Tarea Examen 4

Diego Méndez Medina

1. **(2.5pts.)** Considere los siguientes programas funcionales acerca de listas:

```
lg [] = 0                    dupl [] = []
lg (x:xs) = 1 + lg xs        dupl (x:xs) = (x:(x: dup xs))
```

Defina un conjunto adecuado de ecuaciones E y construya una **derivación formal** en lógica ecuacional del secuente

$$E \vdash \texttt{lg}\,(\texttt{dupl}\,\ell) = 2 * (\texttt{lg}\,\ell).$$

Puede usar las reglas de cálculo de Birkhoff o bien las reglas de reescritura (REWRITE).

Recuerde que todas las variables en ecuaciones están implícitamente cuantificadas universalmente por lo que la prueba del secuente requiere usar inducción, es decir, primero derive el secuente para $\ell =_{def} [\,]$ y posteriormente para $\ell =_{def} (x : xs)$ agregando la correspondiente hipótesis de inducción al contexto E. Es recomendable hacer la inducción de manera informal primero para así identificar con exactitud todas las ecuaciones que deben figurar en E.

Solución:

Comencemos con el caso base, para este caso tomamos E como las propiedades elementales de las litas y números naturales, tambíen la definición de las funciones lg y $dupl$. De acuerdo a sus definiciones tenemos lo siguiente:

1.	$E \vdash dupl([\,]) = [\,]$	REFL.
2.	$E \vdash lg([\,]) = 0$	REFL.
3.	$E \vdash 2 * 0 = 0$	REFL.
4.	$E \vdash lg(dupl([\,])) = lg([\,])$	CONGR. lg (1)
5.	$E \vdash lg([\,]) = 2 * lg([\,])$	TRANS. $2, 3$
6.	$E \vdash lg(dupl([\,])) = 2 * lg([\,])$	TRANS. $4, 5$

Entonces para $\ell = [\,]$ se cumple $E \vdash lg(dupl([\ell])) = 2 * lg([\ell])$

Para hacer el paso inductivo es decir que $\ell = (x : xs)$,en la base de conocimiento E necesitamos saber que para la cadena xs se cumple la propiedad deseada. Entonces sea $lg(\ell) = n$, para este caso especifico solo necesitamos que se cumpla para xs, pero como no sabemos quien sea en E ahora se encuentra:

$$\forall y(lg(y) = n-1 \to lg(dupl(y)) = 2 * lg(y))$$

Entonces se cumple para toda cadena de longitud $n-1$, ahora demostraremos que $E \vdash lg(dupl(\ell)) = 2 * (lg\ \ell)$.

1.	$E \vdash dupl((x : xs)) = (x : (x : dupl\ xs))$	REFL.
2.	$E \vdash lg(dupl(xs)) = 2 * lg(xs)$	REFL.
3.	$E \vdash lg((x : (x : dupl\ xs))) = 2 + lg(dupl\ xs)$	REFL.
4.	$E \vdash lg(dupl((x : xs))) = lg((x : (x : dupl\ xs)))$	CONGR. $(3), (1)$
5.	$E \vdash lg(dupl((x : xs))) = 2 + lg(dupl\ xs)$	TRANS $(3), (4)$
6.	$E \vdash 2 * (\ lg(x : xs)) = 2 * (1 + lg\ xs)$	Def. lg
7.	$E \vdash 2 * (1 + lg\ xs) = 2 + 2 * lg\ xs$	Distributividad de $*$
8.	$E \vdash 2 * (\ lg(x : xs)) = 2 + 2 * lg\ xs$	TRANS.(6)(7)
9.	$E \vdash 2 * (\ lg(x : xs)) = 2 + lg(dupl(xs))$	CONGR. $+$ (2)(8)
10.	$E \vdash 2 + lg(dupl(xs)) = 2 * (\ lg(x : xs))$	SYM.(9)
11.	$E \vdash lg(dupl((x : xs))) = 2 * (\ lg(x : xs))$	TRANS $+$ (5)(1 $=$

Como n era arbitraría, al igual que el elemento x. Probamos que se cumple para de longitud 0. Que se cumpla para todas las cadenas de longitud $n-1$ implica que tambíen se cumpla para las de n. Con una base de conocimiento E definida como lo fue a lo largo del ejercicio concluimos:

$$E \vdash lg(dupl(\ell)) = 2 * (lg\ \ell)$$

.

2. **(2.5pts.)** Demuestra los siguientes argumentos utilizando las reglas del cálculo de secuentes. Si fuera necesaria alguna demostración adicional debes justificarla.

   a) $\exists x Qx,\ \forall x(Qx \land \exists y Py \to Qfx),\ \forall z(Qz \to Qgz) \vdash Pb \to \exists w Qgfw$.

   Solución:

1.	$P(b),\ Q(x),\ Q(g(f(u)),\ P(v) \to Q(f(g(h(u)))),\ \forall z(Q(z) \to Q(g(z)) \vdash Q(g(f(u)))$	H
2.	$P(b),\ Q(x),\ Q(g(f(u)),\ \exists y P(y) \to Q(f(g(h(u)))),\ \forall z(Q(z) \to Q(g(z)) \vdash Q(g(f(u)))$	$\exists$
3.	$P(b),\ \exists x Q(x),\ Q(g(f(u)),\ \exists y P(y) \to Q(f(g(h(u)))),\ \forall z(Q(z) \to Q(g(z)) \vdash Q(g(f(u)))$	$\exists$
4.	$P(b),\ \exists x Q(x),\ Q(g(f(u)) \land \exists y P(y) \to Q(f(g(h(u)))),\ \forall z(Q(z) \to Q(g(z)) \vdash Q(g(f(u)))$	$\land$
5.	$P(b),\ \exists x Q(x),\ \forall x Q(x) \land \exists y P(y) \to Q(f(x)),\ \forall z(Q(z) \to Q(g(z)) \vdash Q(g(f(u)))$	$\forall$
6.	$P(b),\ \exists x Q(x),\ \forall x Q(x) \land \exists y P(y) \to Q(f(x)),\ \forall z(Q(z) \to Q(g(z)) \vdash \exists w Q(g(f(w)))$	$\forall$
7.	$\exists x Q(x),\ \forall x Q(x) \land \exists y P(y) \to Q(f(x)),\ \forall z(Q(z) \to Q(g(z)) \vdash P(b) \to \exists w Q(g(f(w)))$	$-$

b) $\forall x \exists y (Px \to Rxy) \vdash \forall y (Py \to \exists x Ryx)$

Solución:

1.	$Px \vdash Px$	HIP.
2.	$Ryz \vdash Ryz$	HIP.
3.	$Px \to Ryz,\ Py \vdash Ryz$	$\to L$
4.	$Px \to Ryz,\ Py \vdash \exists x Ryx$	$\exists R$ 3
5.	$\exists z(Px \to Ryz),\ Py \vdash \exists x Ryx$	$\exists L$ 4
6.	$\forall x \exists z(Px \to Ryz),\ Py \vdash \exists x Ryx$	$\forall L$ 5
7.	$\forall x \exists z(Px \to Ryz) \vdash Py \to \exists x Ryx$	$\forall L$ 6
8.	$\forall x \exists z(Px \to Ryz) \vdash \forall y(Py \to \exists x Ryx)$	$\forall R$ 7

3. **(2.5pts.)** Deriva los siguientes secuentes respetando el nivel de negación indicado y usando exclusivamente las reglas de inferencia para negación de cada sistema:

a) $\vdash_m \neg\neg\neg A \to \neg A$

Solución

1.	$\neg\neg\neg A, A \vdash \neg\neg\neg A$	HIP.
2.	$\neg\neg\neg A, A, \neg A \vdash \neg A$	HIP.
3.	$\neg\neg\neg A, A, \neg A \vdash A$	HIP.
4.	$\neg\neg\neg A, A, \neg A \vdash \bot$	$def.\neg$ 2, 3
5.	$\neg\neg\neg A, A \vdash \neg\neg A$	$def.\neg$ 4
6.	$\neg\neg\neg A, A \vdash \bot$	$def.\neg$ 1, 4
7.	$\neg\neg\neg A \vdash \neg A$	$def.\neg$ 6
8.	$\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A$	$\to I$ 7

b) $\vdash_i \neg A \lor B \to A \to B$

Solución

1.	$\neg A, A \vdash A$	HIP.
2.	$\neg A, A \vdash \neg A$	HIP.
3.	$\neg A, A \vdash B$	$\bot$ E 1, 2
4.	$B, A \vdash B$	HIP.
5.	$\neg A \lor B, A \vdash B$	$\lor L$ 3, 4
6.	$\neg A \lor B \vdash A \to B$	$\to R$ 5
7.	$\vdash \neg A \lor B \to A \to B$	$\to R$ 6

c) $\vdash_c (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

Solución:

1.	$A \vdash \bot$	HIP.
2.	$\vdash \neg A$	$\neg I$ 1
3.	$B, \bot \vdash A$	HIP.
4.	$B, \neg B \vdash A$	A 3
5.	$B \vdash \neg B \to A$	$\to R$ 4
6.	$\bot \to B \vdash \neg A$	$\to I$ 2
7.	$\neg A \to B \vdash \neg B \to A$	$\to I$ 6
8.	$\vdash \neg A \to B \to \neg B \to A$	$\to R$ 7

4. **(2.5pts.)** Muestre lo siguiente mediante una derivación por tácticas, indica en cada paso la táctica usada.

a) $H_1 : \exists x Fx \vee \exists x Gx \vdash \forall x(Fx \to Gx) \to \exists x Gx$

Solución:

1.	$H : \exists x Fx \vee \exists x Gx,\ H_0 : \forall x(Fx \to Gx) \vdash \exists x Gx$	intros
2.	$H' : \exists x Fx \vdash \exists x Gx,\ H'' : \exists x Gx\ H_0 : \forall x(Fx \to Gx) \vdash \exists x Gx$	destruct H
3.	$H' : Fx \vdash \exists x Gx,\ H'' : \exists x Gx,\ H_0 : \forall x(Fx \to Gx) \vdash \exists x Gx$	destruct H'
4.	$H' : Fx \vdash Gx,\ H'' : \exists x Gx,\ H_0 : \forall x(Fx \to Gx) \vdash \exists x Gx$	exists x
5.	$H' : Fx \vdash Fx,\ H'' : \exists x Gx,\ H_0 : \forall x(Fx \to Gx) \vdash \exists x Gx$	apply H_0
6.	$H'' : \exists x Gx,\ H_0 : \forall x(Fx \to Gx) \vdash \exists x Gx$	apply H'
7.	$H'' : Gx,\ H_0 : \forall x(Fx \to Gx) \vdash \exists x Gx$	destruct H''
8.	$H'' : Gx,\ H_0 : \forall x(Fx \to Gx) \vdash Gx$	exists x
9.	$\square$	apply H''

b) $H_1 : \forall x(Px \vee Qx \to \neg Rx),\ H_2 : \forall x(Sx \to Rx) \vdash \forall x(Px \to \neg Sx \vee Tx)$

Solución:

1.	$\vdash Px \to \neg Sx \vee Tx$	
2.	$H_2 : Px \vdash \neg Sx \vee Tx$	intro
3.	$H_2 : Px \vdash \neg Sx$	left
4.	$H_2 : Px \vdash Px \vee Qx;\ H_2 : Px \vdash \neg Sx$	assert $Px \vee Qx$
5.	$H_2 : Px \vdash Px;\ H_2 : Px \vdash \neg Sx$	left
6.	$H_2 : Px \vee Qx \vdash \neg Sx$	assumption
7.	$H_1 : Px \vee Qx \to \neg Rx,\ H_2 : Px \vee Qx \vdash \neg Sx$	intro
8.	$H_1 : Px \vee Qx \to \neg Rx\ H_2 : Px \vee Qx \vdash \neg Sx,\ H_3 : Px \vee Qx \to \neg Rx \vdash \neg Rx$	assert $\neg Rx$
9.	$H_1 : Px \vee Qx \to \neg Rx\ H_2 : Px \vee Qx \vdash \neg Sx,\ H_3 : Px \vee Qx \to \neg Rx \vdash Px \vee Qx$	apply H_2
10.	$H_1 : Px \vee Qx \to \neg Rx\ H_2 : Px \vee Qx \vdash \neg Sx,\ H_3 : Px \vee Qx \to \neg Rx \vdash \neg Rx$	assumption
11.	$H_1 : Px \vee Qx \to \neg Rx\ H_2 : Px \vee Qx \vdash \neg Sx,\ H_3 : ... \vdash \neg Rx,\ H_4 : Sx \vdash \bot$	intro
12.	$H_1 : Px \vee Qx \to \neg Rx\ H_2 : Px \vee Qx \vdash \neg Sx,\ H_3 : ... \vdash \neg Rx,\ H_4 : Sx \vdash \bot,\ H_5 : \vdash Rx$	applyH_3
13.	$H_1 : Px \vee Qx \to \neg Rx\ H_2 : Px \vee Qx \vdash \neg Sx,\ H_3 : ... \vdash \neg Rx,\ H_4 : Sx \vdash \bot,\ H_5 : \vdash Sx$	applyH_2
14.	$\square$	assumption

5. **(Extra, hasta 3 pts.)** Derive el siguiente secuente ya sea usando cálculo de secuentes o tácticas, justificando cada paso de la derivación correspondiente (mencione el nivel de negación usado y por qué prefiere el método utilizado.):

$$(C \to M) \to (N \to P), (C \to N) \to (N \to M),\ (C \to P) \to \neg M,\ \ C \to N \quad \vdash\ \neg C$$

LA SIGUIENTE SI LA HICE.

LA SIGUIENTE SI LA HICE.

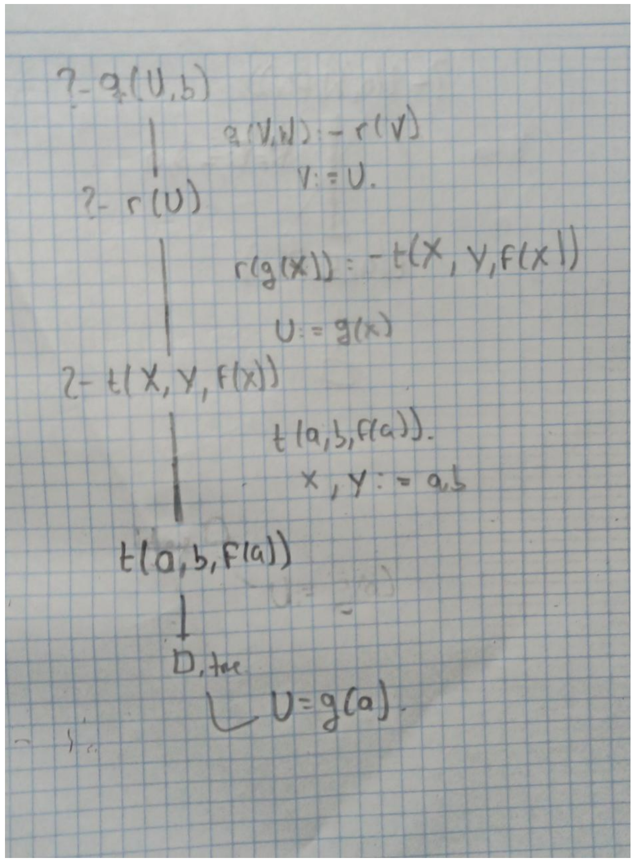
LA SIGUIENTE SI LA HICE.

LA SIGUIENTE SI LA HICE.

6. (**Rescate del parcial 3 (hasta 2 puntos**) Considera el siguiente programa lógico:

```
1. r(g(X)) :- t(X,Y,f(X)).
2. t(a,b,f(a)).
3. q(V,W) :- r(V).
```

a) Obtén una respuesta para la meta `?- q(U,b).` mostrando el árbol SLD.



b) Muestra el árbol de búsqueda para la meta `?- t(a,W,f(V)).`