# Ejercicio Semanal 9

Diego Méndez Medina

1. Demuestra que $\sigma(\rho\tau) = (\sigma\rho)\tau$ para las siguientes sustituciones calculando todas las composiciones involucradas:
   - $\sigma = [x := a, y := f(z), z := u]$
   - $\rho = [u := y, x := f(x), z := y]$
   - $\tau = [u := z, v := g(a), z := y]$

   **Solución:**

   - $\rho\tau$

   $$\begin{aligned}\rho\tau &= [u := y\tau,\, x := f(x)\tau,\, z := y\tau, v := g(a)]\\ &= [u := y,\, x := f(x),\, z := y,\, v := g(a)]\end{aligned}$$

   - $\sigma(\rho\tau)$

   $$\begin{aligned}\sigma(\rho\tau) &= [x := a(\rho\tau),\, y := f(z)(\rho\tau),\, z := u(\rho\tau),\, u := y,\, v := g(a)]\\ &= [x := a,\, y := f(y),\, z := y,\, u := y,\, v := g(a)] \qquad (1)\end{aligned}$$

   - $\sigma\rho$

   $$\begin{aligned}\sigma\rho &= [x := a\rho,\, y := f(z)\rho,\, z := u\rho,\, u := y]\\ &= [x := a,\, y := f(y),\, z := z,\, u := y]\\ &= [x := a,\, y := f(y),\, u := y]\end{aligned}$$

   - $(\sigma\rho)\tau$

   $$\begin{aligned}(\sigma\rho)\tau &= [x := a\tau,\, y := f(y)\tau,\, u := y\tau,\, v := g(a),\, z := y]\\ &= [x := a,\, y := f(y),\, u := y,\, v := g(a),\, z := y] \qquad (2)\end{aligned}$$

   Por (1) y (2) vemos que $\sigma(\rho\tau) = (\sigma\rho)\tau$ para las composiciones dadas.

2. Verificar si los siguientes conjuntos son unificables utilizando el algoritmo de Martello-Montanari mostrando cada paso:

   a) $W = \{Pxfxgy,\, Pafgaga,\, Pyfyga\}$ con $P^3$, $f^1$, $g^1$
   Comenzamos tratando de unificar $Pxfxgy$, $Pafgaga$:

   | | |
   |---|---|
   | $\{Pxfxgy = Pafgaga\}$ | Entrada |
   | $\{x = a, fx = fga, gy = ga\}$ | $DESC.P$ |
   | $\{fa = fga, gy = ga\}$ | $SUST[x := a]$ |
   | $\{a = ga, y = a\}$ | $DESC$ |
   | $\{a = ga\}$ | $SUST[y := a]$ |
   | $X$ | $DFALLA$ |

   Como este par no es unificable, aunque exista una unificación entre cualequiera de este par y el tercero, es imposible hacer la unificación de los tres.

b) $W = \{fwfxhz,\ fgxfxy, fgxfab\}$ con $f^1, g^1, h^1$
Comenzamos tratando de unificar $fwfxhz,\ fgxfxy$

$$
\begin{array}{rl}
fwfxhz = fgxfxy & \text{Entrada} \\
\{w = gx,\ x = x,\ hz = y\} & DESC \\
\{w = gx,\ hz = y\} & ELIM \\
\{hz = y\} & SUST[w := gx] \\
\{y = hz\} & SWAP \\
\emptyset & SUST[y := hz]
\end{array}
$$

Son unificables bajo $\mu = [w := gx, y := hz]$. De tal forma que:

$$
\begin{aligned}
|\{fwfxhz,\ fgxfxy\}[w := gx, y := hz]| &= |\{fgxfxhz, fgxfxhz\}| \\
&= |\{fgxfxhz\}| \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Solo nos falta ver que el resultado de la unificación anterior y el tercer elemento($fgxfxhz,\ fgxfab$) sean unificables:

$$
\begin{array}{rl}
\{fgxfxhz = fgxfab\} & \text{Entrada} \\
\{gx = gx,\ x = a,\ hz = b\} & DESC \\
\{x = a,\ hz = b\} & ELIM \\
\{hz = b\} & SUST[x := a] \\
X & DFALLA
\end{array}
$$

El último falló por que las constantes son consideradas funciones sin argumentos y $h$ es de un argumento.

Así, a pesar de que el primer par es unificable y de hecho el segundo elemento con el tercero tambíen lo son. No existe una unificación para los tres juntos.