

Apunte único: Álgebra I - Práctica 7

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(doubleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas

- Ejercicios de la guía:

1.	6.	11.	16.	21.	26.	31.	36.
2.	7.	12.	17.	22.	27.	32.	37.
3.	8.	13.	18.	23.	28.	33.	38.
4.	9.	14.	19.	24.	29.	34.	39.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	

- Ejercicios de Parciales

 1.	 3.	 5.	 7.	 9.	 11.
 2.	 4.	 6.	 8.	 10.	

Disclaimer:

Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:

-  **0**₁ Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
-  **0**₂ Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
-  **0**₃ ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
-  **0**₄ Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
-  **0**₅ Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir '*no me sale*' \neq +. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda, no te van a salir los ejercicios más difíciles: **Sentido común**.

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confianza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada*. Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber*. A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas **de Teresa** que son **buenísimos** .

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra: **Prácticas Pandemia** .

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre **Just Do IT** .

Eh, loco, fatalista, distópico, **relajá un toque** te vas a quedar (más) pelado...  **va a salir todo bien!**

El repo en [github](#)  para descargar las guías con los últimos updates.



<https://github.com/nad-garraz/algebraUno>

La Guía 7 se actualizó por última vez: 30/11/24 @ 00:20

Guía 7



<https://github.com/nad-garraz/algebraUno/blob/main/7-guia/7-sol.pdf>

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por

[Telegram](#) .



<https://t.me/+1znt2GV1i8cwMTNh>

Notas teóricas:• *Operaciones:*

$$+ : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{i=0}^n b_i X^i$$

$$\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

$$\cdot : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$$

$$\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \in \mathbb{K}[X]$$

• *Algoritmo de división:*

$f, g \in \mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos q y $R \in \mathbb{K}[X]$ tal que

$$f = q \cdot g + R$$

con $\text{gr}(R) < \text{gr}(g)$ o $R = 0$.

• *Raíz de un Polinomio:*

$$\alpha \text{ es raíz de } f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$$

• *Máximo común divisor:*

Polinomio, $(f : g) \in \mathbb{K}[X]$, *mónico* de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.

- $(f : g) \mid f$ y $(f : g) \mid g$
- $f = (f : g) \cdot k_f$ y $g = (f : g) \cdot k_g$ con k_f y k_g en $\mathbb{K}[X]$
- Dos polinomios son coprimos si $(f : g) = 1 \iff f \neq g$

• *Raíces múltiples:*

Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se dice que:

- Cuando f tiene una raíz múltiple:

$$\alpha \text{ es raíz múltiple de } f \iff f = (X - \alpha)^2 q$$

$$f = (X - \alpha) \cdot q, \text{ con } q \in \mathbb{K}[X] \text{ y } q(\alpha) = 0.$$

- Cuando la raíz *no* es múltiple, es *simple* cuando:

$$\alpha \text{ es raíz simple de } f \iff (X - \alpha) \mid f \text{ y } (X - \alpha)^2 \nmid f$$

$$f = (X - \alpha) \cdot q, \text{ con } q \in \mathbb{K}[X] \text{ y } q(\alpha) \neq 0.$$

Prestale atención a los ! porque sino la vas a cagar.

- Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Se dice que α es raíz de multiplicidad (exactamente) m de f , y se nota:

$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff (X - \alpha)^m \mid f,$$

y también

$$(X - \alpha)^{m+1} \nmid f.$$

O equivalentemente,

$$f = (X - \alpha)^m q \quad \text{con} \quad q \in \mathbb{K}[X], \quad \text{y} \quad q(\alpha) \neq 0.$$

- *Raíces y MCD:*

Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no ambos nulos, y $\alpha \in \mathbb{K}$: **Esta se usa bastante.**

$$\Rightarrow f(\alpha) = g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (f : g)(\alpha) = 0$$

- α es raíz múltiple de f si y solo si:

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad f'(\alpha) = 0 \iff \alpha \text{ es raíz de } (f : f') \iff X - \alpha \mid (f : f')$$

- La multiplicidad m de una raíz, será $m - 1$ en la derivada:

$$\text{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \text{mult}(\alpha; f') = m - 1$$

- Relación entre la multiplicidad de una raíz de f y sus derivadas:

$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{mult}(\alpha; f) \geq m \\ \text{mult}(\alpha; f) = m \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{array} \quad \text{la } m\text{-ésima derivada no se anula.}$$

Todo ese quilombo de cosas lo que dice es por ejemplo, que si tenés una raíz α de f **triple** entonces la **tercera derivada NO PUEDE SER 0**, $f'''(\alpha) \neq 0$.

Pero tanto la función, su primera y segunda derivada DEBEN SER 0, $f(\alpha) \stackrel{!!}{=} f'(\alpha) \stackrel{!!}{=} f''(\alpha) \stackrel{!!}{=} 0$

- *Lema de Gauss:*

Sea $f = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ con $a_0 \neq 0$. Si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[X]$ es una raíz racional de f , con α y $\beta \in \mathbb{Z}$ coprimos, entonces $\alpha \mid a_0$ y $\beta \mid a_n$.

El *Lema de Gauss* implica que en el conjunto de fracciones irreducibles $\frac{\alpha}{\beta}$ están **todas** las raíces racionales de f .

- Polinomios irreducibles:

Sea $f \in K[X]$

- Se dice que f es *irreducible* en $K[X]$ cuando $f \notin K$ y los únicos divisores de f son de la forma $g = c$ o $g = cf$ para algún $c \in K^\times$. O sea f tiene únicamente dos divisores mónicos (distintos), que son 1 y $\frac{f}{\text{cp}(f)}$
- Se dice que f es *reducible* en $K[X]$ cuando $f \notin K$ y f tiene algún divisor $g \in K[X]$ con $g \neq c$ y $g \neq cf$, $\forall c \in K^\times$, es decir f tiene algún divisor $g \in K[X]$ (no nulo por definición) con $0 < \text{gr}(g) < \text{gr}(f)$.

Ejercicios de la guía:

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

- i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$,
- ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$,
- iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$,

i) *coeficiente principal:* 4^{77}

grado: $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:* $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$

grado: 28

iii) *coeficiente principal:* $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4}_f + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_g$

Cuando sumo me queda: $\text{cp}(f^4) - \text{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0$, esto quiere decir que no sé cual es el coeficiente principal, porque el 0 está matando al término X^{20} . Tengo entonces $\text{gr}(f^4 + g) < 20$

Calculo el $\text{cp}(f^4 + g)$ con $\text{gr}(f^4 + g) = 19$.

Laburo a f:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[\text{fórmula de } f \cdot g]{\text{para usar}} (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \\ f^2 \cdot f^2 &= \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente} \star^2 \\ & \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \xrightarrow[\text{el término con } k=19]{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \stackrel{\star^1}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{b_{10} \text{ sale a}} b_{10} = (-3)^2 = 9 \\ \xrightarrow[\text{a usar } \sum f \cdot g \text{ en } k=9]{a_9 \text{ no tan fácil, volver}} f \cdot f = \sum_{k=0}^{10} \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow{k=9} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \stackrel{\star^3}{=} c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot c_4 \cdot d_5 \\ \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{d_5 \text{ sale a}} d_5 = -3 \\ \xrightarrow[\text{ojímetro}]{c_4 \text{ sale a}} c_4 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a_9 = -6 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{cp } f^4 = 2 \cdot (-6) \cdot (9) = -108 \\ \text{cp } g = 19 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\text{cp } f^4 + g = -89} \quad \checkmark \end{array} \right. \end{aligned}$$

\star^1 : Sabemos que el $\text{gr}(f^4) = 20 \Rightarrow \text{gr}(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \leq 10$

solo puede ocurrir *cundo los exponentes* $\left\{ \begin{array}{c} i = 10, j = 9 \\ \vee \\ i = 9, j = 10 \end{array} \right\}$

\star^2 : porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

\star^3 : Idem \star^1 para el polinomio f

grado: 19

2. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 📄.

3. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que:

- i) $f^2 = Xf + X + 1$,
 ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$,
 iii) $(X + 1)f^2 = X^6 + Xf$,
 iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f$.

- i) La ecuación se tiene que cumplir para todo valor de X , así que no es cuestión de buscar algún valor para el que la igualdad se cumpla. Acomodo la ecuación:

$$f^2 = Xf + X + 1 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (f - 1) \cdot (f + 1) = X \cdot (f - 1) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (f + 1) \cdot (f - (X + 1)) = 0$$

Eso último es una igualación de polinomios, donde el polinomio del miembro derecho es $g = 0$. Entonces, para que se cumpla esa igualdad para todo valor de X , el miembro derecho también tiene que ser 0 para todo valor de X . Eso ocurre cuando:

$$f = -1 \quad \text{o} \quad f = X + 1$$

- ii) Mirando la ecuación se puede calcular el grado que debería tener f :

☒₁) ¿Puede ser $\text{gr}(f) = 0$?

$$f = k \Rightarrow k^2 - X \cdot k = -X^2 + 1,$$

No cierra el tema del grado. Para que un polinomio sea igual a otro, estos deben tener igual grado.

☒₂) ¿Puede ser $\text{gr}(f) = 1$?

$$f = bX + c \Rightarrow b^2X + 2bcX + c^2 - bX^2 + Xc = -X^2 + 1,$$

en el miembro izquierdo se cancelan los términos cuadráticos, por lo que nuevamente no voy a poder tener un polinomios iguales en ambos miembros de la ecuación.

☒₃) ¿Puede ser $\text{gr}(f) = 2$?

$$f = aX^2 + bX + c \stackrel{!}{\Rightarrow} (aX^2 + bX + c)^2 - X(aX^2 + bX + c) = -X^2 + 1,$$

Acá nos queda el miembro izquierdo con $\text{gr}(4)$ y el izquierdo con $\text{gr}(2)$, así que no hay f , bla, bla, bla.

☒₄) ¿Puede ser $\text{gr}(f) \geq 3$?. Diría que no por razones muy interesantes.

- iii) En este caso se puede ver que el miembro izquierdo va a tener siempre grado impar. Para que el miembro derecho tenga grado impar, necesito que f sea algo que cancele el X^6

$$\text{gr}((X + 1) \cdot f^2) = \text{gr}(X \cdot (X^5 + f)) \Leftrightarrow \text{gr}(X + 1) + \text{gr}(f^2) = \text{gr}(X) + \text{gr}(X^5 + f) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} 2 \cdot \text{gr}(f) = \text{gr}(X^5 + f)$$

Analizamos la última ecuación para distintos grados:

$$\begin{aligned} \text{gr}(f) > 5 &\Rightarrow \text{gr}(X^5 + f) = 5 \star^1 \\ \text{gr}(f) = 5 &\Rightarrow \text{gr}(X^5 + f) \leq 5 \star^2 \\ \text{gr}(f) > 5 &\Rightarrow \text{gr}(X^5 + f) = \text{gr}(f) \star^3 \end{aligned}$$

Entonces no tenemos un valor para el grado de f en el que haya un balance en la ecuación, porque:
Para el caso \star^1 el miembro derecho tiene un valor par así que descartado.

Para el caso \star^2 el miembro derecho tiene un grado igual a 10 así que descartado.

Y por último para el caso \star^3 el miembro derecho tiene un grado del doble que el polinomio del miembro izquierdo.

iv) Si $f \neq 0$:

$$f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f \stackrel{!}{\Leftrightarrow} f \cdot (f^2 - \text{gr}(f)X^2) = 0$$

Como por enunciado $f \neq 0$, para que el miembro izquierdo sea 0, necesitamos que:


$$(f^2 - \text{gr}(f)X^2) = 0 \Leftrightarrow \text{gr}(f^2) = \text{gr}(\text{gr}(f) \cdot X^2) = 2 \Leftrightarrow 2\text{gr}(f) = 2 \Leftrightarrow \text{gr}(f) = 1$$

Entonces $\text{gr}(f) = 1 \Rightarrow f = aX$, evalúo en la ecuación del enunciado para averiguar el valor de a :

$$a^3 \cdot X^3 = 1 \cdot X^2 \cdot aX = aX^3 \Leftrightarrow a \cdot (a^2 - 1)X^3 = 0 \stackrel{\substack{\text{si } f \neq 0 \\ \Rightarrow a \neq 0}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 1 \\ \text{y} \\ a = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto los polinomios f que cumplen son:

$$f = -X \quad \text{y} \quad f = X$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

- i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$ y $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,
- ii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$ y $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,
- iii) $f = X^n - 1$ y $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

$$\begin{array}{r|l} \text{i) } & 5X^4 + 2X^3 - X + 4 \\ & - 5X^4 \quad - 10X^2 \\ \hline & 2X^3 - 10X^2 - X \\ & - 2X^3 \quad - 4X \\ \hline & - 10X^2 - 5X + 4 \\ & 10X^2 \quad + 20 \\ \hline & - 5X + 24 \end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

$$\begin{array}{r|l} \text{ii) } & 4X^4 + X^3 - 4 \\ & - 4X^4 \quad - 2X^2 \\ \hline & X^3 - 2X^2 \\ & - X^3 \quad - \frac{1}{2}X \\ \hline & - 2X^2 - \frac{1}{2}X - 4 \\ & 2X^2 \quad + 1 \\ \hline & - \frac{1}{2}X - 3 \end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

$$\text{En } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2 + 1) \cdot \underbrace{(2X^2 + 4X + 6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X + 4)}_{r[X]}$$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división asoma la idea de que:

$$X^n - 1 = (X - 1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} X^j}_{q[X]} + \underbrace{0}_{r[X]}, \quad (\text{que es la geométrica con } X \neq 1)$$

Inducción: Quiero probar que $p(n) : X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1) : X^1 - 1 = (X - 1) \underbrace{\sum_{j=0}^{1-1} X^j}_{X^0=1} \Rightarrow p(1) \text{ es Verdadero} \quad \checkmark$

Paso inductivo:

$$\underbrace{p(k) : X^k - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j \text{ es Verdadera}}_{HI} \stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1) : X^{k+1} - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j \text{ es Verdadera}$$

$$(X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j = (X - 1) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} X^j + X^k \right) = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j + (X - 1) \cdot X^k = \underbrace{X^k - 1 + X^{k+1} - X^k}_{HI} =$$

$$X^{k+1} - 1 \quad \checkmark$$

Dado que $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

- $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$,
- $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$,
- El resto de la división de $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

i) Haciendo la division de $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = (X - a + 2)(X^2 + aX + 1) + \underbrace{(a^2 - 2a + 1)X + a - 1}_{\text{resto}}$$

Así, para que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$ tiene que ocurrir que el resto sea 0.
O sea,

$$X^2 + aX + 1 \mid X^3 + 2X^2 + 2X + 1 \iff (a^2 - 2a + 1)X + a - 1 = 0$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a - 1 = 0 \iff a = 1$
- $a^2 - 2a + 1 = 0 \xrightarrow{a=1} 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \quad \checkmark$

Luego, el valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ es divisible por $X^2 + aX + 1$ es $\boxed{a = 1}$.

ii) 🤔... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow 🐙.

iii) Haciendo la division de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1 = q(X^2 + aX + 1) + \underbrace{r}_{\text{resto}}$$

con $q = (X^3 - aX^2 + (a^2 - 4)X - a^3 + 5a - 1)$ y $r = (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2$.

Así,

$$r = -8X + 4$$

$$\iff (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2 = -8X + 4$$

$$\iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0 \\ a^3 - 5a - 2 = 0 \end{cases}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a^3 - 5a - 2 = 0 \iff a(a^2 - 5) - 2 = 0$
Veo que $a = -2$ es solución, por lo que divido $a^3 - 5a - 2$ por $a + 2$ con Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -5 & -2 \\ -2 & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por lo que $a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a^2 - 2a - 1)$

Busco las raíces de $a^2 - 2a - 1$ con la fórmula resolvente:

$$a_{+,-} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{Por lo que } a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a - 1 + \sqrt{2})(a - 1 - \sqrt{2}) = 0 \iff \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 + \sqrt{2} \\ a = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

- $a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0$

Me fijo que valores de a obtenidos antes verifican:

- Si $a = -2 \Rightarrow (-2)^4 - 6(-2)^2 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0 \quad \checkmark$
- Si $a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^4 - 6(1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 10 = 10 + \sqrt{2} \neq 0$
- Si $a = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow (1 - \sqrt{2})^4 - 6(1 - \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2} + 10 = 10 - \sqrt{2} \neq 0$

Luego, el único valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que el resto de dividir a $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$ es $\boxed{a = -2}$

6. Definición: Sea K un cuerpo y sea $h \in \mathbb{K}[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in \mathbb{K}[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g \pmod{h}$.

- Probar que $\equiv \pmod{h}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{K}[X]$.
- Probar que si $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$ y $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$.
- Probar que si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Probar que r es el resto de la división de f por h si y solo si $f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ o $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*,

- *reflexiva*: Es f congruente a f módulo h ?
 $f \equiv f \pmod{h} \iff h \mid f - f = 0 \iff h \mid 0 \quad \checkmark$
- *simétrica*: Si $f \equiv g \pmod{h} \stackrel{?}{\iff} g \equiv f \pmod{h}$
 $f \equiv g \pmod{h} \iff h \mid f - g \iff h \mid -(g - f) \iff h \mid g - f \iff g \equiv f \pmod{h} \quad \checkmark$
- *transitiva*: Si $\begin{cases} f \equiv g \pmod{h} \\ g \equiv p \pmod{h} \end{cases} \stackrel{?}{\iff} f \equiv p \pmod{h}$.
 $\begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid g - p \end{cases} \xrightarrow[\rightarrow F_2]{F_1 + F_2} \begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid f - p \end{cases} \rightarrow f \equiv p \pmod{h} \quad \checkmark$

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en $\mathbb{K}[X]$

ii) Si $\begin{cases} f_1 \equiv g_1 \pmod{h} \\ f_2 \equiv g_2 \pmod{h} \end{cases} \star^1$

$$f_1 \equiv g_1 \pmod{h} \iff h \mid f_1 - g_1 \Rightarrow h \mid f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2 \pmod{h} \stackrel{\star^1}{\iff} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$$

iii) *Inducción*: Quiero probar $p(n)$: Si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: $p(1)$: $f^1 \equiv g^1 \pmod{h} \star^2$ Verdadera \checkmark

Paso inductivo: $p(k)$: $\underbrace{f^k \equiv g^k \pmod{h}}_{HI}$ es verdadera $\stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1)$: $f^{k+1} \equiv g^{k+1} \pmod{h}$ ¿También lo es?

$$f^k \equiv g^k \pmod{h} \iff h \mid f^k - g^k \Rightarrow h \mid f \cdot (f^k - g^k) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^k \pmod{h} \stackrel{\star^2}{\iff} f^{k+1} \equiv g^{k+1} \pmod{h} \quad \checkmark$$

Finalmente $p(1), p(k), p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 📄.

7. Hallar el resto de la división de f por g para:

- i) $f = X^{353} - X - 1$ y $g = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,
- ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$ y $g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$
- iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, y $g = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,
- iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$, y $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ (Sugerencia ver 4. ??).

$$i) g \mid g \iff X^{31} - 2 \equiv 0 \pmod{X^{31} - 2} \iff X^{31} \equiv 2 \pmod{g}$$

$$f = X^{353} - X - 1 = \underbrace{(X^{31})^{11}}_{\equiv 2^{11}} X^{12} - X - 1 \stackrel{(g)}{\equiv} 2^{11} X^{12} - X - 1 \rightarrow \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} - 1}$$

$$ii) g \mid g \iff X^6 + 1 \equiv 0 \pmod{X^6 + 1} \iff X^6 \equiv -1 \pmod{g}$$

$$f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166} X^4 + (X^6)^6 X^4 + (X^6)^3 X^2 + 1 \stackrel{(g)}{\equiv} X^4 + X^4 - X^2 + 1 = 2X^4 - X^2 + 1$$

$$\rightarrow \boxed{r_g(f) = 2X^4 - X^2 + 1}$$

$$\text{¿Qué onda en } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}? \rightarrow \begin{cases} \text{si } p = 2 \rightarrow \boxed{X^2 + 1} \\ \text{si } p > 2 \rightarrow \boxed{2X^4 + (p-1)X^2 + 1} \end{cases}$$

$$iii) g \mid g \iff X^{100} - X + 1 \equiv 0 \pmod{X^{100} - X + 1} \iff X^{100} \equiv X - 1 \pmod{g}$$

$$f = X^{200} - 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 - 3X^{100}X + 2 \stackrel{(g)}{\equiv} (X - 1)^2 - 3(X - 1)X + 2$$

$$\rightarrow \boxed{r_g(f) = (X - 1)^2 - 3(X - 1)X + 2}$$

$$iv) \text{ Usando la sugerencia: Del ejercicio 4. ?? sale que } X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

$$\xrightarrow[\text{para el } g]{n=5} X^5 - 1 = (X - 1) \underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_g \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)} \pmod{g} \quad \checkmark$$

$$f = (X^5)^{603} X + 2(X^5)^{366} X^3 - (X^5)^{34} X^4 + (X^5)^{27} X^2 + 2X^4 - X^3 + 1$$

$$f \equiv \underbrace{X + 2X^3 - X^4 + X^2 + 2X^4 - X^3 + 1}_{=X^4+X^3+X^2+X+1=g} \pmod{g} \iff \boxed{f \equiv 0 \pmod{g}}$$

8. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 📄.

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$, $g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$,

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X^3 + X$,

iii) $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1$, $g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1$,

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 \\ - X^5 + X^4 - X \end{array} & \begin{array}{l} X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ \hline X + 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X + 2 \\ - X^4 + X^3 + X^2 - 1 \end{array} & \\ \hline 3X^3 - 5X^2 + X + 1 & \end{array}$$

Euclides $\rightarrow (f : g) = (g : 3X^3 - 5X^2 + X + 1)$
 escribo a f en función de g $\rightarrow f = (X + 1) \cdot g + 3X^3 - 5X^2 + X + 1$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ - X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X \end{array} & \begin{array}{l} 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ \hline \frac{1}{3}X + \frac{2}{9} \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} \frac{2}{3}X^3 - \frac{4}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + 1 \\ - \frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9} \end{array} & \\ \hline -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ - 3X^3 - \frac{15}{2}X^2 + \frac{21}{2}X \end{array} & \begin{array}{l} -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\ \hline -\frac{27}{2}X + \frac{225}{4} \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} -\frac{25}{2}X^2 + \frac{23}{2}X + 1 \\ \frac{25}{2}X^2 + \frac{125}{4}X - \frac{175}{4} \end{array} & \\ \hline \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\ \frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X \end{array} & \begin{array}{l} \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \\ \hline -\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \end{array} \\ \hline -\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} & \\ \hline -\frac{7}{9}X - \frac{7}{9} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 = (X^4 - X^3 - X^2 + 1) \cdot (X + 1) + (3X^3 - 5X^2 + X + 1)$$

$$X^4 - X^3 - X^2 + 1 = (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \cdot \left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right)$$

$$3X^3 - 5X^2 + X + 1 = \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{27}{2}X + \frac{225}{4}\right) + \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right)$$

$$-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} = \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539}\right) + 0$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow (f : g) = X - 1$

ii) $X^6 + X^4 + X^2 + 1 = (X^3 + X) \cdot X^3 + (X^2 + 1)$

$$X^3 + X = (X^2 + 1) \cdot X + 0$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow (f : g) = X^2 + 1$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)$

iii) $\xrightarrow[\text{Euclides}]{\text{Haciendo}}$

$$\begin{aligned} 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1 &= (X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1) \cdot 2X + (X^4 + 2X + 1) \\ X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1 &= (X^4 + 2X + 1) \cdot (X - 2) + 3 \\ X^4 + 2X + 1 &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) + 0 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y *mónico* $\rightarrow \boxed{(f : g) = 1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow \boxed{1 = \frac{1}{3}g \cdot (2X^2 - 4X + 1) - \frac{1}{3}f \cdot (X - 2)}$

10. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2, f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

Sea $P \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow$ el resto de dividir a P por $X - a$ es $P(a)$.

$f(X) = q(X) \cdot \underbrace{X^3 - 2X^2 - X + 2}_{g(X)} + r(X)$, con $g(X) = (X-2) \cdot (X-1) \cdot (X+1)$ y $r(X) = a^2 + bX + c$, ya

que el $\text{gr}(r) < \text{gr}(g) \xrightarrow{\text{evaluar}} \begin{cases} f(1) = -2 = q(1) \cdot \overbrace{g(1)}^0 + r(1) = -2 \\ f(2) = 1 = q(2) \cdot \overbrace{g(2)}^0 + r(2) = 1 \\ f(-1) = 0 = q(-1) \cdot \overbrace{g(-1)}^0 + r(-1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{cases} \rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array} \right) \rightarrow \boxed{r(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{7}{3}}$$

11. Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$ en $\mathbb{Q}[X]$.

$$\begin{cases} f(X) = X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1 \\ g(X) = X \cdot (X-1) \cdot (X+1) \end{cases} \Rightarrow f = q(X) \cdot g(X) + r(X) \text{ con } \text{gr}(\underbrace{aX^2 + bX + c}_{r(X)}) \leq 2$$

$$\begin{cases} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_{=0} + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_{=0} + r(1) = 3 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_{=0} + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 = \begin{cases} 2 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{ecuaciones de } r(X)]{\text{sistema de}} \begin{cases} r(0) = c = 1 \\ r(1) = a + b + 1 = 3 \rightarrow a + b = 2 \\ r(-1) = a - b + 1 = \begin{cases} 2 \rightarrow a - b = 1 & n \text{ impar} \\ 1 \rightarrow a - b = 0 & n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow[n]{\text{impar}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \rightarrow \boxed{r_{\text{impar}}(X) = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1} \quad \checkmark \\ \xrightarrow[n]{\text{par}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \boxed{r_{\text{par}}(X) = X^2 + X + 1} \quad \checkmark \end{cases}$$

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $f(X) = X^6 + X^3 - 2$.

Primera raíz: $f(\alpha_1 = 1) = 0 \rightarrow f(X) = q(X) \cdot (X - 1)$. Busco $q(X)$ con algoritmo de división.

$$\begin{array}{r}
 X^6 \qquad \qquad \qquad + X^3 \qquad \qquad \qquad - 2 \quad \Big| \quad X - 1 \\
 - X^6 + X^5 \\
 \hline
 X^5 \\
 - X^5 + X^4 \\
 \hline
 X^4 + X^3 \\
 - X^4 + X^3 \\
 \hline
 2X^3 \\
 - 2X^3 + 2X^2 \\
 \hline
 2X^2 \\
 - 2X^2 + 2X \\
 \hline
 2X - 2 \\
 - 2X + 2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

El cociente $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ se puede factorizar en grupos como $q(X) = (X^2 + X + 1) \cdot (X^3 + 2)$. Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener $f \in \mathbb{C}[X]$ salen de esos dos polinomios.

$$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X^3 + 2 = 0 \xrightarrow[X = re^{i\theta}]{\text{exponencial}} \begin{cases} r^3 = 2 \rightarrow r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ con } k = 0, 1, 2. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \alpha_5 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ \alpha_6 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. Probar que $w + w^2 + w^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$

Voy a usar que si $w \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^6 w^j = 0 \quad (w \neq 1)$

Si $f(X) = X^2 + X + 2$ y $w + w^2 + w^4$ es raíz $\Rightarrow f(w + w^2 + w^4) = 0$

$$(w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8}_{=w} + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2 \cdot \sum_{j=0}^6 w^j = 0 \quad \checkmark$$

14.

i) Probar que si $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces $X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})]$.

ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

i) Voy a usar que si $w \in G_5 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^4 w^j = 0 \quad (w \neq 1) \star^2 \\ w^k = w^{r_5(k)} \star^1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 X^2 + X - 1 &= [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})] = \\
 &= X^2 - (w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + \underbrace{(w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\star^1} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X^2 - X(\underbrace{w^2 + w^{-2} + w + w^{-1}}_{\star^1}) + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2} = \\
&= X^2 - X(\underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2}) + \underbrace{-1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = X^2 - X(\underbrace{-1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0}) - 1 = \\
&= X^2 + X - 1 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

ii) Calculando las raíces a mano de $X^2 + X - 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Pero del resultado del inciso i) tengo que :

$$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow[\text{la factorización es}]{\text{sé que una raíz dada}} w + w^{-1} = w + \bar{w} = 2 \operatorname{Re}(w) = 2 \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}_{\cos \theta \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$$

15.

- i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.
- ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz en común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

i) **Hacer!**

ii) Busco el $(f : g)$:

$$\begin{aligned}
X^4 + 3X - 2 &= (X^4 + 3X^3 - 3X + 1) \cdot 1 + (-3X^3 + 6X - 3) \\
X^4 + 3X^3 - 3X + 1 &= (-3X^3 + 6X - 3) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - 1\right) + (2X^2 + 2X - 2) \\
-3X^3 + 6X - 3 &= (2X^2 + 2X - 2) \cdot \left(-\frac{3}{2}X + \frac{3}{2}\right) + 0 \\
(f : g) &= X^2 + X - 1 \xrightarrow{\text{raíces}} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\
X^4 + 3X - 2 &= (X^2 + X - 1) \cdot (X^2 - X + 2) + 0
\end{aligned}$$

16. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

- i) $f = X^5 - 2X^3 + X$, $a = 1$,
- ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4$, $a = i$,
- iii) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1)$, $a = 2$,
- iv) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3$, $a = 2$.

i) $f = X^5 - 2X^3 + X$, $a = 1$,

Todos casos de factorio:

$$f = X^5 - 2X^3 + X = X(X^4 - 2X^2 + 1) = X(X^2 - 1)^2 = X(X - 1)^2(X + 1)^2 =$$

La multiplicidad de $a = 1$ como raíz es 2.

ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i,$

Si $a = i$ es raíz, entonces $-i$ también lo es en un polinomio $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{r|l} X^6 - 3X^4 & X^2 + 1 \\ - X^6 - X^4 & X^4 - 4X^2 + 4 \\ \hline - 4X^4 & \\ 4X^4 + 4X^2 & \\ \hline 4X^2 + 4 & \\ - 4X^2 - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$f = (X^2 + 1)(X^4 - 4X^2 + 4) = (X^2 + 1)(X^2 - 2)^2 = (X^2 + 1)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 = (X - i)^1(X + i)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 =$$

La multiplicidad de $a = i$ como raíz de f es 1.

iii) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1), \quad a = 2,$
 $f = (X - 2)^3((X + 2) + (X + 1)) = (X - 2)^3(2X + 3)$

La multiplicidad de $a = 2$ como raíz de f es 3.

iv) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3, \quad a = 2,$
 $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3 = (X - 2)^2(X - 2)(X + 2) - 4(X - 2)^3 = (X - 2)^3(X + 2 - 4) = (X - 2)^4$

La multiplicidad de $a = 2$ como raíz de f es 4.

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene solo raíces simples en \mathbb{C} .

$$\begin{aligned} f &= nX^{n+1} - (n+1)X^n + a \\ \xrightarrow{\text{derivo}} f' &= n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} \xrightarrow{n>0} f' = n(n+1)X^{n-1}(X-1) \\ f'(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} n > 1 \Rightarrow f'(\alpha=1) = 0 \text{ y } f'(\alpha=0) = 0 \\ n = 1 \Rightarrow f'(\alpha=1) = 0 \star^1 \end{cases} \end{aligned}$$

Para que las raíces α , de f no sean simples, es necesario que $f'(\alpha) = 0$. Por lo tanto, estudio solo los valores de raíces encontrados para la derivada. Si f ha de tener raíces dobles, estás deberían ser $\alpha = 1$ o $\alpha = 0$.

Entonces:

$$\begin{cases} f(\alpha=1) = a - 1 \Rightarrow f(1) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \neq 1 \\ f(\alpha=0) = a \Rightarrow f(0) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$$

Si $a = 0 \wedge n = 1 \Rightarrow f$ tiene solo una raíz simple en 0.

Si $a \neq 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $a \neq 0 \wedge n > 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples.

seguramente hay una mejor forma de expresar la respuesta.

18. Controlar y Pasar

19. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en \mathbb{C} . Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

Si f tiene raíces múltiples $\alpha_k \Leftrightarrow f(\alpha_k) = f'(\alpha_k) = 0$, por lo tanto tanto comienzo buscando las raíces de f' para sacarme ese a de en medio.

$$f' = 20X^{19} + 80X^9 = 20X^9(X^{10} + 4) \Rightarrow f' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X^{10} = -4 \Leftrightarrow X = \sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi} \quad k \in \mathbb{Z}_{[0,9]} \end{cases}$$

Hay de momento 11 raíces de f' . Me interesa saber si son raíces de f :

$$f(0) = 2a \Rightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$f = (X^{10})^2 + 8X^{10} + 2a \Rightarrow f(\alpha = \textcolor{red}{X}^{10} = \textcolor{red}{-4}) = (-4)^2 + 8(\textcolor{red}{-4}) + 2a = -16 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 8$$

Entonces:

$$\text{Si } a = 0 \Rightarrow f = X^{10}(X^{10} + 8)$$

$$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X = 0 \quad \text{o} \quad X^{10} = -8, \text{ donde } \boxed{\mu(0; f) = 10} \text{ y } \boxed{\mu(\sqrt[10]{8}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}; f) = 1 \quad k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}.$$

11 raíces distintas.

$$\text{Si } a = 8 \Rightarrow f = X^{20} + 8X^{10} + 16 = (X^{10} + 4)^2$$

$$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X^{10} = -4, \text{ donde } \boxed{\mu(\sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}; f) = 2 \quad k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}.$$

10 raíces distintas.

20. 🤔... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

21.

- i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.
- ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.

$$\begin{aligned} \text{i) } (X-1)^2 \mid f \quad \forall a \in \mathbb{C} &\Leftrightarrow 1 \text{ es por lo menos raíz doble de } f \Leftrightarrow f(1) = f'(1) = 0. \\ \begin{cases} f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1 & \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \\ f' = 6X^5 - 10X^4 + 4(1+a)X^3 - 6aX^2 + 2(1+a)X - 2 & \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f'(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \end{cases} \end{aligned}$$

Calculando $f(1)$ y $f'(1)$ se comprueba. ✓

$$\begin{aligned} \text{ii) } (X-1)^3 \mid f &\Leftrightarrow f''(1) = 0 \\ \Rightarrow f'' &= 30X^4 - 40X^3 + 12(1+a)X^2 - 12aX + 2(1+a) \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f''(1) = 2a \\ \Rightarrow f''(1) &= 0 \Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{(X-1)^3 \mid f \iff a = 0} \quad \checkmark$$

Observar que si $a \neq 0$, 1 es una raíz *doble* de f de otra forma es una raíz *por lo menos triple*.

22. 🤔... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

23. 🤔... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

24. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

25. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

26. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

27. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

28. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

29. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

30. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

31. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

32. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

33. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

34. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

35. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

36. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

37. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

38. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

39. 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

Ejercicios de parciales:

1.

- a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} > 0$ tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\frac{3\pi}{2}$

- b) Para cada valor de \mathbf{c} hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

- a) Si la raíz $\alpha = re^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) \Rightarrow f(r(-i)) = 0$

Voy a usar que:

$$\star^1 \left\{ \begin{array}{lcl} (-i)^2 & = & -1 \\ (-i)^3 & = & i \\ (-i)^4 & = & 1 \\ (-i)^5 & = & -i \\ (-i)^6 & = & -1 \end{array} \right.$$

Evalúo $f(r(-i))$:

$$\begin{aligned} f(r(-i)) &= (r(-i))^6 - 4(r(-i))^5 - (r(-i))^4 + 4r^3i + 4(r(-i))^2 + 48(r(-i)) + \mathbf{c} \\ &\stackrel{\star^1}{=} -r^6 + 4r^5i - r^4 + 4r^3i - 4r^2 - 48ri + \mathbf{c} = 0 \end{aligned}$$

Esta expresión va a ser 0 cuando su parte imaginaria y su parte real sean ambas 0:

$$\begin{aligned} f(r(-i)) &= -r^6 + 4r^5i - r^4 - 4r^3i - 4r^2 - 48ri + \mathbf{c} = 0 \\ &\iff \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Im}(f(r(-i))) : 4r(r^4 + r^2 - 12) = 0 \xrightarrow[r > 0]{r \in \mathbb{R}} r = \sqrt{3} \star^2 \\ \text{Re}(f(r(-i))) : -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 \xrightarrow[r = \sqrt{3}]{\star^2} \mathbf{c} = 48 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Por lo tanto con ese $\mathbf{c} = 48$:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48$$

y las raíces que tiene este polinomio son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{3} \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} = -\sqrt{3}i \\ \alpha_2 &= \sqrt{3} \cdot e^{-i\frac{3}{2}\pi} = \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Apareció el conjugado de la raíz dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$

b) Debe ocurrir que $(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$

$$\begin{array}{r|l}
 X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48 & X^2 + 3 \\
 - X^6 & - 3X^4 \\
 \hline
 - 4X^5 - 4X^4 + 4X^3 & \\
 4X^5 & + 12X^3 \\
 \hline
 - 4X^4 + 16X^3 + 4X^2 & \\
 4X^4 & + 12X^2 \\
 \hline
 16X^3 + 16X^2 + 48X & \\
 - 16X^3 & - 48X \\
 \hline
 16X^2 & + 48 \\
 - 16X^2 & - 48 \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Hasta el momento f queda:

$$f = (X^2 + 3) \underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_g$$

como f tiene al menos una raíz doble la busco en las raíces de la derivada de g :

$$\begin{aligned}
 g' &= (4X^3 - 12X^2 - 8X + 16)' \\
 &= 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 4) = 0
 \end{aligned}$$

Con el lema de Gauss se que las posibles raíces de g' están en:

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

Probando encuentro que $g'(1) = 0$, pero $g(1) \neq 0 \Rightarrow f(1) \neq 0$. Si $X = 1$ no es raíz de g , continúo bajándole el grado a g' para buscar otras raíces:

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 - 3X^2 - 2X + 4 & X - 1 \\
 - X^3 + X^2 & \\
 \hline
 - 2X^2 - 2X & \\
 2X^2 - 2X & \\
 \hline
 - 4X + 4 & \\
 4X - 4 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Con este resultado se puede escribir a g' como:

$$g' = 4(X - 1)(X^2 - 2X - 4)$$

De la parte cuadrática salen 2 raíces de g' :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{5} \\
 X^2 - 2X - 4 &= (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))
 \end{aligned}$$

(para mostrar que son raíces dobles y no triples, por ejemplo, debería comprobar que $\alpha_{1,2}$ no son raíces de $g'' = 4(3X^2 - 6X - 2)$, pero no tengo ganas, elijo creer que no lo son).

Compruebo que sean también raíces de g :

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 & X^2 - 2X - 4 \\
 - X^4 + 2X^3 + 4X^2 & \\
 \hline
 - 2X^3 & + 16X \\
 2X^3 - 4X^2 & - 8X \\
 \hline
 - 4X^2 & + 8X + 16 \\
 4X^2 & - 8X - 16 \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Dado que el resto dio 0 $\alpha_{1,2}$ son raíces de g y como son raíces de g' entonces son raíces dobles de g , y de f .

Notar que viendo el cociente de esa última división quizás podría haber visto el caso de factoro a ojo, pero bueh, no pasó.

Factorizaciones:

$$\begin{array}{ll}
 \mathbb{Q}[X] & \rightarrow f = (X^2 + 3) \cdot (X^2 - 2X - 4)^2 \\
 \mathbb{R}[X] & \rightarrow f = (X^2 + 3) \cdot (X - (1 + \sqrt{5}))^2 \cdot (X - (1 - \sqrt{5}))^2 \\
 \mathbb{C}[X] & \rightarrow f = (X - \sqrt{3}i) \cdot (X + \sqrt{3}i) \cdot (X - (1 + \sqrt{5}))^2 \cdot (X - (1 - \sqrt{5}))^2
 \end{array}$$

2. Factorizar el polinomio $P = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49$ como producto de irreducibles en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ sabiendo que $\sqrt{7}$ es una raíz múltiple.

Un polinomio con coeficientes racionales, y una raíz irracional $\alpha = \sqrt{7}$, tendrá también al *conjugado irracional*¹, $\bar{\alpha} = -\sqrt{7}$

Si agregamos la información de que $\sqrt{7}$ es *por lo menos* raíz doble, obtenemos que:

$$\begin{cases} \sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow (X^2 - 7) \mid f \\ \sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow (X^2 - 7)^2 = X^4 - 14X^2 + 49 \mid f \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l}
 X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49 & X^4 - 14X^2 + 49 \\
 - X^6 & + 14X^4 & - 49X^2 \\
 \hline
 - X^5 & + X^4 + 14X^3 - 14X^2 - 49X \\
 X^5 & - 14X^3 & + 49X \\
 \hline
 X^4 & - 14X^2 & + 49 \\
 - X^4 & + 14X^2 & - 49 \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X^2 - X + 1) \xrightarrow{\text{resolvente}} \begin{cases} \alpha_{+,-} = \frac{1 \pm w}{2} \\ w^2 = -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$$

$$\begin{cases} \mathbb{Q}[X] & \rightarrow f = (X^2 + 7)^2 (X^2 - X + 1) \\ \mathbb{R}[X] & \rightarrow f = (X + \sqrt{7})^2 (X - \sqrt{7})^2 (X^2 - X + 1) \\ \mathbb{C}[X] & \rightarrow f = (X + \sqrt{7})^2 (X - \sqrt{7})^2 (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{cases}$$

¹Estoy usando la misma notación para *conjugado racional* y *conjugado complejo*. ¿Está bien? No sé, no me importa mientras se entienda.

3. Hallar **todos** los polinomios **mónicos** $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

- i) $1 - \sqrt{2}$ es raíz de f ;
- ii) $X(X - 2)^2 \mid (f : f')$;
- iii) $(f : X^3 - 1) \neq 1$;
- iv) $f(-1) = 27$;

- i) Como $f \in \mathbb{Q}[X]$ si $\alpha_1 = 1 - \sqrt{2}$ es raíz entonces $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$ para que no haya coeficientes irracionales en el polinomio.

$$(X - (1 - \sqrt{2})) \cdot (X - (1 + \sqrt{2})) = X^2 - 2X - 1$$

Por lo tanto:

$$X^2 - 2X - 1$$

será un factor de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

- ii) Para el requerimiento $X(X - 2)^2 \mid (f : f')$:

$$X(X - 2)^2 \mid (f : f') \stackrel{\text{def}}{\iff} (f : f') = X(X - 2)^2 \cdot q,$$

de donde se deduce que por lo menos (dado que no conoce q y tampoco importa ahora):

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \text{ es por lo menos raíz simple de } f' \Rightarrow \text{ es por lo menos raíz doble de } f \\ \alpha_4 = 2 \text{ es por lo menos raíz doble de } f' \Rightarrow \text{ es por lo menos raíz triple de } f \end{cases}.$$

Por lo tanto como en los ejercicios estos piden *menor grado*:

$$X^2(X - 2)^3$$

también serán factores de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

- iii) Si $(f : X^3 - 1) \neq 1$ quiere decir que por lo menos alguna de las 3 raíces de:

$$X^3 - 1 \stackrel{!}{=} (X - 1) \cdot (X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \cdot (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))$$

tiene que aparecer en la factorización de f .

Parecido al item i) si tengo una raíz compleja, también necesito el conjugado complejo de la raíz, para que no me queden coeficientes de f con componente imaginaria:

$$X^3 - 1 = (X - 1) \cdot (X^2 + X + 1),$$

a priori me quedaría con el *factor de menor grado* siempre que eso no *rompa* otras condiciones, pero todavía no tomo la decisión 😊.

Por lo tanto:

$$(X - 1) \quad \text{o} \quad (X^2 + X + 1)$$

ya veremos cual, aparecerá en la factorización de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

iv) $f(-1) = 27$. Hasta el momento juntando los resultados tengo 2 candidatos f_1 y f_2 :

$$\begin{aligned} f_1 &= (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X^2 + X + 1) \rightarrow f_1(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot 1 = -54 \\ f_2 &= (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \rightarrow f_2(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot (-2) = 108, \end{aligned}$$

ninguno es el 27 que quiero, así que hay que hacer algo más.

Para encontrar *un* polinomio **mónico** que cumpla lo pedido tomaría el f_2 que tiene **menor grado** de los dos y lo multiplicaría por:


$$f = f_2 \cdot (X - a) \quad \text{con } a \in \mathbb{Q}$$

de manera que pueda elegir el a para cumplir lo que quiero:

$$f(-1) = f_2(-1) \cdot (X - a) = 108 \cdot (-1 - a) = 27 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}$$


$$f = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \cdot (X + \frac{5}{4})$$

así cumpliendo todas las condiciones.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 Ale Teran 

 4. Factorizar como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ al polinomio

$$f = X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15$$

sabiendo $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$

Si el $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$, esto nos da información sobre *raíces comunes* entre f y $X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5$. Puedo hacer el algoritmo de Euclides para encontrar el MCD, con esa o esas raíces. El último resto no nulo hecho **mónico** será el MCD.

$$\begin{aligned} X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 &= (X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \cdot (X + 3) + (-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30) \\ X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5 &= (-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30) \cdot \left(-\frac{1}{10}X + \frac{3}{10}\right) + (14X^2 - 14X + 14) \\ -10X^3 - 20X^2 + 20X - 30 &= (14X^2 - 14X + 14) \cdot \left(-\frac{5}{7}X - \frac{15}{7}\right) + 0 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) = X^2 - X + 1.$$

Las raíces del MCD son $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm w}{2}$ con $w^2 = 3i$.

$$X^2 - X + 1 = \left(X - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(X - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \quad \checkmark$$

Por definición de lo que es el MCD sabemos que $X^2 - X + 1 \mid f$, haciendo la división bajamos el grado y seguimos buscando las raíces.

$$\begin{array}{r}
X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 \quad | \quad X^2 - X + 1 \\
\underline{-X^5 + X^4 - X^3} \\
3X^4 - 8X^3 - 7X^2 \\
\underline{-3X^4 + 3X^3 - 3X^2} \\
-5X^3 - 10X^2 + 10X \\
\underline{5X^3 - 5X^2 + 5X} \\
-15X^2 + 15X - 15 \\
\underline{15X^2 - 15X + 15} \\
0
\end{array}$$

Obtuvimos que:

$$f = (X^2 - X + 1) \cdot (X^3 + 3X^2 - 5X - 15) + 0.$$

Hermoso resultado, donde la hermosura se mide en su simpleza para ser factorizado. Sin usar calculadora ni Gauss ni ninguna cosa extraña podemos expresar a f como:

$$f \stackrel{!!!}{=} (X^2 - X + 1) \cdot \underbrace{(X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X + 3)}_{X^3 + 3X^2 - 5X - 15}$$

Si todavía no viste como fue la factorización en ! te recomiendo que sigas mirando sin *spoiler de calculadora o del pesado o pesada sabelotodo* que quizás tenés al lado y que no te deja tiempo para pensar. Son puros casos de factorización que *deberían verse a ojo*.

Ahora factorizamos en irreducibles, que son polinomios mónicos que solo se dividen por sí mismos y por 1, los *primos en el mundo de polinomios*. Para tener una mejor explicación [clickeá acá!](#) Y vas a la teoría del apunte.

Factorizaciones:

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{Q}[X] & \rightarrow & f = \overbrace{(X^2 - 5)}^{\in \mathbb{Q}[X]} \cdot \overbrace{(X^2 - X + 1)}^{\in \mathbb{Q}[X]} \cdot \overbrace{(X + 3)}^{\in \mathbb{Q}[X]} \\
\mathbb{R}[X] & \rightarrow & f = \overbrace{(X - \sqrt{5})}^{\in \mathbb{R}[X]} \cdot \overbrace{(X + \sqrt{5})}^{\in \mathbb{R}[X]} \cdot \overbrace{(X^2 - X + 1)}^{\in \mathbb{R}[X]} \cdot \overbrace{(X + 3)}^{\in \mathbb{R}[X]} \\
\mathbb{C}[X] & \rightarrow & f = \overbrace{(X + 3)}^{\in \mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X - \sqrt{5})}^{\in \mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X + \sqrt{5})}^{\in \mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))}^{\in \mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))}^{\in \mathbb{C}[X]}
\end{array}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👋 Nad Garraz 🔄

👋 Ale Teran 🔄

🔥5. Sea $(f_n)_{(n \geq 1)}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{R}[X]$ definida como:

$$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X + 2)^2 f'_n + 3f_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que -2 es raíz doble de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

No caer en la *trampilla* 🐞 de olvidar que para que una raíz de f sea doble, i.e. $\text{mult}(-2; f) \stackrel{!}{=} 2$ debe ocurrir lo "obvio", $f(-2) = f'(-2) = 0$ y también que $f''(-2) \neq 0$. Si olvidamos esto último solo probaríamos que la $\text{mult}(-1; f) \geq 2$ y tendríamos el ejercicio mal 🐞.

Por inducción en n : $q(n)$: " -2 es raíz doble de f_n ", $\forall n \in \mathbb{N}$ "

Caso base: ¿ $q(1)$ es V?

$$\begin{cases} f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} f_1(-2) = 0 \\ f'_1 = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 22X & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} f'_1(-2) = 0 \\ f''_1 = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 22 & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} f''_1(-2) = 22 \neq 0 \end{cases}$$

$\therefore \text{mult}(-2; f_1) = 2 \Rightarrow -2$ es raíz doble de $f_1 \Rightarrow q(1)$ es V ✓

Paso inductivo: ¿Si $q(k)$ verdadera $\Rightarrow q(k+1)$ también lo es, $\forall k \in \mathbb{N}$?

$$HI: -2 \text{ es raíz doble de } f_k \Leftrightarrow \begin{cases} f_k(-2) = 0 \text{ ★}^1 \\ f'_k(-2) = 0 \text{ ★}^2 \\ f''_k(-2) \neq 0 \text{ ★}^3 \end{cases}$$

QPQ dado $k \in \mathbb{N}$, $q(k+1)$: -2 es raíz doble de $f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (X+2)^2 f'_k + 3f_k$:

Derivar:

$$\begin{cases} f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (X+2)^2 f'_k + 3f_k \\ f'_{k+1} = 2(X+2)f'_k + (X+2)^2 f''_k + f'_k \\ f''_{k+1} = 2f'_k + (2x+4)f''_k + 2(x+2)f'''_k + (x+2)^2 f''''_k + f''_k \end{cases}$$

Evaluar en -2 :

$$f_{k+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow f_{k+1}(-2) = \cancel{(-2+2)^2} f'_k(-2) + 3f_k(-2) = 0^2 f'_k(-2) + 3f_k(-2) = 3f_k(-2) \stackrel{\text{★}^1}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f'_{k+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow f'_{k+1}(-2) = 2\cancel{(-2+2)} f'_k(-2) + \cancel{(-2+2)^2} f''_k + f'_k(-2) = f'_k(-2) \stackrel{\text{★}^2}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f''_{k+1}(-2) \stackrel{?}{\neq} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''_{k+1}(-2) = 2f'_k(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f''_k(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f''_k(-2) + \\ + \cancel{(-2+2)^2} f''''_k(-2) + f''_k(-2) = 2 \underbrace{f'_k(-2)}_{=0 \text{ ★}^2} + \underbrace{f''_k(-2)}_{\neq 0 \text{ ★}^3} \neq 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$\therefore \text{mult}(-2; f_{k+1}) = 2 \Rightarrow -2$ es raíz doble de $f_{k+1} \Rightarrow q(k+1)$ es V ✓

Como $q(1)$, $q(k)$ y $q(k+1)$ resultaron verdaderas, por principio de inducción $q(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

6.

a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ (**positivo**) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ (**positivo**) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

Solución:

Limpiando los denominadores de f se obtiene el polinomio g con las mismas raíces:

$$g = 3X^5 + nX^4 - 8X^3 + 11X^2 - 3X = X \underbrace{(3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3)}_h$$

Por enunciado ignoramos la raíz nula y utilizando el Lema de Gauss buscamos las raíces racionales de

$$h = 3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3$$

Aquí, $a_0 = -3$ y $a_n = 3$

$$\text{Div}(a_0) = \text{Div}(a_n) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

Como busco raíces enteras, las busco en el conjunto:

$$\{\pm 1, \pm 3\}$$

Chequeo:

$$\begin{aligned} h(-1) = 0 &\iff n = -19 \notin \mathbb{N} \\ h(1) = 0 &\iff n = -3 \notin \mathbb{N} \\ h(-3) = 0 &\iff \boxed{n=5} \in \mathbb{N} \\ h(3) = 0 &\iff n = \frac{67}{9} \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

Rta: $n = 5$ es el único valor de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el polinomio f tiene una raíz entera no nula.

- b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

Solución:

Primero factorizo la raíz nula de f

$$f = X^5 + \frac{5}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X = X(X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1)$$

Se, por el ítem (a), que -3 es una de las raíces racionales de f . Busco otras posibles raíces racionales en el polinomio h (con $n = 5$) obtenido en el ítem (a) en el conjunto $\{\pm \frac{1}{3}\}$

$$h(-\frac{1}{3}) = -\frac{208}{27}$$

$$h(\frac{1}{3}) = 0 \implies \frac{1}{3} \text{ es una raíz racional de } f.$$

Factorizo el polinomio f dividiéndolo por el producto de las dos raíces encontradas $(X+3) \cdot (X-\frac{1}{3}) = X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1 & X^2 + \frac{8}{3}X - 1 \\ -X^4 - \frac{8}{3}X^3 + X^2 & \\ \hline -X^3 - \frac{5}{3}X^2 + \frac{11}{3}X & \\ X^3 + \frac{8}{3}X^2 - X & \\ \hline X^2 + \frac{8}{3}X - 1 & \\ -X^2 - \frac{8}{3}X + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Factorizo el polinomio cuadrático $X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$


$$x_+ = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \text{ y } x_- = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$$

Rta:

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)) \in \mathbb{C}$ con todos sus factores de multiplicidad 1 y por lo tanto **irreducibles**.

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2-X+1) \in \mathbb{R}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto **irreducibles** en \mathbb{R} .

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2-X+1) \in \mathbb{Q}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto **irreducibles** en \mathbb{Q} .

 7. Determinar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que satisfaga simultáneamente:

- f es mónico,
- $\text{gr}(f : 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11) = 2$
- f tiene una raíz $z \in G_3$ con $z \neq 1$, que es doble,
- $f(0) = 33$;

El dato de $\text{gr}(\overbrace{f : 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11}^d) = 2$ indica que hay un polinomio, d , con $\text{gr}(d) = 2$ que cumple

que $\left\{ \begin{array}{l} d \mid f \\ d \mid 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11 \end{array} \right.$ entonces, f tiene 2 raíces en común con g . Estas raíces pueden ser una doble o dos simples. Dado que nos piden que sea de grado mínimo habrá que tener *cuidado* cual elegir para no violar ninguna condición.

Calculemos las posibles raíces de g usando *lema de gauss*:

Posibles raíces serán los cocientes de los divisores de 11 y los de 2.

$$\mathcal{D}(11) = \{\pm 1, \pm 11\}, \mathcal{D}(2) = \{\pm 1, \pm 2\} :$$

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 11, \pm \frac{11}{2} \right\}.$$

Probando esos valores encuentro que $g(\frac{1}{2}) = 0$ y ninguna de las otras funcionó. Le bajamos el grado con el algoritmo de división a g .

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11 & X - \frac{1}{2} \\ - 2X^3 + X^2 & \hline - 4X^2 - 20X & \\ 4X^2 - 2X & \hline - 22X + 11 & \\ 22X - 11 & \hline 0 & \end{array}$$

Hasta el momento:

$$g = (X - \frac{1}{2}) \cdot (2X^2 - 4X - 22) + 0,$$

buscamos raíces de $2X^2 - 4X - 22$:

$$\alpha_{+,-} = \frac{4 \pm 8\sqrt{3}}{4} = 1 \pm 2\sqrt{3} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2\sqrt{3} \\ 1 - 2\sqrt{3} \end{array} \right.$$

Entonces: f tiene 2 raíces en común con $g = (X - \frac{1}{2})(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))$. Dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$ voy a seleccionar las raíces que tienen número irracionales por la condición de grado mínimo. Recordar que si $f \in \mathbb{Q}[X]$ tiene una raíz con números irracionales, también debe estar su conjugado irracional.

Con la condición que dice que f tiene una raíz $z \in G_3$ con $z \neq 1$, que es doble, no nos dejan muchas opciones. G_3 tiene tres raíces, solución de $w^3 = 1$, dado que por enunciado no puede ser 1, entonces solo quedan:

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(Si no te acordás como encontrar raíces de la familia G_n te dejo el ejercicio 12.) que se hacen las cuentas.

Ok, tengo esas dos raíces: $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ¿Cuál elijo? ¡Cualquiera sirve! Porque, *nuevamente* ☹, como $f \in \mathbb{Q}[X]$ si agarro una raíz compleja también necesito su conjugado complejo, lo mismo que antes.

Hasta el momento tenemos:

$$\begin{aligned} f &= \overbrace{(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))}^{X^2 - 2X - 11} \underbrace{(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))^{2\star^1} (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))^{2\star^1}}_{(X^2 + X + 1)^2} = \\ &= (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2 \end{aligned}$$

★¹ Si es doble una de las complejas, también debe serlo su conjugado, porque $f \in \mathbb{Q}[X]$.

Nos queda cumplir que $f(0) = 33$, si bien ahora $f(0) = -11$. Acá tenemos que tener en cuenta la primera condición. f es *mónico*, así que no podemos corregir el valor poniendo un coeficiente principal.

Hay que proponer otro factor en $\mathbb{Q}[X]$, que al evaluar de el número que al multiplicarse con -11 nos dé 33. El candidato es $(X - 3)$, dado que en 0 vale -3 y así $f(0) = (-11) \cdot (-3) = 33$ como queremos.

El $f \in \mathbb{Q}[X]$ que cumple lo pedido:

$$f = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2(X - 3)$$

8.

a) Determinar todos los $f \in \mathbb{R}[X]$ mónicos de grado mínimo tales que cumplan:

- f contiene entre sus raíces al menos una raíz cúbica de la unidad,
- $X^2 + 1 \mid (f : f')$,
- f tiene al menos 2 raíces enteras,
- $f(1) = -12$,

b) Con el polinomio f hallado expresar factorización en irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

a) Arrancando con la primera condición, tenemos al menos a una de las w tales que:

$$w^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = 1 \star^1 \\ w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} .$$

Si no te acordás como calcular las raíces, mirá el ejercicio 12, donde se resuelve algo casi idéntico.

Como el polinomio *debe ser de grado mínimo* y tiene coeficientes en \mathbb{R} hay que elegir con cuidado. Lo mejor es ver el resto de las condiciones para no hacer *cagadas*. (spoiler alert: Elegí el 1 si sos picante!)

De la segunda condición sacamos que:

$$X^2 + 1 = (X - i) \cdot (X + i) \mid (f : f') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X^2 + 1 \mid f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (X - i) \mid f \\ y \\ (X + i) \mid f \end{array} \right\} \\ X^2 + 1 \mid f' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (X - i) \mid f' \\ y \\ (X + i) \mid f' \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (X - i)^2 \mid f \\ y \\ (X + i)^2 \mid f \end{array} \right\}$$

Si no entendés el porqué de eso mirate [esto de las notas teóricas](#), para tener contexto. Básicamente si α es una raíz de f y también de f' , entónces es una raíz *por lo menos* doble de f .

En el tercer punto, nos dicen que tiene al menos 2 raíces en \mathbb{Z} . ¿Una de esas podría ser el 1 que obtuvimos como raíz de G_3 ? Dejame que lo piense.

En el último punto tenemos que cumplir que al evaluar en nuestro polinomio f en 1, eso nos dé -12 . Y es acá donde nos damos cuenta de que no podemos elegir a $1 \star^1$ para que sea raíz de f !! Y dado que $f \in \mathbb{R}[X]$ tenemos que elegir entonces ambas $\left\{ \begin{array}{l} w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array} \right.$. Propongo:

$$\begin{aligned} f &= (X - (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - i)^2(X + i)^2(X - a)(X - b) \\ &\stackrel{\star^2}{=} (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - a)(X - b), \end{aligned}$$

con a y b a determinar, de manera tal de cumplir las últimas dos condiciones: *ambas* enteras y $f(1) = -12$.

$$f(1) = -12 \stackrel{\star^2}{\iff} 12 \cdot (1 - a)(1 - b) = -12 \iff (1 - a)(1 - b) = -1 \stackrel{\substack{a \text{ y } b \\ \in \mathbb{Z}}}{\iff} a = 2 \text{ y } b = 0.$$

Esas serían las candidatas a raíces enteras, obteniendo así un único polinomio

$$f = (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - 2)(X - 0) = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$$

mónico y de grado mínimo que cumple las condiciones pedidas.

b) La definición de polinomio irreducible [está acá](#).

$\mathbb{Q}[X]$	$\rightarrow f = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$
$\mathbb{R}[X]$	$\rightarrow f = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$
$\mathbb{C}[X]$	$\rightarrow f = X(X - 2)(X - (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - i)^2(X + i)^2$

Notar que en \mathbb{Q} y en \mathbb{R} las factorizaciones son iguales, dado que no hay raíces irracionales.

🔥9. Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que cumpla las siguientes condiciones

- f comparte una raíz con $X^3 - 3X^2 + 7X - 5$
- $X + 3 - \sqrt{2} \mid f$,
- $1 - 2i$ es raíz de f y $f'(1 - 2i) = 0$

Vamos con la primera. Si dos polinomios, f y $g = X^3 - 3X^2 + 7X - 5$, comparten raíz buscamos raíces de g con el *lema de Gauss* de donde tomaremos las raíces que nos sirvan para construir nuestro f mónico y de grado mínimo: $A = \{\pm 1, \pm 5\}$, con $\alpha = 1 \Rightarrow g(1) = 0 \quad \checkmark$.

Como $\alpha = 1$ es raíz, entonces $X - 1 \mid g$:

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 3X^2 + 7X - 5 & X - 1 \\ -X^3 & +X^2 \\ \hline & -2X^2 + 7X \\ & 2X^2 - 2X \\ \hline & 5X - 5 \\ & -5X + 5 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$g = (X - 1) \cdot (X^2 - 2X + 5)$, busco raíces del cociente $X^2 - 2X + 5$, usando resolvente

$$r_{+,-} = \frac{2 \pm w}{2}, \text{ con } w^2 = -16 \rightarrow \begin{cases} r_+ = 1 + 2i \\ r_- = 1 - 2i \end{cases}$$

Finalmente,

$$g \stackrel{\star^1}{=} (X - 1) \cdot \underbrace{(X - (1 + 2i)) \cdot (X - (1 - 2i))}_{X^2 - 2X + 5} \quad \checkmark,$$

antes de elegir cuales de estas raíces serán comunes a f es recomendable estudiar las otras condiciones del enunciado.

$X + 3 - \sqrt{2} = X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f$, por lo que $(-3 + \sqrt{2})$ es una raíz de f y dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$ también **debe estar** el conjugado irracional $-3 - \sqrt{2}$.

$$\begin{cases} X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f \\ \quad \quad \quad \text{y} \\ X - (-3 - \sqrt{2}) \mid f \end{cases} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} X^2 + 6X + 7 \mid f \quad \checkmark.$$

La tercera condición tiene *mucha data*. Nos da una raíz compleja de f , por lo cual también tendremos su conjugado complejo porque $f \in \mathbb{Q}[X]$.

Esa raíz es una de las que está en $g \stackrel{\star^1}{}$.

El dato de f' , también nos indica que la multiplicidad de $1 - 2i$ como raíz es por lo menos 2, ya que $f'(1 - 2i) = 0$, y por lo tanto $\text{mult}(1 + 2i; f)$ también será por lo menos 2.

Tenemos todo para armar a f :

$$f = (X^2 - 2X + 5)^2 \cdot (X^2 + 6X + 7) \quad \checkmark$$

 **10.** Determinar todos los primos p positivos tales que el polinomio

$$f = pX^3 - X^2 + 13X - 1$$

tenga al menos una raíz racional positiva. Para cada valor de p hallado, factorizar f como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

El **lema de Gauss** dice que las raíces racionales que el polinomio puede tener, tienen que estar en el conjunto de los divisores del *coeficiente principal* p y el *termino independiente* -1 :

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{7}, \dots, \pm \frac{1}{p} \right\}$$

Ahora hay que hacer cuentas para todos los primos y ver cuál funciona, *nah, mentira*. Si $\frac{1}{p}$ es raíz entonces hay que dividir ($p^{-1} = \frac{1}{p}$, boludeces, no!):

$$\begin{array}{r} pX^3 - X^2 + 13X \quad -1 \quad \left| \begin{array}{l} X - p^{-1} \\ pX^2 + 13 \end{array} \right. \\ \underline{-pX^3 + X^2} \quad \quad \quad 13X \quad -1 \\ \quad \quad \quad \underline{-13X \quad + 13p^{-1}} \quad \quad \quad (-1 + 13p^{-1}) \end{array}$$

Y a esto hay que pedirle que el **resto sea 0**, porque $\frac{1}{p}$ es raíz racional:

$$-1 + \frac{13}{p} = 0 \Leftrightarrow p = 13$$

Si p tiene que ser primo y positivo entonces $p = 13$, usando el resultado de la división:


$$\begin{aligned} f = 13X^3 - X^2 + 13X - 1 &= 13\left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X^2 + 1) \\ &= 13\left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X - i) \cdot (X + i) \end{aligned}$$

Todo lindo las raíces:


$$\begin{cases} X_1 &= \frac{1}{13} \\ X_2 &= i \\ X_3 &= -i \end{cases}$$

Y factorizado en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ queda.

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Q}[X]: & f = 13 \cdot \left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X^2 + 1) \\ \mathbb{R}[X]: & f = 13 \cdot \left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X^2 + 1) \\ \mathbb{C}[X]: & f = 13 \cdot \left(X - \frac{1}{13}\right) \cdot (X - i) \cdot (X + i) \end{array}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 **11.** Hallar todos los $k \in \mathbb{Q}$ para los cuales el polinomio $f = X^6 + kX^3 + 25 \in \mathbb{Q}[X]$ tiene al menos una raíz compleja múltiple. Para cada uno de los valores de k hallados, factorizar f en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.

Antes de empezar este ejercicio, estaría bueno que hagas un minuto de silencio por los que rindieron este examen...

1 minuto después

Si f tiene raíces múltiples, busco raíces en su derivada, f' :

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow f' = 6r^5 + 3kr^2 = 0 \Leftrightarrow 3r^2 \cdot (2r^3 + k) = 0 \Leftrightarrow k = -2r^3$$

Entonces para el valor de una raíz r , tengo lo que tiene que valer k . Como tengo raíces múltiples, meto a r y el valor de k encontrado en f :

$$f(r) = 0 \xLeftrightarrow{k = -2r^3} r^6 - 2r^6 + 25 = 0 \Leftrightarrow \boxed{r^6 = 25}$$

Ese último resultado es G_6 con módulo $\sqrt[3]{5}$:

$$r_q = \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q\pi} \quad \text{con} \quad q \in [0, 5]$$

Estos valores son las raíces de f , pero hay que ver para cuál valor de k :

$$k = -2(r_q)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } q \text{ par} & \Rightarrow -2(\sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q\pi})^3 = -10 \\ \text{si } q \text{ impar} & \Rightarrow -2(\sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q\pi})^3 = 10 \end{cases}$$

Por lo tanto hay 2 valores posibles para k :

$$k \in \{-10, 10\}$$

Hay 2 valores de k que formarán 2 polinomios distintos. Cada uno de esos polinomios tiene 3 raíces tanto de f como de f' por lo tanto las mencionadas raíces son raíces dobles.

Tengo entonces que factorizar 2 polinomios f :

$$\boxed{f_{-10} = X^6 - 10X^3 + 25 \quad \text{y} \quad f_{10} = X^6 + 10X^3 + 25}$$

Esto va a ser útil:

$$(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2:$$

Factorizo f_{-10} :

El valor $k = -10$ tiene asociadas las raíces con q par:

$$\left\{ \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{4}{3}\pi} \right\} = \left\{ \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}.$$

Que cosa horrible esto:

$$\left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2$$

$$\begin{aligned} f_{-10} &= X^6 - 10X^3 + 25 \\ &\stackrel{!}{=} (X^3 - 5)^2 \in \mathbb{Q}[X] \\ &\stackrel{!}{=} \left((X - \sqrt[3]{5}) \cdot (X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2)\right)^2 = (X - \sqrt[3]{5})^2 \cdot (X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2)^2 \in \mathbb{R}[X] \\ &\stackrel{!}{=} (X - \sqrt[3]{5})^2 \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \in \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

Factorizo f_{10} :

El valor $k = 10$ tiene asociadas las raíces con q impar:

$$\left\{ -\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}\pi}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi} \right\} = \left\{ -\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}.$$

Esto es igual de horrible, pero solo hay que cambiar un par de signos a lo de antes:

$$\left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = X^2 - \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2$$

$$\begin{aligned}
 f_{10} &= X^6 + 10X^3 + 25 \\
 &\stackrel{!}{=} (X^3 + 5)^2 \in \mathbb{Q}[X] \\
 &\stackrel{!}{=} \left((X + \sqrt[3]{5}) \cdot (X^2 - \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2) \right)^2 = \left(X + \sqrt[3]{5} \right)^2 \cdot \left(X^2 - \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2 \right)^2 \in \mathbb{R}[X] \\
 &\stackrel{!}{=} \left(X + \sqrt[3]{5} \right)^2 \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \in \mathbb{C}[X]
 \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 