Álgebra I Práctica 7 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I Facultad de Ciencias Exactas y Naturales UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1.	6.	11.	16 .	21.	26.	31.	36.
2.	7.	12.	17.	22.	27 .	32.	37.
3.	8.	13.	18.	23.	28.	33.	38.
4.	9.	14.	19.	24.	29.	34.	39.
5.	10.	15 .	20.	25 .	30.	35.	

• Ejercicios Extras

1 .	3 .	5 .	७ 7.	9 .
2 .	4 .	♦ 6.	♦ 8.	

Notas teóricas:

• Operaciones:

+: Sean
$$f, g \in \mathbb{K}[X]$$
 con $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ y $g = \sum_{i=0}^n b_i X^i$

$$\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

$$\cdot : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \text{ y } g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$$

$$\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j) X^k \in \mathbb{K}[X]$$

• Algoritmo de división:

 $f,g\in\mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos q y $R\in\mathbb{K}[X]$ tal que

$$f = q \cdot q + R$$

con gr(R) < gr(f) o R = 0.

• Raíz de un Polinomio:

$$\alpha$$
 es raíz de $f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$

• Máximo común divisor:

Polinomio, $(f:g) \in \mathbb{K}[X]$, mónico de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.

- (f:g) | f y (f:g) | g
- $f = (f:g) \cdot k_f$ y $g = (f:g) \cdot k_g$ con k_f y k_g en $\mathbb{K}[X]$
- \bullet Dos polinomios son coprimos si $(f:g)=1\iff f\neq g$
- Raíces múltiples:

Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se dice que:

• Cuando f tiene una raíz múltiple:

$$\alpha$$
 es raíz múltiple de $f \iff f = (X - \alpha)^2 q$
 $f = (X - \alpha) \cdot q$, con $q \in \mathbb{K}[X]$ y $q(\alpha) = 0$.

• Cuando la raíz no es múltiple, es simple cuando:

$$\alpha$$
 es raíz $simple$ de $f \iff (X - \alpha) \mid f$ y $(X - \alpha)^2 \not \mid f$ $f = (X - \alpha) \cdot q$, con $q \in \mathbb{K}[X]$ y $q(\alpha) \neq 0$.

Prestale atención a los! porque sino la vas a cagar.

• Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Se dice que α es raíz de multiplicidad (exactamente) m de f, y se nota:

$$\operatorname{mult}(\alpha; f) = m \iff (X - \alpha)^m \mid f,$$

y también

$$(X-\alpha)^{m+1} \not\mid f$$
.

O equivalentemente,

$$f = (X - \alpha)^m q$$
 con $q \in \mathbb{K}[X]$, y $q(\alpha) \neq 0$.

• Raíces y MCD:

Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no ambos nulos, y $\alpha \in \mathbb{K}$: Esta se usa bastante.

$$\Rightarrow f(\alpha) = g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (f:g)(\alpha) = 0$$

 \bullet α es raíz múltiple de f si y solo si:

$$f(\alpha) = 0$$
 y $f'(\alpha) = 0 \iff \alpha$ es raíz de $(f:f') \iff X - \alpha \mid (f:f')$

• La multiplicidad m de una raíz, será m-1 en la derivada:

$$\operatorname{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{mult}(\alpha; f') = m - 1$$

 \bullet Relación entre la multiplicidad de una raíz de f y sus derivadas:

entonces la **tercera derivada** NO PUEDE SER $0, f'''(\alpha) \neq 0$.

Pero tanto la función, su primera y segunda derivada DEBEN SER $0, f(\alpha) \stackrel{!!}{=} f'(\alpha) \stackrel{!!}{=} f''(\alpha) \stackrel{!!}{=} 0$

• Lema de Gauss:

Sea $f = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ con $a_0 \neq 0$. Si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[X]$ es una raíz racional de f, con α y $\beta \in \mathbb{Z}$ coprimos, entonces $\alpha \mid a_0$ y $\beta \mid a_n$.

El Lema de Gauss implica que en el conjunto de fracciones irreducibles $\frac{\alpha}{\beta}$ están todas las raíces racionales de f.

• Polinomios irreducibles:

Sea $f \in K[X]$

- Se dice que f es irreducible en K[X] cuando $f \notin K$ y los únicos divisores de f son de la forma g=c o g=cf para algún $c\in K^{\times}$. O sea f tiene únicamente dos divisores mónicos (distintos), que son 1 y $\frac{f}{\operatorname{cp}(f)}$
- Se dice que f es reducible en K[X] cuando $f \notin K$ y f tiene algún divisor $g \in K[X]$ con $g \neq c$ y $g \neq cf$, $\forall c \in K^{\times}$, es decir f tiene algún divisor $g \in K[X]$ (no nulo por definición) con $0 < \operatorname{gr}(q) < \operatorname{gr}(f)$.

Ejercicios de la guía:

- 1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:
 - i) $(4X^6 2X^5 + 3X^2 2X + 7)^{77}$,
 - ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 X + 5)^4 (6X^4 + 2X^3 + X 2)^7$,
 - iii) $(-3X^5 + X^4 X + 5)^4 81X^{20} + 19X^{19}$
 - i) coeficiente principal: 4^{77} grado: $6 \cdot 77$
 - ii) coeficiente principal: $(-3)^4 6^7 = -279.855$ grado: 28
 - iii) coeficiente principal: $(\underbrace{-3X^5 + X^4 X + 5}_f)^4 + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_g$

Cuando sumo me queda: $\operatorname{cp} f^4 - \operatorname{cp} g = (-3)^4 - 81 = 0 \Rightarrow gr(f^4 + g) < 20$

 \rightarrow Calculo el cp $f^4 + g$ con gr $(f^4 + g) = 19$.

Laburo a f:

$$\begin{cases} \frac{\text{para usar}}{\text{formula de } f \cdot g} \left(-3X^5 + X^4 - X + 5 \right)^4 = \left(-3X^5 + 1X^4 - X + 5 \right)^2 \cdot \left(-3X^5 + X^4 - X + 5 \right)^2 \\ f^2 \cdot f^2 = \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \bigstar^2 \\ \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \xrightarrow{\text{me interesa solo}}_{\text{el término con } k = 19} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \stackrel{\bigstar}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \stackrel{\bigstar}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} \\ \begin{cases} b_{10} \text{ sale a} \\ ojimetro \end{cases} b_{10} = \left(-3 \right)^2 = 9 \\ \begin{cases} \frac{a_9 \text{ no tan fácil, volver}}{\text{a usar } \sum f \cdot g \text{ en } k = 9} f \cdot f = \sum_{k=0}^{10} \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \stackrel{k=9}{\longrightarrow} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \stackrel{\bigstar}{=} c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4 \stackrel{\bigstar}{=} 2 \cdot c_4 \cdot d_5 \\ \begin{cases} \frac{d_5 \text{ sale a}}{\text{ojimetro}} d_5 = -3 \\ ojimetro \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{d_5 \text{ sale a}}{\text{ojimetro}} c_4 = 1 \end{cases} \rightarrow a_9 = -6 \rightarrow \begin{cases} \text{cp } f^4 = 2 \cdot \left(-6 \right) \cdot \left(9 \right) = -108 \\ \text{cp } g = 19 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \text{cp } f^4 + g = -89 \end{cases} \checkmark$$

*: Sabemos que el $\operatorname{gr}(f^4) = 20 \Rightarrow \operatorname{gr}(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \leq 10$

solo puede ocurrir cuando los exponentes $\left\{ \begin{array}{l} i=10,\,j=9\\ \lor\\ i=9,\,j=10 \end{array} \right\}$

 \star^2 : porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos visualmente más genérico.

 \bigstar ³: Idem \bigstar ¹ para el polinomio f grado: 19

2. Some suppose that the same of the same suppose that the same suppose the same supp

Si querés mandarlo: Telegram $\to \odot$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc$.

3. Some suppose that the same of the same suppose that the same suppose the same suppose the same suppose that the same suppose the same

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i)
$$f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$$
 y $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii)
$$f = 4X^4 + X^3 - 4$$
 y $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iii)
$$f = X^n - 1$$
 y $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ En $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2 + 1) \cdot \underbrace{(2X^2 + 4X + 6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X + 4)}_{r[X]}$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división asoma la idea de que:

$$X^n-1=(X-1)\cdot\sum_{j=0}^{n-1}X^j+\underbrace{0}_{r[X]},$$
 (que es la geométrica con $X\neq 1$

Inducción: Quiero probar que $p(n): X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(\mathbf{1}): X^{\mathbf{1}} - 1 = (X - 1) \underbrace{\sum_{j=0}^{\mathbf{1}-1} X^j}_{X^0 = 1} \Rightarrow p(\mathbf{1})$ es Verdadero \checkmark

Paso inductivo:

Paso inductivo:
$$p(k): \underbrace{X^k - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI} \text{ es Verdadera} \stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1): X^{k+1} - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j \text{ es Verdadera}$$

$$(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k} X^{j} = (X-1) \cdot (\sum_{j=0}^{k-1} X^{j} + X^{k}) = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + (X-1) \cdot X^{k} = X^{k} - 1 + X^{k+1} - X^{k} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X$$

$$X^{k+1}-1$$

Dado que p(1), p(k) y p(k+1) resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera $p(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

- Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que
 - i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$.
 - ii) $X^4 aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$,
 - iii) El resto de la división de $X^5 3x^3 x^2 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea -8X + 4.
 - i) Haciendo la division de $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^{3} + 2X^{2} + 2X + 1 = (X - a + 2)(X^{2} + aX + 1) + \underbrace{(a^{2} - 2a + 1)X + a - 1}_{\text{resto}}$$

Así, para que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$ tiene que ocurrir que el resto sea 0. O sea,

$$X^{2} + aX + 1 \mid X^{3} + 2X^{2} + 2X + 1 \iff (a^{2} - 2a + 1)X + a - 1 = 0$$
$$\iff \begin{cases} a^{2} - 2a + 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

Analizo las ecuaciones:

- \bullet $a-1=0 \iff a=1$
- $a^2 2a + 1 = 0 \xrightarrow{a=1} 1^2 2.1 + 1 = 1 2 + 1 = 0$

Luego, el valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ es divisible por $X^2 + aX + 1$ es $\boxed{a = 1}$

ii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc 0$, o mejor aún si querés subirlo en LATEX $\rightarrow \bigcirc 0$

iii) Haciendo la division de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^{5} - 3X^{3} - X^{2} - 2X + 1 = q(X^{2} + aX + 1) + \underbrace{r}_{\text{resto}}$$

con $q = (X^3 - aX^2 + (a^2 - 4)X - a^3 + 5a - 1)$ y $r = (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2$.

Así,

$$r = -8X + 4$$

$$\iff (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2 = -8X + 4$$

$$\iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0 \\ a^3 - 5a - 2 = 0 \end{cases}$$

Analizo las ecuaciones:

• $a^3 - 5a - 2 = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5) - 2 = 0$ Veo que a = -2 es solución, por lo que divido $a^3 - 5a - 2$ por a + 2 con Ruffini:

Por lo que $a^3 - 5a - 2 = (a+2)(a^2 - 2a - 1)$

Busco las raíces de $a^2 - 2a - 1$ con la fórmula resolvente:

$$a_{+,-} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$
$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

Por lo que
$$a^3 - 5a - 2 = (a+2)(a-1+\sqrt{2})(a-1-\sqrt{2}) = 0 \iff \begin{cases} a = -2 \\ a = 1+\sqrt{2} \\ a = 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

 $\bullet \ a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0$

Me fijo que valores de a obtenidos antes verifican:

- Si
$$a = -2 \Rightarrow (-2)^4 - 6(-2)^2 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0$$

- Si $a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^4 - 6(1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 10 = 10 + \sqrt{2} \neq 0$
- Si $a = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow (1 - \sqrt{2})^4 - 6(1 - \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2} + 10 = 10 - \sqrt{2} \neq 0$

Luego, el único valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que el resto de dividir a $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea -8X + 4 es a = -2

- **6.** <u>Definición</u>: Sea K un cuerpo y sea $h \in \mathbb{K}[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in \mathbb{K}[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f g$. En tal caso se escribe $f \equiv g(h)$.
 - i) Probar que $\equiv~(h)$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{K}[X].$
 - ii) Probar que si $f_1 \equiv g_1$ (h) y $f_2 \equiv g_2$ (h) entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2$ (h) $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2$ (h).
 - iii) Probar que si $f \equiv g(h)$ entonces $f^n \equiv g^n(h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - iv) Probar que r es el resto de la división de f por h si y solo si $f \equiv r$ (h) y r = 0 o gr(r) < gr(h).
- ② ¿Errores? Mandá tu solución, entendible y coqueta, así corregimos.

- i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea reflexiva, simétrica y transitiva,
 - reflexiva: Es f congruente a f módulo h? $f \equiv f(h) \iff h \mid f f = 0 \iff h \mid 0$
 - sim'etrica: Si $f \equiv g$ (h) $\iff g \equiv f$ (h) $f \equiv g$ (h) $\iff h \mid f g \iff h \mid -(g f) \iff h \mid g f \iff g \equiv f$ (h) \checkmark
 - transitiva: Si $\begin{cases} f \equiv g(h) & \stackrel{?}{\iff} f \equiv p(h). \end{cases}$

$$\begin{cases} h \mid f - g & \xrightarrow{F_1 + F_2} \\ h \mid g - p & \xrightarrow{F_2} \end{cases} \begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid f - p \end{cases} \rightarrow f \equiv p (h) \quad \checkmark$$

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en $\mathbb{K}[X]$

ii) Si
$$\begin{cases} f_1 \equiv g_1(h) \\ f_2 \equiv g_2(h) \end{cases}$$

$$f_1 \equiv g_1(h) \iff h \mid f_1 - g_1 \Rightarrow h \mid f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2(h) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2(h)$$

iii) Inducción: Quiero probar p(n): Si $f \equiv g(h)$ entonces $f^n \equiv g^n(h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso base: $p(1): f^1 \equiv g^1(h) \bigstar^2$ Verdadera \checkmark

 $Paso\ inductivo:\ p(k):\underbrace{f^k\equiv g^k\ (h)}_{HI}\ \text{es verdadera} \stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1):f^{k+1}\equiv g^{k+1}\ (h)\ \text{¿También lo es?}$

$$f^{k} \equiv g^{k} (h) \iff h \mid f^{k} - g^{k} \Rightarrow h \mid f \cdot (f^{k} - g^{k}) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^{k} (h) \iff f^{k+1} \equiv g^{k+1} (h) \quad \checkmark$$

Finalmente p(1), p(k), p(k+1) resultaron verdaderas y por el principio de inducción p(n) es verdaderas $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) 2... hay que hacerlo! 6

Si querés mandarlo: Telegram $\to \odot$, o mejor aún si querés subirlo en LATEX $\to \odot$.

- 7. Hallar el resto de la división de f por g para:
 - i) $f = X^{353} X 1$ y $g = X^{31} 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,
 - ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$ y $g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$
 - iii) $f = X^{200} 3X^{101} + 2$, y $g = X^{100} X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,
 - iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} X^{174} + X^{137} + 2X^4 X^3 + 1$, y $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ (Sugerencia ver **4.** iii))).

i)
$$g \mid g \iff X^{31} - 2 \equiv 0 \ (X^{31} - 2) \iff X^{31} \equiv 2 \ (g)$$

$$f = X^{353} - X - 1 = (\underbrace{X^{31}}_{\stackrel{(g)}{\equiv} 2})^{11} X^{12} - X - 1 \stackrel{(g)}{\equiv} 2^{11} X^{12} - X - 1 \rightarrow \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} - 1}$$

ii)
$$g \mid g \iff X^6 + 1 \equiv 0 \ (X^6 + 1) \iff X^6 \equiv -1 \ (g)$$

 $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166} X^4 + (X^6)^6 X^4 + (X^6)^3 X^2 + 1 \stackrel{(g)}{=} X^4 + X^4 - X^2 + 1$

$$f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166}X^4 + (X^6)^6X^4 + (X^6)^3X^2 + 1 \stackrel{(g)}{=} X^4 + X^4 - X^2 + 1 = 2X^4 - X^2 + 1$$

$$\rightarrow \boxed{r_g(f) = 2X^4 - X^2 + 1}$$

¿Qué onda en
$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$
? $\rightarrow \begin{cases} \text{si } p = 2 \rightarrow X^2 + 1 \\ \text{si } p > 2 \rightarrow 2X^4 + (p-1)X^2 + 1 \end{cases}$

iii)
$$g \mid g \iff X^{100} - X + 1 \equiv 0 \ (X^{100} - X + 1) \iff X^{100} \equiv X - 1 \ (g)$$

$$f = X^{200} - 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 - 3X^{100}X + 2 \stackrel{(g)}{\equiv} (X - 1)^2 - 3(X - 1)X + 2$$

$$\rightarrow \boxed{r_g(f) = (X - 1)^2 - 3(X - 1)X + 2}$$

iv) Usando la sugerencia: Del ejercicio **4.** iii) sale que
$$X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

$$\xrightarrow{\frac{n=5}{\text{para el }g}} X^5 - 1 = (X-1)\underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_g \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)}(g) \quad \checkmark$$

$$f = (X^{5})^{603}X + 2(X^{5})^{366}X^{3} - (X^{5})^{34}X^{4} + (X^{5})^{27}X^{2} + 2X^{4} - X^{3} + 1$$

$$f = \underbrace{X + 2X^{3} - X^{4} + X^{2} + 2X^{4} - X^{3} + 1}_{=X^{4} + X^{3} + X^{2} + X + 1 = g}(g) \iff \boxed{f \equiv 0 \ (g)}$$

8. 9... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \odot$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc$.

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y q siendo:

i)
$$f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$$
, $g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$,

ii)
$$f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$$
, $q = X^3 + X$,

iii)
$$f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1$$
, $g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1$,

$$\xrightarrow{\text{Euclides}} (f:g) = (g:3X^3 - 55X^2 + X + 1)$$

$$\xrightarrow{\text{escribo a } f} f = (X+1) \cdot g + 3X^3 - 55X^2 + X + 1$$
en función de g

$$X^{5} + X^{3} - 6X^{2} + 2X + 2 = \left(X^{4} - X^{3} - X^{2} + 1\right) \cdot \left(X + 1\right) + \left(3X^{3} - 5X^{2} + X + 1\right)$$

$$X^{4} - X^{3} - X^{2} + 1 = \left(3X^{3} - 5X^{2} + X + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}X^{2} - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right)$$

$$3X^{3} - 5X^{2} + X + 1 = \left(-\frac{2}{9}X^{2} - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{27}{2}X + \frac{225}{4}\right) + \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right)$$

$$-\frac{2}{9}X^{2} - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} = \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539}\right) + 0$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\boxed{\rightarrow (f:g) = X-1}$

ii)
$$X^6 + X^4 + X^2 + 1 = (X^3 + X) \cdot X^3 + (X^2 + 1)$$

 $X^3 + X = (X^2 + 1) \cdot X + 0$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow \boxed{(f:g) = X^2 + 1}$ El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow \boxed{X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)}$

iii)

$$2X^{6} - 4X^{5} + X^{4} + 4X^{3} - 6X^{2} + 4X + 1 = \left(X^{5} - 2X^{4} + 2X^{2} - 3X + 1\right) \cdot 2X + \left(X^{4} + 2X + 1\right)$$

$$X^{5} - 2X^{4} + 2X^{2} - 3X + 1 = \left(X^{4} + 2X + 1\right) \cdot \left(X - 2\right) + 3$$

$$X^{4} + 2X + 1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}X^{4} + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) + 0$$
El MCD será el último resto no nulo y $m\'onico \rightarrow \boxed{(f:g) = 1}$
El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow \boxed{1 = \frac{1}{3}g \cdot (2X^{2} - 4X + 1) - \frac{1}{3}f \cdot (X - 2)}$

10. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que f(1) = -2, f(2) = 1 y f(-1) = 0. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

Sea $P \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow el \ resto \ de \ dividir \ a \ P \ por \ X - a \ es \ P(a)$.

$$f(X) = q(X) \cdot \underbrace{X^3 - 2X^2 - X + 2}_{g(X)} + r(X), \text{ con } g(X) = (X - 2) \cdot (X - 1) \cdot (X + 1) \quad \text{y} \quad r(X) = a^2 + bX + c, \text{ ya}$$

$$que el gr(r) < gr(g) \xrightarrow{\text{evaluar}} \begin{cases}
f(1) = -2 = q(1) \cdot g(1) + r(1) = -2 \\
f(2) = 1 = q(2) \cdot g(2) + r(2) = 1 \\
f(-1) = 0 = q(-1) \cdot g(-1) + r(-1) = 0
\end{cases}$$

$$\uparrow \begin{cases}
r(1) = a + b + c = -2 \\
r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\
r(-1) = a - b + c = 0
\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -2 \\ 4 & 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{r(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{7}{3}}$$

11. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$ en $\mathbb{Q}[X]$.

$$\begin{cases} f(X) = X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1 \\ g(X) = X \cdot (X - 1) \cdot (X + 1) \end{cases} \Rightarrow f = q(X) \cdot g(X) + r(X) \text{ con } \operatorname{gr}(\underbrace{aX^2 + bX + c}) \leq 2$$

$$\begin{cases} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_{=0} + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_{=0} + r(1) = 3 \\ \end{cases}$$

$$f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_{=0} + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 = \begin{cases} 2 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(0) = c = 1 \\ r(1) = a + b + 1 = 3 \rightarrow a + b = 2 \\ r(-1) = a - b + 1 = \begin{cases} 2 \rightarrow a - b = 1 & n \text{ impar} \\ 1 \rightarrow a - b = 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{n}{\text{impar}} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{r_{impar}(X) = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1}_{par} \checkmark$$

$$\begin{cases} \frac{n}{\text{par}} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{r_{par}(X) = X^2 + X + 1}_{par} \checkmark$$

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $f(X) = X^6 + X^3 - 2$.

Primera raíz:
$$f(\alpha_1 = 1) = 0 \rightarrow f(X) = q(X) \cdot (X - 1)$$
. Busco $q(X)$ con algoritmo de división.
$$X^6 + X^3 - 2 \begin{vmatrix} X - 1 \\ X^5 \end{vmatrix} = \frac{X^5 + X^4}{X^5} + \frac{X^3 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2}{X^5 + X^4 + X^3} = \frac{X^4 + X^3}{2X^3} = \frac{X^3 + 2X^2}{2X^2} = \frac{X^3 + 2X^2}{2X^2} = \frac{X^3 + 2X^2}{2X + 2} = \frac{X^3 +$$

El cociente $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ se puede factorizar en grupos como $q(X) = (X^2 + X + 1) \cdot (X^3 + 2)$. Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener $f \in \mathbb{C}[X]$ salen de esos dos polinomios.

$$X^{2} + X + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X^{3} + 2 = 0 \xrightarrow{\text{exponencial}} \begin{cases} r^{3} = 2 \rightarrow r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ con } k = 0, 1, 2. \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_{4} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \alpha_{5} = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ \alpha_{6} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

Sea $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. Probar que $w + w^2 + w^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$

Voy a usar que si
$$w \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^{6} w^j = 0 \quad (w \neq 1)$$

Si
$$f(X) = X^2 + X + 2$$
 y $w + w^2 + w^4$ es raíz $\Rightarrow f(w + w^2 + w^4) = 0$
 $(w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8}_{j=0} + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2 \cdot \sum_{j=0}^6 w^j = 0$ \checkmark

14.

- i) Probar que si $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces $X^2 + X 1 = [X (w + w^{-1})] \cdot [X (w^2 + w^{-2})]$.
- ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
- i) Voy a usar que si $w \in G_5 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^4 w^j = 0 & (w \neq 1)^{\bigstar^2} \\ w^k = w^{r_5(k)}^{\bigstar^1} \end{cases}$

$$\begin{split} X^2 + X - 1 &= [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})] = \\ X^2 - (w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + \underbrace{(w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\bigstar^1} = \\ &= X^2 - X\underbrace{(w^2 + w^{-2} + w + w^{-1})}_{\bigstar^1} + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\bigstar^2} = \\ &= X^2 - X\underbrace{(w + w^2 + w^3 + w^4)}_{\star^2} + -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = X^2 - X\underbrace{(-1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0})}_{=0} - 1 = \\ &= X^2 + X - 1 \quad \checkmark \end{split}$$

ii) Calculando las raíces a mano de $X^2 + X - 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ y \\ -1 - \sqrt{5} \end{cases}$

Pero del resultado del inciso i) tengo que :
$$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow{\text{sé que una raíz dada} \atop \text{la factorización es}} w + w^{-1} = w + \overline{w} = 2 \operatorname{Re}(w) = 2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$$

15.

- i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y g si y sólo sí a es raíz de (f : g).
- ii) Hallar todas las raíces complejas de X^4+3X-2 sabiendo que tiene una raíz en común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1.$
- i) Hacer!

- ii) Busco el (f:g): $X^{4} + 3X 2 = (X^{4} + 3X^{3} 3X + 1) \cdot 1 + (-3X^{3} + 6X 3)$ $X^{4} + 3X^{3} 3X + 1 = (-3X^{3} + 6X 3) \cdot (-\frac{1}{3}X 1) + (2X^{2} + 2X 2)$ $-3X^{3} + 6X 3 = (2X^{2} + 2X 2) \cdot (-\frac{3}{2}X + \frac{3}{2}) + 0$ $(f:g) = X^{2} + X 1 \xrightarrow{\text{raíces}} \begin{cases} \alpha_{1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \alpha_{2} = \frac{1 \sqrt{5}}{2} \end{cases}$ $X^{4} + 3X 2 = (X^{2} + X 1) \cdot (X^{2} X + 2) + 0$
- 16. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i)
$$f = X^5 - 2X^3 + X$$
, $a = 1$,

ii)
$$f = X^6 - 3X^4 + 4$$
, $a = i$,

iii)
$$f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2,$$

iv)
$$f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3$$
, $a = 2$.

- i) $f = X^5 2X^3 + X$, a = 1, Todos casos de factoreo: $f = X^5 - 2X^3 + X = X(X^4 - 2X^2 + 1) = X(X^2 - 1)^2 = X(X - 1)^2(X + 1)^2 = 1$ La multiplicidad de a = 1 como raíz es 2.
- iii) $f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a=2,$ $f = (X-2)^3((X+2) + (X+1)) = (X-2)^3(2X+3)$ La multiplicidad de a=2 como raíz de f es 3.
- iv) $f = (X-2)^2(X^2-4) 4(X-2)^3$, a = 2, $f = (X-2)^2(X^2-4) 4(X-2)^3 = (X-2)^2(X-2)(X+2) 4(X-2)^3 = (X-2)^3(X+2-4) = (X-2)^4$ La multiplicidad de a = 2 como raíz de f es 4.

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene solo raíces simples en \mathbb{C} .

$$f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$$

$$\xrightarrow{\text{derivo}} f' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} \iff f' = n(n+1)X^{n-1}(X-1)$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n > 1 \Rightarrow f'(\alpha = 1) = 0 & \text{y} \quad f'(\alpha = 0) = 0 \\ n = 1 \Rightarrow f'(\alpha = 1) = 0 \end{cases}$$

Para que las raíces α , de f no sean simples, es necesario que $f'(\alpha) = 0$. Por lo tanto, estudio solo los valores de raíces encontrados para la derivada. Si f ha de tener raíces dobles, estás deberían ser $\alpha = 1$ o $\alpha = 0$. Entonces:

$$\begin{cases} f(\alpha = 1) = a - 1 \Rightarrow f(1) \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \neq 1 \\ f(\alpha = 0) = a \Rightarrow f(0) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$$

Si $a = 0 \land n \stackrel{\star}{=} 1 \Rightarrow f$ tiene solo una raíz simple en 0.

Si $a \neq 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $a \neq 0 \land n > 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples.

seguramente hay una mejor forma de expresar la respuesta.

18. Controlar y Pasar

19. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en \mathbb{C} . Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

Si f tiene raíces múltiples $\alpha_k \Leftrightarrow f(\alpha_k) = f'(\alpha_k) = 0$, por lo tanto tanto comienzo buscando las raíces de f' para sacarme ese a de en medio.

$$f' = 20X^{19} + 80X^9 = 20X^9(X^{10} + 4) \Rightarrow f' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X^{10} = -4 \Leftrightarrow X = \sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi} \ k \in \mathbb{Z}_{[0,9]} \end{cases}$$

Hay de momento 11 raíces de f'. Me interesa saber si son raíces de f:

$$f(0) = 2a \Rightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$f = (X^{10})^2 + 8X^{10} + 2a \Rightarrow f(\alpha = X^{10} = -4) = (-4)^2 + 8(-4) + 2a = -16 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 8$$

Entonces:

Si
$$a = 0 \Rightarrow f = X^{10}(X^{10} + 8)$$

$$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X = 0$$
 o $X^{10} = -8$, donde $\mu(0; f) = 10$ y $\mu(\sqrt[10]{8}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}); f = 1$ $k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}$.

11 raíces distintas.

Si
$$a = 8 \Rightarrow f = X^{20} + 8X^{10} + 16 = (X^{10} + 4)^2$$

 $\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X^{10} = -4$, donde $\mu(\sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}); f) = 2 \ k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}$

10 raíces distintas.

20. Om hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \odot$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc$.

21.

- i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.
- ↑ ¡Aportá! Correcciones, subiendo ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

- ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.
- i) $(X-1)^2 \mid f \ \forall a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow 1$ es por lo menos raíz doble de $f \Leftrightarrow f(1) = f'(1) = 0$. $\begin{cases} f = X^6 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 2X + 1 & \xrightarrow{\text{evalúo}} f(1) = 0 \ \forall a \in \mathbb{C} \\ f' = 6X^5 10X^4 + 4(1+a)X^3 6aX^2 + 2(1+a)X 2 & \xrightarrow{\text{evalúo}} f'(1) = 0 \ \forall a \in \mathbb{C} \end{cases}$

Calculando f(1) y f'(1) se comprueba. \checkmark

ii) $(X-1)^3 \mid f \Leftrightarrow f''(1) = 0$ $\Rightarrow f'' = 30X^4 - 40X^3 + 12(1+a)X^2 - 12aX + 2(1+a) \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f''(1) = 2a$ $\Rightarrow f''(1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$$\boxed{(X-1)^3 \mid f \iff a=0} \quad \checkmark$$

Observar que si $a \neq 0$, 1 es una raíz doble de f de otra forma es una raíz por lo menos triple.

22. S... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

23. Some suppose that the same of the same suppose that the same suppose the same suppose that the same suppose that the same suppose the same

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

24. 9... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

25. ②... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \bigcirc 3$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc 3$.

26. 2... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

27. 2... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc 3$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc 3$.

28. ②... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc 3$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc 3$.

29. 29... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc 3$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc 3$.

30. 2... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

31. Some support of the state o

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

② ¿Errores? Mandá tu solución, entendible y coqueta, así corregimos.

32. Some suppose that the same of the same suppose that the same suppose the same suppose that the same suppose that the same suppose the same suppose the same suppose that the same suppose the

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

33. Some support of the same o

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc 3$, o mejor aún si querés subirlo en LATEX $\rightarrow \bigcirc 3$.

34. 9... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc 3$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc 3$.

35. ②... hay que hacerlo! 😚

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc 3$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc 5$.

36. 9... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

37. ②... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

38. ②... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

39. Some suppose that the same of the same suppose that the same suppose the same suppose that the same suppose that the same suppose the same suppose the same suppose that the same suppose the

Si querés mandarlo: Telegram $\to \bigcirc 3$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc 3$.



Ejercicios extras:



a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} > 0$ tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\frac{3\pi}{2}$

- b) Para cada valor de **c** hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.
- a) Si la raíz $\alpha = re^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) \Rightarrow f$

$$f(r(-i)) = (r(-i))^6 - 4(r(-i))^5 - (r(-i))^4 + 4^3 + 4(r(-i))^2 + 48(r(-i)) + \mathbf{c} \stackrel{\bigstar}{=} \\ -r^6 + 4r^5i - r^4 - 4r^3i - 4r^2 - 48ri + \mathbf{c} = 0 \iff \begin{cases} \operatorname{Re} : -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 \\ \operatorname{Im} : r(4r^4 - 4r^2 - 48) = 0 \xrightarrow[r^2 = y \text{ y } r \in \mathbb{R}_{>0}]{\text{bicuadrática}} r^2 = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto si $\mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 = (r^2)^3 + (r^2)^2 + 4r^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{c} = 48}$ con raíces $\pm \sqrt{3}i$ dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$

b) Debe ocurrir que $(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$ $X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48 \mid X^2 + 3$ $-X^6 - 3X^4$ $-4X^5 - 4X^4 + 4X^3$ $\frac{4X^{5} - \frac{-3X^{4}}{4X^{5} - 4X^{4}} + 4X^{3}}{4X^{5} - 4X^{4} + 16X^{3}} + 4X^{2}}$ $\frac{-4X^{4} + 16X^{3} + 4X^{2}}{4X^{4} + 12X^{2}}$ $\frac{16X^{3} + 16X^{2} + 48X}{-16X^{3} - 48X}$ $\frac{16X^{2} + 48}{-16X^{2} - 48}$ 0 V + 16) cc

 $f = (X^2 + 3)\underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_q$ como f tiene al menos una raíz doble puedo ver las raíces de la derivada de q:

 $q' = (4X^3 - 12X^2 - 8X + 16)' = 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 4) = 0 \xrightarrow{\text{Posibles raices, Gauss : ()}} q'(1) = 0$, pero $g(1) \neq 0$ $0 \Rightarrow f(1) \neq 0$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{divido para}} \\ \xrightarrow{\text{bajar grado}} & X^3 - 3X^2 - 2X + 4 & X - 1 \\ \underline{-X^3 + X^2} \\ \hline -2X^2 - 2X \\ \underline{-4X + 4} \\ \underline{-4X - 4} \\ 0 \\ \\ g' = 4(X-1)\underbrace{(X^2 - 2X - 4)}_{=h} \xrightarrow{\text{busco raíces}} X^2 - 2X - 4 = 0 \iff \alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5} \\ h = (X-(1+\sqrt{5})) \cdot (X-(1-\sqrt{5}) = X^2 - 2X - 4 \text{ Para calcular que } f(\alpha_1) = g(\alpha_1) = 0 \text{ y comprobar que es una raíz doble, puedo hacer:} \\ X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 & X^2 - 2X - 4 \\ \underline{-2X^3 + 4X^2} \\ -2X^3 + 16X \\ \underline{-4X^2 + 8X + 16} \\ \underline{-4X^2 - 8X - 16} \\ 0 \\ \end{array}$$

 $h^2 = (X^2 - 2X - 4)^2 \rightarrow \text{no la vi venir}$

factorizaciones:

$$\begin{cases}
\mathbb{Q}[X] \to f = (X^2 + 3)(X^2 + 3)(X^2 - 2X - 4)^2 \\
\mathbb{R}[X] \to f = (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))(X^2 - 2X - 4)^2 \\
\mathbb{C}[X] \to f = (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))(X - 3i)^2(X + 3i)^2
\end{cases}$$

2. Factorizar el polinomio $P = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49$ como producto de irreducibles en $\mathbb{C}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ sabiendo que $\sqrt{7}$ es una raíz múltiple.

Un polinomio con coeficientes racionales, y una raíz irracional $\alpha=\sqrt{7}$, tendrá también al conjugado irracional $\alpha=\sqrt{7}$, $\overline{\alpha}=-\sqrt{7}$

Si agregamos la información de que $\sqrt{7}$ es por lo menos raíz doble, obtenemos que:

 $\begin{cases} \sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow (X^2 - 7) \mid f \\ \sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow (X^2 - 7)^2 = X^4 - 14X^2 + 49 \mid f \end{cases} \checkmark$ $X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49 \mid X^4 - 14X^2 + 49 \mid X^2 - X + 1$ $- X^6 + 14X^4 - 49X^2 \mid X^2 - X + 1$ $- X^5 + X^4 + 14X^3 - 14X^2 - 49X$ $X^5 - 14X^3 + 49X$ $X^4 - 14X^2 + 49$ $- X^4 + 14X^2 - 49$

$$f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X^2 - X + 1) \xrightarrow{\text{resolvente}} \begin{cases} \alpha_{+,-} = \frac{1 \pm w}{2} \\ w^2 = -3 \end{cases}$$
$$\to f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$$

¹Estoy usando la misma notación para conjugado racional y conjugado complejo. ¿Está bien? No sé, no me importa mientras se entienda.

$$\begin{cases} \mathbb{Q}[X] \to f = (X^2 + 7)^2 (X^2 - X + 1) \\ \mathbb{R}[X] \to f = (X + \sqrt{7})^2 (X - \sqrt{7})^2 (X^2 - X + 1) \\ \mathbb{C}[X] \to f = (X + \sqrt{7})^2 (X - \sqrt{7})^2 (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{cases}$$

- - i) $1 \sqrt{2}$ es raíz de f;
 - ii) $X(X-2)^2 \mid (f:f');$
 - iii) $(f: X^3 1) \neq 1$;
 - iv) f(-1) = 27;
 - i) Como $f \in \mathbb{Q}[X]$ si $\alpha_1 = 1 \sqrt{2}$ es raíz entonces $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$ para que no haya coeficientes irracionales en el polinomio.

$$(X - (1 - \sqrt{2})) \cdot (X - (1 + \sqrt{2})) = X^2 - 2X - 1$$

Por lo tanto $X^2 - 2X - 1$ será un factor de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

- ii) Si $X(X-2)^2 \mid (f:f') \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \text{ raı́z simple de } f' \Rightarrow \text{ raı́z doble de } f \\ \alpha_4 = 2 \text{ raı́z simple de } f' \Rightarrow \text{ raı́z doble de } f \end{cases}$ Por lo tanto $X^2(X-2)^3$ serán factores de f.
- iii) Si $(f: X^3 1) \neq 1$ quiere decir que por lo menos alguna de las 3 raíces de: $X^3 1 = (X 1) \cdot (X (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (X (-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}))$ tiene que aparecer en la factorización de f. Pero parecido al item i) si tengo una raíz compleja, también necesito el conjugado complejo, para que no me queden coeficientes de f en complejos, $X^3 1 = (X 1) \cdot (X^2 + X + 1)$, me quedaría con el factor de menor grado si eso no rompe otras condiciones.

Por lo tanto (X-1) o (X^2+X+1) aparecerá en la factorización de f.

iv) f(-1) = 27. Hasta el momento:

$$\begin{cases} f_1 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X^2 + X + 1) \to f_1(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot 1 = -54 \\ f_2 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \to f_2(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot (-2) = 108 \end{cases}$$

, ninguno cumple la condición iv).

Para encontrar un polinomio que cumpla lo pedido tomaría el f_2 que tiene menor grado de los dos y lo multiplicaría por $(X-\frac{3}{4})$ de manera que $f=(X^2-2X-1)\cdot X^2\cdot (X-2)^3\cdot (X-1)\cdot (X-\frac{3}{4}) \to f(-1)=27$ así cumpliendo todas las condiciones.

\dot{\circ}4. Factorizar como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ al polinomio

$$f = X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15$$

sabiendo $(f: X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$

Si el $(f: X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$, esto nos da información sobre raíces comunes entre f y $X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5$. Puedo hacer el algoritmo de Euclides para encontrar el MCD, con esa o esas raíces. El último resto no nulo hecho mónico será el MCD.par

$$X^{5} + 2X^{4} - 7X^{3} - 7X^{2} + 10X - 15 = \left(X^{4} - X^{3} + 6X^{2} - 5X + 5\right) \cdot \left(X + 3\right) + \left(-10X^{3} - 20X^{2} + 20X - 30\right)$$

$$X^{4} - X^{3} + 6X^{2} - 5X + 5 = \left(-10X^{3} - 20X^{2} + 20X - 30\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}X + \frac{3}{10}\right) + \left(14X^{2} - 14X + 14\right)$$

$$-10X^{3} - 20X^{2} + 20X - 30 = \left(14X^{2} - 14X + 14\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}X - \frac{15}{7}\right) + 0$$

 $(f: X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) = X^2 - X + 1$. Las raíces del MCD son $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm w}{2}$ con $w^2 = 3i$. $X^2 - X + 1 = (X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}))$ Por definición de lo que es el MCD sabemos que $X^2 - X + 1 \mid f$, haciendo la división bajamos el grado y

seguimos buscando las raíces.

Obtuvimos que $f = (X^2 - X + 1) \cdot (X^3 + 3X^2 - 5X - 15) + 0$. Hermoso resultado, donde la hermosura se mide en su simpleza para ser factorizado. Sin usar calculadora ni Guass ni ninguna cosa extraña podemos expresar a f como:

$$f \stackrel{!}{=} (X^2 - X + 1) \cdot \underbrace{(X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X + 3)}_{X^3 + 3X^2 - 5X - 15}$$

Si todavía no viste como fue la factorización en! te recomiendo que sigas mirando sin tocar calculadora ni ningún tipo de spoiler del pesado o pesada sabelotodo que quizás tenés al lado y que no te deja tiempo para pensar. Es puro factoreo que debería salir a ojo.

Ahora factorizamos en irreducibles, que son polinomios mónicos que solo se dividen por sí mismos y por 1. Para tener una mejor explicación clickeá acá! Y vas a la teoría del apunte.

factorizaciones:

$$\mathbb{Q}[X] \rightarrow f = (X^2 - 5) \cdot (X^2 - X + 1) \cdot (X + 3)$$

$$\stackrel{\in \mathbb{R}[X]}{\in \mathbb{R}[X]} \stackrel{\in \mathbb{R}[X]}{\in \mathbb{R}[X]} \stackrel{\in \mathbb{R}[X]}{\in \mathbb{R}[X]}$$

$$\mathbb{R}[X] \rightarrow f = (X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X^2 - X + 1) \cdot (X + 3)$$

$$\stackrel{\in \mathbb{C}[X]}{\in \mathbb{C}[X]} \stackrel{\in \mathbb{C}[X]}{\in \mathbb{C}[X]} \stackrel{\in \mathbb{C}[X]}{\in \mathbb{C}[X]} \stackrel{\in \mathbb{C}[X]}{\bullet \mathbb{C}[X]}$$

$$\mathbb{C}[X] \rightarrow f = (X + 3) \cdot (X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}))$$

Sea $(f_n)_{(n\geq 1)}$ la sucesión de poliniomios en $\mathbb{R}[X]$ definida como:

$$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20$$
 y $f_{n+1} = (X+2)^2 f_n' + 3f_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Probar que -2 es raíz doble de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

No caer en la $trampilla^{2}$ de olvidar que para que una raíz de f sea doble, i.e. $mult(-2; f) \stackrel{!}{=} 2$ debe ocurrir lo "obvio", f(-2) = f'(-2) = 0 y también que $f''(-2) \neq 0$. Si olvidamos esto último solo probaríamos que la mult $(-1; f) \ge 2$ y tendríamos el ejercicio mal \mathfrak{Z} .

Por inducción en n: q(n): "-2 es raíz doble de f_n , $\forall n \in \mathbb{N}$ "

Caso base: j,q(1) es V?

$$\begin{cases} f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 & \xrightarrow{\text{evaluar}} & f_1(-2) = 0 \\ f_1' = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 22X & \xrightarrow{\text{evaluar}} & f_1'(-2) = 0 \\ f_1'' = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 22 & \xrightarrow{\text{evaluar}} & f_1''(-2) = 22 \neq 0 \end{cases}$$

 \therefore mult $(-2; f_1) = 2 \Rightarrow -2$ es raíz doble de $f_1 \Rightarrow q(1)$ es V

<u>Paso inductivo:</u> ¿Si q(k) verdadera $\Rightarrow q(k+1)$ también lo es, $\forall k \in \mathbb{N}$?

$$HI: -2 \text{ es raı́z doble de } f_k \Leftrightarrow \begin{cases} f_k(-2) = 0 \bigstar^1 \\ f'_k(-2) = 0 \bigstar^2 \\ f''_k(-2) \neq 0 \bigstar^3 \end{cases}$$

QPQ dado $k \in \mathbb{N}$, q(k+1) : -2 es raíz doble de $f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (X+2)^2 f_k' + 3f_k$:

Derivar:

$$\begin{cases} f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (X+2)^2 f_k' + 3f_k \\ f_{k+1}' = 2(X+2) f_k' + (X+2)^2 f_k'' + f_k' \\ f_{k+1}'' = 2f_k' + (2x+4) f_k'' + 2(x+2) f_k'' + (x+2)^2 f_k''' + f_k'' \end{cases}$$

Evaluar en -2:

$$f_{k+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow f_{k+1}(-2) = (-2+2)^2 f'_k(-2) + 3f_k(-2) = 0^2 f'_k(-2) + 3f_k(-2) = 3f_k(-2) \stackrel{\bigstar}{=} 0 \checkmark$$

$$f'_{k+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; f'_{k+1}(-2) = 2(-2+2)f'_k(-2) + (-2+2)^2f'' + f'_k(-2) = f'_k(-2) \stackrel{\bigstar^2}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f_{k+1}''(-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_{k+1}''(-2) = 2f_k'(-2) + 2(-2 + 2)f_k''(-2) +$$

Como q(1), q(k) y q(k+1) resultaron verdaderas, por principio de inducción q(n) también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.



a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ (positivo) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

- b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$
- a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ (positivo) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

Solución:

Limpiando los denominadores de f se obtiene el polinomio g con las mismas raíces:

$$g = 3X^5 + nX^4 - 8X^3 + 11X^2 - 3X = X(\underbrace{3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3}_h)$$

Por enunciado ignoramos la raiz nula y utilizando el Lema de Gauss buscamos las raíces racionales de

$$h = 3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3$$

Aquí, $a_0 = -3 \text{ y } a_n = 3$

$$Div(a_0) = Div(a_n) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

Como busco raíces enteras, las busco en el conjunto:

$$\{\pm 1, \pm 3\}$$

Chequeo:

$$\begin{array}{lll} h(-1) = 0 & \iff & n = -19 \notin \mathbb{N} \\ h(1) = 0 & \iff & n = -3 \notin \mathbb{N} \\ h(-3) = 0 & \iff & \boxed{n = 5} \in \mathbb{N} \\ h(3) = 0 & \iff & n = \frac{67}{9} \notin \mathbb{N} \end{array}$$

Rta: n=5 es el único valor de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el polinomio f tiene una raíz entera no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

Solución:

Primero factorizo la raiz nula de de f

$$f = X^5 + \frac{5}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X = X(X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1)$$

Se, por el item (a), que -3 es una de las raíces racionales de f. Busco otras posibles raiíces racionales en el polinomio h (con n=5) obtenido en el item (a) en el conjunto $\{\pm \frac{1}{3}\}$

$$h(-\frac{1}{3}) = -\frac{208}{27}$$

 $h(\frac{1}{3}) = 0 \implies \frac{1}{3}$ es una raiz racional de f.

Factorizo el polinomio f diviendolo por el producto de las dos raíces encontradas $(X+3)\cdot (X-\frac{1}{3})=X^2+\frac{8}{3}-1$

$$\begin{array}{c|c} X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1 & X^2 + \frac{8}{3}X - 1 \\ -X^4 - \frac{8}{3}X^3 + X^2 & X^2 - X + 1 \\ \hline -X^3 - \frac{5}{3}X^2 + \frac{11}{3}X & X^3 + \frac{8}{3}X^2 - X \\ \hline X^2 + \frac{8}{3}X - 1 & X^2 - \frac{8}{3}X + 1 \\ \hline -X^2 - \frac{8}{3}X + 1 & 0 \end{array}$$

Factorizo el polinomio cuadrático $X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$$x_{+} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \text{ y } x_{-} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$$

Rta:

 $\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)) \in \mathbb{C}$ con todos sus factores de multiplicidad 1 y por lo tanto irreducibles.

 $f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2-X+1) \in \mathbb{R}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto irreducibles en \mathbb{R} .

 $f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2-X+1) \in \mathbb{Q}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto irreducibles en \mathbb{Q} .

- **07.** Determinar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que satisfaga simultáneamente:
 - \blacksquare f es mónico,
 - $\operatorname{gr}(f: 2X^3 5X^2 20X + 11) = 2$
 - f tiene una raíz $z \in G_3$ con $z \neq 1$, que es doble,
 - f(0) = 33;

El dato de gr $(f: 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11) = 2$ indica que hay un polinomio, d, con gr(d) = 2 que cumple

que $\begin{cases} d \mid f \\ d \mid g \end{cases}$ entonces, f tiene 2 raíces en común con g, puede ser una doble o dos simples. Dado que nos piden que sea de grado mínimo habrá que tener cuidado cual elegir para no violar ninguna condición.

Calculemos las posibles raíces de g usando lema de gauss: Posibles raíces serán los cocientes de los divisores de 11 y los de 2. $\mathcal{D}(11) = \{\pm 1, \pm 11\}, \mathcal{D}(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$: $\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 11, \pm \frac{11}{2}\}$. Probando esos valores encuentro que $g(\frac{1}{2}) = 0$ y ninguna de las otras funcionó. Le bajamos el grado con el algoritmo de división a g.

$$\begin{array}{c|c}
2X^{3} - 5X^{2} - 20X + 11 & X - \frac{1}{2} \\
-2X^{3} + X^{2} & 2X^{2} - 4X - 22 \\
\hline
-4X^{2} - 20X \\
4X^{2} - 2X \\
\hline
-22X + 11 \\
22X - 11 \\
\hline
0
\end{array}$$

 $g = (X - \frac{1}{2}) \cdot (\underbrace{2X^2 - 4X - 22}_{h}) + 0$, buscamos raíces de h:

$$\alpha_{+,-} = \frac{4 \pm 8\sqrt{3}}{4} = 1 \pm 2\sqrt{3} = \begin{cases} 1 + 2\sqrt{3} \\ 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Entonces: f tiene 2 raíces en común con $g=(X-\frac{1}{2})(X-(1+2\sqrt{3}))(X-(1-2\sqrt{3}))$. Dado que $f\in\mathbb{Q}[X]$ voy a seleccionar las raíces $\in\mathbb{I}$ por la condiciónde grado mínimo.

Con la condición que dice que f tiene una raíz $z \in G_3$ con $z \neq 1$, que es doble, no nos dejan muchas opciones. G_3 tiene tres raíces, solución de $w^3 = 1$, dado que por enunciado no puede ser 1, entonces solo

quedan. $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (si no te acordás como encontrar raíces de la familia G_n te dejo el ejercicio 12.) que se hacen las cuentas. Ok, tengo esas dos $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ¿Cuál elijo? cualquiera nos sirve, porque, nuevamente, como $fen \mathbb{Q}[X]$ si agarro una raíz compleja también necesito su conjugado complejo, lo mismo que antes. Hasta el momento tenemos:

$$f = (X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))\underbrace{(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}))^{2^{\frac{1}{2}}}(X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}))^{2^{\frac{1}{2}}}}_{(X^2 + X + 1)^2} = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2$$

 \bigstar Si es doble una de las complejas, también debe serlo su conjugado, porque $f \in \mathbb{Q}[X]$.

Nos queda cumplir que f(0) = 33, si bien ahora f(0) = -11. Acá tenemos que tener en cuenta la primera condición. f es m'onico, así que no podemos corregir el valor con coeficiente independiente. Hay que proponer otro factor en $\mathbb{Q}[X]$, que al evaluar de el número que al multiplicarse con -11 nos dé 33. El candidato es (X-3), dado que en 0 vale -3 y así $f(0) = (-11) \cdot (-3) = 33$ como queremos. El $f \in \mathbb{Q}[X]$ que cumple lo pedido:

$$f = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2(X - 3)$$

७8.

- a) Determinar todos los $f \in \mathbb{R}[X]$ mónicos de grado mínimo tales que cumplan:
 - f contiene entre sus raíces al menos una raíz cúbica de la unidad,
 - $X^2 + 1 \mid (f : f')$,
 - \bullet f tiene al menos 2 raíces enteras,
 - f(1) = -12,
- b) Con el polinomio f hallado expresar factorización en irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
- a) Arrancando con la primera condición, tenemos al menos a una de las w tales que:

$$w^{3} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} w_{1} = 1 \overset{*}{\bigstar}^{1} \\ w_{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}.$$

Si no te acordás como calcular las raíces, mirá el ejercicio 12, donde se resuelve algo casi idéntico. Como el polinomio $debe\ ser\ de\ grado\ m\'inimo\ y\ tiene\ coeficientes\ en\ \mathbb{R}$ hay que elegir con cuidado. Lo mejor es ver el resto de las condiciones para no hacer cagadas. ([spoiler alert: Elegí el 1 si sos picante!)

De la segunda condición sacamos que:

$$X^{2} + 1 = (X - i) \cdot (X + i) \mid (f : f') \Leftrightarrow \begin{cases} X^{2} + 1 \mid f \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i) \mid f \\ y \\ (X + i) \mid f \end{cases} \\ X^{2} + 1 \mid f' \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i) \mid f' \\ y \\ (X + i) \mid f' \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i)^{2} \mid f \\ y \\ (X + i)^{2} \mid f \end{cases}$$

Si no entendés el porqué de eso mirate esto de las notas teóricas, para tener contexto. Básicamente si α es una raíz de f y también de f', entoences es una raíz por lo menos doble de f.

En el tercer punto, nos dicen que tiene al menos 2 raíces en \mathbb{Z} . ¿Una de esas podría ser el 1 que obtuvimos como raíz de G_3 ?, Dejame que lo piense.

En el último punto tenemos que cumplir que al evaluar en nuestro polinomio f en 1, eso nos dé -12. Y es acá donde nos damos cuenta de que no podemos elegir a 1^{*} para que sea raíz de f!! Y dado

que $f \in \mathbb{R}[X]$ tenemos que elegir entonces <u>ambas</u> $\begin{cases} w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$. Propongo:

$$f = (X - (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - i)^{2}(X + i)^{2}(X - a)(X - b)$$

$$\stackrel{\bigstar^{2}}{=} (X^{2} + X + 1)(X^{2} + 1)^{2}(X - a)(X - b),$$

con a y b a determinar, de manera tal de cumplir las últimas dos condiciones: ambas enteras y f(1) = -12.

$$f(1) = -12 \stackrel{\bigstar^2}{\Longleftrightarrow} 12 \cdot (1-a)(1-b) = -12 \iff (1-a)(1-b) = -1 \stackrel{a}{\Longleftrightarrow} a = 2 \quad \text{y} \quad b = 0.$$

Esas serían las candidatas a raíces enteras, obteniendo así un único polinomio

$$f = (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - 2)(X - 0) = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$$

mónico y de grado mínimo que cumple las condiciones pedidas.

b) La definición de polinomio irreducible está acá.

$$\mathbb{Q}[X] \to f = X(X-2)(X^2+X+1)(X^2+1)^2$$

$$\mathbb{R}[X] \to f = X(X-2)(X^2+X+1)(X^2+1)^2$$

$$\mathbb{C}[X] \to f = X(X-2)(X-(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-i)^2(X+i)^2$$

Notar que en \mathbb{Q} y en \mathbb{R} las factorizaciones son iguales, dado que no hay raíces irracionales.

- - f comparte una raíz con $X^3 3X^2 + 7X 5$
 - $X + 3 \sqrt{2} | f$,
 - 1 2i es raíz de f y f'(X 2i) = 0

Vamos con la primera. Si dos polinomios , f y $g=X^3-3X^2+7X-5$, comparten raíz buscamos raíces de g con el lema de Gauss de donde tomaremos las raíces que nos sirvan para construir nuestro f mónico g de grado mínimo: $A=\{\pm 1,\pm 5\}$, con $\alpha=1\Rightarrow g(1)=0$ \checkmark . Como $\alpha=1$ es raíz, entonces $X-1\mid g$:

$$\begin{array}{r|r}
X^3 - 3X^2 + 7X - 5 & X - 1 \\
-X^3 + X^2 & X^2 - 2X + 5 \\
\hline
-2X^2 + 7X & 2X^2 - 2X \\
\hline
5X - 5 & 5 \\
-5X + 5 & 0
\end{array}$$

 $g = (X-1) \cdot (X^2 - 2X + 5),$ busco raíces del cociente $X^2 - 2X + 5,$ usando resolvente

$$r_{+,-} = \frac{2 \pm w}{2}$$
, con $w^2 = -16 \rightarrow \begin{cases} r_+ = 1 + 2i \\ r_- = 1 - 2i. \end{cases}$

Finalmente,

$$g \stackrel{\bigstar^{1}}{=} (X - 1) \cdot \underbrace{(X - (1 + 2i)) \cdot (X - (1 - 2i))}_{X^{2} - 2X + 5} \quad \checkmark,$$

antes de elegir cuales de estas raíces serán comunes a f es recomendable estudiar las otras condiciones del enunciado.

 $X+3-\sqrt{2}=X-(-3+\sqrt{2})\,|\,f,$ por lo que $(-3+\sqrt{2})$ es una raíz de f y dado que $f\in\mathbb{Q}[X]$ también debe estar el conjugado irracional $-3-\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f \\ y & \Leftrightarrow X^2 + 6X + 7 \mid f \quad \checkmark. \end{cases}$$

$$X - (-3 - \sqrt{2}) \mid f$$

La tercera condición tiene $mucha\ data$. Nos da una raíz compleja de f, por lo cual también tendremos su conjugado complejo porque $f \in \mathbb{Q}[X]$.

Esa raíz es una de las que está en g^{\bigstar^1} .

El dato de f', también nos indica que la multiplicidad de 1-2i como raíz es por lo menos 2, ya que f'(1-2i)=0, y porlo tanto mult(1+2i;f) también será por lo menos 2.

Tenemos todo para armar a f:

$$f = (X^2 - 2X + 5)^2 \cdot (X^2 + 6X + 7)$$