

Práctica 7 de álgebra 1

Comunidad algebraica

última compilacion: 06/07/2024

Un poco de teoría

- *Operaciones:*

$+$: Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ y $g = \sum_{i=0}^n b_i X^i$

$$\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

\cdot : Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ y $g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$

$$\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \in \mathbb{K}[X]$$

- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo $\rightarrow f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h, \forall f, g, h \in \mathbb{K}[X]$
- *Algoritmo de división:* $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos q y $R \in \mathbb{K}[X]$ tal que $f = q \cdot g + R$ con $\text{gr}(R) < \text{gr}(g)$ o $R = 0$
- α es raíz de $f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$
- *Máximo común divisor:* Polinomio mónico de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.

$$- (f : g) \mid f \text{ y } (f : g) \mid g$$

$$- f = (f : g) \cdot k_f \text{ y } g = (f : g) \cdot k_g \text{ con } k_f \text{ y } k_g \text{ en } \mathbb{K}[X]$$

$$- \text{Dos polinomios son coprimos si } (f : g) = 1 \iff f \neq g$$

- *Raíces múltiples:*

Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se dice que:

$$- \alpha \text{ es raíz múltiple de } f \iff f = (x - \alpha)^2 q \text{ para algún } q \in \mathbb{K}[X]$$

$$- \alpha \text{ es raíz simple de } f \iff x - \alpha \mid f \text{ en } \mathbb{K}[X], \text{ pero } (X - \alpha)^2 \nmid f \text{ en } \mathbb{K}[X] \iff f = (X - \alpha)q \text{ para algún } q \in \mathbb{K}[X] \text{ tal que } q(\alpha) \neq 0.$$

$$- \text{Sea } m \in \mathbb{N}_0. \text{ Se dice que } \alpha \text{ es raíz de multiplicidad (exactamente) } m \text{ de } f, \text{ y se nota } \text{mult}(\alpha; f) = m \iff (X - \alpha)^m \mid f, \text{ pero } (x - \alpha)^{m+1} \nmid f.$$

$$\text{O equivalentemente, } f = (X - \alpha)^m q \text{ con } q \in \mathbb{K}[X], \text{ pero } q(\alpha) \neq 0$$

$$- \text{Sea } f \in \mathbb{K}[X] \text{ no nulo } \text{mult}(\alpha; f) \leq \text{gr}(f):$$

$$- \text{Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ no ambos nulos, y } \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow f(\alpha) = 0 \iff (f : g)(\alpha) = 0$$

- Vale que α es raíz múltiple de $f \iff f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) = 0 \iff \alpha$ es raíz de $(f : f'), X - \alpha \mid (f : f')$

$$\begin{aligned}
- \text{mult}(\alpha, f) = m &\iff f(\alpha) = 0 \text{ y } \text{mult}(\alpha; f') = m - 1 \\
- \text{mult}(\alpha; f) = m &\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{mult}(\alpha; f) \geq m \\ \text{mult}(\alpha; f) = m \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{array}
\end{aligned}$$

Cantidad de raíces:

—

Ejercicios de la guía:

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

- i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$,
 - ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$,
 - iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$,
-

i) *coeficiente principal:* 4^{77}
grado: $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:* $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$
grado: 28

iii) *coeficiente principal:* $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4}_f + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_g$

Cuando sumo me queda: $\text{cp}(f^4) - \text{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0 \Rightarrow \text{gr}(f^4 + g) < 20$

\rightarrow Calculo el $\text{cp}(f^4 + g)$ con $\text{gr}(f^4 + g) = 19$.

Laburo a f:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{fórmula de } f \cdot g]{\text{para usar}} (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \\ f^2 \cdot f^2 = \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \star^2 \\ \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \xrightarrow[\text{el término con } k=19]{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \stackrel{\star^1}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} \\ \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{b_{10} \text{ sale a}} b_{10} = (-3)^2 = 9 \\ \begin{array}{l} a_9 \text{ no tan fácil, volver} \\ \text{a usar } \sum f \cdot g \text{ en } k=9 \end{array} f \cdot f = \sum_{k=0}^{10} \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow{k=9} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \stackrel{\star^3}{=} c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot c_4 \cdot d_5 \\ \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{d_5 \text{ sale a}} d_5 = -3 \\ \xrightarrow[\text{ojímetro}]{c_4 \text{ sale a}} c_4 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a_9 = -6 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{cp}(f^4) = 2 \cdot (-6) \cdot (9) = -108 \\ \text{cp}(g) = 19 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\text{cp}(f^4 + g) = -89} \quad \checkmark$$

\star^1 : Sabemos que el $\text{gr}(f^4) = 20 \Rightarrow \text{gr}(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \leq 10$

solo puede ocurrir *cuando los exponentes* $\left\{ \begin{array}{c} i = 10, j = 9 \\ \vee \\ i = 9, j = 10 \end{array} \right\}$

★²: porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

★³: Idem ★¹ para el polinomio f
grado: 19

2. Hacer!

3. Hacer!

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

- i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$ y $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,
- ii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$ y $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,
- iii) $f = X^n - 1$ y $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

$$\begin{array}{r}
 \text{i) } \begin{array}{r} 5X^4 + 2X^3 + 4 \\ - 5X^4 - 10X^2 \\ \hline 2X^3 - 10X^2 - X \\ - 2X^3 - 4X \\ \hline - 10X^2 - 5X + 4 \\ 10X^2 + 20 \\ \hline - 5X + 24 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} X^2 + 2 \\ 5X^2 + 2X - 10 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

$$\begin{array}{r}
 \text{ii) } \begin{array}{r} 4X^4 + X^3 \\ - 4X^4 - 2X^2 \\ \hline X^3 - 2X^2 \\ - X^3 - \frac{1}{2}X \\ \hline - 2X^2 - \frac{1}{2}X - 4 \\ 2X^2 \phantom{- \frac{1}{2}X} + 1 \\ \hline - \frac{1}{2}X - 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2X^2 + 1 \\ 2X^2 + \frac{1}{2}X - 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$

$$\text{En } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2 + 1) \cdot \underbrace{(2X^2 + 4X + 6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X + 4)}_{r[X]}$$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división asoma la idea de que:

$$X^n - 1 = (X - 1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} X^j}_{q[X]} + \underbrace{0}_{r[X]}, \quad (\text{que es la geométrica con } X \neq 1)$$

$$\text{Inducción: Quiero probar que } p(n) : X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Caso base: } p(\textcolor{violet}{1}) : X^{\textcolor{violet}{1}} - 1 = (X - 1) \underbrace{\sum_{j=0}^{\textcolor{violet}{1}-1} X^j}_{X^0=1} \Rightarrow p(\textcolor{violet}{1}) \text{ es Verdadero} \quad \checkmark$$

Paso inductivo:

$$\underbrace{p(k) : X^k - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j \text{ es Verdadera}}_{HI} \stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1) : X^{k+1} - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j \text{ es Verdadera}$$

$$(X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j = (X - 1) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\textcolor{blue}{k}-1} X^j + X^{\textcolor{blue}{k}} \right) = (X - 1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI} + (X - 1) \cdot X^k = \textcolor{green}{X^k} - \textcolor{green}{1} + X^{k+1} - X^k =$$

$$X^{k+1} - 1 \quad \checkmark$$

Dado que $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

- i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$,
- ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$,
- iii) El resto de la división de $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

i) Haciendo la division de $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = (X - a + 2)(X^2 + aX + 1) + \underbrace{(a^2 - 2a + 1)X + a - 1}_{\text{resto}}$$

Así, para que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$ tiene que ocurrir que el resto sea 0.
O sea,

$$\begin{aligned}
 X^2 + aX + 1 \mid X^3 + 2X^2 + 2X + 1 &\iff (a^2 - 2a + 1)X + a - 1 = 0 \\
 &\iff \begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a - 1 = 0 \iff a = 1$
- $a^2 - 2a + 1 = 0 \xrightarrow{a=1} 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \quad \checkmark$

Luego, el valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ es divisible por $X^2 + aX + 1$ es $\boxed{a = 1}$.

ii) **Hacer!**

iii) Haciendo la division de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1 = q(X^2 + aX + 1) + \underbrace{r}_{\text{resto}}$$

con $q = (X^3 - aX^2 + (a^2 - 4)X - a^3 + 5a - 1)$ y $r = (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2$.

Así,

$$\begin{aligned}
 r &= -8X + 4 \\
 \iff (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2 &= -8X + 4 \\
 \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases} &\iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0 \\ a^3 - 5a - 2 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a^3 - 5a - 2 = 0 \iff a(a^2 - 5) - 2 = 0$
Veo que $a = -2$ es solución, por lo que divido $a^3 - 5a - 2$ por $a + 2$ con Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -5 & -2 \\
 -2 & & -2 & 4 & 2 \\
 \hline
 & 1 & -2 & -1 & \boxed{0}
 \end{array}$$

Por lo que $a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a^2 - 2a - 1)$

Busco las raíces de $a^2 - 2a - 1$ con la fórmula resolvente:

$$\begin{aligned}
 a_{+,-} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} \\
 &= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \\
 &= 1 \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Por lo que $a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a - 1 + \sqrt{2})(a - 1 - \sqrt{2}) = 0 \iff \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 + \sqrt{2} \\ a = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

- $a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0$

Me fijo que valores de a obtenidos antes verifican:

- Si $a = -2 \Rightarrow (-2)^4 - 6(-2)^2 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0 \quad \checkmark$
- Si $a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^4 - 6(1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 10 = 10 + \sqrt{2} \neq 0$
- Si $a = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow (1 - \sqrt{2})^4 - 6(1 - \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2} + 10 = 10 - \sqrt{2} \neq 0$

Luego, el único valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que el resto de dividir a $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$ es $\boxed{a = -2}$

6. Definición: Sea K un cuerpo y sea $h \in \mathbb{K}[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in \mathbb{K}[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g \pmod{h}$.

- Probar que $\equiv \pmod{h}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{K}[X]$.
- Probar que si $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$ y $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$.
- Probar que si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Probar que r es el resto de la división de f por h si y solo si $f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ o $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*,

- *reflexiva*: Es f congruente a f módulo h ?
 $f \equiv f \pmod{h} \iff h \mid f - f = 0 \iff h \mid 0 \quad \checkmark$
- *simétrica*: Si $f \equiv g \pmod{h} \stackrel{?}{\iff} g \equiv f \pmod{h}$
 $f \equiv g \pmod{h} \iff h \mid f - g \iff h \mid -(g - f) \iff h \mid g - f \iff g \equiv f \pmod{h} \quad \checkmark$
- *transitiva*: Si $\begin{cases} f \equiv g \pmod{h} \\ g \equiv p \pmod{h} \end{cases} \stackrel{?}{\iff} f \equiv p \pmod{h}$.

$$\begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid g - p \end{cases} \xrightarrow[\rightarrow F_2]{F_1 + F_2} \begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid f - p \end{cases} \rightarrow f \equiv p \pmod{h} \quad \checkmark$$

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en $\mathbb{K}[X]$

ii) Si $\begin{cases} f_1 \equiv g_1 \pmod{h} \\ f_2 \equiv g_2 \pmod{h} \end{cases} \star^1$

$$f_1 \equiv g_1 \pmod{h} \iff h \mid f_1 - g_1 \Rightarrow h \mid f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2 \pmod{h} \stackrel{\star^1}{\iff} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$$

iii) *Inducción*: Quiero probar $p(n)$: Si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: $p(1)$: $f^1 \equiv g^1 \pmod{h} \star^2$ Verdadera \checkmark

Paso inductivo: $p(k) : \underbrace{f^k \equiv g^k (h)}_{HI}$ es verdadera $\stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1) : f^{k+1} \equiv g^{k+1} (h)$ ¿También lo es?

$$f^k \equiv g^k (h) \iff h \mid f^k - g^k \Rightarrow h \mid f \cdot (f^k - g^k) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^k (h) \stackrel{\star^2}{\iff} f^{k+1} \equiv g^{k+1} (h) \quad \checkmark$$

Finalmente $p(1), p(k), p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) **Hacer!**

7. Hallar el resto de la división de f por g para:

- i) $f = X^{353} - X - 1$ y $g = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$,
- ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$ y $g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$
- iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, y $g = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$,
- iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$, y $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ (Sugerencia ver 4. iii)).

$$i) \quad g \mid g \iff X^{31} - 2 \equiv 0 \quad (X^{31} - 2) \iff X^{31} \equiv 2 \quad (g)$$

$$f = X^{353} - X - 1 = \underbrace{(X^{31})^{11}}_{\equiv 2^{11}} X^{12} - X - 1 \stackrel{(g)}{\equiv} 2^{11} X^{12} - X - 1 \rightarrow \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} - 1}$$

$$ii) \quad g \mid g \iff X^6 + 1 \equiv 0 \quad (X^6 + 1) \iff X^6 \equiv -1 \quad (g)$$

$$f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166} X^4 + (X^6)^6 X^4 + (X^6)^3 X^2 + 1 \stackrel{(g)}{\equiv} X^4 + X^4 - X^2 + 1 = 2X^4 - X^2 + 1$$

$$\rightarrow \boxed{r_g(f) = 2X^4 - X^2 + 1}$$

$$\text{¿Qué onda en } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}? \rightarrow \begin{cases} \text{si } p = 2 \rightarrow \boxed{X^2 + 1} \\ \text{si } p > 2 \rightarrow \boxed{2X^4 + (p-1)X^2 + 1} \end{cases}$$

$$iii) \quad g \mid g \iff X^{100} - X + 1 \equiv 0 \quad (X^{100} - X + 1) \iff X^{100} \equiv X - 1 \quad (g)$$

$$f = X^{200} - 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 - 3X^{100}X + 2 \stackrel{(g)}{\equiv} (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2$$

$$\rightarrow \boxed{r_g(f) = (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2}$$

$$iv) \quad \text{Usando la sugerencia: Del ejercicio 4. iii) sale que } X^n - 1 = (X-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

$$\xrightarrow[\text{para el } g]{n=5} X^5 - 1 = (X-1) \underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_g \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)} \quad (g) \quad \checkmark$$

$$f = (X^5)^{603} X + 2(X^5)^{366} X^3 - (X^5)^{34} X^4 + (X^5)^{27} X^2 + 2X^4 - X^3 + 1$$

$$f \equiv \underbrace{X + 2X^3 - X^4 + X^2 + 2X^4 - X^3 + 1}_{=X^4+X^3+X^2+X+1=g} \quad (g) \iff \boxed{f \equiv 0 \quad (g)}$$

8. Hacer!

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:

- i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$, $g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$,
 ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X^3 + X$,
 iii) $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1$, $g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1$,
-

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 \\ - X^5 + X^4 - X \end{array} & \begin{array}{l} X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ \hline X + 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X + 2 \\ - X^4 + X^3 + X^2 - 1 \end{array} & \\ \hline 3X^3 - 5X^2 + X + 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Euclides}} (f : g) = (g : 3X^3 - 5X^2 + X + 1) \\ \xrightarrow[\text{en función de } g]{\text{escribo a } f} f = (X + 1) \cdot g + 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ - X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X \end{array} & \begin{array}{l} 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ \hline \frac{1}{3}X + \frac{2}{9} \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} \frac{2}{3}X^3 - \frac{4}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + 1 \\ - \frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9} \end{array} & \\ \hline \begin{array}{r} -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \end{array} & \\ \hline \begin{array}{r} 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ - 3X^3 - \frac{15}{2}X^2 + \frac{21}{2}X \end{array} & \begin{array}{l} -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\ \hline -\frac{27}{2}X + \frac{225}{4} \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} -\frac{25}{2}X^2 + \frac{23}{2}X + 1 \\ \frac{25}{2}X^2 + \frac{125}{4}X - \frac{175}{4} \end{array} & \\ \hline \begin{array}{r} \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \end{array} & \\ \hline \begin{array}{r} -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\ \frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X \end{array} & \begin{array}{l} \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \\ \hline -\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} -\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} \\ \frac{7}{9}X - \frac{7}{9} \end{array} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 &= (X^4 - X^3 - X^2 + 1) \cdot (X + 1) + (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \\ X^4 - X^3 - X^2 + 1 &= (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \cdot \left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \\ 3X^3 - 5X^2 + X + 1 &= \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{27}{2}X + \frac{225}{4}\right) + \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \\ -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} &= \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539}\right) + 0 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow (f : g) = X - 1$

$$\begin{aligned} \text{ii) } X^6 + X^4 + X^2 + 1 &= (X^3 + X) \cdot X^3 + (X^2 + 1) \\ X^3 + X &= (X^2 + 1) \cdot X + 0 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow (f : g) = X^2 + 1$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)$

iii) $\xrightarrow[\text{Euclides}]{\text{Haciendo}}$

$$\begin{aligned} 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1 &= (X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1) \cdot 2X + (X^4 + 2X + 1) \\ X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1 &= (X^4 + 2X + 1) \cdot (X - 2) + 3 \\ X^4 + 2X + 1 &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) + 0 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y *mónico* $\rightarrow (f : g) = 1$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow 1 = \frac{1}{3}g \cdot (2X^2 - 4X + 1) - \frac{1}{3}f \cdot (X - 2)$

10. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2, f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

Sea $P \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow$ el resto de dividir a P por $X - a$ es $P(a)$.

$f(X) = q(X) \cdot \underbrace{X^3 - 2X^2 - X + 2}_{g(X)} + r(X)$, con $g(X) = (X - 2) \cdot (X - 1) \cdot (X + 1)$ y $r(X) = a^2 + bX + c$, ya

$$\text{que el } \text{gr}(r) < \text{gr}(g) \xrightarrow{\text{evaluar}} \begin{cases} f(1) = -2 = q(1) \cdot \overset{0}{g(1)} + r(1) = -2 \\ f(2) = 1 = q(2) \cdot \overset{0}{g(2)} + r(2) = 1 \\ f(-1) = 0 = q(-1) \cdot \overset{0}{g(-1)} + r(-1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array} \right) \rightarrow \boxed{r(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{7}{3}}$$

11. Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$ en $\mathbb{Q}[X]$.

$$\begin{cases} f(X) = X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1 \\ g(X) = X \cdot (X - 1) \cdot (X + 1) \end{cases} \Rightarrow f = q(X) \cdot g(X) + r(X) \text{ con } \text{gr}(\underbrace{aX^2 + bX + c}_{r(X)}) \leq 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_{=0} + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_{=0} + r(1) = 3 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_{=0} + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 = \begin{cases} 2 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow[\text{ecuaciones de } r(X)]{\text{sistema de}} \left\{ \begin{array}{l} r(0) = c = 1 \\ r(1) = a + b + 1 = 3 \rightarrow a + b = 2 \\ r(-1) = a - b + 1 = \begin{cases} 2 \rightarrow a - b = 1 & n \text{ impar} \\ 1 \rightarrow a - b = 0 & n \text{ par} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[n]{\text{impar}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \rightarrow \boxed{r_{\text{impar}}(X) = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1} \quad \checkmark \\ \xrightarrow[n]{\text{par}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \boxed{r_{\text{par}}(X) = X^2 + X + 1} \quad \checkmark \end{array} \right.$$

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $f(X) = X^6 + X^3 - 2$.

Primera raíz: $f(\alpha_1 = 1) = 0 \rightarrow f(X) = q(X) \cdot (X - 1)$. Busco $q(X)$ con algoritmo de división.

$$\begin{array}{r}
 X^6 \\
 -X^6 + X^5 \\
 \hline
 X^5 \\
 -X^5 + X^4 \\
 \hline
 X^4 + X^3 \\
 -X^4 + X^3 \\
 \hline
 2X^3 \\
 -2X^3 + 2X^2 \\
 \hline
 2X^2 \\
 -2X^2 + 2X \\
 \hline
 2X - 2 \\
 -2X + 2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

El cociente $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ se puede factorizar en grupos como $q(X) = (X^2 + X + 1) \cdot (X^3 + 2)$. Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener $f \in \mathbb{C}[X]$ salen de esos dos polinomios.

$$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X^3+2=0 \xrightarrow[X=re^{i\theta}]{\text{exponencial}} \left\{ \begin{array}{l} r^3=2 \rightarrow r=\sqrt[3]{2} \\ 3\theta=\pi+\textcolor{violet}{k}\pi \rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3} \text{ con } k=0, 1, 2. \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_4=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt[3]{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \alpha_5=\sqrt[3]{2}e^{i\pi}=-\sqrt[3]{2} \\ \alpha_6=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}=\sqrt[3]{2}(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{array} \right.$$

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. Probar que $w + w^2 + w^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$

Voy a usar que si $w \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^6 w^j = 0 \quad (w \neq 1)$

Si $f(X) = X^2 + X + 2$ y $w + w^2 + w^4$ es raíz $\Rightarrow f(w + w^2 + w^4) = 0$

$$(w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8}_{=w} + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2 \cdot \sum_{j=0}^6 w^j = 0 \quad \checkmark$$

14.

i) Probar que si $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces $X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})]$.

ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

i) Voy a usar que si $w \in G_5 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^4 w^j = 0 & (w \neq 1) \quad \star^2 \\ w^k = w^{r_5(k)} \quad \star^1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} X^2 + X - 1 &= [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})] = \\ &= X^2 - (w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + \underbrace{(w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\star^1} = \\ &= X^2 - X(\underbrace{w^2 + w^{-2} + w + w^{-1}}_{\star^1}) + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2} = \\ &= X^2 - X(\underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2}) + \underbrace{-1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = X^2 - X(\underbrace{-1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0}) - 1 = \\ &= X^2 + X - 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

ii) Calculando las raíces a mano de $X^2 + X - 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Pero del resultado del inciso i) tengo que :

$$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow[\text{la factorización es}]{\text{sé que una raíz dada}} w + w^{-1} = w + \bar{w} = 2\text{Re}(w) = 2 \cdot \underbrace{\cos(\frac{2\pi}{5})}_{\cos \theta \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$$

15.

i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.

- ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz en común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

i) **Hacer!**

- ii) Busco el $(f : g)$:

$$\begin{aligned} X^4 + 3X - 2 &= (X^4 + 3X^3 - 3X + 1) \cdot 1 + (-3X^3 + 6X - 3) \\ X^4 + 3X^3 - 3X + 1 &= (-3X^3 + 6X - 3) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - 1\right) + (2X^2 + 2X - 2) \\ -3X^3 + 6X - 3 &= (2X^2 + 2X - 2) \cdot \left(-\frac{3}{2}X + \frac{3}{2}\right) + 0 \end{aligned}$$

$$(f : g) = X^2 + X - 1 \xrightarrow{\text{raíces}} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$X^4 + 3X - 2 = (X^2 + X - 1) \cdot (X^2 - X + 2) + 0$$

16. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

- i) $f = X^5 - 2X^3 + X$, $a = 1$,
 ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4$, $a = i$,
 iii) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1)$, $a = 2$,
 iv) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3$, $a = 2$.

- i) $f = X^5 - 2X^3 + X$, $a = 1$,

Todos casos de factorización:

$$f = X^5 - 2X^3 + X = X(X^4 - 2X^2 + 1) = X(X^2 - 1)^2 = X(X - 1)^2(X + 1)^2 =$$

La multiplicidad de $a = 1$ como raíz es 2.

- ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4$, $a = i$,

Si $a = i$ es raíz, entonces $-i$ también lo es en un polinomio $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{r|l} X^6 - 3X^4 & + 4 \\ - X^6 & - X^4 \\ \hline & - 4X^4 \\ & 4X^4 + 4X^2 \\ \hline & 4X^2 + 4 \\ & - 4X^2 - 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$f = (X^2 + 1)(X^4 - 4X^2 + 4) = (X^2 + 1)(X^2 - 2)^2 = (X^2 + 1)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 = (X - i)^1(X + i)^1(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 =$$

La multiplicidad de $a = i$ como raíz de f es 1.

$$\text{iii) } f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a=2, \\ f = (X-2)^3((X+2) + (X+1)) = (X-2)^3(2X+3)$$

La multiplicidad de $a=2$ como raíz de f es 3.

$$\text{iv) } f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3, \quad a=2, \\ f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3 = (X-2)^2(X-2)(X+2) - 4(X-2)^3 = \\ (X-2)^3(X+2-4) = (X-2)^4$$

La multiplicidad de $a=2$ como raíz de f es 4.

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene solo raíces simples en \mathbb{C} .

$$f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a \\ \xrightarrow{\text{derivo}} f' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} \xleftrightarrow{n>0} f' = n(n+1)X^{n-1}(X-1) \\ f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n > 1 \Rightarrow f'(\alpha=1) = 0 \text{ y } f'(\alpha=0) = 0 \\ n = 1 \Rightarrow f'(\alpha=1) = 0 \end{cases} \star^1$$

Para que las raíces α , de f no sean simples, es necesario que $f'(\alpha) = 0$. Por lo tanto, estudio solo los valores de raíces encontrados para la derivada. Si f ha de tener raíces dobles, estás deberían ser $\alpha = 1$ o $\alpha = 0$.

Entonces:

$$\begin{cases} f(\alpha=1) = a-1 \Rightarrow f(1) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \neq 1 \\ f(\alpha=0) = a \Rightarrow f(0) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$$

Si $a = 0 \wedge n = 1 \Rightarrow f$ tiene solo una raíz simple en 0.

Si $a \neq 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $a \neq 0 \wedge n > 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples.

seguramente hay una mejor forma de expresar la respuesta.

18. Controlar y Pasar

19. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en \mathbb{C} . Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

Si f tiene raíces múltiples $\alpha_k \Leftrightarrow f(\alpha_k) = f'(\alpha_k) = 0$, por lo tanto tanto comienzo buscando las raíces de f' para sacarme ese a de en medio.

$$f' = 20X^{19} + 80X^9 = 20X^9(X^{10} + 4) \Rightarrow f' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X^{10} = -4 \Leftrightarrow X = \sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi} \quad k \in \mathbb{Z}_{[0,9]} \end{cases}$$

Hay de momento 11 raíces de f' . Me interesa saber si son raíces de f :

$$f(0) = 2a \Rightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$f = (X^{10})^2 + 8X^{10} + 2a \Rightarrow f(\alpha = \textcolor{violet}{X}^{10} = \textcolor{violet}{-4}) = (\textcolor{violet}{-4})^2 + 8(\textcolor{violet}{-4}) + 2a = -16 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 8$$

Entonces:

$$\text{Si } a = 0 \Rightarrow f = X^{10}(X^{10} + 8)$$

$$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ o } X^{10} = -8, \text{ donde } \boxed{\mu(0; f) = 10} \text{ y } \boxed{\mu(\sqrt[10]{8}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}; f) = 1 \quad k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}.$$

11 raíces distintas.

$$\text{Si } a = 8 \Rightarrow f = X^{20} + 8X^{10} + 16 = (X^{10} + 4)^2$$

$$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X^{10} = -4, \text{ donde } \boxed{\mu(\sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}; f) = 2 \quad k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}.$$

10 raíces distintas.

20. Hacer!

21.

- i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.
- ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.

$$\begin{aligned} \text{i) } (X-1)^2 \mid f \quad \forall a \in \mathbb{C} &\Leftrightarrow 1 \text{ es por lo menos raíz doble de } f \Leftrightarrow f(1) = f'(1) = 0. \\ \left\{ \begin{array}{l} f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1 \\ f' = 6X^5 - 10X^4 + 4(1+a)X^3 - 6aX^2 + 2(1+a)X - 2 \end{array} \right. &\xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} \begin{array}{l} f(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \\ f'(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \end{array} \end{aligned}$$

Calculando $f(1)$ y $f'(1)$ se comprueba. ✓

$$\begin{aligned} \text{ii) } (X-1)^3 \mid f &\Leftrightarrow f''(1) = 0 \\ \Rightarrow f'' &= 30X^4 - 40X^3 + 12(1+a)X^2 - 12aX + 2(1+a) \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f''(1) = 2a \\ \Rightarrow f''(1) &= 0 \Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{(X-1)^3 \mid f \iff a = 0} \quad \checkmark$$

Observar que si $a \neq 0$, 1 es una raíz *doble* de f de otra forma es una raíz *por lo menos triple*.

22. Hacer!

23. Hacer!

24. Hacer!

25. Hacer!

26. Hacer!

27. Hacer!

28. Hacer!

29. Hacer!

30. Hacer!

31. Hacer!

32. Hacer!

33. Hacer!

34. Hacer!

35. Hacer!

36. Hacer!

37. Hacer!

38. Hacer!

39. Hacer!

Ejercicios extras:

1.

a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} > 0$ tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\frac{3\pi}{2}$

b) Para cada valor de \mathbf{c} hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

a) Si la raíz $\alpha = re^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) \Rightarrow f(r(-i)) = 0$

Voy a usar que: $\star^1 \left\{ \begin{array}{l} (-i)^2 = -1 \\ (-i)^3 = i \\ (-i)^4 = 1 \\ (-i)^5 = -i \\ (-i)^6 = -1 \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} f(r(-i)) &= (r(-i))^6 - 4(r(-i))^5 - (r(-i))^4 + 4^3 + 4(r(-i))^2 + 48(r(-i)) + \mathbf{c} = \\ -r^6 + 4r^5i - r^4 - 4r^3i - 4r^2 - 48ri + \mathbf{c} &= 0 \iff \begin{cases} \text{Re} : -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 \\ \text{Im} : r(4r^4 - 4r^2 - 48) = 0 \xrightarrow[r^2 = y \text{ y } r \in \mathbb{R}_{>0}]{\text{bicuadrática}} r^2 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto si $\mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 = (r^2)^3 + (r^2)^2 + 4r^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{c} = 48} \quad \checkmark$
con raíces $\pm\sqrt{3}i$ dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$

b) Debe ocurrir que $(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$

$$\begin{array}{r|l} X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48 & X^2 + 3 \\ -X^6 & \\ \hline & -3X^4 \\ -4X^5 - 4X^4 + 4X^3 & \\ \hline & 4X^5 + 12X^3 \\ 4X^5 & \\ \hline & -4X^4 + 16X^3 + 4X^2 \\ 4X^4 & \\ \hline & 16X^3 + 16X^2 + 48X \\ -16X^3 & \\ \hline & 16X^2 + 48 \\ -16X^2 & \\ \hline & 0 \end{array}$$

$f = (X^2 + 3) \underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_q$ como f tiene al menos una raíz doble puedo ver las raíces de la derivada de q :

$$q' = (4X^3 - 12X^2 - 8X + 16)' = 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 4) = 0 \xrightarrow[\pm 1, \pm 2, \pm 4]{\text{Posibles raíces, Gauss :}} q'(1) = 0, \text{ pero } g(\mathbf{1}) \neq 0 \Rightarrow f(1) \neq 0$$

$$\begin{array}{r}
\text{divido para} \\
\text{bajar grado}
\end{array}
\begin{array}{r}
X^3 - 3X^2 - 2X + 4 \mid X - 1 \\
\underline{-X^3 + X^2} \\
-2X^2 - 2X \\
\underline{2X^2 - 2X} \\
-4X + 4 \\
\underline{4X - 4} \\
0
\end{array}$$

$$g' = 4(X-1) \underbrace{(X^2 - 2X - 4)}_{=h} \xrightarrow[\text{de } h]{\text{busco raíces}} X^2 - 2X - 4 = 0 \iff \alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$h = (X - (1 + \sqrt{5})) \cdot (X - (1 - \sqrt{5})) = X^2 - 2X - 4$ Para calcular que $f(\alpha_1) = g(\alpha_1) = 0$ y comprobar que es una raíz doble, puedo hacer:

$$\begin{array}{r}
X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 \mid X^2 - 2X - 4 \\
\underline{-X^4 + 2X^3 + 4X^2} \\
-2X^3 + 16X \\
\underline{2X^3 - 4X^2 - 8X} \\
-4X^2 + 8X + 16 \\
\underline{4X^2 - 8X - 16} \\
0
\end{array}$$

$$h^2 = (X^2 - 2X - 4)^2 \rightarrow \text{no la vi venir}$$

factorizaciones:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Q}[X] & \rightarrow f = (X^2 + 3)(X^2 + 3)(X^2 - 2X - 4)^2 \\ \mathbb{R}[X] & \rightarrow f = (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))(X^2 - 2X - 4)^2 \\ \mathbb{C}[X] & \rightarrow f = (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))(X - 3i)^2(X + 3i)^2 \end{array} \right. \quad \checkmark$$

2. Factorizar el polinomio $P = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49$ como producto de irreducibles en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ sabiendo que $\sqrt{7}$ es una raíz múltiple.

Un polinomio con coeficientes racionales, y una raíz irracional $\alpha = \sqrt{7}$, tendrá también al *conjugado irracional*¹, $\bar{\alpha} = -\sqrt{7}$

Si agregamos la información de que $\sqrt{7}$ es *por lo menos* raíz doble, obtenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow (X^2 - 7) \mid f \\ \sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow (X^2 - 7)^2 = X^4 - 14X^2 + 49 \mid f \end{array} \right. \quad \checkmark$$

¹Estoy usando la misma notación para *conjugado racional* y *conjugado complejo*. ¿Está bien? No sé, no me importa mientras se entienda.

$$\begin{array}{r|l}
X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49 & X^4 - 14X^2 + 49 \\
-X^6 & + 14X^4 \\
\hline
-X^5 & + X^4 + 14X^3 - 14X^2 - 49X \\
X^5 & - 14X^3 + 49X \\
\hline
X^4 & - 14X^2 + 49 \\
-X^4 & + 14X^2 - 49 \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X^2 - X + 1) \xrightarrow{\text{resolvente}} \begin{cases} \alpha_{+,-} = \frac{1 \pm w}{2} \\ w^2 = -3 \end{cases} \\
\rightarrow f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$$

$$\begin{cases} \mathbb{Q}[X] \rightarrow f = (X^2 + 7)^2(X^2 - X + 1) \\ \mathbb{R}[X] \rightarrow f = (X + \sqrt{7})^2(X - \sqrt{7})^2(X^2 - X + 1) \\ \mathbb{C}[X] \rightarrow f = (X + \sqrt{7})^2(X - \sqrt{7})^2(X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{cases}$$

3. Hallar **todos** los polinomios **mónicos** $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

- i) $1 - \sqrt{2}$ es raíz de f ;
- ii) $X(X - 2)^2 \mid (f : f')$;
- iii) $(f : X^3 - 1) \neq 1$;
- iv) $f(-1) = 27$;

- i) Como $f \in \mathbb{Q}[X]$ si $\alpha_1 = 1 - \sqrt{2}$ es raíz entonces $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$ para que no haya coeficientes irracionales en el polinomio.

$$(X - (1 - \sqrt{2})) \cdot (X - (1 + \sqrt{2})) = X^2 - 2X - 1$$

Por lo tanto $X^2 - 2X - 1$ será un factor de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

- ii) Si $X(X - 2)^2 \mid (f : f') \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \text{ raíz simple de } f' \Rightarrow \text{ raíz doble de } f \\ \alpha_4 = 2 \text{ raíz simple de } f' \Rightarrow \text{ raíz doble de } f \end{cases}$ Por lo tanto $X^2(X - 2)^3$ serán factores de f .

- iii) Si $(f : X^3 - 1) \neq 1$ quiere decir que por lo menos alguna de las 3 raíces de:
 $X^3 - 1 = (X - 1) \cdot (X - (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (X - (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$ tiene que aparecer en la factorización de f .
 Pero parecido al ítem i) si tengo una raíz compleja, también necesito el conjugado complejo, para que no me queden coeficientes de f en complejos,
 $X^3 - 1 = (X - 1) \cdot (X^2 + X + 1)$, me quedaría con el *factor de menor grado* si eso no rompe otras condiciones.

Por lo tanto $(X - 1)$ o $(X^2 + X + 1)$ aparecerá en la factorización de f .

iv) $f(-1) = 27$. Hasta el momento:

$$\begin{cases} f_1 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X^2 + X + 1) \rightarrow f_1(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot 1 = -54 \\ f_2 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \rightarrow f_2(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot (-2) = 108 \end{cases}$$

, ninguno cumple la condición iv).

Para encontrar *un* polinomio que cumpla lo pedido tomaría el f_2 que tiene **menor grado** de los dos y lo multiplicaría por $(X - \frac{3}{4})$ de manera que $f = (X^2 - 2X - 1) \cdot X^2 \cdot (X - 2)^3 \cdot (X - 1) \cdot (X - \frac{3}{4}) \rightarrow \boxed{f(-1) = 27}$ así cumpliendo todas las condiciones.

4. Factorizar como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ al polinomio

$$f = X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15$$

sabiendo $(f : X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15) \neq 1$

$$\begin{aligned} X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 &= (X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \cdot (X + 3) + (-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30) \\ X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5 &= (-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30) \cdot \left(-\frac{1}{10}X + \frac{3}{10}\right) + (14X^2 - 14X + 14) \\ -10X^3 - 20X^2 + 20X - 30 &= (14X^2 - 14X + 14) \cdot \left(-\frac{5}{7}X - \frac{15}{7}\right) + 0 \end{aligned}$$

Hacer!