Tarea Examen 3

Diego Méndez Medina

1. (**1.5pts**) Transforma las siguientes fórmulas a su forma clausular, indica todas las formas normales necesarias por separado.

   a) $\forall x \exists y \, (Pgfaxx \to \neg(Qafxz \vee Pxfx)) \to \exists z Qaxfz$
   Sea φ la formula del inciso, comenzamos sacando su forma normal prenex:

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \forall x \exists y \, (Pgfaxx \to \neg(Qafxz \vee Pxfx)) \to \exists w Qaxfw \\ &\equiv \exists w (\forall x \exists y \, (Pgfaxx \to \neg(Qafxz \vee Pxfx)) \to Qaxfw) \\ &\equiv \exists w (\forall v \exists y \, (Pgfavv \to \neg(Qafvz \vee Pvfv)) \to Qaxfw) \\ &\equiv \exists w \exists v \forall y ((Pgfavv \to \neg(Qafvz \vee Pvfv)) \to Qawfw) = fnp(\varphi)\end{aligned}$$

   Lo siguiente es buscar la forma normal de skolem pero en nuestra formula z no está libre. De acuerdo a las notas del curso basta con cuantificarla universalmente:

$$fnp(\varphi) \equiv \forall z \exists w \exists v \forall y ((Pgfavv \to \neg(Qafvz \vee Pvfv)) \to Qawfw)$$

   Continuamos:

$$\begin{aligned}fnp(\varphi) &\equiv \forall z \exists v \forall y ((Pgfavv \to \neg(Qafvz \vee Pvfv)) \to Qahzfhz) \\ &\equiv \forall z \forall y ((Pgfakzkz \to \neg(Qafkzz \vee Pkzfkz)) \to Qahzfhz) \\ &\equiv \forall z \forall y (\neg \, (Pgfakzkz \to \neg(Qafkzz \vee Pkzfkz)) \vee Qahzfhz) \\ &\equiv \forall z \forall y (\neg \, (\neg Pgfakzkz \vee \neg(Qafkzz \vee Pkzfkz)) \vee Qahzfhz) \\ &\equiv \forall z \forall y ((Pgfakzkz \wedge (Qafkzz \vee Pkzfkz)) \vee Qahzfhz) \\ &\equiv \forall z \forall y ((Pgfakzkz \vee Qahzfhz) \wedge (Qafkzz \vee Pkzfkz \vee Qahzfhz)) = fns(\varphi)\end{aligned}$$

   Entonces la forma clausular de φ es

$$(Pgfakzkz \vee Qahzfhz) \wedge (Qafkzz \vee Pkzfkz \vee Qahzfhz)$$

   b) $\forall x \exists y \forall y Pagxy \wedge \neg \, (\forall x Qxfza \vee \forall x Qxfzb)$

   Sea $\varphi = \forall x \exists y \forall y Pagxy \wedge \neg \, (\forall x Qxfza \vee \forall x Qxfzb)$

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \forall x (\exists y \forall y Pagxy \wedge \neg \, (Qxfza \vee Qxfzb)) \\ &\equiv \forall x (\forall y Pagxy \wedge \neg \, (Qxfza \vee Qxfzb)) \\ &\equiv \forall x \exists y (Pagxy \wedge \neg \, (Qxfza \vee Qxfzb)) = fnp(\varphi)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
fnp(\varphi) &\equiv \forall x(Pagxhx \wedge \neg\,(Qxfza \vee Qxfzb)) \\
&\equiv \forall x(Pagxhx \wedge \neg Qxfza \wedge \neg Qxfzb) = fns(\varphi)
\end{aligned}
$$

Entonces la forma clausular de φ es

$$Pagxhx \wedge \neg Qxfza \wedge \neg Qxfzb$$

c) $\neg\forall x\,(Pxz \vee \exists z Qxyz) \vee \exists y Pfay$

Sea $\varphi = \neg\forall x\,(Pxz \vee \exists z Qxyz) \vee \exists y Pfay$

$$
\begin{aligned}
\varphi &\equiv \forall x\,(Pxz \vee \exists z Qxyz) \to \exists y Pfay \\
&\equiv \forall x\,(Pxz \vee \exists v Qxyv) \to \exists u Pfau \\
&\equiv \forall x \exists v\,(Pxz \vee Qxyv) \to \exists u Pfau \\
&\equiv \exists u(\forall x \exists v\,(Pxz \vee Qxyv) \to Pfau) \\
&\equiv \exists u \exists x \forall v((Pxz \vee Qxyv) \to Pfau) = fnp(\varphi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
fnp(\varphi) &\equiv \exists x \forall v((Pxz \vee Qxyv) \to Pfab) \\
&\equiv \forall v((Pcz \vee Qcyv) \to Pfab) \\
&\equiv \forall v(\neg\,(Pcz \vee Qcyv) \vee Pfab) \\
&\equiv \forall v((\neg Pcz \wedge \neg Qcyv) \vee Pfab) \\
&\equiv \forall v((\neg Pcz \vee Pfab) \wedge (\neg Qcyv \vee Pfab)) = fns(\varphi)
\end{aligned}
$$

Entonces la forma clausular de φ es

$$(\neg Pcz \vee Pfab) \wedge (\neg Qcyv \vee Pfab)$$

2. (**1.5pts**) Hallar todos los posibles resolventes de las siguientes dos cláusulas (donde $f^{(1)}, h^{(1)}$). En cada caso dar el unificador correspondiente.

$$Pxx \vee \neg Pxhx \vee \neg Qxy$$

$$Qfua \vee Puv$$

$$Pxx \vee \neg Pxhx \vee \neg Qxy = \{Pxx, \neg Pxhx, \neg Qxy\}$$
$$Qfua \vee Puv = \{Qfua, Puv\}$$

Vemos que en la primera clausula figura $\neg Pxhx$ y $\neg Qxy$ y por otro lado en la segunda figuran $Qfua$ y Puv.

Entonces tenemos dos resolventes:

$$Res(\{Pxx, \neg Pxhx, \neg Qxy\}, \{Qfua, Puv\}, [u, v := x, hx]) = \{Pxx, \neg Qxy\}, \{Qfxa\}$$

Aquí ya no podemos hacer nada, si bien hay una presencia de Q en un conjunto y en el otro la negación, no hay forma de emparejar los elementos por que en uno figura x y en el otro fx.

Si quisiesemos cambiar la x el error se mandtendria solo con otro elemento del universo.

Vamos con la otra resolvente:

$$Res(\{Pxx, \neg Pxhx, \neg Qxy\}, \{Qfua, Puv\}, [x, y := fu, a]) = \{Pfufu, \neg Pfuhfu, Puv\}$$

Nos volvemos a encontrar con el mismo problema, a pesar de ser el mismo predicado hay distinta cardinalidad en sus funciones y por lo tanto no se puede unificar.

3. (**3pts**) Considere la siguiente información:

   - Cualquier objeto es rojo, verde o azul.
   - Los objetos rojos estan a la izquierda de los objetos verdes.
   - La palangana está a la derecha del huacal.
   - El huacal es verde pero la palangana no.

   Realice lo siguiente:

   - Verifique si la palangana es azul de manera informal, es decir argumentando en español.

     Sabemos que:
     Todos los objetos rojos estan a la izquierda de los objetos verdes.
     La palangana está a la derecha del huacal.
     El huacal es verde pero la palangana no lo es.
     La palangana puede ser roja? No, por que esta a la derecha del huacal y entonces no esta a la izquieda de el huacal.
     Y sabemos que no es verde. Tambíen sabemos que solo hay tres colores, ya descartamos dos entonces afuerza es el restante (azul).
   - ¿ Qué información implícita, es decir, diferente a las cuatro premisas dadas, utilizó en el argumento informal?
     Deducir que si la palangana está a la derecha del huacal, entonces la palanga no puede estar a la izquierda del huacal.
   - Verifique lo mismo pero de manera formal mediante resolución binaria. Defina claramente el glosario a utilizar y muestre la transformación de cada enunciado por separado. En particular debe agregar las fórmulas correspondientes a la información implícita usada en el argumento informal.

     Nuestro universo son los objetos en un cuarto y definimos el siguiente glosario:

$$\begin{aligned} Rx &:= x \text{ es rojo} \\ Vx &:= x \text{ es verde} \\ Ax &:= x \text{ es azul} \\ Ixy &:= x \text{ está a la izquierda de } y \\ Dxy &:= x \text{ está a la derecha de } y \\ a &:= \text{La palangana} \\ b &:= \text{EL huacal} \end{aligned}$$

     Así formalizamos la información inicial:

     - Cualquier objeto es rojo, verde o azul.

$$\forall x(Rx \lor Vx \lor Ax)$$

     - Los objetos rojos estan a la izquierda de los objetos verdes.

$$\forall x \forall y((Rx \land Vy) \to Ixy)$$

- La palangana está a la derecha del huacal.

$$Dab$$

- El huacal es verde pero la palangana no.

$$Vb \land \neg Va$$

- Si x está a la derecha de y, entonces x no puede estar a la izquierda de y.

$$\forall x \forall y Dxy \to \neg Ixy$$

Queremos verificar que

$$\{\forall x(Rx \lor Vx \lor Ax), \forall x \forall y((Rx \land Vy) \to Ixy), Dab, Vb \land \neg Va, \} \models Aa$$

La forma clausular de las premisas y la conclusión negada es:

$$\{Rx \lor Vx \lor Ax, \neg Rx \lor \neg Vy \lor Ixy, Dab, Vb, \neg Va, \neg Dxy \lor \neg Ixy, \neg Aa\}$$

Derivación mediante resolución:

1.	$Rx \lor Vx \lor Ax$	Hip.
2.	$\neg Rx \lor \neg Vy \lor Ixy$	Hip.
3.	Dab	Hip.
4.	Vb	Hip.
5.	$\neg Va$	Hip.
6.	$\neg Dxy \lor \neg Ixy$	Hip.
7.	$\neg Aa$	Hip.
8.	$\neg Iab$	Res(3,6, [x, y:= a, b])
9.	$\neg Ra \lor \neg Vb$	Res(2,8, [x, y:= a, b])
10.	$\neg Ra$	Res(4,9, [])
11.	$Va \lor Aa$	Res(1,10, [x:=a])
12.	Aa	Res(5,10, [])
13.	$\square$	Res(7,12, [])

Dado que la cláusula vacía fue obtenida podemos concluir que la consecuencia lógica original es válida.

- ¿ Puede resolverse este problema en PROLOG ? Justifique su respuesta.

  En clase vimos que en PROLOG sólo se permiten clausulas definidas o de Horn. Pero tambien tiene otras limitaciónes[1], como no aceptar hechos con una o más $\lor$. Entonces no hay forma en PROLOG de escribir $Rx \lor Vx \lor Ax$. Con lo que con la info dada no se podría.

[1] https://faculty.nps.edu/ncrowe/book/chap14.html

4. (**2pts**) Considera el siguiente programa lógico $\mathbb{P}_1$.

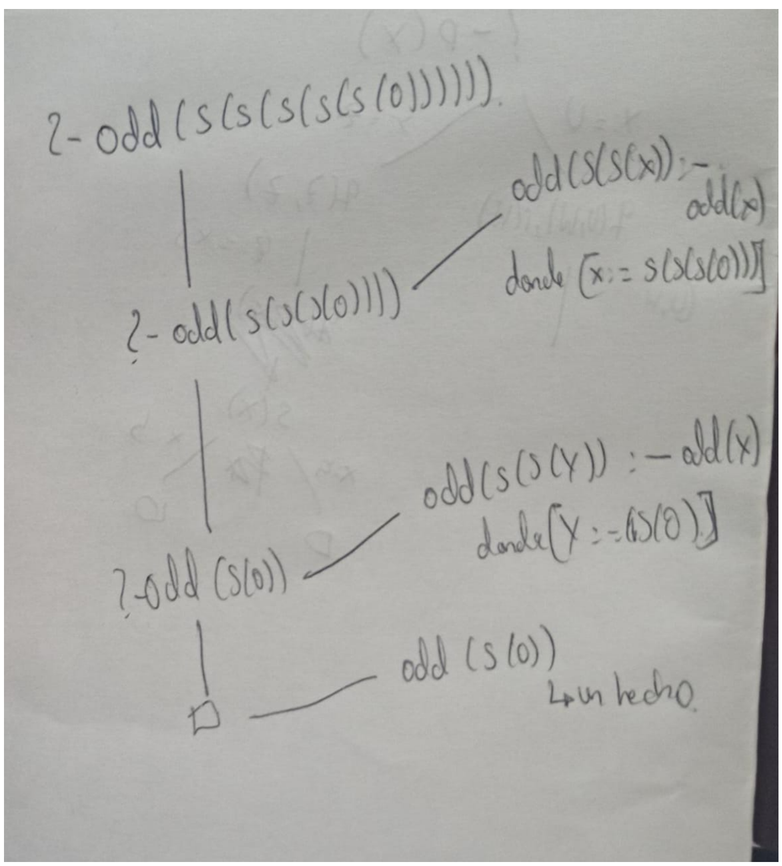
```
1.  odd(s(0)).
2.  odd(s(s(X)):-odd(X).
```

Construya el árbol SLD (árbol binario) para la siguiente meta: $G_1 =? - odd(s(s(s(s(s(0))))))$.

Hay que observar que el programa tiene un hecho y una única regla, entonces no hay mucho que hacer en el arbol. Describimos la rama de éxito para la meta $G_1 =? - odd(s(s(s(s(s(0))))))$.:

1.	$odd(s(0))$	Hip.
2.	$odd(s(s(X))) : -odd(X)$	Hip.
3.	$? - odd(s(s(s(s(s(0))))))$	Meta
4.	$? - odd(s(s(s(0))))$	SLDRes(2,3, [X:= s(s(s(0)))])
5.	$? - odd(s(0))$	SLDRes(2,4, [X:= s(0)])
6.	$\square$	SLDRes(1, 5, [])

Entonces creo que el arbol se veria algo así:



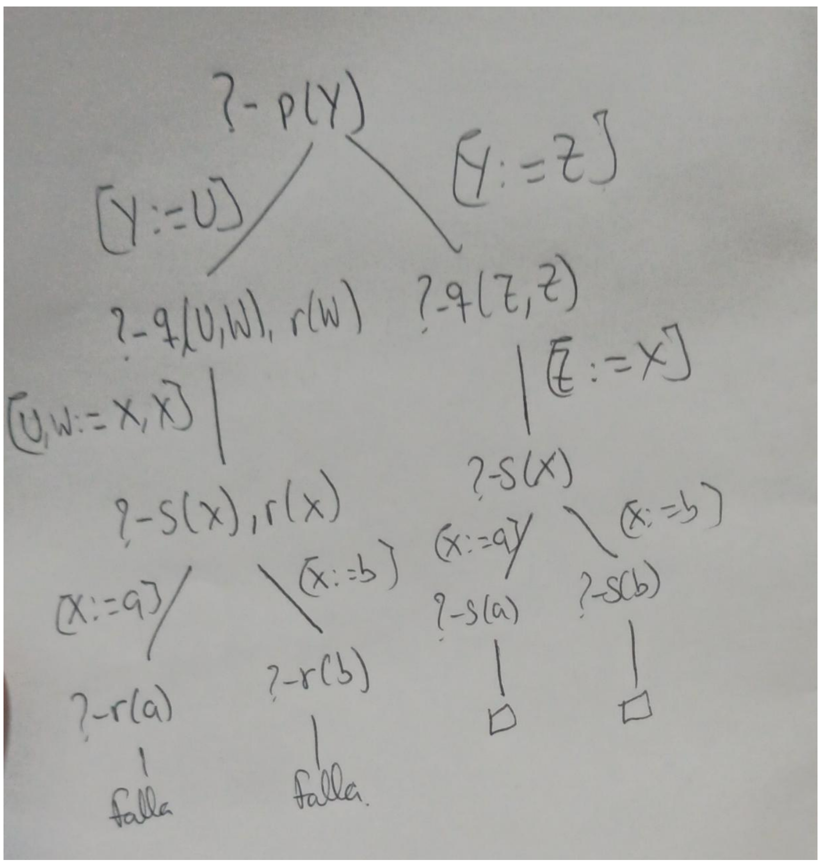
(No pude hacer que las aristas fueran para arriba, una disculpa).

5. (**2pts**) Considera el siguiente programa lógico $\mathbb{P}$:

```
1.  s(a).
2.  s(b).
3.  p(U) :- q(U,W),r(W).
4.  p(Z) :- q(Z,Z).
5.  q(X,X):- s(X).
4.  r(L):- q(L,R).
```

Muestre el árbol de búsqueda para la meta $G = ?. - p(Y)$.

Tuve problemas para ponerle texto a las aristas, trate de hacerlos con tikz como en los examenes pasados pero no pude. Si tienen alguna sugerencía por favor comentenla aquí. De nuevo una disculpa, les adjunto imagen:



6. (**Extra: hasta 2pts.**) Verifique la validez del siguiente argumento mediante resolución binaria, donde $f^{(2)}, g^{(1)}$:

$$\begin{array}{l} Lfxygz \vee \neg Lyz \\ \neg Lfxfcfdaw \\ \hline \therefore \neg Lab \end{array}$$

7. (**Rescate del parcial 2 (hasta 2 puntos)**) Sean $\mathcal{L} = \{P^{(2)},\ R^{(1)},\ h^{(1)}\}$ y $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{I} \rangle$ donde $M = \{a, b, c\}$ y

$\mathcal{P}^{\mathcal{I}} = \{(a,b),(a,a),(b,b),(c,b)\}$
$\mathcal{R}^{\mathcal{I}} = \{a,c\}$
$h^{\mathcal{I}}(a) = b,\ h^{\mathcal{I}}(b) = b,\ h^{\mathcal{I}}(c) = a$

a) Decidir si $\mathcal{M} \models_{\sigma} \forall x(Pxy \to \neg Rhx)$ donde $\sigma(y) = a$

b) Hallar un estado σ tal que $\mathcal{M} \models_{\sigma} Pxhx \wedge (Rx \to Ry)$

c) Decidir si $\mathcal{M} \models \forall x(Rx \to \exists y(Pxhy \wedge Pxy))$