Álgebra I
Práctica 2 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1.	**4.**	**7.**	**10.**	**13.**	**16.**	**19.**	**22.**
2.	**5.**	**8.**	**11.**	**14.**	**17.**	**20.**	
3.	**6.**	**9.**	**12.**	**15.**	**18.**	**21.**	

- Ejercicios Extras

1. **2.** **3.**

Notas teóricas:

1. Propiedades de la sumatoria y productoria:

- $(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k) + (\sum\limits_{k=1}^{n} b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$
- Sea c un número dado: $\sum\limits_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$
- $(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k) \cdot (\prod\limits_{k=1}^{n} b_k) = \prod\limits_{k=1}^{n} (a_k b_k)$
- Sea c un número dado: $\prod\limits_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = (\prod\limits_{k=1}^{n} c) \cdot (\prod\limits_{k=1}^{n} a_k) = c^n \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$

2. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$

4. Inducción: Sea $H \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que H es un conjunto *inductivo* si se cumplen las dos condiciones siguiente:

- $1 \in H$
- $\forall x, x \in H \Rightarrow x + 1 \in H$

5. Principio de inducción: Sea $p(n), n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales. Si p satisface

- (Caso Base) $p(1)$ es Verdadera.
- (Paso inductivo) $\forall h \in \mathbb{N}$, $p(h)$ *Verdadera* $\Rightarrow p(h+1)$ *Verdadera, entonces* $p(n)$ *es Verdadera* $\forall n \in \mathbb{N}$.

6. Principio de inducción *corrido*: Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $p(n)$, $n \geq n_0$, una afirmación sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si p satisface:

- (Caso Base) $p(n_0)$ es Verdadera.
- (Paso inductivo) $\forall h \geq n_0$, $p(h)$ *Verdadera* $\Rightarrow p(h+1)$ *Verdadera, entonces* $p(n)$ *es Verdadera* $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. explicación de las torres de Hanoi.

   1) $a_1 = 1$
   2) $a_3 = 7$
   3) $a_4 = 15$
   4) $a_9 = a_9 + 1 + a_9 = 2a_9 + 1$

   $\rightarrow \boxed{a_n + 1 = 2a_n + 1}$

2. Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como las torres de Hanoi $a_1 = 1 \wedge a_{n+1} = 2a_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es una sucesión definida por recurrencia.

3. El patrón de las torres de Hanoi parece ser $\underbrace{a_n = 2^n - 1}_{\text{término general}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto puedo probarse por inducción.

$$\begin{cases} \text{Proposición:} p(n) : a_n = 2^n - 1 \\ \text{Caso Base: } p(1) \text{ es verdadero?} a_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } p(h) \text{ es verdadero} \Rightarrow p(h+1) V? \\ \begin{cases} \text{HI} : a_h = 2^h - 1 \\ \text{QPQ} : a_{h+1} = 2^{h+1} \end{cases} \rightarrow \text{cuentas y queda que } \boxed{p(n) \textit{ es } V, \ \forall n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

4. $\sum$ es una def por recurrencia $\rightarrow \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 \wedge \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \ldots$ fácil

Principio de inducción III: Sea $p(n)$ una proposición sobre $\mathbb{N}$. Si se cumple:

1. $p(1) \wedge p(2)\ V$
2. $\forall h \in \mathbb{N},\ p(h) \wedge p(h+1),\ V \Rightarrow p(h+2)\ V$ (paso inductivo), entonces $p(n)$ es verdadera.

$p(n) : a_n = 3^n$

$$\begin{cases} \text{caso base: } a_1 = 3, a_2 = 9 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } \quad \forall h \in \mathbb{N}, p(h) \wedge p(h+1)\ V \Rightarrow p(h+2)\ V \\ \begin{cases} \text{HI: } a_h = 3^h \wedge a_{h+1} = 3^{h+1} \\ \text{Quiero probar que: } a_{h+2} = 3^{h+2} \\ \text{Usando la fórmula de recurrencia sale enseguida} \end{cases} \end{cases}$$

Principio de inducción IV Sea $p(n)$ una proposición sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si se cumple:

1. $p(n_0) \wedge p(n_0+1)\ V$
2. $\forall h \in \mathbb{Z}_{\geq n_0},\ p(h+1) \wedge p(h+2)\, V \Rightarrow p(h+2)\ V$ (paso inductivo), entonces $p(n)$ es verdadera. $\forall n \geq n_0$

Sucesión de Fibonacci: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \forall n \geq 0$
Truco para sacar fórmulas a partir de Fibo.

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 = \begin{Bmatrix} \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \tilde{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix} \rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1 \wedge \tilde{\Phi}^2 = \tilde{\Phi} + 1$$

- defino sucesiones Φ^n que satisfacen la recurrencia de la sucesión de Fibonacci pero no sus condiciones iniciales.
- puedo formar una combineta lineal talque: $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a\Phi^n + b\tilde{\Phi}^n)$ es la sucesión que satisface: $\begin{cases} c_o = a + b \\ c_1 = a\Phi + b\tilde{\Phi} \end{cases}$ y la recurrencia de Fibonacci.
  Resuelvo todo y llego a $\square$

Sucesione de Lucas: Generalizaciones de Fibonacci.$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$
$a_0 = \alpha, a_1 = \beta \wedge a_{n+2} = \gamma a_{n+1} + \delta a_n, \quad \forall n \geq 0,\ con \alpha, \beta, \gamma, \delta$ dados.
Esto lo meto en la ecuación característica: $x^2 - \gamma x - \delta = 0$, necesito raíces distintas.
Notar que $r^2 = \gamma r^1 + \delta$, y lo mismo es para $\tilde{r}$. Las sucesiones (r^n) y $(\tilde{r}^n)$ satisfacen la recurrencia de Lucas, pero no las condiciones iniciales α y β. $c_n = (ar^n + b\tilde{r}^n)$, satisface Lucas, pero las condiciones iniciales son c_0 y c_1 o $\begin{cases} a + b = \alpha \\ ra + \tilde{b} = \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ra + rb = r\alpha \\ ra + \tilde{r}b = \beta \end{cases}$ luego hago lo mismo con $\tilde{r}$ Como resultado: $a = \frac{\beta - \tilde{r}\alpha}{r - \tilde{r}}$

Ejercicios de la guía:

1.

i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

a) $1+2+3+4+\cdots+100$

b) $1+2+4+8+16+\cdots+1024$

c) $1+(-4)+9+(-16)+25+\cdots+(-144)$

d) $1+9+25+49+\cdots+441$

e) $1+3+5+\cdots+(2n+1)$

f) $n+2n+3n+\cdots+n^2$

ii) Reescribir cada una de los siguientes productos usando el símbolo de productoria y/o de factorial.

¿Cómo resolver este ejercicio?
Lo que queremos hacer es compactar la suma para evitar el uso de puntos suspensivos, la notación ideal para esos casos es el símbolo de sumatoria. El primer paso es fijarse en el comportamiento de cada término de nuesta suma. Por ejemplo, en el punto b) notamos que cada término comienza a duplicarse.

i)

a) $1+2+3+4+\cdots+100=\sum\limits_{i=1}^{100} i$

b) $1+2+4+8+16+\cdots+1024=\sum\limits_{i=0}^{10} 2^i$

c) $1+(-4)+9+(-16)+25+\cdots+(-144)=\sum\limits_{i=1}^{12} i^2(-1)^{n+1}$

d) $1+9+25+49+\cdots+441=\sum\limits_{i=0}^{10}(1+2i)^2$

e) $1+3+5+\cdots+(2n+1)=\sum\limits_{i=0}^{n} 2i+1$

f) $n+2n+3n+\cdots+n^2=\sum\limits_{i=1}^{n} in$

ii)

a) $5\cdot 6\cdots 99\cdot 100=\prod\limits_{i=5}^{100} i=\frac{100!}{4!}$

b) $1\cdot 2\cdot 4\cdot 8\cdot 16\cdots 1024=\prod\limits_{i=0}^{10} 2^i$

c) $n\cdot 2n\cdot 3n\cdots n^2=\prod\limits_{i=1}^{n} in=n^n\cdot n!$

---

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes

i) $\sum\limits_{i=6}^{n} 2(i-5)$

ii) $\sum\limits_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$

iii) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$

iv) $\sum\limits_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$

v) $\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$

Llamo t_1, t_2 a los primeros términos y t_{m-1}, t_m a los últimos

i) $\sum\limits_{i=6}^{n} 2(i-5)$

$t_1 = 2(6-5) = 2 \quad t_2 = 2(7-5) = 4$

$t_{m-1} = 2((n-1)-5) = 2n-12 \quad t_m = 2(n-5) = 2n-10$

ii) $\sum\limits_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$

$t_1 = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} \quad t_2 = \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} = \frac{1}{n^2+3n+1}$

$t_{m-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n-1+1)} = \frac{1}{4n^2-2n} \quad t_m = \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{4n^2+2n}$

iii) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$

$t_1 = \frac{n+1}{2} \quad t_2 = \frac{n+2}{4}$

$t_{m-1} = \frac{n+(n-1)}{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2n-2} \quad t_m = \frac{n+n}{2n} = \frac{2n}{2n} = 1$

iv) $\sum\limits_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$

$t_1 = n \quad t_2 = \frac{n}{2}$

$t_{m-1} = \frac{n}{n^2-1} \quad t_m = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

v) $\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$

$t_1 = \frac{n+1}{2-3} = -n-1 \quad t_2 = \frac{n+2}{4-3} = n+2$

$t_{m-1} = \frac{n+(n-1)}{2(n-1)-3} = \frac{2n-1}{2n-5} \quad t_m = \frac{n+n}{2n-3} = \frac{2n}{2n-3}$

---

3. Calcular

i) $\sum\limits_{i=1}^{n}(4i+1)$

ii) $\sum\limits_{i=6}^{n} 2(i-5)$

Para resolver estos ejercicios haremos uso la notas teóricas, en particular 1 y 2.

i) $\sum\limits_{i=1}^{n}(4i+1) = (\sum\limits_{i=1}^{n} 4i) + (\sum\limits_{i=1}^{n} 1) = (4 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} i) + n = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = \boxed{2n^2+3n}$

ii) $\sum\limits_{i=6}^{n} 2(i-5) = 2 \cdot \sum\limits_{i=6}^{n}(i-5) = 2 \cdot [(\sum\limits_{i=6}^{n} i) - (\sum\limits_{i=6}^{n} 5)] = 2 \cdot [(\sum\limits_{i=0}^{n} i) - (\sum\limits_{i=0}^{5} i) - 5(n-5)]$

$= 2 \cdot (\frac{n(n+1)}{2} - \frac{5(5+1)}{2} - 5n + 25) = 2 \cdot (\frac{n(n+1)}{2} - 5n + 10) = n(n+1) - 10n + 20 = \boxed{n^2 - 9n + 20}$

---

4. Calcular

i) $\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i$

iii) $\sum\limits_{i=0}^{n} q^{2i}, \quad q \in \mathbb{R} - \{0\}$

ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} q^i \quad q \in \mathbb{R}$

iv) $\sum\limits_{i=1}^{2n} q^i \quad q \in \mathbb{R}$

---

i) $\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i \underset{q\neq 1}{=} \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$

ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} q^i = -1+1+\sum\limits_{i=1}^{n} q^i = -1+\sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \begin{cases} n+1-1 = n & \text{si} \quad q=1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - 1 = \underbrace{\frac{q^{n+1}-q}{q-1}}_{\star^1 \sum\limits_{k=1}^{n} q^i} & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$

iii) $\sum\limits_{i=0}^{n} q^{2i} = \begin{cases} = \underbrace{q^2+q^4+\cdots+(q^{n-1})^2+q^{2n}}_{\text{n elementos}} = n \text{ si } q=\pm 1 \\ = \underbrace{(q^2)^1+(q^2)^2+\cdots+(q^2)^{n-1}+(q^2)^n}_{\text{n elementos}} \overset{\star^1}{=} \frac{(q^2)^{n+1}-q^2}{q^2-1} \text{ si } q \neq \pm 1 \end{cases}$

iv) $\sum\limits_{i=1}^{2n} q^i \overset{?}{=} \begin{cases} 2n \text{ si } q=1 \\ \frac{q^{2n-1}-q}{q-1} \text{ si } q \neq 1 \end{cases}$

---

5. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$:

i) Contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama. (hacer diagrama)

ii) Usando la suma aritmética (o suma de Gauss).

iii) Usando el principio de inducción.

---

i)

ii) $\underbrace{s = \frac{n(n+1)}{2} = \sum\limits_{1}^{n} i}_{Gauss} \to \sum\limits_{i=1}^{n} 2i-1 = 2\sum\limits_{i=1}^{n} i - \sum\limits_{1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2+n-n = n^2 \quad \checkmark$

iii) *Proposición:*

$p(n) : \sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base : $p(1) : \sum\limits_{i=1}^{1} 2i-1 = 1 = 1^2 \Rightarrow p(1)$ es verdadera. $\checkmark$

Paso inductivo: $p(h) : \sum\limits_{i=1}^{h} 2i-1 = k^2$ verdadera con $h \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ quiero ver que $\sum\limits_{i=1}^{h+1} 2i-1 \overset{?}{=} (h+1)^2$.

$\sum\limits_{i=1}^{h+1} 2i-1 = \sum\limits_{i=1}^{h}(2i-1) + 2(h+1) - 1 \overset{\text{HI}}{=} h^2 + 2h + 1 = (h+1)^2 \quad \checkmark$

Dado que $p(1)$, $p(h)$, $p(h+1)$ resultaron verdaderas, por criterio de inducción también lo es $p(n) \in \mathbb{N}$

---

6. *(Suma de cuadrados y de cubos)* Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

---

i) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Proposición: $p(n): \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1)$ verdadero $\iff \sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} \iff 1 = \frac{2\cdot 3}{6} \iff 1 = 1 \quad \checkmark$

Paso Inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongo $\underbrace{p(k)}_{\text{HI}}$ verdadero, quiero ver que $p(k+1)$ verdadero.

$$\begin{aligned}
p(k+1)\text{Verdadero} &\iff \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \\
&\iff \left(\sum_{i=1}^{k} i^2\right) + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&\underset{\text{HI}}{\iff} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&\iff k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2 = (k+1)(k+2)(2k+3) \\
&\iff k(2k+1) + 6(k+1) = (k+2)(2k+3) \\
&\iff 2k^2 + 7k + 6 = 2k^2 + 7k + 6 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Como se cumple tanto el *caso base* como el *paso inductivo*, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$P(n):$ " $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ " $\forall n \in \mathbb{N}$

Caso Base: $P(1): \sum_{i=1}^{1} i^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \iff 1 = \frac{4}{4} \iff 1 = 1 \quad \checkmark$

Paso Inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongo $\underbrace{P(k)}_{\text{HI}}$ Verdadero, quiero ver que $P(k+1)$ Verdadero.

$$\begin{aligned}
P(k+1)\text{Verdadero} &\iff \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} \\
&\iff (\sum_{i=1}^{k} i^3) + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&\underset{\text{HI}}{\iff} \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&\iff k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3 = (k+1)^2(k+2)^2 \\
&\iff k^2 + 4(k+1) = (k+2)^2 \\
&\iff k^2 + 4k + 4 = k^2 + 4k + 4 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Como se cumple tanto el caso base como el paso inductivo, por el principio de inducción $P(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

7. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i^2 = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$

ii) $\sum\limits_{i=1}^{n}(2i+1)3^{i-1} = n3^n$

iii) $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

iv) $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$, $a \in \mathbb{R} - \{1\}$

v) $\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

---

i) *Proposición:* $p(n) : \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i^2 = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1) : \sum\limits_{1}^{1}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow p(1)$es verdadera ✓

Paso inductivo: Asumo $p(k) : \sum\limits_{1}^{k}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2}$ como verdadera.

$\Rightarrow p(k+1)$: quiero ver que $\sum\limits_{1}^{k+1}(-1)^{i+1}i^2 \overset{?}{=} (-1)^{(k+1)+1}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ también lo sea.

$\sum\limits_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}i^2 = \sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}i^2 + (-1)^{k+2}(k+1)^2 \overset{\text{HI}}{=} (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(-1)^2(k+1)^2$

$\xrightarrow[\text{fáctor cómun}]{\text{acomodar}} (-1)^k(k+1)\left[-\frac{k}{2} + (k+1)\right] = (-1)^k(k+1)\frac{(k+2)}{2}$ ✓

Dado que $p(1)$, $p(k)$, $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por criterio de inducción también lo es $p(n) \in \mathbb{N}$

ii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iv) $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+a^{2^{i-1}}\right) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$

Primer caso $n = 1 \to \prod\limits_{i=1}^{1}(1+a^{2^{i-1}}) = 1 + a^{2^0} = 1 + a = \frac{1-a^{2^1}}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1+a$ ✓

Paso inductivo $n = k \to \prod\limits_{i=1}^{k}(1+a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^k}}{1-a} \Rightarrow n = k+1 \to \prod\limits_{i=1}^{k+1}(1+a^{2^{i-1}}) \overset{?}{=} \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a}$

$\prod\limits_{i=1}^{k+1}(1+a^{2^{i-1}}) = \underbrace{\prod\limits_{i=1}^{k}(1+a^{2^k})}_{\text{HI}} \cdot \underbrace{1+a^{2^{i-1}}}_{k+1\text{-ésimo}} = \frac{1-a^{2^k}}{1-a} \cdot 1 + a^{2^k} \xrightarrow[\text{de cuadrados}]{\text{diferencia}} \frac{1-(a^{2^k})^2}{1-a} =$

$\frac{1-a^{2\cdot 2^k}}{1-a} = \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a}$ ✓

v) $\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

En este ejercicio conviene abrir la productoria y acomodar los factores. Por inducción:

$$p(n) : \prod_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$$

Caso Base:

$$p(1) : \prod_{i=1}^{1} \frac{1+i}{2i-3} = \frac{1+1}{2\cdot 1-3} = 2^1(1-2\cdot 1) = -2$$

Paso inductivo:

$$p(k) : \overbrace{\prod_{i=1}^{k} \tfrac{k+i}{2i-3} = 2^k(1-2k)}^{\text{hipótesis inductiva}} \text{ asumo verdadera para algún } k \in \mathbb{N}$$

$$\xrightarrow[\text{ver que}]{\text{quiero}} p(k+1) : \prod_{i=1}^{k+1} \tfrac{k+1+i}{2i-3} = 2^{k+1}(1-2(k+1) \text{ también lo sea para algún } k \in \mathbb{N}\,.$$

Nota que puede ser de utilidad: Esta productoria tiene a la n en el término general. Cuando pasa esto en el ejercicio, abrir la sumatoria para acomodar los factores y así formar la HI, suele ser el camino a seguir. *Fin nota que puede ser de utilidad*

$$\prod_{i=1}^{k} \tfrac{k+i}{2i-3} = \tfrac{k+1}{2\cdot 1-3} \cdot \tfrac{k+2}{2\cdot 2-3} \cdot \tfrac{k+3}{2\cdot 3-3} \cdots \tfrac{2k}{2\cdot k-3} = 2^k(1-2k)$$

$$\prod_{i=1}^{k+1} \tfrac{k+1+i}{2i-3} = \tfrac{k+2}{2\cdot 1-3} \cdot \tfrac{k+3}{2\cdot 2-3} \cdots \tfrac{k+1+(k-1)}{2(k-1)-3} \cdot \tfrac{k+1+k}{2k-3} \cdot \overbrace{\tfrac{k+1+(k+1)}{2(k+1)-3}}^{2k+2} \overset{\star^1}{=} \tfrac{1}{2\cdot 1-3} \cdot \tfrac{k+2}{2\cdot 2-3} \cdot \tfrac{k+3}{2\cdot 3-3} \cdots \tfrac{2k}{2k-3} \cdot \tfrac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \tfrac{2k+2}{1}$$

$$\overset{\star^2}{=} \underbrace{\tfrac{k+1}{2\cdot 1-3} \cdot \tfrac{k+2}{2\cdot 2-3} \cdot \tfrac{k+3}{2\cdot 3-3} \cdots \tfrac{2k}{2k-3}}_{\text{hipótesis inductiva}} \cdot \tfrac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \tfrac{2k+2}{k+1} \overset{\text{HI}}{=} 2^k(1-2k) \cdot \tfrac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \tfrac{2k+2}{k+1} \overset{!}{=} 2^{k+1}(1-2(k+1)) \quad \checkmark$$

En $\star^1$ Corro los denominadores un lugar hacia la izquierda. Pinto con rojo las fracciones de los bordes solo para ayuda visual.

En $\star^2$ multiplico por $1 = \frac{k+1}{k+1}$ y lo ubico en los lugares *apropiados* para que me aparezca la hipótesis inductiva.

Si te preguntás qué pasó en "!", eso son cuentas, *simplificá*, *factorizá* y yo que sé, que te dejo a vos, por mi parte yo .

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

---

8. Sea a, $b \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}b^{n-i}$. Deducir la fórmula de la serie geométrica: para todo $a \neq 1$, $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

Primer paso: $n = 1 (a-b)\sum_{1}^{1} a^{i-1} \cdot b^{1-1} = a - b = a^1 - b^1 \quad \checkmark$

Paso inductivo: $n = k a^k - b^k = (a-b)\sum_{i=1}^{k} a^{i-1} \cdot b^{k-i} \Rightarrow a^{k+1} - b^{k+1} \overset{?}{=} (a-b)\sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} \cdot b^{k+1-i}$

$$(a-b)\sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} \cdot b^{k+1-i} = (a-b)\sum_{i=1}^{k} a^{i-1} \cdot \underbrace{b^{k+1-i}}_{b\cdot b^{k-i}} + \underbrace{(a-b)a^k \cdot b^{k+1-(k+1)}}_{k+1\text{-ésimo}} =$$

$$b \cdot \underbrace{(a-b)\sum_{i=1}^{k} a^{i-1} \cdot b^{k-i}}_{\text{HI}} + (a-b)a^k \overset{\text{HI}}{=} b \cdot a^k - b^k + (a-b)a^k = a^{k+1} - b^{k+1} \quad \checkmark$$

Para deducir la fórmula de la serie geométrica $b = 1 \to (a-1)\sum_{i=1}^{n} a^{i-1} = a^n - 1 \to$

$$\begin{cases} (a-1)\sum_{1}^{n} a^{i-1} = (a-1)\cdot(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}) = a^n - 1 \xrightarrow[\text{divido por } (a-1) \text{ M.A.M.}]{\text{multiplico por } a \text{ y}} \\ \sum_{1}^{n} a^i = a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-a}{a-1} \xrightarrow[\text{M.A.M.}]{\text{sumo un } 1} \sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^n - a}{a-1} + 1 \to \\ \boxed{\dfrac{a^n+1}{a-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i} \end{cases}$$

9.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\sum_{1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$.

ii) Calcular $\sum_{1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$).

iii) Calcular $\sum_{1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}$).

---

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Sea $n \in \mathbb{N}$ y

$$P(n) : \sum_{1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$$

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : \sum_{i=1}^{1}(a_{i+1} - a_i) = a_{1+1} - a_1$$
$$P(1) : a_2 - a_1 = a_2 - a_1$$
$$P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) :\ V$

TI. $P(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+2} - a_1$

Desarrollo la TI:

$$P(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+2} - a_{n+1} + \sum_{1}^{n}(a_{i+1} - a_i) \overset{\text{HI}}{=} a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+1} - a_1$$
$$P(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+2} - a_1$$
$$P(n+1) : V$$

Tenemos que

$$P(1) : V$$
$$P(n) : V \implies P(n+1) : V$$

y esto implica que $P(n) : V \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\sum\limits_1^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum\limits_1^n (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = -\sum\limits_1^n (\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}) \overset{\text{Aux}}{=} -(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{1})$

$= -(\frac{1-(n+1)}{n+1}) = -(\frac{-n}{n+1}) = \frac{n}{n+1}$

Auxiliar

Sea $a_n = \frac{1}{n}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Queremos calcular $\sum\limits_1^n \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right)$.

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right) = \sum_1^n (a_{i+1} - a_i) \overset{9.i)}{=} a_{n+1} - a_1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\sum_1^n \tfrac{1}{(2i-1)(2i+1)} &\overset{\text{Aux.1}}{=} \sum_1^n \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2i-1} - \tfrac{1}{2i+1}) = \tfrac{1}{2}\sum_1^n (\tfrac{1}{2i-1} - \tfrac{1}{2i+1-2+2}) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_1^n (\tfrac{1}{2i-1} - \tfrac{1}{2i+2-2+1}) = \tfrac{1}{2}\sum_1^n (\tfrac{1}{2i-1} - \tfrac{1}{2(i+1)-2+1}) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_1^n (\tfrac{1}{2i-1} - \tfrac{1}{2(i+1)-1}) = \tfrac{1}{2}\sum_1^n -(\tfrac{1}{2(i+1)-1} - \tfrac{1}{2i-1}) \\
&= -\tfrac{1}{2}\sum_1^n (\tfrac{1}{2(i+1)-1} - \tfrac{1}{2i-1}) \overset{Aux.2}{=} -\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2(n+1)-1} - \tfrac{1}{2\cdot 1-1}) \\
&= -\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2n+1} - 1) = -\tfrac{1}{2}(\tfrac{1-(2n+1)}{2n+1}) = -\tfrac{1}{2}(\tfrac{-2n}{2n+1}) \\
&= \tfrac{n}{2n+1}
\end{aligned}$$

Auxiliar 1

Calculamos la sugerencia dada

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} = \frac{2i+1-(2i-1)}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{2i+1-2i+1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{2}{(2i-1)(2i+1)} \\
\frac{2}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} \\
\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right)
\end{aligned}$$

Auxiliar 2

Sea $a_n = \frac{1}{2n-1}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Queremos calcular $\sum\limits_1^n \left(\frac{1}{2(i+1)-1} - \frac{1}{2i-1}\right)$.

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{2(i+1)-1} - \frac{1}{2i-1}\right) = \sum_1^n (a_{i+1} - a_i) \overset{9i)}{=} a_{n+1} - a_1 = \frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2\cdot 1 - 1}$$

10. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $3^n + 5^n \leq 2^{n+2}$

ii) $3^n \leq n^3$

iii) $\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

iv) $\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

v) $\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$

vi) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

vii) $\prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} \geq 1$

---

i) $P(n) : 3^n + 5^n \geq 2^{n+2},\ n \in \mathbb{N}$

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : 3^1 + 5^1 \geq 2^{1+2}$$
$$P(1) : 8 \geq 8 \Rightarrow P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : 2^{n+3} \leq 3^{n+1} + 5^{n+1}$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$2^{n+3} = 2 \cdot 2^{n+2} \overset{\text{HI}}{\leq} 2 \cdot (3^n + 5^n) = 2 \cdot 3^n + 2 \cdot 5^n \leq 3 \cdot 3^n + 5 \cdot 5^n = 3^{n+1} + 5^{n+1}$$
$$2^{n+3} \leq 3^{n+1} + 5^{n+1}$$
$$\Rightarrow P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : V$.

ii) $P(n) : 3^n \geq n^3,\ n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : 3^1 \geq 1^3$$
$$P(1) : 3 \geq 1 \Rightarrow P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : 3^{n+1} \geq (n+1)^3$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \overset{\text{HI}}{\geq} 3 \cdot n^3 \overset{\text{Aux}}{\geq} (n+1)^3,\ n \geq 3$$
$$3^{n+1} \geq (n+1)^3,\ n \geq 3$$
$$\Rightarrow P(n+1) : V,\ n \geq 3$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo, este último para los $n \geq 3$. Como solo probamos el paso inductivo para $n \geq 3$, deberiamos ver que $P(2)$ y $P(3)$ son verdaderas.

$$\begin{aligned} &P(2) : 3^2 \geq 2^3 \Rightarrow P(2) : 9 \geq 9 \Rightarrow P(2) : V \\ &P(3) : 3^3 \geq 3^3 \Rightarrow P(3) : V \end{aligned}$$

Tenemos que

$P(1) : V \wedge\ P(2) : V \wedge P(3) : V$
si $n \geq 3,\ P(n) : V \Rightarrow P(n+1) : V$

Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : V$.

Auxiliar

$3n^3 \geq (n+1)^3 \iff \sqrt[3]{3n^3} \geq \sqrt[3]{(n+1)^3} \iff \sqrt[3]{3}n \geq n+1 \iff \sqrt[3]{3}n - n \geq 1$
$\iff n(\sqrt[3]{3} - 1) \geq 1 \iff n \geq \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} \approx 2.6 \iff n \geq 3$
$\therefore 3n^3 \geq (n+1)^3 \iff n \geq 3$

iii) $P(n) : \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n+i}{1+i} \leq 1 + n(n-1),\ n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base, $n = 1$:

$$\begin{aligned} &P(1) : \sum_{i=1}^{1} \frac{1+i}{1+i} \leq 1 + 1(1-1) \\ &P(1) : \frac{1+1}{1+1} \leq 1 \Rightarrow P(1) : V \end{aligned}$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{1+i} \leq 1 + (n+1)n$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{1+i} = \frac{2(n+1)}{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{n+1+i}{1+i} = \frac{2(n+1)}{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i} + \frac{n+i}{1+i} \right) \\ &= \frac{2(n+1)}{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{1+i} \overset{\text{Aux}}{\leq} \frac{2\cancel{(n+1)}^{1}}{\cancel{(n+1)}_{1}} + \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{1+i} \overset{*}{=} \\ &\overset{*}{=} 2 + n + \sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{1+i} \overset{\text{HI}}{\leq} 2 + n + 1 + n(n-1) = 2 + n + 1 + n^2 - n \overset{**}{=} \\ &\overset{**}{=} 1 + n^2 + 2 \overset{(2 \leq n)}{\leq} 1 + n^2 + n = 1 + (n+1)n \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{1+i} \leq 1 + (n+1)n,\ \text{si } n \geq 2 \\ &\Rightarrow P(n+1) : V,\ \text{si } n \geq 2 \end{aligned}$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo, este último para los $n \geq 2$. Como solo probamos el paso inductivo para $n \geq 2$, deberiamos ver que $P(2)$ es verdadera.

$$P(2) : \sum_{i=1}^{2} \frac{2+i}{1+i} \leq 1 + 2(2-1)$$
$$P(2) : \frac{2+1}{1+1} + \frac{2+2}{1+2} \leq 3$$
$$P(2) : \frac{17}{6} \leq 3 \Rightarrow P(2) : V$$

Tenemos que

$P(1) : V \wedge P(2) : V$
si $n \geq 2,\ P(n) : V \Rightarrow P(n+1) : V$

Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : V$.

Auxiliar

Acotemos $1/(n+2)$

$$n+1 \leq n+2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Acotemos la sumatoria

$$\frac{1}{1+i} \leq 1, \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i} \leq \sum_{i=1}^{n} 1$$

iv) $P(n) : \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n,\ n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : \sum_{i=1}^{2\cdot 1} \frac{i}{2^i} \leq 1$$
$$P(1) : \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \leq 1 \Rightarrow P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : \sum_{i=n+1}^{2(n+1)} \frac{i}{2^i} \leq n+1$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$\sum_{i=n+1}^{2(n+1)} \frac{i}{2^i} = \frac{2n+2}{2^{2n+2}} + \frac{2n+1}{2^{2n+1}} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{i}{2^i} = \frac{n}{2^n} - \frac{n}{2^n} + \frac{2n+2}{2^{2n+2}} + \frac{2n+1}{2^{2n+1}} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{i}{2^i}$$

$$= -\frac{n}{2^n} + \frac{2n+2}{2^{2n+2}} + \frac{2n+1}{2^{2n+1}} + \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} = -\frac{2^{n+2}}{2^{n+2}}\frac{n}{2^n} + \frac{2n+2}{2^{2n+2}} + \frac{2}{2}\frac{2n+1}{2^{2n+1}} + \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i}$$

$$= -\frac{4n2^n}{2^{2n+2}} + \frac{2n+2}{2^{2n+2}} + \frac{4n+2}{2^{2n+2}} + \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} = \frac{-4n2^n+6n+4}{2^{2n+2}} + \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \overset{\text{HI}}{\leq}$$

$$\overset{\text{HI}}{\leq} \frac{-4n2^n+6n+4}{2^{2n+2}} + n \overset{\text{Aux}}{\leq} 1 + n, \ n \geq 2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=n+1}^{2(n+1)} \frac{i}{2^i} \leq n+1, \ n \geq 2 \Rightarrow P(n+1) : V, \ n \geq 2$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo, este último para los $n \geq 2$. Como solo probamos el paso inductivo para $n \geq 2$, deberiamos ver que $P(2)$ es verdadera.

$$P(2) : \sum_{i=2}^{2\cdot 2} \frac{i}{2^i} \leq 2$$
$$P(2) : \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} \leq 2$$
$$P(2) : \frac{9}{8} \leq 2 \Rightarrow P(2) : V$$

Tenemos que

$P(1) : V \wedge P(2) : V$

si $n \geq 2, \ P(n) : V \Rightarrow P(n+1) : V$

Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N}, \ P(n) : V$.

Auxiliar

Acotemos el termino $-4n2^n$

$$-4n2^n \leq -4n \cdot 2 = -8n \Rightarrow -4n2^n \leq -8n$$

Usemos esto para acotar toda la fracción

$$\frac{-4n2^n+6n+4}{2^{2n+2}} \leq \frac{-8n+6n+4}{2^{2n+2}} \leq \frac{-2n+4}{2^{2n+2}} \overset{(n\geq 2)}{\leq} \frac{1}{2^{2n+2}} \leq 1$$

Por último, veamos porque $-2n+4 \leq 1$

$$-2n+4 \leq 0 \iff -2n \leq -4 \iff n \geq \frac{-4}{-2} \iff n \geq 2$$
$$-2n+4 \leq 0, \text{ si } n \geq 2 \Rightarrow -2n+4 \leq 1, \text{ si } n \geq 2$$

v) $P(n) : \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}, \ n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : \sum_{i=1}^{2^1} \frac{1}{2i-1} > \frac{1+3}{4}$$
$$P(1) : \frac{1}{1} + \frac{1}{3} > 1 \Rightarrow P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : \sum\limits_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+4}{4}$

Desarrollemos el lado derecho de la desigualdad:

$$\frac{n+4}{4} = \frac{1}{4} + \frac{n+3}{4} \overset{\text{HI}}{<} \frac{1}{4} + \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} = \frac{1}{4} + \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} + \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} \frac{1}{4} - \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} + \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} \overset{\text{Aux.1}}{<} 0 + \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} = \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1}$$
$$\Rightarrow \frac{n+4}{4} < \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} \Rightarrow P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : V$.

Auxiliar 1

$$\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} = \frac{1}{2^{n+1}+1} + \frac{1}{2^{n+1}+3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} > \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+2}} \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} 1 \overset{\text{Aux.2}}{=} \frac{1}{2^{n+2}} 2^n = \frac{\cancel{2^n}^{\,1}}{2^2 \cancel{2^n}_{\,1}} = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} > \frac{1}{4} \Rightarrow - \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} < -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} - \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} < 0$$

Auxiliar 2

Cantidad de sumandos en una sumatoria

$$\sum_{i=A}^{B} a_i = a_A + \cdots + a_B$$
$$\#Elementos = \sum_{i=A}^{B} 1 = B + 1 - A$$

Calculemos la cantidad de sumandos en $\sum\limits_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1}$

$$B = 2^{n+1}, A = 2^n + 1 \Rightarrow \#Elementos = B + 1 - A = 2^{n+1} + 1 - (2^n + 1) = 2 \cdot 2^n + 1 - 2^n - 1$$
$$\Rightarrow \#Elementos = 2^n$$

vi) $P(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}},\ n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{1-1}}$$
$$P(1) : \frac{1}{1} \leq 1 \Rightarrow P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^n}$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!} = \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \overset{\text{HI}}{\leq} \frac{1}{(n+1)!} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{(n+1)!} + 2 - \frac{2}{2^n} \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{(n+1)!} \overset{\text{Aux}}{\leq} 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : V$.

Auxiliar

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n} \iff 2^n \leq (n+1)!$$

Probemos esto último usando inducción. Sea $Q(n) : 2^n \leq (n+1)!,\ n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base, $n = 1$:

$$Q(1) : 2^1 \leq (1+1)!$$
$$Q(1) : 2 \leq 2 \Rightarrow Q(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $Q(n) : V$

TI. $Q(n+1) : 2^{n+1} \leq (n+2)!$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{HI}}{\leq} 2(n+1)! \overset{(2 \leq n+2)}{\leq} (n+2)(n+1)! = (n+2)!$$
$$\Rightarrow 2^{n+1} \leq (n+2)! \Rightarrow Q(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N},\ Q(n) : V$.

vii) $P(n) : \prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} \geq 1, \;\; n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : \prod_{i=1}^{1} \frac{4i-1}{1+i} \geq 1$$

$$P(1) : \frac{3}{2} \geq 1 \Rightarrow P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} \geq 1$

Desarrollemos el lado derecho de la desigualdad:

$$1 \overset{\text{HI}}{\leq} \prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} = \frac{4(n+1)-1}{4(n+1)-1} \cdot \frac{n+(n+1)}{n+(n+1)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} \frac{n+(n+1)}{4(n+1)-1} \cdot \frac{4(n+1)-1}{n+(n+1)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} = \frac{n+(n+1)}{4(n+1)-1} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+i} \overset{**}{=}$$

$$\overset{**}{=} \frac{2n+1}{4n+3} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+i} \cdot \frac{n+1+i}{n+1+i} = \frac{2n+1}{4n+3} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} \cdot \frac{n+1+i}{n+i} \overset{***}{=}$$

$$\overset{***}{=} \frac{2n+1}{4n+3} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{n+i} \overset{\text{Aux.1}}{=} \frac{2n+1}{4n+3} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} \cdot 2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{2n+1}{4n+3} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} = \frac{4n+2}{4n+3} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} \overset{\text{Aux.2}}{\leq} 1 \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} \Rightarrow P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $\;\forall n \in \mathbb{N},\; Q(n) : V$.

Auxiliar 1

Recordemos la formula del factorial de n

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \ldots n$$

Veamos que pasa si sumamos una constante $k \in \mathbb{N}$ a la parte de la productoria

$$\prod_{i=1}^{n} (k+i) = (k+1) \cdot (k+2) \ldots (k+n) = \frac{1 \cdot 2 \ldots k}{1 \cdot 2 \ldots k} (k+1) \cdot (k+2) \ldots (k+n)$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \ldots k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \ldots (k+n)}{1 \cdot 2 \ldots k} = \frac{(k+n)!}{k!}$$

$$\prod_{i=1}^{n} (k+i) = \frac{(k+n)!}{k!}$$

Calculemos $\prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{n+i}$

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{n+i} = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} n+1+i}{\prod_{i=1}^{n+1} n+i} = \frac{\frac{(n+1+n+1)!}{(n+1)!}}{\frac{(n+n+1)!}{n!}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}}{\frac{(2n+1)!}{n!}}$$
$$= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} : \frac{(2n+1)!}{n!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{(2n+2)(2n+1)!}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{(2n+1)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)!}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{(2n+1)!}$$
$$= 2\frac{(n+1)(2n+1)!n!}{(n+1)(2n+1)!n!} = 2$$
$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{n+i} = 2$$

Auxiliar 2

$$2 \leq 3 \Rightarrow 4n+2 \leq 4n+3 \Rightarrow \frac{4n+2}{4n+3} \leq 1$$

11. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

12. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

13. Hallar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que $n^2+1 < 2^n$.

Pruebo algunos valores de n:

- $n = 1 \to 1^2+1 = 2 \not< 2$
- $n = 2 \to 2^2+1 = 5 \not< 4$
- $n = 3 \to 3^2+1 = 10 \not< 8$
- $n = 4 \to 4^2+1 = 17 \not< 16$
- $n = 5 \to 5^2+1 = 26 < 32 \quad \checkmark$

Parece ser que se cumple para los $n \geq 5$. Lo pruebo por inducción corrida.

$$P(n): \text{"}n^2+1 < 2^n\text{"} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$$

Caso Base:

$$P(5)\text{Verdadero} \iff 5^2+1 < 2^5 \iff 26 < 32 \quad \checkmark$$

Paso Inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}_{\geq 5}$. Supongo $\underbrace{P(k)}_{\text{HI}}$ Verdadero, quiero ver que $P(k+1)$ Verdadero.

$$\begin{aligned} P(k+1)\text{Verdadero} &\iff (k+1)^2+1<2^{k+1} \\ &\iff (k+1)^2+1<2^k\cdot 2 \end{aligned}$$

y como $(k^2+1)\cdot 2<2^k\cdot 2$ por HI, si $(k+1)^2+1\leq(k^2+1)\cdot 2\Rightarrow(k+1)^2+1<2^k\cdot 2$ como se quiere ver.

$$\begin{aligned} (k+1)^2+1\leq(k^2+1)\cdot 2 &\iff k^2+2k+2\leq 2k^2+2 \\ &\iff 2k\leq k^2 \\ &\underset{k>0}{\iff} 2\leq k \quad \checkmark(\text{Pues } k\geq 5 \text{ por HI}) \end{aligned}$$

Así, $(k+1)^2+1<2^k\cdot 2$ y $\therefore P(k+1)$ Verdadero.
Como se cumple tanto el caso base como el paso inductivo, por el principio de inducción $P(n)$ es verdadero $\forall n\in\mathbb{N}$.

---

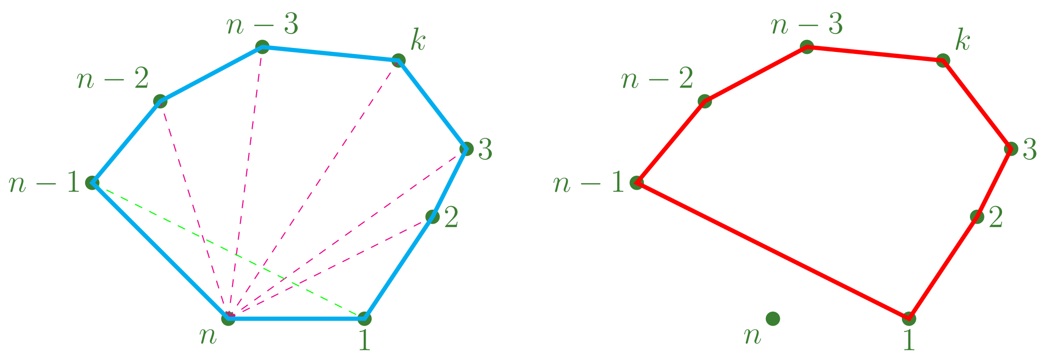
14. Probar que para todo $n\geq 3$ vale que

i) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$.

---

i) La cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.
Ejercicio donde hay que encontrar una fórmula a partir de algún método *creativo* para luego probar por inducción.

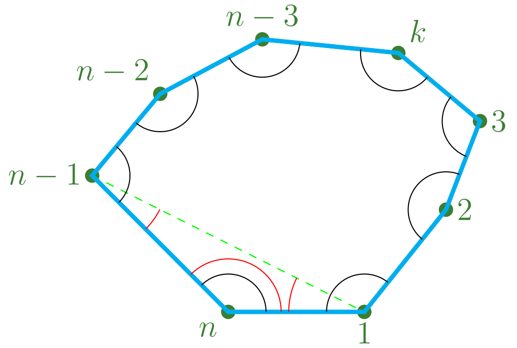


Se desprende del gráfico el siguiente razonamiento: En el polígono cyan de n lados voy a tener una cantidad de diagonales dada por la sucesión d_n. El polígono rojo me genera polígono que tiene un lado menos y un lado menos, cantidad que viene determinada por d_{n-1}. Las líneas punteadas son las diagonales de d_n que no estarán en d_{n-1}. Ahora voy a encontrar una relación entre ambas sucesiones. Al sacan un lado pierdo las diagonales desde 2 hasta $n-2$ que serían $n-3$ en total y además pierdo la diagonal que conectan el vértice 1 con el $n-1$: $d_n=d_{n-1}+1+n-2=d_{n-1}+n-1$
$\to d_n=d_{n-1}+n-1$
Ahora inducción:
$p(n): d_n=\frac{n(n-3)}{2}\ \forall n\geq 3$

$$\begin{cases} \textit{Caso Base: } p(3) \text{ verdadera ?} \to \frac{3(3-3)}{2}=0, \text{ lo cual es verdad para el triángulo.} \quad \checkmark \\ \textit{Paso inductivo: } p(k) \text{ es verdadero para algún } k\in\mathbb{Z}_{\geq 3}\Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera ?} \\ \textit{Hipótesis Inductiva: } d_k=\frac{k(k-3)}{2}\Rightarrow d_{k+1}=\frac{(k+1)(k-2)}{2} \\ d=k+1\overset{\text{def}}{=}d_k+k-1\overset{\text{HI}}{=}\frac{k(k-3)}{2}+k-1=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k-2)(k+1)}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

Como $p(3)$ y $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n\in\mathbb{N}_{\geq 3}$

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$.



En este caso estoy generando la suma de los ángulos internos de 2 polígonos, uno con α_n de n lados y otro con $n-1, \alpha_{n-1}$ Es más claro en este caso que al sacarle un lado, estoy robádo un triángulo que tiene como suma de sus ángulos internos π, entonces afirmo $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \pi$. Ahora pruebo por inducción lo pedido. $p(n) : \alpha_n = \pi(n-2) \ \ \forall n \geq 3$

$$\begin{cases} \textit{Caso Base: } p(3) : \pi(3-2) = \pi, \text{ lo cual es verdad para el triángulo.} \quad \checkmark \\ \textit{Paso inductivo: } p(k) \text{ es verdadero para algún } k \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera ?} \\ \textit{Hipótesis Inductiva: } \alpha_k = \pi(k-2) \Rightarrow \alpha_{k+1} = \pi(k-1) \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \overset{\text{def}}{=} \alpha_{k+1} - \pi \\ \alpha_k \overset{\text{HI}}{=} \pi(k-2) \end{array} \right\} \to \alpha_{k+1} = \pi(k-2) + \pi = \pi(k-1) \quad \checkmark \end{cases}$$

Como $p(3), p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

Recurrencia

15.

i) Sea $(a_n)_{n \text{ en } \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = 2na_n + 2^{n+1}n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = 2^n n!$.

ii) Sea $(a_n)_{n \text{ en } \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

---

i) Inducción. *Proposición:*

$$p(n) : a_n = 2^n n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\textit{Caso base:} \quad p(1) : \begin{cases} a_1 \overset{\text{def}}{=} 2 = 2^1 \cdot 1! \quad \checkmark \\ a_{1+1} = a_2 \overset{\text{def}}{=} 2 \cdot 1 \cdot a_1 + 2^{1+1} 1! = 8 \overset{!}{=} 2^2 \cdot 2 \quad \checkmark. \end{cases}$$

Resulta que $p(1)$ es verdadera.

Paso inductivo:

$p(k) : \underbrace{a_k = 2^k k!}_{\textit{hipótesis inductiva}}$ asumo verdadera para algún $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ quiero que $p(k+1) : a_{k+1} = 2^{k+1}(k+1)!$ también lo sea.

$a_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} 2k \cdot a_k + 2^{k+1} k! \stackrel{\text{HI}}{=} 2k \cdot 2^k k! + 2^{k+1} k! = 2^{k+1} k!(k+1) \stackrel{!}{=} 2^{k+1}(k+1)! \quad \checkmark$. Resulta que $p(k+1)$ es verdadera.

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas, por el principio de inducción también lo es $p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ii) Inducción. *Proposición:*

$$p(n) : a_n = n^2(n-1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base: $p(1) : \begin{cases} a_1 \stackrel{\text{def}}{=} 0 = 1^2 \cdot (1-1) \quad \checkmark \\ a_{1+1} = a_2 \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + 1(3 \cdot 1 + 1) = 4 = 2^2 \cdot (2-1) \quad \checkmark. \end{cases}$

Resulta que $p(1)$ es verdadera.

Paso inductivo:

$p(k) : \underbrace{a_k = k^2(k-1)}_{\textit{hipótesis inductiva}}$ asumo verdadera para algún $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ quiero que

$p(k+1) : a_{k+1} = (k+1)^2(k+1-1) = k(k+1)^2$ también lo sea.

$a_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} a_k + k(3k+1) \stackrel{\text{HI}}{=} k^2(k-1) + 3k^2 + k = k^3 + 2k^2 + k \stackrel{!}{=} k(k+1)^2 \quad \checkmark$. Resulta que $p(k+1)$ es verdadera.

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas, por el principio de inducción también lo es $p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

16. Hallar la fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

17. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

18. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

19. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

20. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

21. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

22. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicios extras:

1. Probar para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq (n+1)!$$

Se prueba usando el principio de inducción $\in \mathbb{N}$.
Proposición:

$$p(n): \frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq (n+1)!$$

Caso base: Evalúo en $n = 1$.

$$p(1): \frac{(2 \cdot 1)!}{1!^2} = 2 \leq (1+1)! \quad \checkmark$$

Se concluye que $p(1)$ es verdadera.
Paso inductivo:

$$p(k): \underbrace{\frac{(2k)!}{(k!)^2} \leq (k+1)!}_{\text{HI}}$$

la supongo verdadera.
Quiero probar que:

$$p(k+1): \frac{(2(k+1))!}{(k+1)!^2} \leq (k+1+1)!$$

también lo es.

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{(2k+2)!}{(k+1)!^2} \leq (k+2)! \xLeftrightarrow[\text{factorial}]{\text{abrir}} \\ \frac{(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot(2k)!}{(k+1)^2\cdot(k!)^2} \overset{\text{HI}}{\leq} \frac{\overbrace{(2k+2)\cdot(2k+1)}^{4\cdot\cancel{(k+1)}(k+\frac{1}{2})}}{(k+1)^{\cancel{2}}}(k+1)! = \frac{\overbrace{4\cdot(k+\frac{1}{2})}^{\frac{4(k+\frac{1}{2})}{k+1} \overset{\star 1}{\leq} k+2}}{(k+1)}(k+1)! \leq (k+2)(k+1)! = (k+2)! \\ \boxed{\frac{(2(k+1))!}{(k+1)!^2} \leq (k+2)!} \end{array} \right.$$

$\star^1$ se prueba fácil en 2 cuentas, queda como ejercicio para vos. Es así que $p(1), p(k),$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ también lo será $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{n+k} \leq \frac{5}{2}.$$

Inducción: $p(n): \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{n+k} \leq \frac{5}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1)$:

$$\sum_{k=1}^{1+1} \frac{3}{1+k} = \frac{3}{2} + \frac{3}{3} = \frac{5}{2} \overset{\checkmark}{\leq} \frac{5}{2} \to p(1) \text{ Verdadera} \quad \checkmark$$

Paso inductivo:
$p(j): \sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} \leq \frac{5}{2}$ Verdadera $\Rightarrow$ quiero probar que $p(j+1): \sum_{k=1}^{j+1+1} \frac{3}{j+1+k} \leq \frac{5}{2}$ Verdadera
En los ejercicios donde la n aparece adentro de la sumatoria, conviene abrirla para encontrar la *hipótesis inductiva:* $\sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} \leq \frac{5}{2}$

$\sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} = \frac{3}{j+1} + \frac{3}{j+2} + \frac{3}{j+3} + \frac{3}{j+4} + \cdots + \frac{3}{2j} + \frac{3}{2j+1}$ ✓

$\sum_{k=1}^{j+1+1} \frac{3}{j+1+k} = \sum_{k=1}^{j+2} \frac{3}{j+1+k} = \frac{3}{j+1+1} + \frac{3}{j+1+2} + \frac{3}{j+1+3} + \cdots + \frac{3}{j+1+j-1} + \frac{3}{j+1+j} + \frac{3}{j+1+j+1} + \frac{3}{j+1+j+2} =$

$= \frac{3}{j+2} + \frac{3}{j+3} + \frac{3}{j+4} + \cdots + \frac{3}{2j} + \frac{3}{2j+1} + \frac{3}{2j+2} + \frac{3}{2j+3} = -\frac{3}{j+1} + \underbrace{\frac{3}{j+1} + \frac{3}{j+2} + \frac{3}{j+3} + \frac{3}{j+4} + \cdots + \frac{3}{2j} + \frac{3}{2j+1}}_{\sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k}} + \frac{3}{2j+2} + \frac{3}{2j+3}$

$= \sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} - \frac{3}{j+1} + \frac{3}{2j+2} + \frac{3}{2j+3} = \sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} \underbrace{- \frac{3}{2k+2} + \frac{3}{2j+3}}_{\leq 0} \overset{HI}{\leq} \frac{5}{2} - \underbrace{\frac{3}{(2k+2)(2k+3)}}_{\geq 0} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{j+2} \frac{3}{j+1+k} \overset{\checkmark}{\leq} \frac{5}{2}$ Verdadera ✓

Dado que $p(1)$, $p(j), p(j+1)$ resultaron verdaderas por principio de inducción también lo es $p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

---

3. Probar que

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \geq \frac{(2n-1)^3}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Ejercicio de inducción. Voy a probar que la preposición $p(n): \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \geq \frac{(2n-1)^3}{6}$ sea verdadera para todos los naturales.
Caso base: $p(1): \sum_{k=1}^{1} (2k-1)^2 = (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1 \geq \frac{(2 \cdot 1 - 1)^3}{6} = \frac{1}{6}$. por lo tanto $p(1)$ es verdadera ✓
Paso inductivo:
Asumo $p(h)$ verdadera, entonces quiero probar que $p(h+1)$ también lo sea. En este caso:

$$p(h): \sum_{k=1}^{h} (2k-1)^2 \geq \frac{(2h-1)^3}{6}$$

para algún $h \in \mathbb{Z}$. Ésta será nuestra *hipótesis inductiva*: HI.
Quiero probar que:

$$\sum_{k=1}^{h+1} (2k-1)^2 \geq \frac{(2(h+1)-1)^3}{6} = \frac{(2h+1)^3}{6},$$

sea verdadera para algún $h \in \mathbb{Z}$.
$\sum_{k=1}^{h+1} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{h} (2k-1)^2 + (2(h+1)-1) = \sum_{k=1}^{h} (2k-1)^2 + (2h+1)^2$
Nota innecesaria pero que quizás aporta:
Lo que acabamos de hacer recién nos deja la HI regalada. Pero atento que esto solo suele funcionar cuando no tenemos a la 'n' en el término principal de la sumatoria. Después de hacerte éste, mirá el **2.**
Fin nota innecesaria pero que quizás aporta.
$\sum_{k=1}^{h+1} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{h} (2k-1)^2 + (2h+1)^2 \overset{HI}{\geq} \underbrace{\frac{(2h-1)^3}{6} + (2h+1)^2 \geq \frac{(2h+1)^3}{6}}_{\text{Si ocurre esto, } p(h+1) \text{ será verdadera}} \overset{\times 6}{\iff} (2h-1)^3 + 6(2h+1)^2 \geq (2h+1)^3$

$\xLeftrightarrow[\text{a morir}]{\text{distribuyo}} \cancel{8h^3} + \cancel{12h^2} + 30h + 5 \geq \cancel{8h^3} + \cancel{12h^2} + 6h + 1 \Leftrightarrow 24h + 4 \overset{\checkmark}{\geq} 0 \quad \forall h \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{h+1} (2k-1)^2 \geq \frac{(2h+1)-1)^3}{6}$, concluyéndose que $p(h+1)$ también es verdadera.

Como tanto $p(1), p(h)$ y $p(h+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción se tiene que $p(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.