Práctica 7 de álgebra 1

Comunidad algebraica

last update: 25/06/2024

Definiciones y fórmulas útiles

- *Operaciones:*

  $+:$ Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i X^i$

  $\Rightarrow f + g = \sum\limits_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$

  $\cdot:$ Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j X^j$

  $\Rightarrow f \cdot g = \sum\limits_{k=0}^{n+m} (\sum\limits_{i+j=k} a_i \cdot b_j) X^k \in \mathbb{K}[X]$

- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo $\rightarrow f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h,\ \forall f,\ g,\ h \in \mathbb{K}[X]$

- *Algoritmo de división*: $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos q y $R \in \mathbb{K}[X]$ tal que $f = q \cdot g + R$ con $gr(R) < gr(f)$ o $R = 0$

- α es raíz de $f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$

- *Máximo común divisor:* Polinomio mónico de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.
  - $(f : g) \mid f$ y $(f : g) \mid g$
  - $f = (f : g) \cdot k_f$ y $g = (f : g) \cdot k_g$ con k_f y k_g en $\mathbb{K}[X]$
  - Dos polinomios son coprimos si $(f : g) = 1 \iff f \neq g$

- *Raíces múltiples:* $f \in \mathbb{K}[x], \alpha \in \mathbb{K}$ es raíz de f de multiplicidad $m \in \mathbb{N}_0$ si $(X-\alpha)^m \mid f$ y $(X-\alpha)^{m+1} \nmid f$. O sea, $f = (X-\alpha)^m \cdot \underbrace{q(\alpha)}_{\neq 0}$
  - Una raíz simple de f cumplirá que $(x-\alpha) \mid f$, pero $(x-\alpha)^2 \nmid f$

- Vale que α es raíz múltiple de $f \iff f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) = 0 \iff \alpha$ es raíz de $(f : f')$, $X - \alpha \mid (f : f')$
  - $\text{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0$ y $\text{mult}(()\alpha; f') = m - 1$
  - $\text{mult}(\alpha; f) = m \iff \begin{cases} \text{mult}(\alpha; f) \geq m & \begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)(\alpha)=0} \end{cases} \\ \text{mult}(\alpha; f) = m & \begin{cases} f^{m)(\alpha)\neq 0} \end{cases} \end{cases}$

Ejercicios dados en clase:

Ejercicios de la guía:

---

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$,

ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$,

iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$,

---

i) *coeficiente principal:* 4^{77}
grado: $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:* $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$
grado: 28

iii) *coeficiente principal:* $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)}_{f}{}^4 + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_{g}$

Cuando sumo me queda: $\text{cp}(f^4) - \text{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0 \Rightarrow gr(f^4 + g) < 20$
$\to$ Calculo el $\text{cp}(f^4 + g)$ con $\text{gr}(f^4 + g) = 19$.
Laburo a f:

$$\left\{\begin{array}{l}
\xrightarrow[\text{fórmula de } f\cdot g]{\text{para usar}} (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = (-3X^5 + 1X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \\
f^2 \cdot f^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \star^2 \\
\displaystyle\sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \xrightarrow[\text{el término con } k=19]{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \overset{\star^1}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \overset{\star^2}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} \\
\left\{\begin{array}{l}
\xrightarrow[\text{ojímetro}]{b_{10} \text{ sale a}} b_{10} = (-3)^2 = 9 \\
\xrightarrow[\text{a usar } \sum f\cdot g \text{ en } k=9]{a_9 \text{ no tan fácil, volver}} f \cdot f = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow{k=9} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \overset{\star^3}{=} c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4 \overset{\star^2}{=} 2 \cdot c_4 \cdot d_5
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\xrightarrow[\text{ojímetro}]{d_5 \text{ sale a}} d_5 = -3 \\
\xrightarrow[\text{ojímetro}]{c_4 \text{ sale a}} c_4 = 1
\end{array}\right\} \to a_9 = -6
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{cp}(f^4) = 2 \cdot (-6) \cdot (9) = -108 \\
\text{cp}(g) = 19
\end{array}\right\} \to \boxed{\text{cp}(f^4 + g) = -89} \quad \checkmark$$

$\star^1$: Sabemos que el $\text{gr}(f^4) = 20 \Rightarrow \text{gr}(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \leq 10$ solo puede ocurrir *cuando los exponentes* $\left\{\begin{array}{c} i = 10,\ j = 9 \\ \vee \\ i = 9,\ j = 10 \end{array}\right\}$

$\star^2$: porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

$\star^3$: Idem $\star^1$ para el polinomio f

grado: 19

---

2. Hacer!

---

3. Hacer!

---

4. Hacer!

---

5. Hacer!

---

6. Hacer!

---

7. Hacer!

---

8. Hacer!

---

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$, $g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$,

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X^3 + X$,

iii) $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1$, $g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1$,

---

i)
$$\begin{array}{r|l}
X^5 \qquad\quad + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 & X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-X^5 + X^4 + X^3 \qquad\quad - X \quad & X + 1 \\ \cline{1-1}
X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X + 2 & \\
-X^4 + X^3 + X^2 \qquad - 1 & \\ \cline{1-1}
3X^3 - 5X^2 + X + 1 &
\end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Euclides}} (f : g) = (g : 3X^3 - 55X^2 + X + 1)$$

$$\xrightarrow[\text{en función de } g]{\text{escribo a } f} f = (X+1) \cdot g + 3X^3 - 55X^2 + X + 1$$

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - X^3 - X^2 \qquad + 1 & 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ \cline{2-2}
-X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X \qquad & \frac{1}{3}X + \frac{2}{9} \\ \cline{1-1}
\frac{2}{3}X^3 - \frac{4}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + 1 & \\
-\frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9} & \\ \cline{1-1}
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3X^3 & -5X^2 & +X & +1 & -\frac{2}{9}X^2-\frac{5}{9}X+\frac{7}{9} \\ \cline{5-5}
-3X^3 & -\frac{15}{2}X^2 & +\frac{21}{2}X & & -\frac{27}{2}X+\frac{225}{4} \\ \cline{1-3}
 & -\frac{25}{2}X^2 & +\frac{23}{2}X & +1 & \\
 & \frac{25}{2}X^2 & +\frac{125}{4}X & -\frac{175}{4} & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{171}{4}X & -\frac{171}{4} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
-\frac{2}{9}X^2 & -\frac{5}{9}X & +\frac{7}{9} & \frac{171}{4}X-\frac{171}{4} \\ \cline{4-4}
\frac{2}{9}X^2 & -\frac{2}{9}X & & -\frac{8}{1539}X-\frac{28}{1539} \\ \cline{1-2}
 & -\frac{7}{9}X & +\frac{7}{9} & \\
 & \frac{7}{9}X & -\frac{7}{9} & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
X^5+X^3-6X^2+2X+2 &= \left(X^4-X^3-X^2+1\right)\cdot\left(X+1\right)+\left(3X^3-5X^2+X+1\right)\\
X^4-X^3-X^2+1 &= \left(3X^3-5X^2+X+1\right)\cdot\left(\tfrac{1}{3}X+\tfrac{2}{9}\right)+\left(-\tfrac{2}{9}X^2-\tfrac{5}{9}X+\tfrac{7}{9}\right)\\
3X^3-5X^2+X+1 &= \left(-\tfrac{2}{9}X^2-\tfrac{5}{9}X+\tfrac{7}{9}\right)\cdot\left(-\tfrac{27}{2}X+\tfrac{225}{4}\right)+\left(\tfrac{171}{4}X-\tfrac{171}{4}\right)\\
-\tfrac{2}{9}X^2-\tfrac{5}{9}X+\tfrac{7}{9} &= \left(\tfrac{171}{4}X-\tfrac{171}{4}\right)\cdot\left(-\tfrac{8}{1539}X-\tfrac{28}{1539}\right)+0
\end{aligned}
$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\boxed{\to (f:g)=X-1}$

Y ahora tengo que escribir $X-1=F\cdot f+G\cdot g$?
Algún truco para no lidiar con esas fracciones?

ii)
$$
\begin{aligned}
X^6+X^4+X^2+1 &= \left(X^3+X\right)\cdot X^3+\left(X^2+1\right)\\
X^3+X &= \left(X^2+1\right)\cdot X+0
\end{aligned}
$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\to \boxed{(f:g)=X^2+1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y g $\to$ $\boxed{X^2+1=f\cdot 1+g\cdot(-X^3)}$

iii) $\xrightarrow[\text{Euclides}]{\text{Haciendo}}$

$$
\begin{aligned}
2X^6-4X^5+X^4+4X^3-6X^2+4X+1 &= \left(X^5-2X^4+2X^2-3X+1\right)\cdot 2X+\left(X^4+2X+1\right)\\
X^5-2X^4+2X^2-3X+1 &= \left(X^4+2X+1\right)\cdot\left(X-2\right)+3\\
X^4+2X+1 &= 3\cdot\left(\tfrac{1}{3}X^4+\tfrac{2}{3}X+\tfrac{1}{3}\right)+0
\end{aligned}
$$

El MCD será el último resto no nulo y *mónico* $\to$ $\boxed{(f:g)=1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y g $\to$ $\boxed{1=\frac{1}{3}g\cdot(2X^2-4X+1)-\frac{1}{3}f\cdot(X-2)}$

---

10. Hacer!

---

11. Hacer!

---

12. Hacer!

13. Hacer!

14. Hacer!

15. Hacer!

16. Hacer!

17. Hacer!

18. Hacer!

19. Hacer!

20. Hacer!

21. Hacer!

22. Hacer!

23. Hacer!

24. Hacer!

25. Hacer!

26. Hacer!

27. Hacer!

28. Hacer!

29. Hacer!

30. Hacer!

31. Hacer!

32. Hacer!

33. Hacer!

34. Hacer!

35. Hacer!

36. Hacer!

37. Hacer!

38. Hacer!

39. Hacer!