Práctica 7 de álgebra 1

Comunidad algebraica

last update: 28/06/2024

Un poco de teoría

- *Operaciones:*

  $+$: Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$

  $\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$

  $\cdot$: Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$

  $\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j) X^k \in \mathbb{K}[X]$

- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo $\rightarrow f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h, \ \forall f,\ g,\ h \in \mathbb{K}[X]$

- *Algoritmo de división*: $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos q y $R \in \mathbb{K}[X]$ tal que $f = q \cdot g + R$ con $\mathrm{gr}(()R) < \mathrm{gr}(()f)$ o $R = 0$

- α es raíz de $f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$

- *Máximo común divisor:* Polinomio mónico de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.

  - $(f : g) \mid f$ y $(f : g) \mid g$
  - $f = (f : g) \cdot k_f$ y $g = (f : g) \cdot k_g$ con k_f y k_g en $\mathbb{K}[X]$
  - Dos polinomios son coprimos si $(f : g) = 1 \iff f \neq g$

- *Raíces múltiples:*
  Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se dice que:

  - α es raíz <u>múltiple</u> de $f \Leftrightarrow f = (x - \alpha)^2 q$ para algún $q \in \mathbb{K}[X]$
  - α es raíz <u>simple</u> de $f \Leftrightarrow x - \alpha \mid f$ en $\mathbb{K}[X]$, pero $(X - \alpha)^2 \nmid f$ en $\mathbb{K}[X] \Leftrightarrow f = (X - \alpha) q$ para algún $q \in \mathbb{K}[X]$ tal que $q(\alpha) \neq 0$.
  - Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Se dice que α es raíz de multiplicidad (exactamente) m de f, y se nota $\mathrm{mult}(\alpha; f) = m \iff (X - \alpha)^m \mid f$, pero $(x - \alpha)^{m+1} \nmid f$.
    O equivalentemente, $f = (X - \alpha)^m q$ con $q \in \mathbb{K}[X]$, pero $q(\alpha) \neq 0$
  - Sea $f \in \mathbb{K}[X]$ no nulo $\mathrm{mult}(\alpha; f) \leq \mathrm{gr}(f)$:

- Vale que α es raíz múltiple de $f \iff f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) = 0 \iff \alpha$ es raíz de $(f : f')$, $X - \alpha \mid (f : f')$

  - $\mathrm{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0$ y $\mathrm{mult}(\alpha; f') = m - 1$

$$- \ \mathrm{mult}(\alpha; f) = m \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{mult}(\alpha; f) \geq m \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}} \right\} \begin{array}{c} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)(\alpha)=0} \end{array} \\ \mathrm{mult}(\alpha; f) = m \quad \} \ f^{m)(\alpha)\neq 0} \end{array} \right.$$

Ejercicios extras:

1.

a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} > 0$ tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\frac{3\pi}{2}$

b) Para cada valor de $\mathbf{c}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

---

a) Si la raíz $\alpha = re^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) \Rightarrow f(r(-i)) = 0$

Voy a usar que: $\star^1 \begin{cases} (-i)^2 &= -1 \\ (-i)^3 &= i \\ (-i)^4 &= 1 \\ (-i)^5 &= -i \\ (-i)^6 &= -1 \end{cases}$

$f(r(-i)) = (r(-i))^6 - 4(r(-i))^5 - (r(-i))^4 + 4^3 + 4(r(-i))^2 + 48(r(-i)) + \mathbf{c} \overset{\star^1}{=}$

$-r^6 + 4r^5 i - r^4 - 4r^3 i - 4r^2 - 48ri + \mathbf{c} = 0 \iff \begin{cases} \text{Re} : -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 \\ \text{Im} : r(4r^4 - 4r^2 - 48) = 0 \xrightarrow[r^2 = y \text{ y } r \in \mathbb{R}_{>0}]{\text{bicuadrática}} r^2 = 3 \end{cases}$

Por lo tanto si $\mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 = (r^2)^3 + (r^2)^2 + 4r^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{c} = 48}$ ✓
con raíces $\pm\sqrt{3}i$ dado que $f \in \mathbb{R}[X]$

b) Debe ocurrir que $(X - \sqrt{3}i))(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^6 & -4X^5 & -X^4 & +4X^3 & +4X^2 & +48X & +48 & X^2+3 \\
\cline{8-8}
-X^6 & & -3X^4 & & & & & X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 \\
\cline{1-3}
 & -4X^5 & -4X^4 & +4X^3 & & & & \\
 & 4X^5 & & +12X^3 & & & & \\
\cline{2-4}
 & & -4X^4 & +16X^3 & +4X^2 & & & \\
 & & 4X^4 & & +12X^2 & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 16X^3 & +16X^2 & +48X & & \\
 & & & -16X^3 & & -48X & & \\
\cline{4-6}
 & & & & 16X^2 & & +48 & \\
 & & & & -16X^2 & & -48 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

$f = (X^2 + 3)\underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_{q}$ como f tiene al menos una raíz doble puedo ver las raíces de la derivada de q:

$q' = 4X^3 - 12X^2 - 8X + 16 = 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 16) = 0 \xrightarrow[\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16]{\text{Posibles raíces, Gauss :(}} q'(-2) = 0$, pero $f(-2) \neq 0$

$$\xrightarrow[\text{bajar grado}]{\text{divido para}} \qquad \begin{array}{rrr|l} X^3 - 3X^2 & -2X & +16 & X+2 \\ \cline{4-4} -X^3 - 2X^2 & & & X^2 - 5X + 8 \\ \cline{1-1} -5X^2 & -2X & & \\ 5X^2 & +10X & & \\ \cline{1-2} & 8X & +16 & \\ & -8X & -16 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{de}]{\text{busco raíces}} X^2 - 5X + 8 = 0 \iff \alpha = 5 \pm \ldots$$

Algo estoy haciendo mal, esto se hizo eterno☠☠☠

Ejercicios de la guía:

---

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$,

ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$,

iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$,

---

i) *coeficiente principal:* 4^{77}
grado: $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:* $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$
grado: 28

iii) *coeficiente principal:* $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)}_{f}{}^4 + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_{g}$

Cuando sumo me queda: $\text{cp}(f^4) - \text{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0 \Rightarrow gr(f^4 + g) < 20$
$\rightarrow$ Calculo el $\text{cp}(f^4 + g)$ con $\text{gr}(f^4 + g) = 19$.
Laburo a f:

$$\xrightarrow[\text{fórmula de } f\cdot g]{\text{para usar}} (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = (-3X^5 + 1X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2$$

$$f^2 \cdot f^2 = \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \star^2$$

$$\sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \xrightarrow[\text{el término con } k=19]{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \stackrel{\star^1}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10}$$

$$\xrightarrow[\text{ojímetro}]{b_{10} \text{ sale a}} b_{10} = (-3)^2 = 9$$

$$\xrightarrow[\text{a usar } \sum f\cdot g \text{ en } k=9]{a_9 \text{ no tan fácil, volver}} f \cdot f = \sum_{k=0}^{10} \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow{k=9} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \stackrel{\star^3}{=} c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot c_4 \cdot d_5$$

$$\left.\begin{cases} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{d_5 \text{ sale a}} d_5 = -3 \\ \xrightarrow[\text{ojímetro}]{c_4 \text{ sale a}} c_4 = 1 \end{cases}\right\} \rightarrow a_9 = -6$$

$$\left.\begin{cases} \text{cp}(f^4) = 2 \cdot (-6) \cdot (9) = -108 \\ \text{cp}(g) = 19 \end{cases}\right\} \rightarrow \boxed{\text{cp}(f^4 + g) = -89} \quad \checkmark$$

$\star^1$: Sabemos que el $\text{gr}(f^4) = 20 \Rightarrow \text{gr}(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \leq 10$ solo puede ocurrir *cuando los exponentes* $\begin{Bmatrix} i = 10,\ j = 9 \\ \vee \\ i = 9,\ j = 10 \end{Bmatrix}$

$\star^2$: porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

$\star^3$: Idem $\star^1$ para el polinomio f

grado: 19

---

2. Hacer!

---

3. Hacer!

---

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$ y $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$ y $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iii) $f = X^n - 1$ y $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

---

i)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
5X^4 & +2X^3 & & -X & +4 & X^2+2 \\ \cline{6-6}
-5X^4 & & -10X^2 & & & 5X^2+2X-10 \\ \hline
& 2X^3 & -10X^2 & -X & & \\
& -2X^3 & & -4X & & \\ \hline
& & -10X^2 & -5X & +4 & \\
& & 10X^2 & & +20 & \\ \hline
& & & -5X & +24 &
\end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

ii)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
4X^4 & +X^3 & & & -4 & 2X^2+1 \\ \cline{6-6}
-4X^4 & & -2X^2 & & & 2X^2+\frac{1}{2}X-1 \\ \hline
& X^3 & -2X^2 & & & \\
& -X^3 & & -\frac{1}{2}X & & \\ \hline
& & -2X^2 & -\frac{1}{2}X & -4 & \\
& & 2X^2 & & +1 & \\ \hline
& & & -\frac{1}{2}X & -3 &
\end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$
En $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $\rightarrow 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2+1) \cdot \underbrace{(2X^2 + 4X + 6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X+4)}_{r[X]}$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división se asoma la idea de que:

$$X^n - 1 = (X-1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} X^j}_{q[X]} + \underbrace{0}_{r[X]}$$

Inducción: Quiero probar que $p(n) : X^n - 1 = (X-1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1) : X^1 - 1 = (X-1)\underbrace{\sum_{j=0}^{1-1} X^j}_{X^0=1} \Rightarrow p(1)$ es Verdadero $\checkmark$

Paso inductivo:
$\underbrace{p(k) : X^k - 1 = (X-1)\cdot\sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI}$ es Verdadera $\overset{?}{\Rightarrow} p(k+1) : X^{k+1} - 1 = (X-1)\cdot\sum_{j=0}^{k} X^j$ es Verdadera

$(X-1)\cdot\sum_{j=0}^{k} X^j = (X-1)\cdot(\sum_{j=0}^{k-1} X^j + X^k) = \underbrace{(X-1)\cdot\sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI} + (X-1)\cdot X^k = X^k - 1 + X^{k+1} - X^k =$

$X^{k+1} - 1 \quad \checkmark$

Dado que $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera $p(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

---

5. Hacer!

---

6. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in \mathbb{K}[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in \mathbb{K}[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \,|\, f-g$. En tal caso se escribe $f \equiv g\ (h)$.

i) Probar que $\equiv\ (h)$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{K}[X]$.

ii) Probar que si $f_1 \equiv g_1\ (h)$ y $f_2 \equiv g_2\ (h)$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2\ (h)$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2\ (h)$.

iii) Probar que si $f \equiv g\ (h)$ entonces $f^n \equiv g^n\ (h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iv) Probar que r es el resto de la división de f por h si y solo si $f \equiv r\ (h)$ y $r = 0$ o $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

---

i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*,

- *reflexiva*: Es f congruente a f módulo h?
  $f \equiv f\ (h) \iff h \,|\, f - f = 0 \iff h \,|\, 0 \quad \checkmark$
- *simétrica*: Si $f \equiv g\ (h) \overset{?}{\iff} g \equiv f\ (h)$
  $f \equiv g\ (h) \iff h \,|\, f - g \iff h \,|\, -(g-f) \iff h \,|\, g - f \iff g \equiv f\ (h) \quad \checkmark$
- *transitiva*: Si $\begin{cases} f \equiv g\ (h) \\ g \equiv p\ (h) \end{cases} \overset{?}{\iff} f \equiv p\ (h).$

  $\begin{cases} h \,|\, f - g \\ h \,|\, g - p \end{cases} \xrightarrow[\to F_2]{F_1 + F_2} \begin{cases} h \,|\, f - g \\ h \,|\, f - p \end{cases} \to f \equiv p\ (h) \quad \checkmark$

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en $\mathbb{K}[X]$

ii) Si $\begin{cases} f_1 \equiv g_1\ (h) \\ f_2 \equiv g_2\ (h)\ \star^1 \end{cases}$

$f_1 \equiv g_1\ (h) \iff h \,|\, f_1 - g_1 \Rightarrow h \,|\, f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2\ (h) \overset{\star^1}{\iff} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2\ (h)$

iii) *Inducción:* Quiero probar $p(n)$: Si $f \equiv g\ (h)$ entonces $f^n \equiv g^n\ (h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: $p(1) : f^1 \equiv g^1\ (h) \stackrel{\star^2}{}$ Verdadera ✓

Paso inductivo: $p(k) : \underbrace{f^k \equiv g^k\ (h)}_{HI}$ es verdadera $\stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1) : f^{k+1} \equiv g^{k+1}\ (h)$ ¿También lo es?

$$f^k \equiv g^k\ (h) \iff h \mid f^k - g^k \Rightarrow h \mid f \cdot (f^k - g^k) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^k\ (h) \stackrel{\star^2}{\iff} f^{k+1} \equiv g^{k+1}\ (h) \quad ✓$$

Finalmente $p(1), p(k), p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) Hacer!

---

7. Hallar el resto de la división de f por g para:

i) $f = X^{353} - X - 1$ y $g = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$ y $g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, y $g = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$, y $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ (Sugerencia ver **4.** iii))).

---

i) $g \mid g \iff X^{31} - 2 \equiv 0\ (X^{31} - 2) \iff X^{31} \equiv 2\ (g)$

$f = X^{353} - X - 1 = (\underbrace{X^{31}}_{\stackrel{(g)}{\equiv} 2})^{11} X^{12} - X - 1 \stackrel{(g)}{\equiv} 2^{11} X^{12} - X - 1 \to \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} - 1}$

ii) $g \mid g \iff X^6 + 1 \equiv 0\ (X^6 + 1) \iff X^6 \equiv -1\ (g)$

$f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166} X^4 + (X^6)^6 X^4 + (X^6)^3 X^2 + 1 \stackrel{(g)}{\equiv} X^4 + X^4 - X^2 + 1 = 2X^4 - X^2 + 1$
$\to \boxed{r_g(f) = 2X^4 - X^2 + 1}$

¿Qué onda en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

iii) $g \mid g \iff X^{100} - X + 1 \equiv 0\ (X^{100} - X + 1) \iff X^{100} \equiv X - 1\ (g)$

$f = X^{200} - 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 - 3X^{100} X + 2 \stackrel{(g)}{\equiv} (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2$
$\to \boxed{r_g(f) = (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2}$

iv) *Usando la sugerencia*: Del ejercicio **4.** iii) sale que $X^n - 1 = (X-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$

$\xrightarrow[\text{para el } g]{n=5} X^5 - 1 = (X-1)\underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_{g} \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)}\ (g) \quad ✓$

$f = (X^5)^{603} X + 2(X^5)^{366} X^3 - (X^5)^{34} X^4 + (X^5)^{27} X^2 + 2X^4 - X^3 + 1$
$f \equiv \underbrace{X + 2X^3 - X^4 + X^2 + 2X^4 - X^3 + 1}_{= X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = g}\ (g) \iff \boxed{f \equiv 0\ (g)}$

8. Hacer!

---

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$, $g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$,

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X^3 + X$,

iii) $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1$, $g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1$,

---

i)

$$
\begin{array}{l|l}
X^5 \qquad + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 & X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{- X^5 + X^4 + X^3 \qquad - X} & X + 1 \\
\quad X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X + 2 & \\
\quad \underline{- X^4 + X^3 + X^2 \qquad - 1} & \\
\qquad 3X^3 - 5X^2 + X + 1 &
\end{array}
$$

$\xrightarrow{\text{Euclides}} (f : g) = (g : 3X^3 - 55X^2 + X + 1)$

$\xrightarrow[\text{en función de } g]{\text{escribo a } f} f = (X + 1) \cdot g + 3X^3 - 55X^2 + X + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
X^4 - X^3 - X^2 \qquad + 1 & 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{- X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X} & \frac{1}{3}X + \frac{2}{9} \\
\quad \frac{2}{3}X^3 - \frac{4}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + 1 & \\
\quad \underline{- \frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9}} & \\
\qquad - \frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
3X^3 - 5X^2 + X + 1 & - \frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\ \cline{2-2}
\underline{- 3X^3 - \frac{15}{2}X^2 + \frac{21}{2}X} & - \frac{27}{2}X + \frac{225}{4} \\
\quad - \frac{25}{2}X^2 + \frac{23}{2}X + 1 & \\
\quad \underline{\frac{25}{2}X^2 + \frac{125}{4}X - \frac{175}{4}} & \\
\qquad \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
- \frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \\ \cline{2-2}
\underline{\frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X} & - \frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \\
\quad - \frac{7}{9}X + \frac{7}{9} & \\
\quad \underline{\frac{7}{9}X - \frac{7}{9}} & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 &= \big(X^4 - X^3 - X^2 + 1\big) \cdot \big(X + 1\big) + \big(3X^3 - 5X^2 + X + 1\big) \\
X^4 - X^3 - X^2 + 1 &= \big(3X^3 - 5X^2 + X + 1\big) \cdot \big(\tfrac{1}{3}X + \tfrac{2}{9}\big) + \big(- \tfrac{2}{9}X^2 - \tfrac{5}{9}X + \tfrac{7}{9}\big) \\
3X^3 - 5X^2 + X + 1 &= \big(- \tfrac{2}{9}X^2 - \tfrac{5}{9}X + \tfrac{7}{9}\big) \cdot \big(- \tfrac{27}{2}X + \tfrac{225}{4}\big) + \big(\tfrac{171}{4}X - \tfrac{171}{4}\big) \\
- \tfrac{2}{9}X^2 - \tfrac{5}{9}X + \tfrac{7}{9} &= \big(\tfrac{171}{4}X - \tfrac{171}{4}\big) \cdot \big(- \tfrac{8}{1539}X - \tfrac{28}{1539}\big) + 0
\end{aligned}
$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\boxed{\to (f : g) = X - 1}$

ii) $X^6 + X^4 + X^2 + 1 = \left(X^3 + X\right) \cdot X^3 + \left(X^2 + 1\right)$

$X^3 + X = \left(X^2 + 1\right) \cdot X + 0$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow \boxed{(f:g) = X^2 + 1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow \boxed{X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)}$

iii) $\xrightarrow[\text{Euclides}]{\text{Haciendo}}$

$$2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1 = \left(X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1\right) \cdot 2X + \left(X^4 + 2X + 1\right)$$

$$X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1 = \left(X^4 + 2X + 1\right) \cdot \left(X - 2\right) + 3$$

$$X^4 + 2X + 1 = 3 \cdot \left(\tfrac{1}{3}X^4 + \tfrac{2}{3}X + \tfrac{1}{3}\right) + 0$$

El MCD será el último resto no nulo y *mónico* $\rightarrow \boxed{(f:g) = 1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow \boxed{1 = \frac{1}{3}g \cdot (2X^2 - 4X + 1) - \frac{1}{3}f \cdot (X - 2)}$

---

10. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2, f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

Sea $P \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow$ el resto de dividir a P por $X - a$ es $P(a)$.

$f(X) = q(X) \cdot \underbrace{X^3 - 2X^2 - X + 2}_{g(X)} + r(X)$, con $g(X) = (X-2)\cdot(X-1)\cdot(X+1)$ y $r(X) = a^2 + bX + c$, ya que el $\text{gr}(r) < \text{gr}(g) \xrightarrow{\text{evaluar}} \left\{\begin{array}{l} f(1) = -2 = q(1) \cdot \cancelto{0}{g(1)} + r(1) = -2 \\ f(2) = 1 = q(2) \cdot \cancelto{0}{g(2)} + r(2) = 1 \\ f(-1) = 0 = q(-1) \cdot \cancelto{0}{g(-1)} + r(-1) = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{array}\right. \rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array}\right) \rightarrow \boxed{r(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{7}{3}}$$

---

11. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$ en $\mathbb{Q}[X]$.

$$\left\{\begin{array}{l} f(X) = X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1 \\ g(X) = X \cdot (X-1) \cdot (X+1) \end{array}\right. \Rightarrow f = q(X) \cdot g(X) + r(X) \text{ con } \text{gr}(\underbrace{aX^2 + bX + c}_{r(X)}) \leq 2$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_{=0} + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_{=0} + r(1) = 3 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_{=0} + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 = \left\{\begin{array}{ll} 2 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[\text{ecuaciones de } r(X)]{\text{sistema de}} \begin{cases} r(0) = c = 1 \\ r(1) = a + b + 1 = 3 \to a + b = 2 \\ r(-1) = a - b + 1 = \begin{cases} 2 \to a - b = 1 & n \text{ impar} \\ 1 \to a - b = 0 & n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow[\text{impar}]{n} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \boxed{r_{impar}(X) = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1} \quad \checkmark \\ \xrightarrow[\text{par}]{n} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \boxed{r_{par}(X) = X^2 + X + 1} \quad \checkmark \end{cases}$$

---

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $f(X) = X^6 + X^3 - 2$.

Primera raíz: $f(\alpha_1 = 1) = 0 \to f(X) = q(X) \cdot (X - 1)$. Busco $q(X)$ con algoritmo de división.

$$\begin{array}{l|l} X^6 \qquad\qquad + X^3 \qquad\qquad - 2 & X - 1 \\ \hline - X^6 + X^5 & X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2 \\ \quad X^5 & \\ \quad - X^5 + X^4 & \\ \qquad X^4 + X^3 & \\ \qquad - X^4 + X^3 & \\ \qquad\quad 2X^3 & \\ \qquad\quad - 2X^3 + 2X^2 & \\ \qquad\qquad 2X^2 & \\ \qquad\qquad - 2X^2 + 2X & \\ \qquad\qquad\quad 2X - 2 & \\ \qquad\qquad\quad - 2X + 2 & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

El cociente $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ se puede factorizar en grupos como $q(X) = (X^2 + X + 1) \cdot (X^3 + 2)$. Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener $f \in \mathbb{C}[X]$ salen de esos dos polinomios.

$$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X^3 + 2 = 0 \xrightarrow[X = re^{i\theta}]{\text{exponencial}} \left.\begin{cases} r^3 = 2 \to r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \to \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ con } k = 0,\, 1,\, 2. \end{cases}\right\} \to \begin{cases} \alpha_4 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \alpha_5 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ \alpha_6 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

---

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. Probar que $w + w^2 + w^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$

Voy a usar que si $w \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^{6} w^j = 0 \quad (w \neq 1)$

Si $f(X) = X^2 + X + 2$ y $w + w^2 + w^4$ es raíz $\Rightarrow f(w + w^2 + w^4) = 0$

$$(w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8}_{=w} + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2 \cdot \sum_{j=0}^{6} w^j = 0 \quad \checkmark$$

14.

i) Probar que si $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces $X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})]$.

ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

---

i) Voy a usar que si $w \in G_5 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^{4} w^j = 0 \quad (w \neq 1) \star^2 \\ w^k = w^{r_5(k)} \star^1 \end{cases}$

$X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})] = X^2 - (w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + \underbrace{(w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\star^1} = X^2 - X(\underbrace{w^2 + w^{-2} + w + w^{-1}}_{\star^1}) + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2} =$

$X^2 - X(\underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2}) + -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = X^2 - X(-1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0}) - 1 =$

$X^2 + X - 1 \quad \checkmark$

ii) Calculando las raíces a mano de $X^2 + X - 1 \to \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{y} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Pero del resultado del inciso i) tengo que :

$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow[\text{la factorización es}]{\text{sé que una raíz dada}} w + w^{-1} = w + \overline{w} = 2\text{Re}(w) = 2 \cdot \underbrace{\cos(\tfrac{2\pi}{5})}_{\cos\theta \geq 0,\, \theta \in [0, 2\pi]} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\to \boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$

15.

i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y g si y sólo sí a es raíz de $(f : g)$.

ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz en común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

---

i) Hacer!

ii) Busco el $(f : g)$:

$$X^4 + 3X - 2 = \big(X^4 + 3X^3 - 3X + 1\big) \cdot 1 + \big(-3X^3 + 6X - 3\big)$$
$$X^4 + 3X^3 - 3X + 1 = \big(-3X^3 + 6X - 3\big) \cdot \big(-\tfrac{1}{3}X - 1\big) + \big(2X^2 + 2X - 2\big)$$
$$-3X^3 + 6X - 3 = \big(2X^2 + 2X - 2\big) \cdot \big(-\tfrac{3}{2}X + \tfrac{3}{2}\big) + 0$$
$$(f : g) = X^2 + X - 1 \xrightarrow{\text{raíces}} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$
$$X^4 + 3X - 2 = \big(X^2 + X - 1\big) \cdot \big(X^2 - X + 2\big) + 0$$

16. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1,$

ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i,$

iii) $f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2,$

iv) $f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3, \quad a = 2,$

---

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1,$
Hacer!

ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i,$

$$\begin{array}{rrr|l}
X^6 - 3X^4 & & +4 & X^2+1 \\ \cline{4-4}
-X^6 - X^4 & & & X^4 - 4X^2 + 4 \\ \cline{1-1}
-4X^4 & & & \\
4X^4 & +4X^2 & & \\ \cline{1-2}
 & 4X^2 & +4 & \\
 & -4X^2 & -4 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Hacer!

iii) $f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2,$
Hacer!

iv) $f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3, \quad a = 2,$
Hacer!

---

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene solo raíces simples en $\mathbb{C}$.

---

18. Hacer!

---

19. Hacer!

---

20. Hacer!

21. Hacer!

22. Hacer!

23. Hacer!

24. Hacer!

25. Hacer!

26. Hacer!

27. Hacer!

28. Hacer!

29. Hacer!

30. Hacer!

31. Hacer!

32. Hacer!

33. Hacer!

34. Hacer!

35. Hacer!

36. Hacer!

37. Hacer!

---

38. Hacer!

---

39. Hacer!