text{qi}(\psi)) && \text{Por definición de nd}
\end{aligned}$$

Seguimos desarrollando:

$$\begin{aligned}
\text{nd}(\text{qi}(\varphi)) + \text{nd}(\text{qi}(\psi)) &= \text{nd}(\varphi) + \text{ni}(\varphi) + \text{nd}(\psi) + \text{ni}(\psi) && \text{Por (1)(2)} \\
&= \text{nd}(\varphi) + \text{nd}(\psi) + \text{ni}(\varphi) + \text{ni}(\psi) && \text{Agrupando} \\
&= \text{nd}(\gamma_1) + \text{ni}(\gamma_1) && \text{Por (5)(6)}
\end{aligned}$$

Así, γ_1 cumple con la propiedad descrita:

$$\text{nd}(\text{qi}(\gamma_1)) = \text{nd}(\gamma_1) + \text{ni}(\gamma_1)$$

Equivalencia:

Es similar a la conjunción. Construimos $\gamma_2 = \varphi \leftrightarrow \psi$, siguiendo nuestras definiciones:

$$\text{nd}(\gamma_2) = \text{nd}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \text{nd}(\varphi) + \text{nd}(\psi) \quad (7)$$

$$\text{ni}(\gamma_2) = \text{ni}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \text{ni}(\varphi) + \text{ni}(\psi) \quad (8)$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}
\text{nd}(\text{qi}(\gamma_2)) &= \text{nd}(\text{qi}(\varphi \leftrightarrow \psi)) && \text{Por la construcción de } \gamma_2 \\
&= \text{nd}(\text{qi}(\varphi) \leftrightarrow \text{qi}(\psi)) && \text{Por definición de qi} \\
&= \text{nd}(\text{qi}(\varphi)) + \text{nd}(\text{qi}(\psi)) && \text{Por definición de nd}
\end{aligned}$$

Desarrollamos:

$$\begin{aligned}
\text{nd}(\text{qi}(\varphi)) + \text{nd}(\text{qi}(\psi)) &= \text{nd}(\varphi) + \text{ni}(\varphi) + \text{nd}(\psi) + \text{ni}(\psi) && \text{Por (1)(2)} \\
&= \text{nd}(\varphi) + \text{nd}(\psi) + \text{ni}(\varphi) + \text{ni}(\psi) && \text{Agrupando} \\
&= \text{nd}(\gamma_2) + \text{ni}(\gamma_2) && \text{Por (7)(8)}
\end{aligned}$$

γ_2 cumple con la propiedad descrita:

$$\text{nd}(\text{qi}(\gamma_2)) = \text{nd}(\gamma_2) + \text{ni}(\gamma_2)$$

Disyunción:

Ahora construimos $\gamma_3 = \varphi \vee \psi$. De acuerdo a nuestras respuestas al inciso anterior:

$$\text{nd}(\gamma_3) = \text{nd}(\varphi \vee \psi) = 1 + \text{nd}(\varphi) + \text{nd}(\psi) \quad (9)$$

$$\text{ni}(\gamma_3) = \text{ni}(\varphi \vee \psi) = \text{ni}(\varphi) + \text{ni}(\psi) \quad (10)$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}
\text{nd}(\text{qi}(\gamma_3)) &= \text{nd}(\text{qi}(\varphi \vee \psi)) && \text{Por la construcción de } \gamma_3 \\
&= \text{nd}(\text{qi}(\varphi) \vee \text{qi}(\psi)) && \text{Por definición de qi} \\
&= 1 + \text{nd}(\text{qi}(\varphi)) + \text{nd}(\text{qi}(\psi)) && \text{Por definición de nd}
\end{aligned}$$

Desarrollamos:

$$\begin{aligned}
1 + \text{nd}(\text{qi}(\varphi)) + \text{nd}(\text{qi}(\psi)) &= 1 + \text{nd}(\varphi) + \text{ni}(\varphi) + \text{nd}(\psi) + \text{ni}(\psi) && \text{Por (1)(2)} \\
&= 1 + \text{nd}(\varphi) + \text{nd}(\psi) + \text{ni}(\varphi) + \text{ni}(\psi) && \text{Agrupando} \\
&= \text{nd}(\gamma_3) + \text{ni}(\gamma_3) && \text{Por (9)(10)}
\end{aligned}$$

γ_3 cumple con la propiedad descrita:

$$\text{nd}(\text{qi}(\gamma_3)) = \text{nd}(\gamma_3) + \text{ni}(\gamma_3)$$

Implicación:

Ahora construimos $\gamma_4 = \varphi \rightarrow \psi$. Siguiendo nuestras definiciones de ni y nd:

$$\text{nd}(\gamma_4) = \text{nd}(\varphi \rightarrow \psi) = \text{nd}(\varphi) + \text{nd}(\psi) \quad (11)$$

$$\text{ni}(\gamma_4) = \text{ni}(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \text{ni}(\varphi) + \text{ni}(\psi) \quad (12)$$

Ahora, desarrollando:

$$\begin{aligned}
\text{nd}(\text{qi}(\gamma_4)) &= \text{nd}(\text{qi}(\varphi \rightarrow \psi)) && \text{Por la construcción de } \gamma_4 \\
&= \text{nd}(\neg(\text{qi}(\varphi)) \vee \text{qi}(\psi)) && \text{Por definición de qi} \\
&= 1 + \text{nd}(\neg \text{qi}(\varphi)) + \text{nd}(\text{qi}(\psi)) && \text{Por definición de nd} \\
&= 1 + \text{nd}(\text{qi}(\varphi)) + \text{nd}(\text{qi}(\psi)) && \text{Por definición de nd}
\end{aligned}$$

Seguimos desarrollando:

$$\begin{aligned}
1 + \text{nd}(\text{qi}(\varphi)) + \text{nd}(\text{qi}(\psi)) &= 1 + \text{nd}(\varphi) + \text{ni}(\varphi) + \text{nd}(\psi) + \text{ni}(\psi) && \text{Por (1)(2)} \\
&= \text{nd}(\varphi) + \text{nd}(\psi) + 1 + \text{ni}(\varphi) + \text{ni}(\psi) && \text{Agrupando} \\
&= \text{nd}(\gamma_4) + \text{ni}(\gamma_4) && \text{Por (11)(12)}
\end{aligned}$$

Por ultimo, γ_4 cumple con la propiedad descrita:

$$\text{nd}(\text{qi}(\gamma_4)) = \text{nd}(\gamma_4) + \text{ni}(\gamma_4)$$

Dados φ y ψ acabamos de construir todos los elementos *inmediatos* posibles de PROP utilizando los conectivos lógicos sin repetir.

El hecho que φ y ψ cumplieran con la propiedad implique que los elementos *inmediatos* también la cumplan y que φ y ψ eran elementos cualesquiera concluimos que para todos los elementos, fórmulas, de PROP se cumple:

$$\text{nd}(\text{qi}(\varphi)) = \text{nd}(\varphi) + \text{ni}(\varphi)$$