Ejercicio Semanal 2

Diego Méndez Medina

Considera la siguiente información:

- Si Manuel es delgado, entonces Paola no es pelirroja o Fernando no es alto.
- Si Fernando es alto, entonces Sandra es cariñosa.
- Si Sandra es cariñosa y Paola es pelirroja, entonces Manuel es delgado.
- Paola es pelirroja.

1. Traduce cada uno de los enunciados anteriores a lógica proposicional usando el siguiente glosario:
   - M para indicar que Manuel es delgado.
   - P para indicar que Paola es pelirroja.
   - F para indicar que Fernando es alto.
   - S para indicar que Sandra es cariñosa.

   Solución:

   `Dado el glosario antes mencionado y la información tenemos:`

   - $M \to (\neg P \vee \neg F)$
   - $F \to S$
   - $(S \wedge P) \to M$
   - P

2. Encuentra la Forma Normal Negativa de las fórmula anteriores.

   Solución:

   `Siguiendo la` *`proposición dos de la nota tres`* `y la solución a la pregunta anterior:`

$$\begin{aligned} M \to (\neg P \vee \neg F) &\equiv \neg M \vee \neg P \vee \neg F && \texttt{Eliminando implicación} \\ &= fnn(M \to (\neg P \vee \neg F)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F \to S &\equiv \neg F \vee S && \texttt{Eliminando implicación} \\ &= fnn(F \to S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S \wedge P) \to M &\equiv \neg(S \wedge P) \vee M && \texttt{Eliminando implicación} \\ &\equiv \neg S \vee \neg P \vee M && \texttt{De Morgan} \\ &= fnn((S \wedge P) \to M) \end{aligned}$$

$$P = fnn(P) \qquad \texttt{Lo cumple por definición}$$

3. Encuentra la Forma Normal Conjuntiva de cada fórmula.

Solución:

Siguiendo la *proposición tres de la nota tres* y la forma normal negativa calculada el inciso anterior, siendo bien explicitos solo en el primero y en los demás siguiendo lo dicho en este:

- $M \to (\neg P \vee \neg F)$

$$M \to (\neg P \vee \neg F) \equiv \neg M \vee \neg P \vee \neg F \qquad \texttt{fnn}$$

  M es un átomico, entonces $\neg M$ es una literal. Dada la definición de clausula $\neg M$ es una una clausula, sea C_1'.

  P es un átomico, entonces $\neg P$ es una literal. Junto a la clausula C_1, $\neg P \vee C_1'$ tambíen es una clausula, llamemosla C_2'.

  F es un átomico, $\neg F$ es una literal. Así $\neg F \vee C_2'$ es tambíen una clausula, sea C_1.

  $\top$ es un átomico y así una literal y una clausula. Y además $C_1 \equiv C_1 \wedge \top$

  Al C_1 y $\top$ ser clausulas, $C_1 \wedge \top$ es una forma normal conjuntiva. Entonces:

$$fnc(M \to (\neg P \vee \neg F)) = C_1 \wedge \top = (\neg M \vee \neg P \vee \neg F) \wedge \top \equiv \neg M \vee \neg P \vee \neg F$$

- $F \to S$

$$\begin{aligned} F \to S &\equiv \neg F \vee S && \texttt{fnn} \\ &\equiv (\neg F \vee S) \wedge \top && \texttt{juntando dos clausulas} \\ &= fnc(F \to S) \end{aligned}$$

- $(S \wedge P) \to M$

$$\begin{aligned} (S \wedge P) \to M &\equiv \neg S \vee \neg P \vee M && \texttt{fnn} \\ &\equiv (\neg S \vee \neg P \vee M) \wedge \top && \texttt{juntando clausulas} \\ &= fnc((S \wedge P) \to M) \end{aligned}$$

- P

$$P \wedge \top$$

4. Usando resolución binaria indica si *Fernando no es alto* es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas.
Solución:
Sea $\Gamma = \{M \to (\neg P \vee \neg F), F \to S, (S \wedge P) \to M, P\}$, queremos ver si:

$$\Gamma \models \neg F$$

Que con lo visto en clase basta demostrar que $\Gamma \cup \{\neg\neg F\}$ es insatisfasible, que es lo que haremos a continuación.

El conjunto de formas normales conjuntivas para $\Gamma \cup \{\neg\neg F\}$ es:

$$\{\neg M \vee \neg P \vee \neg F, \neg F \vee S, \neg S \vee \neg P \vee M, P, F\}$$

De aquí obtenemos la siguiente derivación de $\square$:

1.	$\neg M \vee \neg P \vee \neg F$	Hip
2.	$\neg F \vee S$	Hip
3.	$\neg S \vee \neg P \vee M$	Hip
4.	P	Hip
5.	F	Hip
6.	S	Res$(2,5)$
7.	$\neg P \vee M$	Res$(3,6)$
8.	M	Res$(4,7)$
9.	$\neg P \vee \neg F$	Res$(1,8)$
10.	$\neg F$	Res$(4,9)$
11.	$\square$	Res$(5,10)$

De manera que el argumento es correcto y *Fernando no es alto* es consecuencia de la información dada.