

Práctica 7 de álgebra 1

Comunidad algebraica

last update: 25/06/2024

Definiciones y fórmulas útiles

- *Operaciones:*

$$+ : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{i=0}^n b_i X^i$$

$$\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

$$\cdot : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$$

$$\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \in \mathbb{K}[X]$$

- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo $\rightarrow f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h, \forall f, g, h \in \mathbb{K}[X]$
- *Algoritmo de división:* $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos q y $R \in \mathbb{K}[X]$ tal que $f = q \cdot g + R$ con $\text{gr}(R) < \text{gr}(f)$ o $R = 0$
- α es raíz de $f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$
- *Máximo común divisor:* Polinomio mónico de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.

$$- (f : g) \mid f \text{ y } (f : g) \mid g$$

$$- f = (f : g) \cdot k_f \text{ y } g = (f : g) \cdot k_g \text{ con } k_f \text{ y } k_g \text{ en } \mathbb{K}[X]$$

$$- \text{ Dos polinomios son coprimos si } (f : g) = 1 \iff f \neq g$$

- *Raíces múltiples:* $f \in \mathbb{K}[x], \alpha \in \mathbb{K}$ es raíz de f de multiplicidad $m \in \mathbb{N}_0$ si $(X - \alpha)^m \mid f$ y $(X - \alpha)^{m+1} \nmid f$. O sea, $f = (X - \alpha)^m \cdot \underbrace{q(\alpha)}_{\neq 0}$

$$- \text{ Una raíz simple de } f \text{ cumplirá que } (x - \alpha) \mid f, \text{ pero } (x - \alpha)^2 \nmid f$$

- Vale que α es raíz múltiple de $f \iff f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) = 0 \iff \alpha$ es raíz de $(f : f'), X - \alpha \mid (f : f')$

$$- \text{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0 \text{ y } \text{mult}(\alpha; f') = m - 1$$

$$- \text{mult}(\alpha; f) = m \iff \begin{cases} \text{mult}(\alpha; f) \geq m \\ \text{mult}(\alpha; f) = m \end{cases} \iff \begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Ejercicios dados en clase:

Ejercicios de la guía:

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

- i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$,
- ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$,
- iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$,

i) *coeficiente principal:* 4^{77}
grado: $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:* $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$
grado: 28

iii) *coeficiente principal:* $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4}_f + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_g$

Cuando sumo me queda: $\text{cp}(f^4) - \text{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0 \Rightarrow \text{gr}(f^4 + g) < 20$

→ Calculo el $\text{cp}(f^4 + g)$ con $\text{gr}(f^4 + g) = 19$.

Laburo a f :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para usar} \rightarrow (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \\ \text{fórmula de } f \cdot g \\ f^2 \cdot f^2 = \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \star^2 \\ \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \xrightarrow[\text{el término con } k=19]{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \stackrel{\star^1}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_{10} \text{ sale a}}{\text{ojímetro}} b_{10} = (-3)^2 = 9 \\ \frac{a_9 \text{ no tan fácil, volver}}{\text{a usar } \sum f \cdot g \text{ en } k=9} f \cdot f = \sum_{k=0}^{10} \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow{k=9} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \stackrel{\star^3}{=} c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot c_4 \cdot d_5 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{d_5 \text{ sale a}}{\text{ojímetro}} d_5 = -3 \\ \frac{c_4 \text{ sale a}}{\text{ojímetro}} c_4 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a_9 = -6 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{cp}(f^4) = 2 \cdot (-6) \cdot (9) = -108 \\ \text{cp}(g) = 19 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\text{cp}(f^4 + g) = -89} \quad \checkmark \end{array} \right.$$

\star^1 : Sabemos que el $\text{gr}(f^4) = 20 \Rightarrow \text{gr}(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \leq 10$

solo puede ocurrir *cuando los exponentes* $\left\{ \begin{array}{c} i = 10, j = 9 \\ \vee \\ i = 9, j = 10 \end{array} \right\}$

\star^2 : porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

\star^3 : Idem \star^1 para el polinomio f

grado: 19

2. Hacer!

3. Hacer!

4. Hacer!

5. Hacer!

6. Hacer!

7. Hacer!

8. Hacer!

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, g = X^4 - X^3 - X^2 + 1,$

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, g = X^3 + X,$

iii) $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1, g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1,$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} X^5 \\ - X^5 + X^4 \end{array} & \begin{array}{l} X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ X + 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} X^4 + 2X^3 - 6X^2 + 2 \\ - X^4 + X^2 - 1 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{r} 3X^3 - 5X^2 + 1 \end{array} & \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Euclides}} (f : g) = (g : 3X^3 - 5X^2 + X + 1)$$

$$\xrightarrow[\text{en función de } g]{\text{escribo a } f} f = (X + 1) \cdot g + 3X^3 - 5X^2 + X + 1$$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} X^4 \\ - X^4 + \frac{5}{3}X^3 \phantom{- \frac{1}{3}X^2} - \frac{1}{3}X \end{array} & \begin{array}{l} 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ \frac{1}{3}X + \frac{2}{9} \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} \frac{2}{3}X^3 \phantom{- \frac{4}{3}X^2} - \frac{1}{3}X \\ - \frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9} \end{array} & \\ \hline \begin{array}{r} - \frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \end{array} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3X^3 - 5X^2 + X + 1 & -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\
-3X^3 - \frac{15}{2}X^2 + \frac{21}{2}X & -\frac{27}{2}X + \frac{225}{4} \\
\hline
-\frac{25}{2}X^2 + \frac{23}{2}X + 1 & \\
-\frac{25}{2}X^2 + \frac{125}{4}X - \frac{175}{4} & \\
\hline
\frac{171}{4}X - \frac{171}{4} & \\
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \left| \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \right. \\
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X & \left| -\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \right. \\
\hline
-\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} & \\
-\frac{7}{9}X - \frac{7}{9} & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 &= (X^4 - X^3 - X^2 + 1) \cdot (X + 1) + (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \\
X^4 - X^3 - X^2 + 1 &= (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \cdot \left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \\
3X^3 - 5X^2 + X + 1 &= \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{27}{2}X + \frac{225}{4}\right) + \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \\
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} &= \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539}\right) + 0
\end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow (f : g) = X - 1$

Y ahora tengo que escribir $X - 1 = F \cdot f + G \cdot g$?
Algún truco para no lidiar con esas fracciones?

$$\begin{aligned}
\text{ii) } X^6 + X^4 + X^2 + 1 &= (X^3 + X) \cdot X^3 + (X^2 + 1) \\
X^3 + X &= (X^2 + 1) \cdot X + 0
\end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow (f : g) = X^2 + 1$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)$

iii) $\xrightarrow[\text{Euclides}]{\text{Haciendo}}$

$$\begin{aligned}
2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1 &= (X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1) \cdot 2X + (X^4 + 2X + 1) \\
X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1 &= (X^4 + 2X + 1) \cdot (X - 2) + 3 \\
X^4 + 2X + 1 &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) + 0
\end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y *mónico* $\rightarrow (f : g) = 1$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow 1 = \frac{1}{3}g \cdot (2X^2 - 4X + 1) - \frac{1}{3}f \cdot (X - 2)$

10. Hacer!

11. Hacer!

12. Hacer!

-
13. Hacer!
-
14. Hacer!
-
15. Hacer!
-
16. Hacer!
-
17. Hacer!
-
18. Hacer!
-
19. Hacer!
-
20. Hacer!
-
21. Hacer!
-
22. Hacer!
-
23. Hacer!
-
24. Hacer!
-
25. Hacer!
-
26. Hacer!
-
27. Hacer!
-
28. Hacer!

29. **Hacer!**

30. **Hacer!**

31. **Hacer!**

32. **Hacer!**

33. **Hacer!**

34. **Hacer!**

35. **Hacer!**

36. **Hacer!**

37. **Hacer!**

38. **Hacer!**

39. **Hacer!**