Inducción, números naturales

1. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$

3. Inducción: Sea $H \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que H es un conjunto *inductivo* si se cumplen las dos condiciones siguiente:
   - $1 \in H$
   - $\forall x, x \in H \Rightarrow x + 1 \in H$

4. Principio de inducción: Sea $p(n), n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales. Si p satisface
   - (Caso Base) $p(1)$ es Verdadera.
   - (Paso inductivo) $\forall h \in \mathbb{N}$, $p(h)$ *Verdadera* $\Rightarrow p(h+1)$ *Verdadera, entonces* $p(n)$ *es Verdadera* $\forall n \in \mathbb{N}$.

5. Principio de inducción *corrido*: Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $p(n)$, $n \geq n_0$, una afirmación sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si p satisface:
   - (Caso Base) $p(n_0)$ es Verdadera.
   - (Paso inductivo) $\forall h \geq n_0$, $p(h)$ *Verdadera* $\Rightarrow p(h+1)$ *Verdadera, entonces* $p(n)$ *es Verdadera* $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. explicación de las torres de Hanoi.
   1) $a_1 = 1$
   2) $a_3 = 7$
   3) $a_4 = 15$
   4) $a_9 = a_9 + 1 + a_9 = 2a_9 + 1$

   $\rightarrow \boxed{a_n + 1 = 2a_n + 1}$

2. Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como las torres de Hanoi $a_1 = 1 \wedge a_{n+1} = 2a_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es una sucesión definida por recurrencia.

3. El patrón de las torres de Hanoi parece ser $\underbrace{a_n = 2^n - 1}_{\text{término general}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto puedo probarse por inducción.

$$\begin{cases} \text{Proposición:} p(n) : a_n = 2^n - 1 \\ \text{Caso Base: } p(1) \text{ es verdadero?} a_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } p(h) \text{ es verdadero} \Rightarrow p(h+1) V? \\ \begin{cases} \text{HI} : a_h = 2^h - 1 \\ \text{QPQ} : a_{h+1} = 2^{h+1} \end{cases} \rightarrow \text{cuentas y queda que } \boxed{p(n) \text{ } es \text{ } V, \ \forall n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

4. $\sum$ es una def por recurrencia $\rightarrow \sum\limits_{k=1}^{1} a_k = a_1 \wedge \sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k = ...facil$

Principio de inducción III: Sea $p(n)$ una proposición sobre $\mathbb{N}$. Si se cumple:

1. $p(1) \wedge p(2)\ V$

2. $\forall h \in \mathbb{N}$, $p(h) \wedge p(h+1)$, $V \Rightarrow p(h+2)\ V$ (paso inductivo), entonces $p(n)$ es verdadera.

$p(n) : a_n = 3^n$

$$\begin{cases} \text{caso base: } a_1 = 3, a_2 = 9 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } \ \forall h \in \mathbb{N}, p(h) \wedge p(h+1)\ V \Rightarrow p(h+2)\ V \\ \begin{cases} \text{HI: } a_h = 3^h \wedge a_{h+1} = 3^{h+1} \\ \text{Quiero probar que: } a_{h+2} = 3^{h+2} \\ \text{Usando la fórmula de recurrencia sale enseguida} \end{cases} \end{cases}$$

Principio de inducción IV Sea $p(n)$ una proposición sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si se cumple:

1. $p(n_0) \wedge p(n_0+1)\ V$

2. $\forall h \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$, $p(h+1) \wedge p(h+2)\ V \Rightarrow p(h+2)\ V$ (paso inductivo), entonces $p(n)$ es verdadera. $\forall n \geq n_0$

Sucesión de Fibonacci: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \ \forall n \geq 0$
Truco para sacar fórmulas a partir de Fibo.

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0 \to x^2 - x - 1 = 0 = \begin{Bmatrix} \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \tilde{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{Bmatrix} \to \Phi^2 = \Phi + 1 \wedge \tilde{\Phi}^2 = \tilde{\Phi} + 1$$

- defino sucesiones Φ^n que satisfacen la recurrencia de la sucesión de Fibonacci pero no sus condiciones iniciales.

- puedo formar una combineta lineal talque: $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (a\Phi^n + b\tilde{\Phi}^n)$ es la sucesión que satisface: $\begin{cases} c_o = a + b \\ c_1 = a\Phi + b\tilde{\Phi} \end{cases}$ y la recurrencia de Fibonacci.
  Resuelvo todo y llego a $\square$

Sucesione de Lucas: Generalizaciones de Fibonacci.$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$a_0 = \alpha, a_1 = \beta \wedge a_{n+2} = \gamma a_{n+1} + \delta a_n, \ \forall n \geq 0,\ con \alpha, \beta, \gamma, \delta$ dados.
Esto lo meto en la ecuación característica: $x^2 - \gamma x - \delta = 0$, necesito raíces distintas. Notar que $r^2 = \gamma r^1 + \delta$, y lo mismo es para $\tilde{r}$. Las sucesiones (r^n) y $(\tilde{r}^n)$ satisfacen la recurrencia de Lucas, pero no las condiciones iniciales α y β. $c_n = (ar^n + b\tilde{r}^n)$, satisface Lucas, pero las condiciones iniciales son c_0 y c_1 o $\begin{cases} a + b = \alpha \\ ra + \tilde{b} = \beta \end{cases} \to \begin{cases} ra + rb = r\alpha \\ ra + \tilde{r}b = \beta \end{cases}$ luego hago lo mismo con $\tilde{r}$ Como resultado: $a = \frac{\beta - \tilde{r}\alpha}{r - \tilde{r}}$

Ejercicio fuera de la guía

Se cumple que: $\frac{(2n)!}{n!^2} \leq (n+1)!, \ \forall n \in \mathbb{N}$?

1. La proposición: $p(n) : \frac{(2n)!}{n!^2} \leq (n+1)!$

2. Caso base: $p(n=1)$ es Verdadera? $\xrightarrow[n=1]{\text{evalúo}} \frac{(2 \cdot 1)!}{1!^2} = 2 \leq (1+1)! \quad \checkmark$

3. Mi **HI** es *que vale* $\frac{(2h)!}{h!^2} \leq (h+1)!$

4. Quiero probar que $\frac{(2(h+1))!}{(h+1)!^2} \leq ((h+1)+1)! \xrightarrow{\text{acomodo}} \frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} \leq (h+2)!$

5. Hay que hacer cosas para poder meter la **HI** en las cuentas del punto anterior.
   Noto que: $\frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} = \frac{(2h+2) \cdot (2h+1) \cdot (2h)!}{(h+1)^2 \cdot h!^2} \overset{\text{HI}}{\leq} \frac{(2h+2) \cdot (2h+1)}{(h+1)^2} (h+1)! \leq (h+2)!$
   Probando esa última desigualdad se prueba lo buscado.

Ejercicio de la clase del 12/4

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ con $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \;\; \forall n \geq 2 \end{array}\right.$

(a) Probar que $a_{n+6} = a_n$

Por inducción: $\boxed{p(n) : a_{n+6} = a_n \;\forall n \geq \mathbb{N}_0 \text{ verdadera ?}}$

Caso Base: Primero notar que,

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_2 \overset{\text{def}}{=} 2 \\ a_3 \overset{\text{def}}{=} -1 \\ a_4 \overset{\text{def}}{=} -3 \\ a_5 \overset{\text{def}}{=} -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_6 \overset{\text{def}}{=} 1 \\ a_7 \overset{\text{def}}{=} 3 \\ a_8 \overset{\text{def}}{=} 2 \\ a_9 \overset{\text{def}}{=} -1 \\ a_{10} \overset{\text{def}}{=} -3 \\ a_{11} \overset{\text{def}}{=} -2 \end{array}\right\} \rightarrow \cdots$$ Se ve que tiene un período de 6 elementos.

$p(n=2)$ verdadera ? $\rightarrow a_8 \overset{?}{=} a_2 \quad \checkmark$

Paso inductivo: Supongo $p(k)$ verdadera $\Rightarrow p(k+1)$ verdadera ?

Hipótesis inductiva: Supongo $a_{k+6} = a_k \; \forall k \in \mathbb{N}_0$ verdadera , quiero ver que $a_{k+7} = a_{k+1}$

$$a_{k+7} \overset{\text{def}}{=} a_{k+6} - a_{k+5} \overset{\text{HI}}{=} a_k - a_{k+5} \overset{\text{def}}{=} a_k - (\underbrace{a_k + a_{k+4}}_{a_{k+5}}) = -a_{k+4}$$

$$\rightarrow a_{k+7} = -a_{k+4} \overset{\text{def}}{=} -(a_{k+3} - a_{k+2}) \overset{\text{def}}{=} -(a_{k+2} - a_{k+1} - a_{k+2}) = a_{k+1} \quad \checkmark$$

Como $p(0) \wedge p(1) \wedge \cdots p(5)$ son verdaderas y $p(k)$ es verdadera así como $p(k+1)$ también lo es, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_0$

(b) Calcular $\sum\limits_{k=0}^{255} a_k$

$$\sum_{k=0}^{255} a_k = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}_{=0} + \underbrace{a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}}_{=0} + \cdots + a_{252} + a_{253} + a_{254} + a_{255}$$

En la sumatoria hay 256 términos. $256 = 42 \cdot 6 + 4$ por lo tanto van a haber 42 bloques que dan 0 y sobreviven los últimos 4 términos. $\sum\limits_{k=0}^{255} a_k = \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{42 \text{ ceros}} + a_{252} + a_{253} + a_{254} + a_{255} =$ $\cancel{a_{252}} + a_{253} + a_{254} + \cancel{a_{255}} = a_{253} + a_{254} = 5$

Donde usé que: $a_n = \left\{\begin{array}{rl} 1 & \text{si } \; n \mod 6 = 0 \\ 3 & \text{si } \; n \mod 6 = 1 \\ 2 & \text{si } \; n \mod 6 = 2 \\ -1 & \text{si } \; n \mod 6 = 3 \\ -3 & \text{si } \; n \mod 6 = 4 \\ -2 & \text{si } \; n \mod 6 = 5 \end{array}\right. \longrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{255} a_k = 5} \quad \checkmark$

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por: $a_1 = 1 \wedge a_{n+1} = \left(\sqrt{a_n} - (n+1)\right)^2, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Voy a encontrar la fórmula general.

$a_1 = 1,\; a_2 = (1-2)^2,\; a_3 = 4,\; a_4 = 4,\; a_5 = 9,\; \ldots$

$a_n = \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{n+2}{3}^2\right) \text{ si } n \text{ es impar} \\ \left(\frac{n}{3}^2\right) \text{ si } n \text{ es par} \end{array}\right.$

$\rightarrow$ Se muestra por inducción *Hacer*!

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por: $a_1 = 3, a_2 = 9 \wedge a_{n+2} = a + n + 1 + 3a_n + 3^{3+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$
Tengo que encontrar el término general de esta sucesión definida por recurrencia. $a_1 = 3, a_2 = 9. a_3 = a_2 + 3a_1 + 3^2 = 27 \to$ pinta ser $a_n = 3^n$.
Interesante que acá la HI dependería de muchos términos. Así que ahora viene una versión cambiada del principio de inducción.

Ejercicios de la guía

---

1. Hacer!

---

2. Hacer!

---

3. Calcular

i) $\sum\limits_{i=1}^{n}(4i+1)$ Hacer!

ii) $\sum\limits_{i=6}^{n}2(i-5)$ Hacer!

---

4. Calcular

i) $\sum\limits_{i=0}^{n}2^i$

$$\sum_{i=0}^{n}2^i \stackrel{q\neq 1}{=} \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$$

ii) $\sum\limits_{i=1}^{n}q^i$

$$\sum_{i=1}^{n}q^i = -1+1+\sum_{i=1}^{n}q^i = -1+\sum_{i=0}^{n}q^i = \begin{cases} n+1-1 = n & \text{si} \quad q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - 1 = \frac{q^{n+1}-q}{q-1} & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$$

iii) Hacer!

iv) Hacer!

5.

i) Hacer!

ii) $$\underbrace{S = \frac{N(N+1)}{2} = \sum_{1}^{N} i}_{Gauss} \to \sum_{1}^{n}2i-1 = 2\sum_{1}^{n}i - \sum_{1}^{n}1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2+n-n = n^2 \quad \checkmark$$

iii) $\left\{\begin{array}{l} \text{Primer caso } n=1 \to \sum_{1}^{1} 2i-1 = 1 = 1^2 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo } n=h \to \sum_{1}^{k} 2i-1 = k^2 \quad \checkmark \Rightarrow \sum_{1}^{k+1} 2i-1 \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \\ \sum_{1}^{k+1} 2i-1 = \underbrace{\sum_{1}^{k} 2i-1}_{\text{HI}} + \underbrace{2(k+1)-1}_{k+1\text{-ésimo}} = k^2+2k+1 = (k+1)^2 \quad \checkmark \end{array}\right\} \to \boxed{\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2}$

---

6. Hacer!

7.

i) $\left\{\begin{array}{l} \text{Primer caso } n=1 \to \sum_{1}^{1}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^2 \cdot 1 = 1 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo} \left\{\begin{array}{l} n=k \to \sum_{1}^{k}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} \\ \Rightarrow \\ n=k+1 \to \sum_{1}^{k+1}(-1)^{i+1}i^2 \stackrel{?}{=} (-1)^{(k+1)+1}\frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ \to \sum_{1}^{k+1}(-1)^{i+1}i^2 = \underbrace{\sum_{1}^{k}(-1)^{i+1}i^2}_{\text{HI}} + \underbrace{(-1)^{k+2}(k+1)^2}_{k+1\text{-ésimo}} = \\ (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(-1)^2(k+1)^2 \xrightarrow[\text{fáctor cómun}]{\text{acomodar}} (-1)^k(k+1)\left[-\frac{k}{2}+(k+1)\right] = \\ (-1)^k(k+1)\frac{(k+2)}{2} \quad \checkmark \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\to \boxed{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}}$

ii) Hacer!

iii) Hacer!

iv) $\prod_{i=1}^{n}\left(1+a^{2^{i-1}}\right) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$

$\left\{\begin{array}{l} \text{Primer caso } n=1 \to \prod_{i=1}^{1}(1+a^{2^{i-1}}) = 1+a^{2^0} = 1+a = \frac{1-a^{2^1}}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1+a \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo } n=k \to \prod_{i=1}^{k}(1+a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^k}}{1-a} \Rightarrow n=k+1 \to \prod_{i=1}^{k+1}(1+a^{2^{i-1}}) \stackrel{?}{=} \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a} \\ \left\{\begin{array}{l} \prod_{i=1}^{k+1}(1+a^{2^{i-1}}) = \underbrace{\prod_{i=1}^{k}(1+a^{2^k})}_{\text{HI}} \cdot \underbrace{1+a^{2^{i-1}}}_{k+1\text{-ésimo}} = \frac{1-a^{2^k}}{1-a} \cdot 1+a^{2^k} \xrightarrow[\text{de cuadrados}]{\text{diferencia}} \frac{1-(a^{2^k})^2}{1-a} = \\ \frac{1-a^{2\cdot 2^k}}{1-a} = \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a} \quad \checkmark \end{array}\right. \end{array}\right.$

v) $\prod_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

En este ejercicio conviene abrir la productoria y acomodar los factores. Por inducción:

$$\left\{\begin{array}{l}
p(n):\ \prod_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2i-3}=2^n(1-2n) \\
\textit{Caso Base: } p(1)\text{ V?}\rightarrow\prod_{i=1}^{1}\frac{1+i}{2i-3}=\frac{1+1}{2\cdot 1-3}=2^1(1-2\cdot 1)=-2 \\
\textit{Paso inductivo: Supongo } p(k)\text{ Verdadero }\xrightarrow[\text{que}]{\text{quiero ver}} p(k+1)\text{ Verdadero para algún } k\in\mathbb{N}. \\
\textit{Hipótesis inductiva: Supongo } \prod_{i=1}^{k}\frac{k+i}{2i-3}=2^k(1-2k),\ \text{quiero ver que } \prod_{i=1}^{k+1}\frac{k+1+i}{2i-3}=2^{k+1}(1-2(k+1)) \\
\left\{\begin{array}{l}
\prod_{i=1}^{k}\frac{k+i}{2i-3}=\frac{k+1}{2\cdot 1-3}\cdot\frac{k+2}{2\cdot 2-3}\cdot\frac{k+3}{2\cdot 3-3}\cdots\frac{2k}{2\cdot k-3}=2^k(1-2k) \\
\prod_{i=1}^{k+1}\frac{k+1+i}{2i-3}=\frac{k+2}{2\cdot 1-3}\cdot\frac{k+3}{2\cdot 2-3}\cdots\frac{k+1+(k-1)}{2(k-1)-3}\cdot\frac{k+1+k}{2k-3}\cdot\frac{k+1+(k+1)}{2(k+1)-3} \\
\xrightarrow[\text{corro los denominadores una fracción hacia }\leftarrow]{\text{Masajear: multiplico por } 1=\frac{k+1}{k+1}}\frac{k+1}{k+1}\cdot\frac{1}{2\cdot 1-3}\cdot\frac{k+2}{2\cdot 2-3}\cdot\frac{k+3}{2\cdot 3-3}\cdots\frac{2k}{2k-3}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)-3}\cdot\frac{2k+2}{1}= \\
\xrightarrow[\text{aparezca la HI}]{\text{acomodo para que}}\underbrace{\frac{k+1}{2\cdot 1-3}\cdot\frac{k+2}{2\cdot 2-3}\cdot\frac{k+3}{2\cdot 3-3}\cdots\frac{2k}{2k-3}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)-3}}_{\text{HI}}\cdot\frac{2k+2}{k+1}= \\
=2^k(1-2k)\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)-3}\cdot\frac{2k+2}{k+1}=2^k\cancel{(1-2k)}\cdot\frac{2k+1}{(-1)\cancel{(1-2k)}}\cdot\frac{2\cancel{(k+1)}}{\cancel{k+1}}=2^{k+1}(-1)(2k+1)= \\
=2^{k+1}\left(1-2(k+1)\right)\quad\checkmark
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Como $p(1)$ es verdadero y $p(k)$ es verdadero y $p(k+1)$ también lo es, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n\in\mathbb{N}$

---

8. Sea $a,\ b\in\mathbb{R}$. Probar que para todo $n\in\mathbb{N}$, $a^n-b^n=(a-b)\sum_{i=1}^{n}a^{i-1}b^{n-i}$. Deducir la fórmula de la serie geométrica: para todo $a\neq 1$, $\sum_{i=0}^{n}a^i=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Primer paso: } n=1(a-b)\sum_{1}^{1}a^{i-1}\cdot b^{1-1}=a-b=a^1-b^1\quad\checkmark \\
\text{Paso inductivo: } n=ka^k-b^k=(a-b)\sum_{i=1}^{k}a^{i-1}\cdot b^{k-i}\Rightarrow a^{k+1}-b^{k+1}\overset{?}{=}(a-b)\sum_{i=1}^{k+1}a^{i-1}\cdot b^{k+1-i} \\
\left\{\begin{array}{l}
(a-b)\sum_{i=1}^{k+1}a^{i-1}\cdot b^{k+1-i}=(a-b)\sum_{i=1}^{k}a^{i-1}\cdot\underbrace{b^{k+1-i}}_{b\cdot b^{k-i}}+\underbrace{(a-b)a^k\cdot b^{k+1-(k+1)}}_{k+1\text{-ésimo}}= \\
\underbrace{b\cdot(a-b)\sum_{i=1}^{k}a^{i-1}\cdot b^{k-i}}_{\text{HI}}+(a-b)a^k\overset{\text{HI}}{=}b\cdot a^k-b^k+(a-b)a^k=a^{k+1}-b^{k+1}\quad\checkmark
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Para deducir la fórmula de la serie geométrica $b=1\rightarrow(a-1)\sum_{i=1}^{n}a^{i-1}=a^n-1\rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l}
(a-1)\sum_{1}^{n}a^{i-1}=(a-1)\cdot(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})=a^n-1\xrightarrow[\text{divido por }(a-1)\text{ M.A.M.}]{\text{multiplico por } a \text{ y}} \\
\sum_{1}^{n}a^i=a+a^2+\cdots+a^n=\frac{a^{n+1}-a}{a-1}\xrightarrow[\text{M.A.M.}]{\text{sumo un 1}}\sum_{i=0}^{n}a^i=1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{a^n-a}{a-1}+1\rightarrow \\
\boxed{\frac{a^n+1}{a-1}=\sum_{i=0}^{n}a^i}
\end{array}\right.$$

---

9. Hacer!

10. Hacer!

11. Hacer!

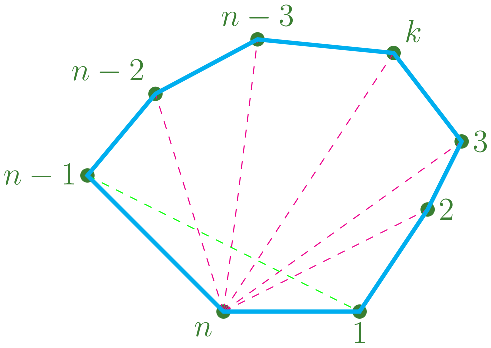
12. Hacer!

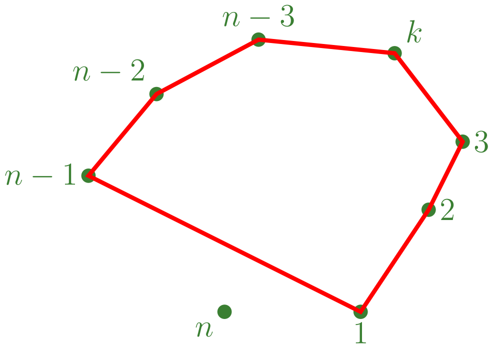
13. ____

Hacer!

14. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que:

i) La cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.
Ejercicio donde hay que encontrar una fórmula a partir de algún método *creativo* para luego probar por inducción.





Se desprende del gráfico el siguiente razonamiento: En el polígono cyan de n lados voy a tener una cantidad de diagonales dada por la sucesión d_n. El polígono rojo me genera polígono que tiene un lado menos y un lado menos, cantidad que viene determinada por d_{n-1}. Las líneas punteadas son las diagonales de d_n que no estarán en d_{n-1}. Ahora voy a encontrar una relación entre ambas sucesiones. Al sacan un lado pierdo las diagonales desde 2 hasta $n-2$ que serían $n-3$ en total y además pierdo la diagonal que conectan el vértice 1 con el $n-1$: $d_n = d_{n-1} + 1 + n - 2 = d_{n-1} + n - 1$
$\rightarrow d_n = d_{n-1} + n - 1$

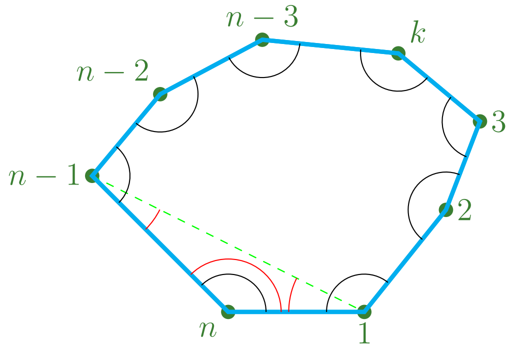
Ahora inducción:

$p(n) : d_n = \frac{n(n-3)}{2} \; \forall n \geq 3$

$$\begin{cases} \textit{Caso Base: } p(3) \text{ verdadera ?} \rightarrow \frac{3(3-3)}{2} = 0, \text{ lo cual es verdad para el triángulo.} \quad \checkmark \\ \textit{Paso inductivo: } p(k) \text{ es verdadero para algún } k \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera ?} \\ \textit{Hipótesis Inductiva: } d_k = \frac{k(k-3)}{2} \Rightarrow d_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} \\ d = k+1 \overset{\text{def}}{=} d_k + k - 1 \overset{\text{HI}}{=} \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k-2)(k+1)}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

Como $p(3) \wedge p(k) \wedge p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$.



En este caso estoy generando la suma de los ángulos internos de 2 polígonos, uno con α_n de n lados y otro con $n-1, \alpha_{n-1}$ Es más claro en este caso que al sacarle un lado, estoy robádo un triángulo que tiene como suma de sus ángulos internos π, entonces afirmo $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \pi$. Ahora pruebo por inducción lo pedido. $p(n) : \alpha_n = \pi(n-2)\ \forall n \geq 3$

$$\begin{cases} \textit{Caso Base: } p(3) \text{ verdadera ?} \to \pi(3-2) = \pi, \text{ lo cual es verdad para el triángulo.} \quad \checkmark \\ \textit{Paso inductivo: } p(k) \text{ es verdadero para algún } k \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera ?} \\ \textit{Hipótesis Inductiva: } \alpha_k = \pi(k-2) \Rightarrow \alpha_{k+1} = \pi(k-1) \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \overset{\text{def}}{=} \alpha_{k+1} - \pi \\ \alpha_k \overset{\text{HI}}{=} \pi(k-2) \end{array} \right\} \to \alpha_{k+1} = \pi(k-2) + \pi = \pi(k-1) \quad \checkmark \end{cases}$$

Como $p(3) \wedge p(k) \wedge p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

Recurrencia

15.

i) Sea $(a_n)_{n \ en \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:
$a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 2na_n + 2^{n+1}n!, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Probar que $a_n = 2^n n!$.
Hecho en cuaderno, pasar

ii) Sea $(a_n)_{n \ en \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:
$a_1 = 0$ y $a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
Probar que $a_n = n^2(n-1)$.
Hecho en cuaderno, pasar

---

16. Hallar la fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Hacer!

---

17. Hacer!