Ejercicio Semanal 6

Diego Méndez Medina

Considera el siguiente lenguaje:

Consonantes: $\{a, b, c, d, e, f\}$

Predicados: $\{\text{Sobre}^2, \text{Libre}^1, \text{Rojo}^1, \text{Blanco}^1, \text{Verde}^1\}$

1. Utilizando el lenguaje anterior formaliza los siguientes enunciados:

   a) a está sobre c y d está sobre f o sobre c.

   $$Sobre(a, c) \wedge (Sobre(d, f) \vee Sobre(d, c))$$

   b) a es verde pero c no lo es.

   $$Verde(a) \wedge \neg Verde(c)$$

   c) Todo esta sobre algo.
   Como no conocemos el universo, asumimos que se refiere a todo elemento de este, así:

   $$\forall x \exists y \; Sobre(x, y)$$

   d) No hay nada sobre todo lo que esta libre.

   $$\forall x(Libre(x) \rightarrow \neg(\exists y Sobre(y, x)))$$

   $$\equiv \forall x(Libre(x) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y, x))$$

   e) Hay algo rojo que no está libre.

   $$\exists x(Rojo(x) \rightarrow \neg Libre(x))$$

   f) Todo lo que no es verde y esta sobre b es rojo.

   $$\forall x((\neg Verde(x) \wedge Sobre(x, b)) \rightarrow Rojo(x))$$

2. Para cada formula del inciso anterior decide si es verdadera en $\mathcal{I}_1$ y/o en $\mathcal{I}_2$. Considera las siguientes interpretaciones:

   Interpretación $\mathcal{I}_1$:

   - $\mathcal{I}_1(a) = b_1$, $\mathcal{I}_1(b) = b_2$, $\mathcal{I}_1(c) = b_3$, $\mathcal{I}_1(d) = b_4$ $\mathcal{I}_1(e) = b_5$, $\mathcal{I}_1(f) = table$
   - $\mathcal{I}_1(Sobre) = \{< b_1, b_4 >, < b_4, b_3 >, < b_3, table >, < b_5, b_2 >, < b_2, table >\}$
   - $\mathcal{I}_1(Libre) = \{b_1, b_5\}$
   - $\mathcal{I}_1(Verde) = \{b_4\}$
   - $\mathcal{I}_1(Rojo) = \{b_1, b_5\}$
   - $\mathcal{I}_1(Blanco) = \{b_3, b_2\}$

   NOTA: No considere transitiva $Sobre^2$, por que de haber sido así esos elementos figurarian en la interpretación.

   $\mathcal{I}_1$

   - $Sobre(a, c) \wedge (Sobre(d, f) \vee Sobre(d, c))$

     $\approx Sobre(b_1, b_3) \wedge (Sobre(b_4, table) \vee Sobre(b_4, b_3))$

     $< b_1, b_3 > \notin \mathcal{I}_1(Sobre)$

     $\Rightarrow \mathcal{I}_1(Sobre(b_1, b_3)) = 0$

     $\approx 0 \wedge (Sobre(b_4, table) \vee Sobre(b_4, b_3))$

     No es verdadera en $\mathcal{I}_1$

   - $Verde(a) \wedge \neg Verde(c)$

     $\approx Verde(b_1) \wedge \neg Verde(b_3)$

     $b_1 \notin \mathcal{I}_1(Verde)$

     $\Rightarrow \mathcal{I}_1(Verde(b_1)) = 0$

     $\approx 0 \wedge \neg Verde(c)$

     No es verdadera en $\mathcal{I}_1$

   - $\forall x \exists y \; Sobre(x, y)$

     a, b, c, d y f son los elementos del universo, lo que buscamos es que cada una de sus interpretaciones aparezca como primer elemento de alguna tupla en $\mathcal{I}_1(Sobre)$.

     Existe un elemento que no lo cumple, *table*, entonces no es verdadera en $\mathcal{I}_1$.

   - $\forall x(Libre(x) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y, x))$

     Queremos ver que todos los elementos de $\mathcal{I}_1(Libre)$ no figuren como segundo elemento en alguna tupla de $\mathcal{I}_1(Sobre)$

     $\forall x(Libre(x) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y, x))$

     $\approx (Libre(b_1) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y, b_1)) \wedge (Libre(b_5) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y, b_5))$

     Es verdadera en $\mathcal{I}_1$

- $\exists x(Rojo(x) \rightarrow \neg Libre(x))$

  Para que sea verdadera debe existir un elemento que sea rojo y no este libre. Es decir $\mathcal{I}_1(Libre) \cap \mathcal{I}_1(Rojo) \neq \mathcal{I}_1(Rojo)$

  No es el caso, entonces no es verdadera en $\mathcal{I}_1$.

- $\forall x((\neg Verde(x) \wedge Sobre(x,b)) \rightarrow Rojo(x))$

  $$\approx \forall x((\neg Verde(x) \wedge Sobre(x,b_2)) \rightarrow Rojo(x))$$

  Solo hay un elemento que resulta estar sobre b_2. Quitando los elementos que son verdaderos por vacuidad:

  $$\approx \neg Verde(b_5) \wedge Sobre(b_5,b_2)) \rightarrow Rojo(x)$$

  Así es verdadera en $\mathcal{I}_1$.

Interpretación $\mathcal{I}_2$:

- $\mathcal{I}_2(a) = hat$, $\mathcal{I}_2(b) = Joe$, $\mathcal{I}_2(c) = bike$, $\mathcal{I}_2(d) = Jill$, $\mathcal{I}_2(e) = case$, $\mathcal{I}_2(f) = piso.$
- $\mathcal{I}_2(Sobre) = \{< hat, Joe >, < Joe, bike >, < bike, piso >, < Jill, case >, < case, piso >\}$
- $\mathcal{I}_2(Libre) = \{hat, Jill\}$
- $\mathcal{I}_2(Verde) = \{hat, piso\}$
- $\mathcal{I}_2(Rojo) = \{bike, case\}$
- $\mathcal{I}_2(Blanco) = \{Joe, Jill\}$

$\mathcal{I}_2$

- $Sobre(a,c) \wedge (Sobre(d,f) \vee Sobre(d,c))$

  $$\approx Sobre(hat, bike) \wedge (Sobre(Jill, piso) \vee Sobre(Jill, bike))$$

  Como $Sobre^2$ no es transitiva, $< hat, bike > \notin \mathcal{I}_2(Sobre)$. Con lo que no es verdadero en $\mathcal{I}_2$.

- $Verde(a) \wedge \neg Verde(c)$

  $$\approx Verde(hat) \wedge \neg Verde(bike)$$

  Lo cual es verdadero en $\mathcal{I}_2$.

- $\forall x \exists y \ Sobre(x,y)$

  Al igual que en la interpretación anterior hay un elemento del universo , *piso*, que no figura como primer elemento en alguna tupla en $\mathcal{I}_2(Sobre)$. Con lo que no es es verdadera en $\mathcal{I}_2$.

- $\forall x(Libre(x) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y,x))$

  $$\approx Libre(hat) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y, hat) \wedge Libre(Jill) \rightarrow \forall y \neg Sobre(y, Jill)$$

  Lo cual es verdadero en $\mathcal{I}_2$.

- $\exists x(Rojo(x) \rightarrow \neg Libre(x))$

  Es verdadera pues $bike \in \mathcal{I}_2(Rojo) \wedge bike \notin \mathcal{I}_2(Libre)$.

- $\forall x((\neg Verde(x) \wedge Sobre(x, b)) \rightarrow Rojo(x))$

  $$\approx \forall x((\neg Verde(x) \wedge Sobre(x, Joe)) \rightarrow Rojo(x))$$

  Lo unico que esta sobre Joe es *hat* y es verde. Así por vacuidad es verdadero en $\mathcal{I}_2$.