

Álgebra I

Práctica 4 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(doubleclick en los ejercicio para saltar)

- [Notas teóricas](#)

- Ejercicios de la guía:

1.	6.	11.	16.	21.	26.	31.	36.
2.	7.	12.	17.	22.	27.	32.	37.
3.	8.	13.	18.	23.	28.	33.	38.
4.	9.	14.	19.	24.	29.	34.	39.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.

- Ejercicios Extras

 1.	 3.	 5.	 7.	 9.	 11.
 2.	 4.	 6.	 8.	 10.	 12.

Notas teóricas:*Divisibilidad:*

- Definición divisibilidad y notación:

$$d \text{ divide a } a \xLeftrightarrow[\text{que decir}]{\text{es lo mismo}} a \text{ es un múltiplo entero de } d$$

$$d \mid a \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = k \cdot d$$

- Conjunto de divisores de a :

$$\mathcal{D}(a) = \{-|a|, \dots, -1, 1, \dots, |a|\}.$$

- $d \mid 0$, dado que $0 = 0 \cdot d$. Se desprende que $\mathcal{D}(0) = \{\mathbb{Z} - \{0\}\}$
- A la hora de laburar con la divisibilidad “*los signos no importan*”:

$$\begin{cases} d \mid a \iff -d \mid a \text{ (pues } a = k \cdot d \iff a = (-k) \cdot (-d)) \\ d \mid a \iff d \mid -a \text{ (pues } a = k \cdot d \iff (-a) = (-k) \cdot d) \end{cases} \xRightarrow{\text{corta}} \boxed{d \mid a \iff |d| \mid |a|}$$

- Propiedades súper útiles para justificar los cálculos en los ejercicios:

$$\begin{cases} d \mid a \text{ y } d \mid b \Rightarrow d \mid a \pm b \\ d \mid a \Rightarrow d \mid c \cdot a, \forall c \in \mathbb{Z} \\ d \mid a \xLeftrightarrow{!!} d^n \mid a^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Error recurrente: $d \mid a \cdot b \not\Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ \text{o} \\ d \mid b \end{cases}$. Por ejemplo $6 \mid 3 \cdot 4$ pero $\begin{cases} 6 \nmid 3 \\ \text{ni} \\ 6 \nmid 4 \end{cases}$

Definición congruencia:

- Definición congruencia:**

$$\begin{cases} 'a' \text{ es congruente a } 'b' \text{ módulo } 'd' \text{ si } d \mid a - b. & \text{Notación } \boxed{a \equiv b (d)} \\ a \equiv b (d) \iff d \mid a - b \end{cases}$$

- Sumar ecuaciones de congruencia *de mismo módulo*, conserva la congruencia:

$$\begin{cases} a_1 \equiv b_1 (d) \\ \vdots \\ a_n \equiv b_n (d) \end{cases} \Rightarrow a_1 + \dots + a_n \equiv b_1 + \dots + b_n (d)$$

- Multiplicar ecuaciones de congruencia *de mismo módulo*, conserva la congruencia:

$$\begin{cases} a_1 \equiv b_1 (d) \\ \vdots \\ a_n \equiv b_n (d) \end{cases} \Rightarrow a_1 \cdot \dots \cdot a_n \equiv b_1 \cdot \dots \cdot b_n (d)$$

Un caso particular con un simpático resultado:

$$n \text{ ecuaciones } \begin{cases} a \equiv b (d) \\ \vdots \\ a \equiv b (d) \end{cases} \Rightarrow \boxed{a^n \equiv b^n (d)}$$

Algoritmo de división:

- Dados $a, d \in \mathbb{Z}$ con $d \neq 0$, existen únicos q (cociente), r (resto) $\in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\begin{cases} a = q \cdot d + r, \\ \text{con } 0 \leq r < |d|. \end{cases}$$

- Notación: $\boxed{r_d(a)}$ es el resto de dividir a entre d
- $\underbrace{0 \leq r < |d|}_{\text{cumple condición de resto}} \Rightarrow r = r_d(r)$. Un número que cumple condición de resto, es su resto.

- Así es como me gusta pensar a la congruencia. La derecha es el resto de dividir a entre d :

$$a \equiv r_d(a) \ (d).$$

- Si d divide al número a , entonces el resto de la división es 0:

$$r_d(a) = 0 \iff d \mid a \iff a \equiv 0 \ (d)$$

- El resto es único:

$$a \equiv r \ (d) \text{ con } \underbrace{0 \leq r < |d|}_{\text{cumple condición de resto}} \Rightarrow r = r_d(a)$$

$$r_1 \equiv r_2 \ (d) \text{ con } \underbrace{0 \leq r_1, r_2 < |d|}_{\text{cumple condición de resto}} \Rightarrow r_1 = r_2$$

- Dos números que son congruentes módulo d entre sí, tienen igual resto al dividirse por d :

$$a \equiv b \ (d) \iff r_d(a) = r_d(b).$$

- Propiedades útiles para los ejercicios de calcular restos:

$$r_d(a + b) = r_d(r_d(a) + r_d(b)) \quad \text{y} \quad r_d(a \cdot b) = r_d(r_d(a) \cdot r_d(b))$$

ya que si,

$$\begin{cases} a \equiv r_d(a) \ (d) \\ b \equiv r_d(b) \ (d) \end{cases} \xrightarrow[\text{ecuaciones}]{\text{sumo}} a + b \equiv r_d(a) + r_d(b) \ (d)$$

y,

$$\begin{cases} a \equiv r_d(a) \ (d) \\ b \equiv r_d(b) \ (d) \end{cases} \xrightarrow[\text{ecuaciones}]{\text{multiplico}} a \cdot b \equiv r_d(a) \cdot r_d(b) \ (d)$$

Máximo común divisor:

- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no ambos nulos. El MCD entre a y b es el mayor de los divisores común entre a y b y se nota:

$$\boxed{\text{máximo común divisor: } \text{MCD} = (a : b)}$$

- $(a : b) \in \mathbb{N}$ (pues $(a : b) \geq 1$) *siempre existe* y es *único*.
- Propiedades del $(a : b)$, con a y $b \in \mathbb{Z}$, no ambos nulos.

- ✳ Los signos no importan: $(a : b) = (\pm a : \pm b)$
- ✳ Es simétrico: $(a : b) = (b : a)$
- ✳ Entre 1 y $a \in \mathbb{Z}$ siempre $(a : 1) = 1$
- ✳ Entre 0 y a siempre $(a : 0) = |a|$, $\forall a \in \mathbb{Z} - \{0\}$
- ✳ si $b \mid a \Rightarrow (a : b) = |b|$ con $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$
- ✳ Útil para ejercicios: $(a : b) = (a : b + na)$ con $n \in \mathbb{Z}$
- ✳ Útil para ejercicios: $(a : b) = (a : r_a(b))$ con $n \in \mathbb{Z}$
- ✳ Útil para ejercicios: Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos, y sea $k \in \mathbb{N}$

$$(ka : kb) = k(a : b)$$

- *Algoritmo de Euclides*: Para encontrar el $(a : b)$ con números o expresiones feas. Hay que saber hacer esto. Fin. ¡Se usa de acá hasta el final de la materia!.
- *Combinación Entera*: Otra herramienta gloriosa que sale de hacer *Euclides*. Por ejemplo se usa cuando no se ve a ojo una solución en ecuaciones diofánticas. ¡Se usa de acá hasta el final de la materia!.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos, entonces $\exists s, t \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : b) = s \cdot a + t \cdot b$.

- ✳ Todos los divisores comunes entre a y b dividen al $(a : b)$. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos, $d \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Entonces:

$$d \mid a \quad \text{y} \quad d \mid b \iff d \mid \underbrace{(a : b)}_{s \cdot a + t \cdot b}.$$

- ✳ Sea $c \in \mathbb{Z}$ entonces $\exists s', t' \in \mathbb{Z}$ con $c = s'a + t'b \iff (a : b) \mid c$.
- ✳ Todos los números múltiplos del MCD se escriben como combinación entera de a y b .
- ✳ Si un número es una combinación entera de a y b entonces es un múltiplo del MCD.

Coprimos:

- Definición coprimos:

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, no ambos nulos, se dice que son *coprimos* si $(a : b) = 1$

$$\begin{aligned} a \perp b &\iff (a : b) = 1 \\ a \perp b &\iff \exists s, t \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 1 = s \cdot a + t \cdot b \end{aligned}$$

- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos. *coprimizar* los números es dividirlos por su máximo común divisor, para obtener un nuevo par que sea coprimo:

$$(a : b) \neq 1 \xrightarrow{\text{coprimizar}} a' = \frac{a}{(a : b)}, b' = \frac{b}{(a : b)}, \Rightarrow \boxed{(a' : b') = 1} \quad \checkmark$$

- ¡Causa de muchos errores! Sean $a, c, d \in \mathbb{Z}$ con c, d no nulos. Entonces:

$$c \mid a \quad \text{y} \quad d \mid a \quad \text{y} \quad c \perp d \iff c \cdot d \mid a$$

Al ser c y d coprimos, pienso a a como un número cuya factorización tiene a c, d y la coprimicidad hace que en la factorización aparezca $c \cdot d$. (no sé, así lo piensa mi 🍷).

- Sean $a, b, d \in \mathbb{Z}$ con $d \neq 0$. Entonces:

$$d \mid a \cdot b \quad \text{y} \quad d \perp a \Rightarrow d \mid b$$

- *Primos y Factorización:*

- Sea p primo y sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$p \mid a \cdot b \Rightarrow p \mid a \quad \text{o} \quad p \mid b$$

- Si p divide a algún producto de números, tiene que dividir a alguno de los factores \rightarrow
Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} p \mid a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \Rightarrow p \mid a_i \text{ para algún } i \text{ con } 1 \leq i \leq n. \\ p \mid a^n \Rightarrow p \mid a. \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{Z}$, p primo:

$$\begin{cases} (a : p) = 1 \iff p \nmid a \\ (a : p) = p \iff p \mid a \end{cases}$$

- Sea $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $n = \underbrace{s}_{\{-1,1\}} \cdot \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ su factorización en primos. Entonces todo divisor m positivo de n se escribe como:

$$\begin{cases} \text{Si } m \mid n \rightarrow m = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k} \text{ con } 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, \quad \forall i \ 1 \leq i \leq k \\ \text{y hay} \\ (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) = \prod_{i=1}^k \alpha_i + 1 \\ \text{divisores positivos de } n. \end{cases}$$

- Sean a y $b \in \mathbb{Z}$ no nulos, con

$$\begin{cases} a = \pm p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r} \text{ con } m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}_0 \\ b = \pm p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r} \text{ con } n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}_0 \\ \Rightarrow (a : b) = p_1^{\min\{m_1, n_1\}} \cdots p_r^{\min\{m_r, n_r\}} \\ \Rightarrow [a : b] = p_1^{\max\{m_1, n_1\}} \cdots p_r^{\max\{m_r, n_r\}} \end{cases}$$

- Sean $a, d \in \mathbb{Z}$ con $d \neq 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$d \mid a \iff d^n \mid a^n.$$

- Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ no nulos:

- * $a \perp b \iff$ no tienen primos en común.
- * $(a : b) = 1$ y $(a : c) = 1 \iff (a : bc) = 1$
- * $(a : b) = 1 \iff (a^m : b^n) = 1, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$
- * $(a^n : b^n) = (a : b)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Si $a \mid m \wedge b \mid m$, entonces $[a : b] \mid m$

- $(a : b) \cdot [a : b] = |a \cdot b|$

Ejercicios de la guía:

Divisibilidad

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

a) $a \cdot b \mid c \Rightarrow a \mid c \text{ y } b \mid c$

f) $a \mid c \text{ y } b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$

b) $4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$

g) $a \mid b \Rightarrow a \leq b$

c) $2 \mid a \cdot b \Rightarrow 2 \mid a \text{ o } 2 \mid b$

h) $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$

d) $9 \mid a \cdot b \Rightarrow 9 \mid a \text{ o } 9 \mid b$

i) $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$

e) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b \text{ o } a \mid c$

j) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n, \forall n \in \mathbb{N}$

a) $a \cdot b \mid c \Rightarrow a \mid c \text{ y } b \mid c$

$$\begin{cases} c = k \cdot a \cdot b = \underbrace{h}_{k \cdot b} \cdot a \Rightarrow a \mid c \quad \checkmark \\ c = k \cdot a \cdot b = \underbrace{i}_{k \cdot a} \cdot b \Rightarrow b \mid c \quad \checkmark \end{cases}$$

b) $4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$

$$a^2 = k \cdot 4 = \underbrace{h}_{k \cdot 2} \cdot 2 \Rightarrow a^2 \mid 2 \xrightarrow[\Rightarrow a \mid c \wedge b \mid c]{\text{si } a \cdot b \mid c} a \mid 2 \quad \checkmark$$

c) $2 \mid a \cdot b \Rightarrow 2 \mid a \text{ o } 2 \mid b$

$$\text{Si } 2 \mid a \cdot b \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \text{ tiene que ser par} \\ \vee \\ b \text{ tiene que ser par} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{para que}} a \cdot b \text{ sea par. Por lo tanto si } 2 \mid a \cdot b \Rightarrow 2 \mid a \text{ o } 2 \mid b.$$

d) $9 \mid a \cdot b \Rightarrow 9 \mid a \text{ o } 9 \mid b$

Si $a = 3 \wedge b = 3$, se tiene que $9 \mid 9$, sin embargo $9 \nmid 3$

e) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b \text{ o } a \mid c$

$$12 \mid 20 + 4 \Rightarrow 12 \nmid 20 \text{ y } 12 \nmid 4$$

f) _____

🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

g) _____

🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

h) _____

🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

i) $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$

$$a \mid b + a^2 \Rightarrow b + a^2 = k \cdot a \xrightarrow{\text{acomodo}} b = (k - a) \cdot a = h \cdot a \Rightarrow a \mid b \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{decir si:}]{\text{también puedo}} \left\{ \begin{array}{l} a \mid a^2 \\ a \mid b - a^2 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{propiedad}]{\text{por}} a \mid (b - a^2) + (a^2) = b \Rightarrow a \mid b \quad \checkmark$$

j) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Pruebo por inducción.

$$p(n) : a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$$

Caso base:

$$n = 1 \Rightarrow a \mid b \Rightarrow a^1 \mid b^1 \quad \checkmark$$

$p(1)$ resulta verdadera.

Paso inductivo:

Asumo $\underbrace{p(h) : a \mid b \Rightarrow a^h \mid b^h}_{\text{hipótesis inductiva}}$ verdadera \Rightarrow quiero ver que $p(h+1) : a \mid b \Rightarrow a^{h+1} \mid b^{h+1}$

Parto de la **hipótesis inductiva** y voy llegar a $p(k+1)$. Si:

$$a \mid b \xrightarrow{\text{HI}} a^k \mid b^k \Leftrightarrow a^k \cdot c = b^k \xLeftrightarrow{\times b} b \cdot a^k \cdot c = b^{k+1} \xLeftrightarrow[a \cdot d = b]{a \mid b} a \cdot d \cdot a^k \cdot c = a^{k+1} \cdot (cd) = b^{k+1} \Leftrightarrow a^{k+1} \mid b^{k+1}.$$

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Este resultado es importante y se va a ver en muchos ejercicios:

$$a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n \iff b \equiv 0 \pmod{a} \Rightarrow b^n \equiv 0 \pmod{a^n} \xLeftrightarrow[0 \equiv a^n]{a^n} b^n \equiv a^n \pmod{a^n}$$

$$\boxed{a \mid b \Rightarrow b^n \equiv a^n \pmod{a^n}}$$

2. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que:

a) $3n - 1 \mid n + 7$

c) $2n + 1 \mid n^2 + 5$

b) $3n - 2 \mid 5n - 8$

d) $n - 2 \mid n^3 - 8$

a) $3n - 1 \mid n + 7$

Busco eliminar la n del miembro derecho.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3n - 1 \mid n + 7 \xrightarrow[a \mid k \cdot c]{a \mid c} 3n - 1 \mid 3 \cdot (n + 7) = 3n + 21 \\ \frac{a \mid b \text{ y } a \mid c}{\Rightarrow a \mid b \pm c} \rightarrow 3n - 1 \mid 3n + 21 - (3n - 1) = 22 \end{array} \right\} \rightarrow 3n - 1 \mid 22$$

$$\xrightarrow[\text{para que}]{\text{busco } n} \frac{22}{3n-1} \in \mathcal{D}(22) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 22\} \xrightarrow{\text{probando}} n \in \{1, 4\} \quad \checkmark$$

b)

c)

d) $n - 2 \mid n^3 - 8$

$$\frac{a \mid b}{\Rightarrow a \mid k \cdot b} \rightarrow n - 2 \mid \underbrace{(n - 2) \cdot (n^2 + 2n + 4)}_{n^3 - 8} \text{ Esto va a dividir para todo } n \neq 2$$

3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.a) Probar que $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a \neq b \in \mathbb{Z}$ b) Probar que si n es un número natural par y $a \neq -b$, entonces $a + b \mid a^n - b^n$.c) Probar que si n es un número natural impar y $a \neq -b$, entonces $a + b \mid a^n + b^n$.a) *Inducción:**Proposición:*

$$p(n) : a - b \mid a^n - b^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad a \neq b \in \mathbb{Z}$$

Caso Base:

$$p(1) : a - b \mid a^1 - b^1,$$

 $p(1)$ es verdadera. ✓*Paso inductivo:*

Asumo que $p(k) : a - b \mid a^k - b^k$ es verdadera \Rightarrow quiero probar que $p(k+1) : a - b \mid a^{k+1} - b^{k+1}$ también lo sea.

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b \mid a^k - b^k \\ a - b \mid a^k - b^k \end{array} \right\} \xrightarrow[\times b]{\times a} \left\{ \begin{array}{l} a - b \mid a^{k+1} - ab^k \\ a - b \mid ba^k - b^{k+1} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \{ a - b \mid a^{k+1} - b^{k+1} \}. \quad \checkmark$$

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción $p(n)$ también lo es.

b) Sé que

$$a + b \mid a + b \xLeftrightarrow{\text{def}} a \equiv -b \pmod{a + b}$$

Multiplicando la ecuación de congruencia por a sucesivas veces me formo:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \cdot a = a^2 \xrightarrow{(a+b)} a \cdot (-b) \xrightarrow{(a+b)} (-1)^2 b \\ \vdots \quad \leftarrow \star^1 \\ a^n \xrightarrow{(a+b)} (-1)^n \cdot b^n \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a^n \equiv b^n (a+b) & \text{con } n \text{ par} \\ a^n \equiv (-1)^n \cdot b^n (a+b) & \text{con } n \text{ impar} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Con } n \text{ par:} & a^n \equiv b^n (a+b) \Rightarrow a+b \mid a^n - b^n \\ \text{Con } n \text{ impar:} & a^n \equiv -b^n (a+b) \Rightarrow a+b \mid a^n + b^n \end{array} \right.$$

 \star^1 *Inducción:*

$$p(n) : a \equiv -b \pmod{a+b} \Rightarrow a^n \equiv (-1)^n \cdot b^n \pmod{a+b} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso base:

$$p(1) : a \equiv -b \pmod{a+b} \Rightarrow a^1 \equiv (-1)^1 \cdot b^1 \pmod{a+b}$$

$p(1)$ es verdadera.

Paso inductivo:

$p(k) : a \equiv -b (a+b) \Rightarrow a^k \equiv (-1)^k \cdot b^k (a+b)$ asumo verdadera para algún $k \in \mathbb{Z}$
 \Rightarrow quiero probar que

$$\text{Partiendo de } p(k) : \begin{cases} p(k+1) : a \equiv -b (a+b) \Rightarrow a^{k+1} \equiv (-1)^{k+1} \cdot b^{k+1} (a+b) \\ a \equiv -b (a+b) \Rightarrow a^k \equiv (-1)^k \cdot b^k (a+b) \\ \xrightarrow[\text{por } a]{\text{multiplico}} a \cdot a^k = a^{k+1} \equiv (-1)^k \cdot \underbrace{a}_{\substack{(a+b) \\ \equiv -b}} \cdot b^k (a+b) \\ \Rightarrow a^{k+1} \equiv (-1)^{k+1} \cdot b^{k+1} (a+b) \iff a+b \mid a^{k+1} - (-1)^{k+1} b^{k+1} \quad \checkmark \end{cases}$$

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas por principio de inducción lo es también $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) Hecho en el anterior 🙌.

4. Sea $a \in \mathbb{Z}$ impar. Probar que $2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Pruebo por inducción:

$$p(n) : 2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1, \text{ con } a \in \mathbb{Z} \text{ e impar. } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso base:

$$\begin{aligned} p(1) : 2^3 &= 8 \mid a^2 - 1 = (a-1) \cdot (a+1) \\ &\xrightarrow[\substack{a \text{ es impar, si } m \in \mathbb{Z} \\ a = 2m-1}]{\text{}} \\ (a-1) \cdot (a+1) &\stackrel{\star^1}{=} (2m-2) \cdot (2m) \stackrel{!}{=} 4 \cdot \underbrace{m \cdot (m-1)}_{\text{par: } 2h, h \in \mathbb{Z}} = 4 \cdot 2h = 8 * h \\ &\xrightarrow[\text{tanto}]{\text{por lo}} \\ 8 \mid 8h &= (a-1) \cdot (a+1) \text{ para algún } h \in \mathbb{Z} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Por lo tanto $p(1)$ es verdadera.

Paso inductivo:

Asumo que: $p(k) : 2^{k+2} \mid a^{2^k} - 1$, es verdadera \Rightarrow Quiero ver que $p(k+1) : 2^{k+3} \mid a^{2^{k+1}} - 1$, también lo sea.

$$\begin{aligned} 2^{k+3} \mid a^{2^{k+1}} - 1 &\stackrel{!}{\iff} 2^{k+2} \cdot 2 \mid (a^{2^k} - 1) \cdot \overbrace{(a^{2^k} + 1)}^{\text{par !}} \\ &\xleftrightarrow[\text{hipótesis inductiva}]{\text{Si } a \mid b \text{ y } c \mid d \Rightarrow ac \mid bd} \\ 2^{k+2} \cdot 2 &\mid (a^{2^k} - 1) \cdot \underbrace{(a^{2^k} + 1)}_{\text{par}}. \end{aligned}$$

El ! es todo tuyo, *hints*: diferencia de cuadrados, propiedades de exponentes... 🙌

En el último paso se comprueba que $p(k+1)$ es verdadera.

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción también lo será $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

8. Calcular el cociente y el resto de la división de a por b en los casos:

a) $a = 133, \quad b = -14.$

d) $a = b^2 - 6, \quad b \neq 0.$

b) $a = 13, \quad b = 111.$

e) $a = n^2 + 5, \quad b = n + 2 \quad (n \in \mathbb{N}).$

c) $a = 3b + 7, \quad b \neq 0.$

f) $a = n + 3, \quad b = n^2 + 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$

a) $133 : (-14) \Rightarrow 133 = (-9) \cdot (-14) + 7$

b)

c) $a = 3b + 7 \rightarrow$ me interesa: $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |b| \leq |a| \quad \checkmark \\ 0 \leq r < |b| \quad \checkmark \end{array} \right\} \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Si: } |b| > 7 \rightarrow (q, r) = (3, 7) \\ \text{Si: } |b| \leq 7 \rightarrow (q, r) = (3, 7) \end{array} \right.$$

(a, b)	$(-14, -7)$	$(-11, -6)$	$(-8, -5)$	$(-5, -4)$	$(4, -1)$	\dots
(q, r)	$(2, 0)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$	$(2, 3)$	$(4, 0)$	\dots

d) $a = b^2 - 6, \quad b \neq 0.$ 🙄... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

9. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de:

a) la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18.

b) la división de a por 3.

c) la división de $4a + 1$ por 9.

d) la división de $7a^2 + 12$ por 28.

a) $r_{18}(a) = r_{18}(\underbrace{r_{18}(a)^2}_{5^2} - \underbrace{r_{18}(3)}_3 \cdot \underbrace{r_{18}(a)}_5 + \underbrace{r_{18}(11)}_{11}) = r_{18}(21) = 3$

b) $\left\{ \begin{array}{l} a = 3 \cdot q + r_3(a) \\ 6 \cdot a = 18 \cdot q + \underbrace{6 \cdot r_3(a)}_{r_{18}(6a)} \end{array} \right\} \rightarrow r_{18}(6a) = r_{18}(r_{18}(6) \cdot r_{18}(a)) = r_{18}(30) = 12$
 $\Rightarrow 6 \cdot r_3(a) = r_{18}(6a) \rightarrow r_3(a) = 2$

c) $r_9(4a + 1) = \underbrace{r_9(4 \cdot r_9(a) + 1)}_{*1} \rightarrow$

$$a = 18 \cdot q + 5 = 9 \cdot \underbrace{(9 \cdot q)}_{q'} + \underbrace{5}_{r_9(a)} \xrightarrow{*1} r_9(a) = r_9(21) = 3$$

d) $r_{28}(7a^2 + 12) = r_{28}(7 \cdot r_{28}(a)^2 + 12) \xrightarrow{\text{¿qué es}} r_{28}(a)$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 18 \cdot q + 5 \xrightarrow[\text{para el 28}]{\text{busco algo}} \\ 14 \cdot a = \underbrace{252 \cdot q}_{28 \cdot 9 \cdot q} + 70 \xrightarrow[\text{condición resto}]{\text{corrijo según}} 28 \cdot 9 \cdot q + \underbrace{2 \cdot 28 + 14}_{70} = 28 \cdot (9 \cdot q + 2) + 14 \quad \checkmark \\ \xrightarrow[\text{tanto}]{\text{por lo}} 14a = 28 \cdot q' + 14 \Rightarrow 14 \cdot a \equiv 14 \pmod{28} \iff a \equiv 1 \pmod{28} \end{array} \right.$$

Ahora que sé que $r_{28}(a) = 1$ sale que $r_{28}(7a^2 + 12) = r_{28}(7 \cdot \underbrace{r_{28}(a)}_1^2 + 12) = r_{28}(19) = 19 \quad \checkmark$

10.

- a) Si $a \equiv 22 \pmod{14}$, hallar el resto de dividir a a por 14, por 2 y por 7.
- b) Si $a \equiv 13 \pmod{5}$, hallar el resto de dividir a $33a^3 + 3a^2 - 197a + 2$ por 5.
- c) Hallar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división de $\sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot i!$ por 12

a)
$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv 22 \pmod{14} \rightarrow a = 14 \cdot q + \underbrace{22}_{14+8} = 14 \cdot (q+1) + 8 \xrightarrow[\text{es}]{\text{el resto}} r_{14}(a) = 8 \quad \checkmark \\ a \equiv 22 \pmod{14} \rightarrow a = \underbrace{14 \cdot q}_{2 \cdot (7 \cdot q)} + \underbrace{22}_{2 \cdot 11} = 2 \cdot (7q+11) + 0 \xrightarrow[\text{es}]{\text{el resto}} r_2(a) = 0 \quad \checkmark \\ a \equiv 22 \pmod{14} \rightarrow a = \underbrace{14 \cdot q}_{7 \cdot (2 \cdot q)} + \underbrace{22}_{1+7 \cdot 3} = 7 \cdot (2q+3) + 1 \xrightarrow[\text{es}]{\text{el resto}} r_7(a) = 1 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

- b) Dos números congruentes tienen el mismo resto. $a \equiv 13 \pmod{5} \iff a \equiv 3 \pmod{5}$ $r_5(33a^3 + 3a^2 - 197a + 2) = r_5(3 \cdot r_5(a)^3 + 3 \cdot r_5(a)^2 - 2 \cdot r_5(a) + 2)$
 $\xrightarrow[\text{como } a \equiv 13 \pmod{5}]{r_5(a) = 3} r_5(33a^3 + 3a^2 - 197a + 2) = 4$

- c) 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

11.

- a) Probar que $a^2 \equiv -1 \pmod{5} \iff a \equiv 2 \pmod{5} \vee a \equiv 3 \pmod{5}$
- b) Probar que no existe ningún entero a tal que $a^3 \equiv -3 \pmod{7}$
- c) Probar que $a^7 \equiv a \pmod{7} \quad \forall a \in \mathbb{Z}$
- d) Probar que $7 \mid a^2 + b^2 \iff 7 \mid a \wedge 7 \mid b$.
- e) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 + 1 \Rightarrow 5 \mid a \quad \text{o} \quad 5 \mid b$. ¿Vale la implicación recíproca?

- a) Me piden que pruebe una congruencia es válida solo para ciertos $a \in \mathbb{Z}$. Pensado en términos de *restos* quiero que el resto al poner los a en cuestión cumplan la congruencia.

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 \equiv -1 \pmod{5} \Leftrightarrow a^2 \equiv 4 \pmod{5} \Leftrightarrow a^2 - 4 \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow (a-2) \cdot (a+2) \equiv 0 \pmod{5} \\ \xrightarrow[\text{resto } 0]{\text{quiero}} r_5(a^2 + 1) = r_5(a^2 - 4) = r_5(r_5(a-2) \cdot r_5(a+2)) = r_5(\underbrace{(r_5(a)-2) \cdot (r_5(a)+2)}_{\star^1}) = 0 \\ r_5(a^2 + 1) = 0 \xLeftrightarrow{\star^1} r_5((r_5(a)-2) \cdot (r_5(a)+2)) = 0 \left\{ \begin{array}{ll} r_5(a) = 2 & \Leftrightarrow a \equiv 2 \pmod{5} \quad \checkmark \\ r_5(a) = -2 & \Leftrightarrow a \equiv 3 \pmod{5} \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Más aún:

Para una congruencia módulo 5 habrá solo 5 posibles restos, por lo tanto se pueden ver todos los casos haciendo una *table de restos*.

a	0	1	2	3	4
$r_5(a)$	0	1	2	3	4
$r_5(a^2)$	0	1	4	4	1

→ La tabla muestra que para un dado a

$$\rightarrow r_5(a) = \left\{ \begin{array}{l} 2 \Leftrightarrow a \equiv 2 \pmod{5} \Leftrightarrow a^2 \equiv 4 \pmod{5} \Leftrightarrow a^2 \equiv -1 \pmod{5} \\ 3 \Leftrightarrow a \equiv 3 \pmod{5} \Leftrightarrow a^2 \equiv 4 \pmod{5} \Leftrightarrow a^2 \equiv -1 \pmod{5} \end{array} \right\}$$

b) 😞... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

c) Me piden que exista una dada congruencia para todo $a \in \mathbb{Z}$. Eso equivale a probar a que al dividir el *lado izquierdo* entre el *divisor*, el *resto* sea lo que está en el *lado derecho* de la congruencia.

$$a^7 - a \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow a \cdot \underbrace{(a^6 - 1)}_{(a^3-1) \cdot (a^3+1)} \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow a \cdot (a^3 - 1) \cdot (a^3 + 1) \equiv 0 \pmod{7} \xrightarrow[\text{sus propiedades lineales}]{\text{tabla de restos con}}$$

a	0	1	2	3	4	5	6
$r_7(a)$	0	1	2	3	4	5	6
$r_7(a^3 - 1)$	6	0	0	5	0	5	5
$r_7(a^3 + 1)$	1	2	2	0	2	0	0

→ Cómo para todos los a , alguno de los factores del resto siempre

se anula, es decir:

$$r_7(a^7 - a) = r_7(r_7(a) \cdot r_7(a^3 - 1) \cdot r_7(a^3 + 1)) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

d)

e)

12. 😞... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

13. Se define por recurrencia la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = -5 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} - 6^{2n} \cdot a_n + 21^n \cdot n^{21}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n \equiv 3^n \pmod{7}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La infumabilidad de esos números me obliga a atacar a esto con el resto e inducción.

$$r_7(a_{n+2}) = r_7(r_7(a_{n+1}) - \underbrace{r_7(36)^n}_{\equiv 1} \cdot r_7(a_n) + \underbrace{r_7(21)^n}_{\equiv 0} \cdot r_7(n)^{21}) = \underbrace{r_7(a_{n+2})}_{\star^1} = r_7(a_{n+1}) - r_7(a_n) \quad \checkmark$$

Puesto de otra forma $a_{n+2} \equiv a_{n+1} - a_n \pmod{7} \rightarrow \begin{cases} a_1 \equiv 3^1 \pmod{7} \iff a_1 \equiv 3 \pmod{7} \\ a_2 \equiv 3^2 \pmod{7} \iff a_2 \equiv 2 \pmod{7} \\ a_3 \equiv 3^3 \pmod{7} \iff a_3 \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$

Quiero probar que $a_n \equiv 3^n \pmod{7} \rightarrow$ inducción completa:

$p(n) : a_n \equiv 3^n \pmod{7} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Casos base: $\begin{cases} p(1) : a_1 \equiv 3^1 \pmod{7} \quad \checkmark, \quad p(1) \text{ es verdadera} \\ p(2) : a_2 \equiv 3^2 \pmod{7} \stackrel{(7)}{\equiv} 2 \stackrel{(7)}{\equiv} -5 \quad \checkmark, \quad p(2) \text{ es verdadera} \\ p(k) : a_k \equiv 3^k \pmod{7} \quad \checkmark, \quad p(k) \text{ la asumo verdadera} \end{cases}$

Paso Inductivo: $\begin{cases} y \\ p(k+1) : a_{k+1} \equiv 3^{k+1} \pmod{7} \quad \checkmark, \quad p(k+1) \text{ también asumo verdadera} \\ \Rightarrow p(k+2) : a_{k+2} \equiv 3^{k+2} \pmod{7} \text{ quiero probar que es verdadera} \end{cases}$

Hipótesis inductiva: $\begin{cases} a_k \equiv 3^k \pmod{7} \\ a_{k+1} \equiv 3^{k+1} \pmod{7} \\ \xrightarrow{\text{suma}} a_{k+2} = a_{k+1} - a_k \equiv 3^{k+1} - 3^k = 2 \cdot 3^k \stackrel{(7)}{\equiv} 9 \cdot 3^k = 3^{k+2} \pmod{7} \quad \checkmark \\ \star^1 \\ p(k+2) \text{ resultó ser verdadera.} \end{cases}$

Concluyendo como $p(1), p(2), p(k), p(k+1)$ y $p(k+2)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

14.

(a) Hallar el desarrollo en base 2 de

i. 1365

ii. 2800

iii. $3 \cdot 2^{12}$

iv. $13 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^{n-1}$

(b) Hallar el desarrollo en base 16 de 2800.

🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

15. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

16. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

17. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

Máximo común divisor:

18. En cada uno de los siguientes casos calcular el máximo común divisor entre a y b y escribirlo como combinación lineal entera de a y b :

i) $a = 2532, b = 63$.

ii) $a = 131, b = 23$.

iii) $a = n^4 - 3, b = n^2 + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$.

Hacer!

19. 🤨... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

20. Sea $a \in \mathbb{Z}$.

- a) Probar que $(5a + 8 : 7a + 3) = 1$ o 41. Exhibir un valor de a para el cual da 1, y verificar que efectivamente para $a = 23$ da 41.
- b) Probar que $(2a^2 + 3a : 5a + 6) = 1$ o 43. Exhibir un valor de a para el cual da 1, y verificar que efectivamente para $a = 16$ da 43
- c) Probar que $(a^2 - 3a + 2 : 3a^3 - 5a^2) = 2$ o 4, y exhibir un valor de a para cada caso.
(Para este ítem es **indispensable** mostrar que el máximo común divisor nunca puede ser 1).

i) 🤨... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

ii) 🤨... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

$$\text{iii) } (a^2 - 3a + 2 : 3a^3 - 5a^2) \xrightarrow{\text{Euclides}} (\underbrace{a^2 - 3a + 2}_{\star^1_{\text{par}}} : \underbrace{6a - 8}_{\star^1_{\text{par}}})$$

$$\xrightarrow[\text{divisor}]{\text{busco}} \left\{ \begin{array}{l} d \mid a^2 - 3a + 2 \\ d \mid 6a - 8 \end{array} \right\} \xrightarrow[\times a]{\times 6} \left\{ \begin{array}{l} d \mid 10a - 12 \\ d \mid 6a - 8 \end{array} \right\} \xrightarrow[\times 10]{\times 6} \{ d \mid 8 \} \rightarrow \mathcal{D}_+(8) = \{1, 2, 4, 8\} \star^1 = \{2, 4, 8\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \quad (0 : -2) = 2 \\ a = 2 \quad (0 : 4) = 4 \end{array} \right.$$

Parecido al hecho en clase.

¿Qué onda el 8? Hice mal cuentas? Si no, cómo lo descarto?

21. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos. Probar que $7a - 3b$ y $2a - b$ son coprimos.

$$\left\{ \begin{array}{l} d \mid 7a - 3b \xrightarrow{\cdot 2} d \mid b \rightarrow d \mid b \\ d \mid 2a - b \xrightarrow{\cdot 7} d \mid 2a - b \rightarrow d \mid a \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{divisor y } (a:b)]{\text{propiedad}} d \mid (a : b) \xrightarrow[\text{coprimos}]{(a:b)} d \mid 1$$

Por lo tanto $(7a - 3b : 2a - b) = 1$ son coprimos como se quería mostrar.

22. 🤨... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

23.

- i) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\frac{b+4}{a} + \frac{5}{b} \in \mathbb{Z}$.
- ii) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\frac{9a}{b} + \frac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$.
- iii) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\frac{2a+3}{a+1} + \frac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$.

i) $\frac{b+4}{a} + \frac{5}{b} = \frac{b^2+4b+5a}{ab} \xrightarrow{\text{quiero que}} ab \mid b^2 + 4b + 5a$

$\xrightarrow[\text{coprimidad}]{\text{por}} \begin{cases} a \mid b^2 + 4b + 5a \\ b \mid b^2 + 4b + 5a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \mid b^2 + 4b \\ b \mid 5a \end{cases} \xrightarrow[\text{debe dividir a } 5]{\text{es seguro que } b \nmid a} \begin{cases} a \mid b \cdot (b + 4) \\ b \mid 5 \end{cases}$

Seguro tengo que $b \in \{\pm 1, \pm 5\} \rightarrow$ pruebo valores de b y veo que valor de a queda:

$$\begin{cases} b = 1 \rightarrow (a \mid 5, 1) \rightarrow \{(\pm 1, 1).(\pm 5, 1)\} \\ b = -1 \rightarrow (a \mid -3, 1) \rightarrow \{(\pm 1, -1).(\pm 3, 1)\} \\ b = 5 \rightarrow (a \mid 45, 5) \xrightarrow[(a : b) = 1]{\text{atención que}} \{(\pm 1, 5), (\pm 3, 5).(\pm 9, 5)\} \\ b = -5 \rightarrow (a \mid 5, -5) \xrightarrow[(a : b) = 1]{\text{atención que}} \{(\pm 1, -5)\} \end{cases}$$

ii) **Hacer!**

iii) 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow 🐙.

Primos y factorización:

24. _____

25. Sea p primo positivo.

i) Probar que si $0 < k < p \mid \binom{p}{k}$.

ii) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

26. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow 🐙.

27. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow 🐙.

28. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow 🐙.

29. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow 🐙.

30. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow 🐙.

31. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow 🐙.

32. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow 🐙.

33. 😬... hay que hacerlo! 🙏

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🐙.

34. 😬... hay que hacerlo! 🙏

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🐙.

35. 😬... hay que hacerlo! 🙏

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🐙.

36. 😬... hay que hacerlo! 🙏

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🐙.

37. 😬... hay que hacerlo! 🙏

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🐙.

38. 😬... hay que hacerlo! 🙏

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🐙.

39. 😬... hay que hacerlo! 🙏

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🐙.

40. 😬... hay que hacerlo! 🙏

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🐙.

🔥 Ejercicios extras:

🔥1. 4400 ¿Cuántos divisores distintos tiene? ¿Cuánto vale la suma de sus divisores.

$$4400 \xrightarrow{\text{factorizo}} 4400 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 11 \xrightarrow[\text{tendrán la forma}]{\text{los divisores } m \mid 4400} m = \pm 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 11^\gamma, \text{ con } \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 4 \\ 0 \leq \beta \leq 2 \\ 0 \leq \gamma \leq 1 \end{cases}$$

Hay entonces un total de $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ divisores positivos y 60 enteros.

$$\text{Ahora busco la suma de esos divisores: } \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^1 2^i \cdot 5^j \cdot 11^k = \left(\sum_{i=0}^4 2^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^2 5^j \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^1 11^k \right)$$

$$\xrightarrow[\text{geométricas}]{\text{sumas}} \underbrace{\frac{2^{4+1}-1}{2-1}}_{31} \cdot \underbrace{\frac{5^{2+1}-1}{5-1}}_{31} \cdot \underbrace{\frac{11^{1+1}-1}{11-1}}_{12} = 11532.$$

🔥2. Hallar el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que:

- i) $(n : 2528) = 316$
- ii) n tiene exactamente 48 divisores positivos
- iii) $27 \nmid n$

Analizo los números:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{factorizo}} 2528 = 2^5 \cdot 79 \quad \checkmark \\ \xrightarrow{\text{factorizo}} 316 = 2^2 \cdot 79 \quad \checkmark \\ \xrightarrow[\text{condición}]{\text{reescribo}} (n : 2^5 \cdot 79) = 2^2 \cdot 79 \end{array} \right. \xrightarrow[\text{encontrar}]{\text{quiero}} n = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^{\alpha_7} \dots 79^{\alpha_{79}} \dots$$

$$\xrightarrow{\text{como}} (n : 2^5 \cdot 79) = 2^2 \cdot 79 \xrightarrow[\text{que}]{\text{tengo}} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 2, \\ \alpha_{79} \geq 1, \\ \xrightarrow[\text{que}]{\text{notar}} \alpha_3 < 3 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{dado que } 2^2 \cdot 79 \mid n. \text{ busco el menor } n!. \\ \text{Al igual que antes.} \\ \text{si no } 3^3 = 27 \mid n \end{array}$$

La estrategia sigue con el primo más chico que haya:

$$\left\{ \begin{array}{l} 48 = \underbrace{(\alpha_2 + 1)}_{2+1} \cdot (\alpha_3 + 1) \dots \\ 48 = 3 \cdot (\alpha_3 + 1) \dots \\ 16 = (\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_5 + 1) \cdot (\alpha_7 + 1) \dots \underbrace{(\alpha_{79} + 1)}_{=2 \text{ quiero el menor}} \dots \\ 8 = (\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_5 + 1) \cdot (\alpha_7 + 1) \dots \\ 8 = \underbrace{(\alpha_3 + 1)}_{=2} \cdot \underbrace{(\alpha_5 + 1)}_{=2} \cdot \underbrace{(\alpha_7 + 1)}_{=2} \cdot 1 \dots 1 \end{array} \right.$$

El n que cumple lo pedido sería $n = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 79^1$

🔥3. Sabiendo que $(a : b) = 5$. Probar que $(3ab : a^2 + b^2) = 25$

Arranco *comprimizando*:

$$\begin{cases} a = 5c \\ b = 5d \end{cases} \Rightarrow (3ab : a^2 + b^2) = 25 \xLeftrightarrow[\text{coprimizar}]{!} (3cd : c^2 + d^2) = 1$$

Esto último nos dice que las expresiones $3cd$ y $c^2 + d^2$ son coprimas entre sí, en otras palabras, que *no hay ningún p primo* que divida ambas expresiones a la vez.

Pruebo por absurdo que no existe p primo que divida a ambas expresiones, es decir que no existe un p , tal que $(3cd : c^2 + d^2) = p$. Supongo que $\exists p$ primo tal que:

$$p \mid 3 \cdot c \cdot d \Leftrightarrow \begin{cases} p \mid 3 & \star^1 \\ \text{o} \\ p \mid c & \star^2 \\ \text{o} \\ p \mid d & \star^3 \end{cases}$$

Si ocurre que $p \mid 3 \Leftrightarrow p = 3$. Quiero entonces ver si $3 \mid c^2 + d^2 \Leftrightarrow c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Hago una tabla para estudiar esa última ecuación:

$r_3(c)$	0	1	2
$r_3(d)$	0	1	2
$r_3(c^2 + d^2)$	0	2	2

De la tabla concluimos que para que $c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod{3}$ debe ocurrir que: $c \equiv 0 \pmod{3}$ y también que $d \equiv 0 \pmod{3}$, es decir que tanto c como d sean múltiplos de 3. Esto es una contradicción, ya que *no puede* ocurrir porque $(c : d) = 1$. Por lo tanto no puede ser que $\star^1 p \mid 3$

Si ocurre ahora que $\star^2 p \mid c$, estudio a ver si también $p \mid c^2 + d^2$:

$$\begin{cases} p \mid c \\ p \mid c^2 + d^2 \end{cases} \xLeftrightarrow[F_2 - c \cdot F_1 \rightarrow F_2] \begin{cases} p \mid c \\ p \mid d^2 \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{primo}]{p} p \mid d$$

Entonces si $p \mid c$ y también $p \mid c^2 + d^2$ debe ocurrir que $p \mid d$. Nuevamente contradicción ya que *no puede ocurrir* debido a que $(c : d) = 1$.

El caso \star^3 es lo mismo que el caso \star^2 .

Se concluye entonces que $(3cd : c^2 + d^2) = 1$ con $(c : d) = 1$. Así probando que $(3ab : a^2 + b^2) = 25$ con $\begin{cases} a = 5c \\ b = 5d \end{cases}$

4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $81 \mid (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{2024}$ si y solo si $3 \mid n$.

\Rightarrow)

$$\begin{aligned} 81 \mid (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{2024} &\stackrel{!!!}{\Rightarrow} 3 \mid (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{506} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \\ &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{2024} \equiv 0 \pmod{3} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (n^2)^{2024} \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow n^{4048} \equiv 0 \pmod{3} \stackrel{!!}{\Rightarrow} n \equiv 0 \pmod{3} \\ &\boxed{81 \mid (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{2024} \Rightarrow 3 \mid n} \end{aligned}$$

En el **!!!** uso esto $p^n \mid a^n \Leftrightarrow p \mid a$. En **!** son cuentas de congruencia. Y en **!!** uso esto, $p \mid a^n \Rightarrow p \mid a$.

⇐)

$$3 \mid n \stackrel{\text{def}}{\iff} n \equiv 0 \pmod{3} \stackrel{!}{\iff} n^2 \equiv 0 \pmod{3} \stackrel{!}{\iff} 16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7 \equiv 0 \pmod{3} \stackrel{!}{\iff} \\ \stackrel{!}{\iff} (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^4 \equiv 0 \pmod{3^4} \stackrel{!}{\Rightarrow} (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{2024} \equiv 0 \pmod{3^4} \\ \boxed{3 \mid n \Rightarrow 81 \mid (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{2024}}$$

En el primero y último ! uso que $n \equiv 0 \pmod{d} \Rightarrow n^m \equiv 0 \pmod{d}$ y en los otros la mismas cosas que antes...
ponele

5. Estudiar los valores para **todos** los $a \in \mathbb{Z}$ de $(a^3 + 1 : a^2 - a + 1)$.

Primero hay que notar que el lado $a^2 - a + 1$ es siempre impar ya que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2k-1)^2 - (2k-1) + 1 \stackrel{(2)}{\equiv} (-1)^2 - 1 + 1 \stackrel{(2)}{\equiv} 1 \\ (2k)^2 - (2k) + 1 \stackrel{(2)}{\equiv} (0)^2 - 0 + 1 \stackrel{(2)}{\equiv} 1 \end{array} \right\} \text{ Por lo tanto 2 no puede ser un divisor de ambas}$$

expresiones y si $2 \nmid A \Rightarrow 2 \cdot k \nmid A$ tampoco.

Se ve fácil contrarecíproco: $\underbrace{2k}_{\text{par}} \mid A \Rightarrow 2 \mid A$. Porque existe un k tal que $2 \cdot c \cdot k = A \Rightarrow 2 \cdot (c \cdot k) = A$.

Ahora cuentas para simplificar la expresión y encontrar número del lado derecho.

$$\left\{ \begin{array}{l} d \mid a^3 + 1 \\ d \mid a^2 - a + 1 \end{array} \right\} \rightarrow d \mid 30 \rightarrow \mathcal{D}_+(d) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \xrightarrow[\text{no hay divisores pares}]{\text{por lo de antes}} \mathcal{D}_+(d) = \{1, 3, 5, 15\}$$

$$\xrightarrow[\text{empezar por los números chicos}]{\text{hacer tabla de restos}} \left\{ \begin{array}{ll} r_3(a^3 + 1) = 0 & \text{si } a \equiv 2 \pmod{3} \\ \wedge \\ r_3(a^2 - a + 1) = 0 & \text{si } a \equiv 2 \pmod{3} \end{array} \right\} \rightarrow \{ r_5(a^3 + 1) \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{Z} \}.$$

Luego si $5 \nmid (a^3 + 1 : a^2 - a + 1) \Rightarrow \underbrace{15}_{5 \cdot 3} \nmid (a^3 + 1 : a^2 - a + 1) \xrightarrow[\text{conjunto de divisores}]{\text{se achica el}} \mathcal{D}_+(d) = \{1, 3\}$

$$d = \begin{cases} 3 & \text{si } a \equiv 2 \pmod{3} \\ 1 & \text{si } a \equiv 1 \vee 0 \pmod{3} \end{cases}$$

6. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : b) = 6$. Hallar todos los $d = (2a + b : 3a - 2b)$ y dar un ejemplo en cada caso.

Conviene *coprimizar*: $(a : b) = 6 \iff \begin{cases} a = 6A \\ b = 6B \end{cases}$ con $(A : B) \star^1 = 1$

$$d = (2 \cdot 6A + 6B : 3 \cdot 6A - 2 \cdot 6B) = (6 \cdot (2A + B) : 6 \cdot (3A - 2B)) = 6 \cdot \underbrace{(2A + B : 3A - 2B)}_D$$

$$\rightarrow d \star^2 = 6D \xrightarrow[\text{comunes}]{\text{busco divisores}} \left\{ \begin{array}{l} D \mid 2A + B \\ D \mid 3A - 2B \end{array} \right\} \xrightarrow[\dots]{\text{operaciones}} \left\{ \begin{array}{l} D \mid 7B \\ D \mid 7A \end{array} \right\} \Rightarrow D = (7A : 7B) = 7 \cdot (A : B) \star^1 = 7$$

Por lo tanto $D \in \mathcal{D}_+(7) = \{1, 7\}$, pero yo quiero encontrar ejemplos de a y b :

$$\star^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d = 6 \cdot 7 = 42 \left\{ \begin{array}{l} \text{Si: } A = 2 \rightarrow a = 12 \\ \quad B = 3 \rightarrow b = 18 \\ (7 : 0) \Rightarrow D = 7 \rightarrow d = (42 : 0) = \underbrace{42}_{6 \cdot D} \end{array} \right. \\ \\ d = 6 \cdot 1 = 6 \left\{ \begin{array}{l} \text{Si: } A = 0 \rightarrow a = 0 \\ \quad B = 1 \rightarrow b = 6 \\ (1 : -2) \Rightarrow D = 1 \rightarrow d = (6 : -12) = \underbrace{6}_{6 \cdot D} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

🔥7. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $32a \equiv 17 \pmod{9}$. Calcular $(a^3 + 4a + 1 : a^2 + 2)$

Simplifico un poco:

$$32a \equiv 17 \pmod{9} \Leftrightarrow 5a \equiv 8 \pmod{9} \xLeftrightarrow[(\Leftarrow)2 \perp 9]{\times 2} a \equiv 7 \pmod{9} \star^1 \quad \checkmark$$

Simplifico la expresion del MCD con euclides:

$$\begin{array}{r} a^3 + 4a + 1 \mid a^2 + 2 \\ -a^3 - 2a \quad \mid a \\ \hline 2a + 1 \end{array}$$

Entonces puedo escribir:

$$d = (a^3 + 4a + 1 : a^2 + 2) = (a^2 + 2 : 2a + 1)$$

Busco potenciales d :

$$\left\{ \begin{array}{l} d \mid a^2 + 2 \\ d \mid 2a + 1 \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{2F_1 - aF_2} \left\{ \begin{array}{l} d \mid -a + 4 \\ d \mid 2a + 1 \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{2F_1 + F_2} \left\{ \begin{array}{l} d \mid -a + 4 \\ d \mid 9 \end{array} \right\}$$

Por lo tanto la versión más simple quedó en: $d = (-a + 4 : 9)$. Posibles $d : \{1, 3, 9\}$ \checkmark

Hago tabla de restos 9 y 3, para ver si las expresiones $(a^2 + 2 : 2a + 1)$ son divisibles por mis potenciales d .

Tabla de restos para $d = 9$:

$r_9(a)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$r_9(-a + 4)$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Entonces los a que cumplen $a \equiv 4 \pmod{9}$, son candidatos para obtener d .

Tabla de restos para $d = 3$:

$r_3(a)$	0	1	2
$r_3(-a + 4)$	2	0	2

Entonces los a que cumplen $a \equiv 1 \pmod{3}$, también son candidatos para obtener d .

Estos resultados deben cumplir la condición $\star^1 a \equiv 7 \pmod{9}$ como se pide en el enunciado, lo cual no es compatible con el resultado de la tabla de r_9 , pero sí con la tabla r_3 . Notar que: $a = 9k + 7 \stackrel{(3)}{\equiv} 1$.

Finalmente el MCD con $a \in \mathbb{Z}$ que cumplan que $32a \equiv 17 \pmod{9}$

$$(a^3 + 4a + 1 : a^2 + 2) = 3 \quad \checkmark$$

🔥8. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ con $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$

a) Probar que $a_{n+6} = a_n$

b) Calcular $\sum_{k=0}^{255} a_k$

(a) Por inducción:

$$p(n) : a_{n+6} = a_n \quad \forall n \geq \mathbb{N}_0$$

Primero notar que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2 \star^1 \\ a_3 \stackrel{\text{def}}{=} -1 \\ a_4 \stackrel{\text{def}}{=} -3 \\ a_5 \stackrel{\text{def}}{=} -2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_6 \stackrel{\text{def}}{=} 1 \\ a_7 \stackrel{\text{def}}{=} 3 \\ a_8 \stackrel{\text{def}}{=} 2 \star^1 \\ a_9 \stackrel{\text{def}}{=} -1 \\ a_{10} \stackrel{\text{def}}{=} -3 \\ a_{11} \stackrel{\text{def}}{=} -2 \end{array} \right\}$$

Se ve que tiene un período de 6 elementos.

$$\text{Caso Base: } p(2) : a_8 \stackrel{?}{=} a_2 \quad \checkmark$$

Paso inductivo: Asumo que

$$p(k) : \underbrace{a_{k+6} = a_k}_{\text{hipótesis inductiva}} \text{ para algún } k \geq \mathbb{N}_{\geq 2}$$

entonces quiero probar que,

$$p(k+1) : a_{k+1+6} = a_{k+1}$$

también sea verdadera.

Parto desde $p(k+1)$

$$a_{k+7} \stackrel{\text{def}}{=} a_{k+6} - a_{k+5} \stackrel{\text{HI}}{=} a_k - a_{k+5} \stackrel{\text{def}}{=} a_k - (a_k + a_{k+4}) = -a_{k+4} \Rightarrow a_{k+7} = -a_{k+4} \quad \checkmark$$

Ahora uso la definición de manera sucesiva:

$$a_{k+7} = -a_{k+4} \stackrel{\text{def}}{=} -(a_{k+3} - a_{k+2}) \stackrel{\text{def}}{=} -(a_{k+2} - a_{k+1} - a_{k+2}) = a_{k+1} \Rightarrow a_{k+7} = a_{k+1} \quad \checkmark$$

Como $p(2), p(3), p(4), p(5), p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas por el principio de inducción $p(n)$ también es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$(b) \sum_{k=0}^{255} a_k = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}_{=0} + \underbrace{a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}}_{=0} + \cdots + a_{252} + a_{253} + a_{254} + a_{255}$$

En la sumatoria hay 256 términos. $256 = 42 \cdot 6 + 4$ por lo tanto van a haber 42 bloques que dan 0 y sobreviven los últimos 4 términos. $\sum_{k=0}^{255} a_k = \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{42 \text{ ceros}} + a_{252} + a_{253} + a_{254} + a_{255} =$

$$\cancel{a_{252}} + a_{253} + a_{254} + \cancel{a_{255}} = a_{253} + a_{254} = 5$$

$$\text{Donde usé que: } a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \bmod 6 = 0 \\ 3 & \text{si } n \bmod 6 = 1 \\ 2 & \text{si } n \bmod 6 = 2 \\ -1 & \text{si } n \bmod 6 = 3 \\ -3 & \text{si } n \bmod 6 = 4 \\ -2 & \text{si } n \bmod 6 = 5 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{255} a_k = 5} \quad \checkmark$$

🔥9. Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ que cumplen que

$$\frac{2a-1}{5} - \frac{a-1}{2a-3} \in \mathbb{Z}.$$

Busco una fracción. Para que esa fracción *en* \mathbb{Z} es necesario que el denominador divida al numerador. Fin.

$$\frac{2a-1}{5} - \frac{a-1}{2a-3} = \frac{4a^2 - 13a + 8}{10a - 15} \quad \checkmark$$

$$\star^1 \left\{ \begin{array}{l} 10a - 15 \mid 4a^2 - 13a + 8 \\ 10a - 15 \mid 10a - 15 \end{array} \right. \xrightarrow[\text{varias}]{\text{operaciones}} \left\{ \begin{array}{l} 10a - 15 \mid -25 \star^2 \\ 10a - 15 \mid 10a - 15 \end{array} \right.$$

Para que ocurra \star^1 , debe ocurrir \star^2 .

$$10a - 15 \mid -25 \iff 10a - 25 \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 25\} \star^3 \text{ para algún } a \in \mathbb{Z}. \quad \checkmark$$

De paso observo que $|10a - 25| \leq 25$. Busco a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Caso: } d = 10a - 15 = 1 & \iff a = \frac{8}{5} \quad \text{🚫} \\ \text{Caso: } d = 10a - 15 = -1 & \iff a = \frac{8}{5} \quad \text{🚫} \\ \text{Caso: } d = 10a - 15 = 5 & \iff a = 2 \quad \checkmark \\ \text{Caso: } d = 10a - 15 = -5 & \iff a = 1 \quad \checkmark \\ \text{Caso: } d = 10a - 15 = 25 & \iff a = 4 \quad \checkmark \\ \text{Caso: } d = 10a - 15 = -25 & \iff a = -1 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Los valores de $a \in \mathbb{Z}$ que cumplen \star^2 son $\{-1, 1, 2, 4\}$. Voy a evaluar y así encontrar para cual de ellos se cumple \star^1 , es decir que el numerador sea un múltiplo del denominador para el valor de a usado.

$$\begin{array}{llll} d = 5 & a = 2 & \Rightarrow & 4 \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 + 8 = -2 \quad \rightarrow \quad 5 \nmid -2 \quad \text{🚫} \\ d = -5 & a = 1 & \Rightarrow & 4 \cdot 1^2 - 13 \cdot 1 + 8 = 1 \quad \rightarrow \quad -5 \nmid 1 \quad \text{🚫} \\ d = 25 & a = 4 & \Rightarrow & 4 \cdot 4^2 - 13 \cdot 4 + 8 = 4 \quad \rightarrow \quad 25 \nmid 4 \quad \text{🚫} \\ d = -25 & a = -1 & \Rightarrow & 4 \cdot (-1)^2 - 13 \cdot (-1) + 8 = 25 \quad \rightarrow \quad -25 \mid 25 \quad \checkmark \end{array}$$

El único valor de $a \in \mathbb{Z}$ que cumple lo pedido es $\boxed{a = -1}$

Notas extras sobre el ejercicio:

Para $a = -1$ se obtiene $\frac{2a-1}{5} - \frac{a-1}{2a-3} = -1$. Más aún, si hubiese encarado el ejercicio con tablas de restos para ver si lo de arriba es divisible por los divisores en \star^3 , calcularía:

$$r_5(4a^2 - 13a + 8) \quad \text{y} \quad r_{25}(4a^2 - 13a + 8)$$

$$r_5(4a^2 - 13a + 8) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 3 \pmod{5} \\ a \equiv 4 \equiv -1 \pmod{5} \end{array} \right. \quad \text{y} \quad r_{25}(4a^2 - 13a + 8) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 23 \pmod{25} \\ a \equiv 24 \equiv -1 \pmod{25} \end{array} \right.$$

Se puede ver también así que el único valor de $a \in \mathbb{Z}$, que cumple \star^1 es $a = -1$

🔥10. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión dada por recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 30, \\ a_2 = 16, \\ a_{n+2} = 24a_{n+1} + 65^n a_n + 96n^4 \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Probar que $a_n \equiv 3^n - 5^n \pmod{32}$, $\forall n \geq 1$.

Ejercicio intimidante a primera vista. Acomodemos un poco el enunciado así hacemos inducción.

Estoy buscando el módulo 32, a_{n+2} queda más amigable: $\star^1 a_{n+2} \stackrel{(32)}{\equiv} 24a_{n+1} + a_n \quad \checkmark$

Inducción:

$$p(n) : a_n \equiv 3^n - 5^n \pmod{32} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Casos base:

$$\begin{cases} p(1) : a_1 \equiv 3 - 5 \pmod{32} & \iff a_1 \equiv 30 \pmod{32} & \checkmark & p(1) \text{ resultó verdadera.} \\ p(2) : a_2 \equiv 3^2 - 5^2 \pmod{32} & \iff a_2 \equiv 16 \pmod{32} & \checkmark & p(2) \text{ resultó verdadera.} \end{cases}$$

Pasos inductivos:

Para algún $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} p(k) : \overbrace{a_k \equiv 3^k - 5^k \pmod{32}}^{\text{hipótesis inductiva}} & \text{Se asume verdadera.} \\ p(k+1) : \overbrace{a_{k+1} \equiv 3^{k+1} - 5^{k+1} \pmod{32}}^{\text{también hipótesis inductiva}} & \text{También se asume verdadera.} \end{cases}$$

Y queremos probar entonces que:

$$p(k+2) : a_{k+2} \equiv 3^{k+2} - 5^{k+2} \pmod{32}$$

Arranco con la definición de la sucesión que se cocinó un poco en \star^1 :

$$a_{k+2} \stackrel{\text{def}}{=} 24a_{k+1} + 65^k a_k + 96k^4 \stackrel{(32)}{\equiv} 24(\overbrace{3^{k+1} - 5^{k+1}}^{HI}) + \overbrace{3^k - 5^k}^{!!} \stackrel{!!}{=} 73 \cdot 3^k - 121 \cdot 5^k \stackrel{(32)}{\equiv} 9 \cdot 3^k - 25 \cdot 5^k = 3^{k+2} - 5^{k+2} \checkmark$$

Si te quedaste picando en $!!$, seguí mirando ese paso, porque son cuentas que tenés que poder *encontrar* mirando fijo el tiempo que sea necesario. Por mi parte 🍷.

Y así fue como comprobamos que el enunciado ladraba pero no mordía.

Como $p(1)$, $p(2)$, $p(k)$, $p(k+1)$ y $p(k+2)$ son verdaderas, por el principio de inducción también lo será $p(n) \in \mathbb{N}$.

🔥11. Caracterizar, para **cada** $a \in \mathbb{Z}$, el valor de $(a^3 + 31 : a^2 - a + 1)$.

😬... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow 📩, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow 📄.

🔥12. Determinar para cada par $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $(a : b) = 7$ el valor de

$$(a^2 b^4 : 7^5(-a + b)).$$

Coprimizar:

$$d = (a^2b^4 : 7^5(-a+b)) \xleftrightarrow[b=7B]{a=7A} 7^6 \cdot (A^2B^4 : B-A) \Leftrightarrow d = 7^6 \cdot D$$

$$\begin{cases} D \mid A^2B^4 \\ D \mid B-A \xLeftrightarrow{\text{def}} B \equiv A \pmod{D} \star^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D \mid A^2B^4 \xLeftrightarrow{\star^1} \boxed{B^6 \equiv 0 \pmod{D}} \\ \text{y también} \\ D \mid A^2B^4 \xLeftrightarrow{\star^1} \boxed{A^6 \equiv 0 \pmod{D}} \end{cases}$$

El resultado dice que $D \mid A^6$ y que $D \mid B^6$ lo cual está complicado porque A y B son coprimos, por lo tanto A^6 y B^6 también y $(A^6 : B^6) \stackrel{\star^2}{=} 1 = D$.


\star^2 la factorización en primos lo muestra, mismos factores elevados a la 6, no puede cambiar la coprimisimilitubilidad.

Creo que hay que justificar con algo más, pero no sé, con algo de primos? Bueh, algo así:

Si $D \mid A^6$ entonces la *descomposición en primos* de $D = p_1^{i_d} \cdots p_n^{j_d}$ tiene que tener solo factores de la *descomposición en primos* de $A^6 = p_1^{i_d} \cdots p_n^{j_d} \cdot p_{n+1}^{k_d} \cdots p_m^{l_d}$ con los exponentes de los factores de $D (i_d, j_d, \dots)$, menores o iguales a los exponentes de $A^6 (i, j, \dots)$ de manera que al dividir:

$$\frac{A^6}{D} = \frac{p_1^{i_d} \cdots p_n^{j_d} \cdot p_{n+1}^{k_d} \cdots p_m^{l_d}}{p_1^{i_d} \cdots p_n^{j_d} \cdot p_{n+1}^{k_d} \cdots p_m^{l_d}} = \frac{\overbrace{p_1^{i_d - i_d} \cdots p_n^{j_d - j_d}}^{0 \leq} \cdot \overbrace{p_{n+1}^{k_d - k_d} \cdots p_m^{l_d - l_d}}^{0 \leq}}{1},$$

es decir que se cancele todo de manera que quede un **1** en el denominador. Eso es que $D \mid A^6$ ni más ni menos.

Y sí, *muy rico todo*, pero esa cantinela es la misma para $D \mid B^6$, **pero** la *descomposición en primos* de B^6 tiene los p_i **distintos** a los de A^6 , porque $i(A^6 : B^6) = 1!$ y ahí llegamos al absurdo. D no puede dividir a ambos a la vez, **porque son coprimos** , a menos que $D = 1$ ✓.

$$D = 1 \Rightarrow \boxed{d = 7^6}, \text{ para cada } (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (a : b) = 7$$