

Inducción, números naturales

1. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$
3. Inducción: Sea $H \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que H es un conjunto *inductivo* si se cumplen las dos condiciones siguiente:
 - $1 \in H$
 - $\forall x, x \in H \Rightarrow x+1 \in H$
4. Principio de inducción: Sea $p(n), n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales. Si p satisface
 - (Caso Base) $p(1)$ es Verdadera.
 - (Paso inductivo) $\forall h \in \mathbb{N}, p(h) \text{ Verdadera} \Rightarrow p(h+1) \text{ Verdadera}$, entonces $p(n)$ es Verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.
5. Principio de inducción *corrido*: Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $p(n), n \geq n_0$, una afirmación sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si p satisface:
 - (Caso Base) $p(n_0)$ es Verdadera.
 - (Paso inductivo) $\forall h \geq n_0, p(h) \text{ Verdadera} \Rightarrow p(h+1) \text{ Verdadera}$, entonces $p(n)$ es Verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. explicación de las torres de Hanoi.

- 1) $a_1 = 1$
- 2) $a_3 = 7$
- 3) $a_4 = 15$
- 4) $a_9 = a_9 + 1 + a_9 = 2a_9 + 1$

$$\rightarrow \boxed{a_n + 1 = 2a_n + 1}$$

2. Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como las torres de Hanoi $a_1 = 1 \wedge a_{n+1} = 2a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$, es una sucesión definida por recurrencia.
3. El patrón de las torres de Hanoi parece ser $\underbrace{a_n = 2^n - 1}_{\text{término general}} \forall n \in \mathbb{N}$. Esto puedo probarse por inducción.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Proposición: } p(n) : a_n = 2^n - 1 \\ \text{Caso Base: } p(1) \text{ es verdadero? } a_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } p(h) \text{ es verdadero} \Rightarrow p(h+1) \text{ V?} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{HI : } a_h = 2^h - 1 \\ \text{QPQ : } a_{h+1} = 2^{h+1} \end{array} \right. \rightarrow \text{cuentas y queda que } \boxed{p(n) \text{ es V, } \forall n \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$$

4. \sum es una def por recurrencia $\rightarrow \sum_{k=1}^1 a_k = a_1 \wedge \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \dots \text{facil}$

Principio de inducción III: Sea $p(n)$ una proposición sobre \mathbb{N} . Si se cumple:

1. $p(1) \wedge p(2) \quad V$

2. $\forall h \in \mathbb{N}, p(h) \wedge p(h+1), V \Rightarrow p(h+2) \quad V$ (paso inductivo), entonces $p(n)$ es verdadera.

$$p(n) : a_n = 3^n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{caso base: } a_1 = 3, a_2 = 9 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } \forall h \in \mathbb{N}, p(h) \wedge p(h+1) \quad V \Rightarrow p(h+2) \quad V \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{HI: } a_h = 3^h \wedge a_{h+1} = 3^{h+1} \\ \text{Quiero probar que: } a_{h+2} = 3^{h+2} \\ \text{Usando la fórmula de recurrencia sale enseguida} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Principio de inducción IV Sea $p(n)$ una proposición sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si se cumple:

1. $p(n_0) \wedge p(n_0 + 1) \quad V$

2. $\forall h \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}, p(h+1) \wedge p(h+2) \quad V \Rightarrow p(h+2) \quad V$ (paso inductivo), entonces $p(n)$ es verdadera. $\forall n \geq n_0$

Sucesión de Fibonacci: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \geq 0$

Truco para sacar fórmulas a partir de Fibo.

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 = \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \tilde{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1 \wedge \tilde{\Phi}^2 = \tilde{\Phi} + 1$$

- defino sucesiones Φ^n que satisfacen la recurrencia de la sucesión de Fibonacci pero no sus condiciones iniciales.

- puedo formar una combineta lineal talque: $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (a\Phi^n + b\tilde{\Phi}^n)$ es la sucesión que satisface:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = a + b \\ c_1 = a\Phi + b\tilde{\Phi} \end{array} \right. \text{ y la recurrencia de Fibonacci.}$$

Resuelvo todo y llego a \square

Sucesione de Lucas: Generalizaciones de Fibonacci. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta \wedge a_{n+2} = \gamma a_{n+1} + \delta a_n, \forall n \geq 0, \text{ con } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ dados.}$$

Esto lo meto en la ecuación característica: $x^2 - \gamma x - \delta = 0$, necesito raíces distintas. Notar que $r^2 = \gamma r^1 + \delta$, y lo mismo es para \tilde{r} . Las sucesiones (r^n) y (\tilde{r}^n) satisfacen la recurrencia de Lucas, pero no las condiciones iniciales α y β . $c_n = (ar^n + b\tilde{r}^n)$, satisface Lucas, pero las condiciones iniciales son c_0 y c_1 o

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = \alpha \\ ra + \tilde{b} = \beta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ra + rb = r\alpha \\ ra + \tilde{r}b = \beta \end{array} \right. \text{ luego hago lo mismo con } \tilde{r} \text{ Como resultado: } a = \frac{\beta - \tilde{r}\alpha}{r - \tilde{r}}$$

Ejercicio fuera de la guía

Se cumple que: $\frac{(2n)!}{n!^2} \leq (n+1)!, \forall n \in \mathbb{N}$?

1. La proposición: $p(n) : \frac{(2n)!}{n!^2} \leq (n+1)!$

2. Caso base: $p(n=1)$ es Verdadera? $\xrightarrow[n=1]{\text{evalúo}} \frac{(2 \cdot 1)!}{1!^2} = 2 \leq (1+1)! \quad \checkmark$

3. Mi **HI** es *que vale* $\frac{(2h)!}{h!^2} \leq (h+1)!$

4. Quiero probar que $\frac{(2(h+1))!}{(h+1)!^2} \leq ((h+1)+1)! \xrightarrow{\text{acomodo}} \frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} \leq (h+2)!$

5. Hay que hacer cosas para poder meter la **HI** en las cuentas del punto anterior.

$$\text{Noto que: } \frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} = \frac{(2h+2) \cdot (2h+1) \cdot (2h)!}{(h+1)^2 \cdot h!^2} \stackrel{\text{HI}}{\leq} \frac{(2h+2) \cdot (2h+1)}{(h+1)^2} (h+1)! \leq (h+2)!$$

Probando esa última desigualdad se prueba lo buscado.

Ejercicio de la clase del 12/4

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ con
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

(a) Probar que $a_{n+6} = a_n$

Por inducción: $p(n) : a_{n+6} = a_n \quad \forall n \geq \mathbb{N}_0$ verdadera ?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Caso Base: Primero notar que,} \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2 \\ a_3 \stackrel{\text{def}}{=} -1 \\ a_4 \stackrel{\text{def}}{=} -3 \\ a_5 \stackrel{\text{def}}{=} -2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_6 \stackrel{\text{def}}{=} 1 \\ a_7 \stackrel{\text{def}}{=} 3 \\ a_8 \stackrel{\text{def}}{=} 2 \\ a_9 \stackrel{\text{def}}{=} -1 \\ a_{10} \stackrel{\text{def}}{=} -3 \\ a_{11} \stackrel{\text{def}}{=} -2 \end{array} \right\} \rightarrow \dots \text{ Se ve que tiene un período de 6 elementos.} \\ p(n=2) \text{ verdadera ?} \rightarrow a_8 \stackrel{?}{=} a_2 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo: Supongo } p(k) \text{ verdadera} \Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera ?} \\ \text{Hipótesis inductiva: Supongo } a_{k+6} = a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \text{ verdadera, quiero ver que } a_{k+7} = a_{k+1} \\ \textcolor{red}{a_{k+7}} \stackrel{\text{def}}{=} a_{k+6} - a_{k+5} \stackrel{\text{HI}}{=} a_k - a_{k+5} \stackrel{\text{def}}{=} a_k - \underbrace{(a_k + a_{k+4})}_{a_{k+5}} = -a_{k+4} \\ \rightarrow \textcolor{red}{a_{k+7}} = -a_{k+4} \stackrel{\text{def}}{=} -(a_{k+3} - a_{k+2}) \stackrel{\text{def}}{=} -(a_{k+2} - \textcolor{red}{a_{k+1}} - a_{k+2}) = \textcolor{red}{a_{k+1}} \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Como $p(0) \wedge p(1) \wedge \dots \wedge p(5)$ son verdaderas y $p(k)$ es verdadera así como $p(k+1)$ también lo es, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_0$

(b) Calcular $\sum_{k=0}^{255} a_k$

$$\sum_{k=0}^{255} a_k = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}_{=0} + \underbrace{a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}}_{=0} + \dots + a_{252} + a_{253} + a_{254} + a_{255}$$

En la sumatoria hay **256 términos**. $256 = 42 \cdot 6 + 4$ por lo tanto van a haber 42 bloques que dan 0 y sobreviven los últimos 4 términos. $\sum_{k=0}^{255} a_k = \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{42 \text{ ceros}} + a_{252} + a_{253} + a_{254} + a_{255} =$

$$\cancel{a_{252}} + a_{253} + a_{254} + \cancel{a_{255}} = a_{253} + a_{254} = 5$$

$$\text{Donde usé que: } a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \bmod 6 = 0 \\ 3 & \text{si } n \bmod 6 = 1 \\ 2 & \text{si } n \bmod 6 = 2 \\ -1 & \text{si } n \bmod 6 = 3 \\ -3 & \text{si } n \bmod 6 = 4 \\ -2 & \text{si } n \bmod 6 = 5 \end{cases} \rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{255} a_k = 5} \quad \checkmark$$

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por: $a_1 = 1 \wedge a_{n+1} = (\sqrt{a_n} - (n+1))^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Voy a encontrar la fórmula general.

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = (1-2)^2, a_3 = 4, a_4 = 4, a_5 = 9, \dots \\ a_n = \begin{cases} \left(\frac{n+2^2}{3}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \left(\frac{n^2}{3}\right) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \\ \rightarrow \text{Se muestra por inducción } \textcolor{red}{Hacer!} \end{cases}$$

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por: $a_1 = 3, a_2 = 9 \wedge a_{n+2} = a + n + 1 + 3a_n + 3^{3+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
Tengo que encontrar el término general de esta sucesión definida por recurrencia. $a_1 = 3, a_2 = 9. a_3 = a_2 + 3a_1 + 3^2 = 27 \rightarrow$ pinta ser $a_n = 3^n$.
Interesante que acá la HI dependería de muchos términos. Así que ahora viene una versión cambiada del principio de inducción.

Ejercicios de la guía

1. Hacer!

2. Hacer!

3. Calcular

i) $\sum_{i=1}^n (4i + 1)$ Hacer!

ii) $\sum_{i=6}^n 2(i - 5)$ Hacer!

4. Calcular

i) $\sum_{i=0}^n 2^i$
 $\sum_{i=0}^n 2^i \stackrel{q \neq 1}{=} \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

ii) $\sum_{i=1}^n q^i$
 $\sum_{i=1}^n q^i = -1 + 1 + \sum_{i=1}^n q^i = -1 + \sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} n + 1 - 1 = n & \text{si } q = 1 \\ \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - 1 = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$

iii) Hacer!

iv) Hacer!

5.

i) Hacer!

ii) $S = \underbrace{\frac{N(N+1)}{2}}_{\text{Gauss}} = \sum_1^N i \rightarrow \sum_1^n 2i - 1 = 2 \sum_1^n i - \sum_1^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2 \quad \checkmark$

$$\text{iii)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Primer caso } n = 1 \rightarrow \sum_1^1 2i - 1 = 1 = 1^2 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo } n = h \rightarrow \sum_1^k 2i - 1 = k^2 \quad \checkmark \Rightarrow \sum_1^{k+1} 2i - 1 \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \\ \sum_1^{k+1} 2i - 1 = \underbrace{\sum_1^k 2i - 1}_{\text{HI}} + \underbrace{2(k+1) - 1}_{k+1\text{-ésimo}} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \quad \checkmark \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2}$$

6. **Hacer!**

7.

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Primer caso } n = 1 \rightarrow \sum_1^1 (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^2 \cdot 1 = 1 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo} \left\{ \begin{array}{l} n = k \rightarrow \sum_1^k (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^{k+1} \frac{k(k+1)}{2} \\ \Rightarrow \\ n = k+1 \rightarrow \sum_1^{k+1} (-1)^{i+1} i^2 \stackrel{?}{=} (-1)^{(k+1)+1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ \rightarrow \sum_1^{k+1} (-1)^{i+1} i^2 = \underbrace{\sum_1^k (-1)^{i+1} i^2}_{\text{HI}} + \underbrace{(-1)^{k+2} (k+1)^2}_{k+1\text{-ésimo}} = \\ (-1)^{k+1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (-1)^2 (k+1)^2 \xrightarrow[\text{factor común}]{\text{acomodar}} (-1)^k (k+1) \left[-\frac{k}{2} + (k+1) \right] = \\ (-1)^k (k+1) \frac{(k+2)}{2} \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}}$$

ii) **Hacer!**

iii) **Hacer!**

$$\text{iv)} \prod_{i=1}^n (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primer caso } n = 1 \rightarrow \prod_{i=1}^1 (1 + a^{2^{i-1}}) = 1 + a^{2^0} = 1 + a = \frac{1-a^{2^1}}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1 + a \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo } n = k \rightarrow \prod_{i=1}^k (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^k}}{1-a} \Rightarrow n = k+1 \rightarrow \prod_{i=1}^{k+1} (1 + a^{2^{i-1}}) \stackrel{?}{=} \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a} \\ \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=1}^{k+1} (1 + a^{2^{i-1}}) = \underbrace{\prod_{i=1}^k (1 + a^{2^{i-1}})}_{\text{HI}} \cdot \underbrace{1 + a^{2^k}}_{k+1\text{-ésimo}} = \frac{1-a^{2^k}}{1-a} \cdot 1 + a^{2^k} \xrightarrow[\text{de cuadrados}]{\text{diferencia}} \frac{1-(a^{2^k})^2}{1-a} = \\ \frac{1-a^{2 \cdot 2^k}}{1-a} = \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a} \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{v)} \prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-3} = 2^n (1 - 2n)$$

En este ejercicio conviene abrir la productoria y acomodar los factores. Por inducción:

$$\left\{ \begin{array}{l}
p(n) : \prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n) \\
\text{Caso Base: } p(1) \text{ V?} \rightarrow \prod_{i=1}^1 \frac{1+i}{2i-3} = \frac{1+1}{2 \cdot 1 - 3} = 2^1(1-2 \cdot 1) = -2 \\
\text{Paso inductivo: Supongo } p(k) \text{ Verdadero} \xrightarrow[\text{que}]{\text{quiero ver}} p(k+1) \text{ Verdadero para algún } k \in \mathbb{N}. \\
\text{Hipótesis inductiva: Supongo } \prod_{i=1}^k \frac{k+i}{2i-3} = 2^k(1-2k), \text{ quiero ver que } \prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = 2^{k+1}(1-2(k+1)) \\
\left\{ \begin{array}{l}
\prod_{i=1}^k \frac{k+i}{2i-3} = \frac{k+1}{2 \cdot 1 - 3} \cdot \frac{k+2}{2 \cdot 2 - 3} \cdot \frac{k+3}{2 \cdot 3 - 3} \cdots \frac{2k}{2 \cdot k - 3} = 2^k(1-2k) \\
\prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = \frac{k+2}{2 \cdot 1 - 3} \cdot \frac{k+3}{2 \cdot 2 - 3} \cdots \frac{k+1+(k-1)}{2(k-1)-3} \cdot \frac{k+1+k}{2k-3} \cdot \frac{k+1+(k+1)}{2(k+1)-3} \\
\text{Masajear: multiplico por } 1 = \frac{k+1}{k+1} \rightarrow \frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 - 3} \cdot \frac{k+2}{2 \cdot 2 - 3} \cdot \frac{k+3}{2 \cdot 3 - 3} \cdots \frac{2k}{2k-3} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \frac{2k+2}{1} = \\
\text{corro los denominadores una fracción hacia } \leftarrow \frac{k+1}{2 \cdot 1 - 3} \cdot \frac{k+2}{2 \cdot 2 - 3} \cdot \frac{k+3}{2 \cdot 3 - 3} \cdots \frac{2k}{2k-3} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \frac{2k+2}{1} = \\
\text{acomodo para que HI} \rightarrow \underbrace{\frac{k+1}{2 \cdot 1 - 3} \cdot \frac{k+2}{2 \cdot 2 - 3} \cdot \frac{k+3}{2 \cdot 3 - 3} \cdots \frac{2k}{2k-3} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3}}_{\text{HI}} \cdot \frac{2k+2}{k+1} = \\
= 2^k(1-2k) \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \frac{2k+2}{k+1} \stackrel{\text{HI}}{=} 2^k \cancel{(1-2k)} \cdot \frac{2k+1}{(-1)(1-2k)} \cdot \frac{2(k+1)}{k+1} = 2^{k+1}(-1)(2k+1) = \\
= 2^{k+1}(1-2(k+1)) \quad \checkmark
\end{array} \right.
\end{array} \right.$$

Como $p(1)$ es verdadero y $p(k)$ es verdadero y $p(k+1)$ también lo es, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

8. Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=1}^n a^{i-1} b^{n-i}$. Deducir la fórmula de la serie geométrica: para todo $a \neq 1$, $\sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Primer paso: } n=1(a-b) \sum_{i=1}^1 a^{i-1} \cdot b^{1-1} = a-b = a^1 - b^1 \quad \checkmark \\
\text{Paso inductivo: } n=k \quad a^k - b^k = (a-b) \sum_{i=1}^k a^{i-1} \cdot b^{k-i} \Rightarrow a^{k+1} - b^{k+1} \stackrel{?}{=} (a-b) \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} \cdot b^{k+1-i} \\
\left\{ \begin{array}{l}
(a-b) \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} \cdot b^{k+1-i} = (a-b) \sum_{i=1}^k a^{i-1} \cdot \underbrace{b^{k+1-i}}_{b \cdot b^{k-i}} + \underbrace{(a-b)a^k \cdot b^{k+1-(k+1)}}_{k+1\text{-ésimo}} = \\
\underbrace{b \cdot (a-b) \sum_{i=1}^k a^{i-1} \cdot b^{k-i}}_{\text{HI}} + (a-b)a^k \stackrel{\text{HI}}{=} b \cdot a^k - b^k + (a-b)a^k = a^{k+1} - b^{k+1} \quad \checkmark
\end{array} \right.
\end{array} \right.$$

Para deducir la fórmula de la serie geométrica $b=1 \rightarrow (a-1) \sum_{i=1}^n a^{i-1} = a^n - 1 \rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l}
(a-1) \sum_{i=1}^n a^{i-1} = (a-1) \cdot (1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}) = a^n - 1 \xrightarrow[\text{divido por } (a-1) \text{ M.A.M.}]{\text{multiplico por } a \text{ y}} \\
\sum_{i=1}^n a^i = a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-a}{a-1} \xrightarrow[\text{M.A.M.}]{\text{sumo un } 1} \sum_{i=0}^n a^i = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^n-a}{a-1} + 1 \rightarrow \\
\boxed{\frac{a^n+1}{a-1} = \sum_{i=0}^n a^i}
\end{array} \right.$$

9. **Hacer!**

10. Hacer!

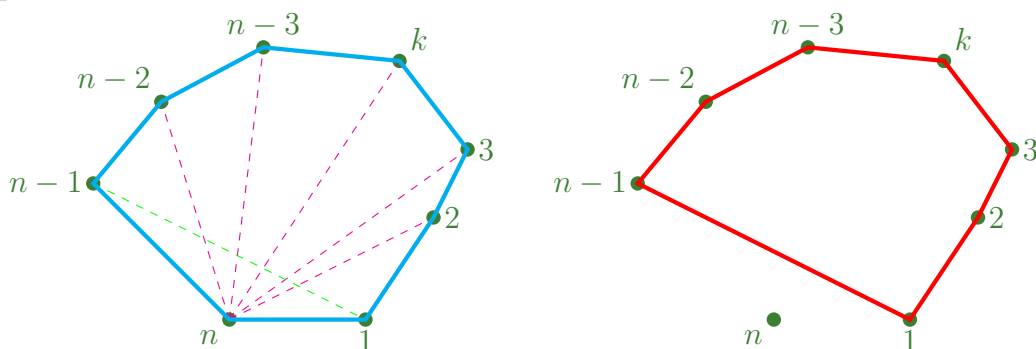
11. Hacer!

12. Hacer!

13. _____
Hacer!

14. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que:

- i) La cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.
Ejercicio donde hay que encontrar una fórmula a partir de algún método *creativo* para luego probar por inducción.



Se desprende del gráfico el siguiente razonamiento: En el polígono **cyan** de n lados voy a tener una cantidad de diagonales dada por la sucesión d_n . El polígono **rojo** me genera polígono que tiene un lado menos y un lado menos, cantidad que viene determinada por d_{n-1} . Las líneas punteadas son las diagonales de d_n que no estarán en d_{n-1} . Ahora voy a encontrar una relación entre ambas sucesiones. Al sacan un lado pierdo las **diagonales** desde 2 hasta $n-2$ que serían $n-3$ en total y además pierdo la **diagonal** que conectan el vértice 1 con el $n-1$: $d_n = d_{n-1} + 1 + n - 2 = d_{n-1} + n - 1 \rightarrow d_n = d_{n-1} + n - 1$

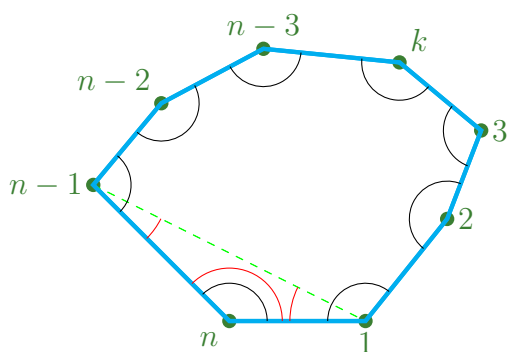
Ahora inducción:

$$p(n) : d_n = \frac{n(n-3)}{2} \quad \forall n \geq 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Caso Base: } p(3) \text{ verdadera?} \rightarrow \frac{3(3-3)}{2} = 0, \text{ lo cual es verdad para el triángulo. } \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } p(k) \text{ es verdadero para algún } k \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera?} \\ \text{Hipótesis Inductiva: } d_k = \frac{k(k-3)}{2} \Rightarrow d_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} \\ d = k+1 \stackrel{\text{def}}{=} d_k + k - 1 \stackrel{\text{HI}}{=} \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k-2)(k+1)}{2} \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Como $p(3) \wedge p(k) \wedge p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

- ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$.



En este caso estoy generando la suma de los ángulos internos de 2 polígonos, uno con α_n de n lados y otro con $n-1$, α_{n-1} . Es más claro en este caso que al sacarle un lado, estoy robando un triángulo que tiene como suma de sus ángulos internos π , entonces afirmo $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \pi$. Ahora pruebo por inducción lo pedido. $p(n) : \alpha_n = \pi(n-2) \forall n \geq 3$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Caso Base: } p(3) \text{ verdadera?} \rightarrow \pi(3-2) = \pi, \text{ lo cual es verdad para el triángulo. } \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } p(k) \text{ es verdadero para algún } k \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera?} \\ \text{Hipótesis Inductiva: } \alpha_k = \pi(k-2) \Rightarrow \alpha_{k+1} = \pi(k-1) \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{k+1} - \pi \\ \alpha_k \stackrel{\text{HI}}{=} \pi(k-2) \end{array} \right\} \rightarrow \alpha_{k+1} = \pi(k-2) + \pi = \pi(k-1) \quad \checkmark \end{array} \right.$

Como $p(3) \wedge p(k) \wedge p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

Recurrencia

15.

i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:

$$a_1 = 2 \text{ y } a_{n+1} = 2na_n + 2^{n+1}n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n n!$.

Hecho en cuaderno, pasar

ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:

$$a_1 = 0 \text{ y } a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

Hecho en cuaderno, pasar

16. Hallar la fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ _____

Hacer!

17. Hacer!