

# Álgebra I

## Práctica 3 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

*Choose your destiny:*

- Notas teóricas

- Ejercicios de la guía:

|    |    |     |     |     |     |     |     |
|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1. | 5. | 9.  | 13. | 17. | 21. | 25. | 29. |
| 2. | 6. | 10. | 14. | 18. | 22. | 26. | 30. |
| 3. | 7. | 11. | 15. | 19. | 23. | 27. | 31. |
| 4. | 8. | 12. | 16. | 20. | 24. | 28. | 32. |

- Ejercicios Extras

1.      2.

**Notas teóricas:**

**Ejercicios de la guía:**

1. Dado el conjunto referencial  $V = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es múltiplo de } 15\}$ , determinar el cardinal del complemento del subconjunto  $A$  de  $V$  definido por  $A = \{n \in V : n \geq 132\}$ .

Se tiene que  $A^c = \{n \in V : n \not\geq 132\} = \{n \in V : n < 132\}$ .

Así,  $\#A^c =$  todos los múltiplos de 15 menores a 132. Lo calculo sacando la parte entera de  $\frac{132}{15}$ , o sea:

$$\#A^c = \lfloor \frac{132}{15} \rfloor = \lfloor 8,8 \rfloor = 8$$

2. ¿Cuántos números naturales hay menores o iguales que 1000 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

Defino un conjunto referencial  $V = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 1000\}$ , y dos conjuntos  $A = \{n \in V : n \text{ no es múltiplo de } 3\}$ ,  $B = \{n \in V : n \text{ no es múltiplo de } 5\}$ .

Búscalo calcular  $\#(A \cap B)$

Pero  $\#(A \cap B) = \#[V - (A \cap B)^c] = \#(V - A^c \cup B^c) = \#V - \#(A^c \cup B^c) = \#V - [\#A^c + \#B^c - \#(A^c \cap B^c)]$   
 Donde  $A^c = \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 3\}$ ,  $B^c = \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 5\}$ ,  
 $(A^c \cap B^c) = \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 15\}$

Calculo sus cardinales:

- $\#A^c = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$
- $\#B^c = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$
- $\#(A^c \cap B^c) = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$

Así,  $\#(A \cap B) = \#V - [\#A^c + \#B^c - \#(A^c \cap B^c)] = 1000 - 333 - 200 + 66 = 533$

3. Dados subconjuntos finitos  $A, B, C$  de un conjunto referencial  $V$ , calcular  $\#(A \cup B \cup C)$  en términos de los cardinales de  $A, B, C$  y sus intersecciones.

$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup C) &= \#(A \cup (B \cup C)) \\ &= \#A + \#(B \cup C) - \#(A \cap (B \cup C)) \\ &= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\ &= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - [\#(A \cap B) + \#(A \cap C) - \#(A \cap B \cap C)] \\ &= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

4.  **Falta hacerlo!**

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

5.  **Falta hacerlo!**

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

6.

- i) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras (no pueden empezar con 0) hay que no contienen al dígito 5?
- ii) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras hay que contienen al dígito 7?

- i) Como las cifras no pueden ser 5 y la primer cifra no puede empezar con 0, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{c} \text{cifras} \\ \text{posibilidades} \end{array} \left| \begin{array}{cccc} \overline{8} & \overline{9} & \overline{9} & \overline{9} \end{array} \Rightarrow \text{hay } 8 \cdot 9^3 = 5832 \text{ posibles números}$$

- ii) Para hallar la cantidad de números de 4 cifras que contienen al 7 lo calculo con el complemento, o sea

$$\# \text{números de 4 cifras con el 7} = \# \text{números de 4 cifras} - \# \text{números de 4 cifras sin el 7}$$

- # números de 4 cifras:

$$\begin{array}{c} \text{cifras} \\ \text{posibilidades} \end{array} \left| \begin{array}{cccc} \overline{9} & \overline{10} & \overline{10} & \overline{10} \end{array} \Rightarrow \text{hay } 9 \cdot 10^3 = 9000 \text{ números de 4 cifras}$$

- # números de 4 cifras sin el 7:

En el ítem anterior calculamos la cantidad de números de 4 cifras que no contienen al 5, que es la misma cantidad que números de 4 cifras que no contienen al 7, por lo tanto hay 5832 números posibles.

$$\text{Así, } \# \text{números de 4 cifras con el 7} = 9000 - 5832 = 3168$$

## 7. Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → .

## 8. Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → .

9. Si  $A$  es un conjunto con  $n$  elementos ¿Cuántas relaciones en  $A$  hay? ¿Cuántas de ellas son reflexivas? ¿Cuántas de ellas son simétricas? ¿Cuántas de ellas son reflexivas y simétricas?

Dado que para dos conjuntos  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{1, 2\}$  la cantidad de relaciones que hay entre ellos es igual a la cantidad de subconjuntos de  $\mathcal{P}(A \times B)$ , entonces si  $A = \{1, \dots, n\}$  el cardinal  $\# \mathcal{P}(A \mathcal{R} A) = 2^{n^2}$

Las relaciones reflexivas son de la forma  $a_i \mathcal{R} a_i$ , por lo que solo será una relación por cada elemento del conjunto  $\#(A \mathcal{R} A)_{ref} = n$ . Voy a calcular la cantidad de elementos que tiene el conjunto  $\mathcal{P}((A \mathcal{R} A)_{ref})$ , porque estoy buscando todos los subconjuntos que puedo formar con los elementos de  $(A \mathcal{R} A)_{ref}$ , entonces  $\# \mathcal{P}((A \mathcal{R} A)_{ref}) = 2^n$

Corroborar

Las relaciones simétricas serán aquellas que  $a_i \mathcal{R} a_j \Rightarrow a_j \mathcal{R} a_i$ . Pensando esto como los elementos de la diagonal para abajo de una matriz de  $n \times n$  tengo  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$  elementos matriciales.

$$\sum_{k=0}^n \binom{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}{k} = 2^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} \text{ Corroborar}$$

|           | $a_1$    | $a_2$    | $a_3$    | $\cdots$ | $a_{n-2}$ | $a_{n-1}$ | $a_n$   |
|-----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|---------|
| $a_1$     | $R, S$   | $\cdot$  | $\cdot$  | $\cdots$ | $\cdot$   | $\cdot$   | $\cdot$ |
| $a_2$     | $S$      | $R, S$   | $\cdot$  | $\cdots$ | $\cdot$   | $\cdot$   | $\cdot$ |
| $a_3$     | $S$      | $S$      | $R, S$   | $\cdots$ | $\cdot$   | $\cdot$   | $\cdot$ |
| $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\cdot$   | $\cdot$   | $\cdot$ |
| $a_{n-2}$ | $S$      | $S$      | $S$      | $\ddots$ | $R, S$    | $\cdot$   | $\cdot$ |
| $a_{n-1}$ | $S$      | $S$      | $S$      | $\ddots$ | $S$       | $R, S$    | $\cdot$ |
| $a_n$     | $S$      | $S$      | $S$      | $\cdots$ | $S$       | $S$       | $R, S$  |

10. Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de todas las funciones  $f : A \rightarrow B$ .

- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto  $\mathcal{F}$ ?
- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto  $\{f \in \mathcal{F} : 10 \in \text{Im}(f)\}$ ?
- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto  $\{f \in \mathcal{F} : 10 \in \text{Im}(fa)\}$ ?
- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto  $\{f \in \mathcal{F} : f(1) \in \{2, 4, 6\}\}$ ?

Cuando se calcula la cantidad de funciones, haciendo el árbol se puede ver que va a haber  $\# \text{Im}(f)$  de funciones que provienen de un elemento del dominio. Por lo tanto si tengo un conjunto  $A_n$  y uno  $B_m$ , la cantidad de funciones  $f : A \rightarrow B$  será de  $m^n$ .

- $\# \mathcal{F} = 12^5$
- $\# \mathcal{F} = 11^5$
- Tengo una que va a parar al 10 y cuento que queda. Por ejemplo si  $f(2) = 10$ :  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Por lo tanto tengo  $\# \mathcal{F} = 12^4 \cdot \underbrace{1}_{f(2)=10}$   
Corroborar
- Me dicen que  $f(\{1\}) = \{2, 4, 6\}$ , Si lo pienso como el anterior ahora tengo 3 veces más combinaciones, entonces  $\# \mathcal{F} = 12^4 \cdot \underbrace{3}_{f(\{1\})=\{2,4,6\}}$

11. Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y  $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ .

- ¿Cuántas funciones biyectivas  $f : A \rightarrow B$  hay?
- ¿Cuántas funciones biyectivas  $f : A \rightarrow B$  hay tales que  $f(\{1, 2, 3\}) = \{12, 13, 14\}$ ?

Cuando cuento funciones biyectivas, el ejercicio es como reordenar los elementos del conjunto de llegada de todas las formas posibles. Dado un conjunto  $\text{Im}(f)$ , la cantidad de funciones biyectivas será  $\# \text{Im}(f)$

i) Hay  $7!$  funciones biyectivas.

ii) Dado que hay 3 valores fijos, juego con los 4 valores restantes, por lo tanto habrá  $4!$  funciones biyectivas

**12.** ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden armar usando los dígitos del 1 al 5? ¿Y usando los dígitos del 1 al 7? ¿Y usando los dígitos del 1 al 7 de manera que el dígito de las centenas no sea el 2?

1) Hay que usar  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  y reordenarlos de todas las formas posibles.  $5!$

2) Hay que usar  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y ver de cuantas formas posibles pueden ponerse en 5 lugares:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \#7 & \#6 & \#5 & \#4 & \#3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{array} \right. \rightarrow \text{Tengo } 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7!}{2!} \text{ interpretar?}$$

3) Parecido al anterior pero fijo el 2 en el dígito de las centenas:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \#6 & \#5 & \#4 & \#1 & \#3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & 2 & \overline{5} \end{array} \right. \rightarrow \text{Tengo } 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 = \frac{6!}{2!} \text{ interpretar?}$$

**13.** Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

i) ¿Cuántas funciones inyectivas  $f; A \rightarrow B$  hay?

ii) ¿Cuántas de ellas son tales que  $f(1)$  es par?

iii) ¿Y cuántas tales que  $f(1)$  y  $f(2)$  son pares?

i) Una pregunta equivalente a si tengo 10 pelotitas distintas y 7 cajitas cómo puedo ordenarlas.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \#10 & \#9 & \#8 & \#7 & \#6 & \#5 & \#4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{array} \right. \rightarrow \frac{10!}{3!} = \frac{\#B}{\#B - \#A}$$

ii) Hay 5 números pares para elegir como imagen de  $f(1)$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \#5 & \#9 & \#8 & \#7 & \#6 & \#5 & \#4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{array} \right. \rightarrow 5 \cdot \frac{9!}{3!}$$

iii) Hay 5 números pares para elegir como imagen de  $f(1)$ , luego habrá 4 números pares para  $f(2)$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \#5 & \#4 & \#8 & \#7 & \#6 & \#5 & \#4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{array} \right. \rightarrow 5 \cdot 4 \cdot \frac{8!}{3!}$$

14. ¿Cuántas funciones biyectivas  $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  tales que  $f(\{1, 2, 3\}) \subseteq \{3, 4, 5, 6, 7\}$  hay?

Primero veo la condición  $f(\{1, 2, 3\}) \subseteq \{3, 4, 5, 6, 7\}$ , donde podría formar  $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$  combinaciones biyectivas. Para obtener la cantidad de funciones pedidas, tengo que usar todos los valores del  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Primero fijo la cantidad de valores que pueden tomar  $f(\{1, 2, 3\}) \subseteq \{3, 4, 5, 6, 7\}$  luego lo que reste.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \#5 & \#4 & \#3 & \#4 & \#3 & \#2 & \#1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{array} \right. \rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{5!}{(5-3)!} \cdot 4!$$

Condiciones pedidas    Lo que resta para completar

15. Sea  $A = \{f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ tal que } f \text{ es una función inyectiva}\}$ .  
 Sea  $\mathcal{R}$  la relación de equivalencia en  $A$  definida por:  $f \mathcal{R} g \iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2)$ .  
 Sea  $f \in A$  la función definida por  $f(n) = n + 2$  ¿Cuántos elementos tiene su clase de equivalencia?

Hacer!

16. Determinar cuántas funciones  $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  satisfacen simultáneamente las condiciones:

- $f$  es inyectiva,
- $f(5) + f(6) = 6$ ,
- $f(1) \leq 6$ .

- $f$  inyectiva hace que mi conjunto de llegada se reduzca en 1 con cada elección.
- Si  $f(5) + f(6) = 6$  entonces  $f : \{5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 4, 5\}$ . Una vez que  $f(5)$  tome un valor de los 4 posibles e.g.  $f(5) = 1 \xrightarrow[\text{única opción}]{\text{condiciona}} f(6) = 5$
- $f(1) \leq 6 \rightarrow f : \{1\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  donde cancelé el 1 y el 4, para sacar 2 números que sí o sí deben irse en la condición <sup>1</sup> de  $f(5) + f(6) = 6$ . Por lo tanto  $f(1)$  puede tomar 4 valores. Por lo que sobrarían 9 elementos del conjunto de llegada para repartir en las  $f$  que no tienen condición.

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} \#4 & \#9 & \#8 & \#7 & \#4 & \#1 & \#6 & \#5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & f(8) \end{array} \right. \rightarrow 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 4 \cdot 4 \cdot \frac{9!}{4!} = 241.920$$

Siento todo esto muy artesanal y poco justificable suficientemente *mathy-snobby*

### Número combinatorio

17.

- ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- ¿Y si se pide que 1 pertenezca al subconjunto?

<sup>1</sup>¿Podría haber elegido el 1 y 2? Sí, cualquiera 2 números del conjunto  $\{1, 2, 4, 5\}$

- iii) ¿Y si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto?
- iv) ¿Y si se pide que 1 o 2 pertenezca al subconjunto, pero no simultáneamente los dos?

El problema de tomar  $k$  elementos de un conjunto de  $n$  elementos se calcula con  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- i)  $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!(3!)} = 35$
- ii)  $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$
- iii)  $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$
- iv)  $\binom{5}{3} \cdot 2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 2 = 20$

**18.** Sea  $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$ . Calcular la cantidad de subconjuntos  $B \subseteq A$  que cumplen las siguientes condiciones:

- i)  $B$  tiene 10 elementos y contiene exactamente 4 múltiplos de 3.
- ii)  $B$  tiene 5 elementos y no hay dos elementos de  $B$  cuya suma sea impar.

El conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

- i)  $\xrightarrow[\text{de } 3]{\text{múltiplos}} C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ , agarro 4 elementos del conjunto  $C$  y luego 6 de los restantes del conjunto  $A$  sin contar el múltiplo de 3 que ya usé.

$$\left\{ \begin{array}{l} \binom{6}{4} \cdot \binom{9}{6} = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{9!}{6!3!} \xrightarrow{\text{simplificando}} 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 1260 \\ \text{Verificarypreguntarporlajustificacin.} \end{array} \right.$$

- ii) La condición de que la suma *no sea impar* implica que todos los elementos deben ser par o todos impar.

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{pares}]{\text{todos}} \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \xrightarrow[\text{quiero } 5]{10 \text{ elementos}} \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252 \\ \xrightarrow[\text{impares}]{\text{todos}} \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\} \xrightarrow[\text{quiero } 5]{9 \text{ elementos}} \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!4!} = 126 \end{array} \right.$$

**19.** Dadas dos rectas paralelas en el plano, se marcan  $n$  puntos distintos sobre una y  $m$  puntos distintos sobre la otra. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con vértices en esos puntos?

 **Falta hacerlo!**

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

**20.** Determinar cuántas funciones  $f : \{1, 2, 3, \dots, 11\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 16\}$  satisfacen simultáneamente las condiciones:

- $f$  es inyectiva,
- Si  $n$  es par,  $f(n)$  es par,
- $f(1) \leq f(3) \leq f(5) \leq f(7).$

- La función es inyectiva y cuando *inyecto un conjunto de  $m$  elementos en uno de  $n$  elementos*  $\rightarrow \frac{m!}{(m-n)!}.$



- Para cumplir la segunda condición el  $\text{Dom}(f)$  tengo 5 números par  $\{2, 4, 6, 8, 10\}$  y en el codominio tengo 8 números par  $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$  al *inyectar* obtengo  $\frac{8!}{(8-5)!}$  permutaciones.
- La condición de las desigualdades se piensa con los elementos de la  $\text{Im}(f)$  restantes después de la inyección, que son  $16 - 5 = 11$ . De esos 11 elementos quiero tomar 4. El cuántas formas distintas de tomar 4 elementos de un conjunto de 11 elementos se calcula con  $\binom{11}{4}$ , número de combinación que cumple las desigualdades, porque todos los números son distintos. Para la combinación **no hay orden**, elegir  $\{16, 1, 15, 13\}$  es lo mismo <sup>2</sup> que  $\{1, 16, 13, 15\}$ . Es por eso que *con 4 elementos seleccionados* solo hay una permutación que cumple las desigualdades; en este ejemplo sería  $\{1, 13, 15, 16\}$
- Por último inyecto los número del dominio restantes  $\{9, 11\}$  en los 7 elementos de  $\text{Im}(f)$  que quedaron luego de la combinación de las desigualdades  $\rightarrow \frac{7!}{(7-2)!}$

Concluyendo: Habrían  $\frac{8!}{(8-5)!} \cdot \binom{11}{4} \cdot \frac{7!}{(7-2)!} = 93.139.200$

**Corroborar**

## 21. ¿Cuántos anagramas tienen las palabras *estudio*, *elementos* y *combinatorio*

El anagrama equivale a permutar los elementos. Si no hay letras repetidas es una biyección  $\#(\text{letras})!$ . La palabra *estudio* tiene  $7!$  anagramas.

*Elementos* tiene 3 letras e, por lo tanto los elementos no repetidos son 6  $\{l, m, n, t, o, s\}$ ; esto es una *inyección* <sup>3</sup>  $\rightarrow \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!}$ .

También puedo pensar esto con combinatoria: Primero ubico a las 3 letras *e* en los lugares de las letras, por ejemplo  $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} e & & e & & e & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \right\} \rightarrow$  donde esta es una de un total de  $\binom{9}{3}$  formas de hacer eso, y los elementos que quedan en el conjunto de letras se *inyectan* en los lugares vacíos que quedan, en este caso tengo 6 elementos para ubicar en 6 lugares, lo que sería una biyección  $\#(\text{letras})!$ .

$$\rightarrow \binom{9}{3} \cdot 6! = \frac{9!}{3!}$$

*Combinatorio* tiene repetidas las letras *i* (x2) y la *o* (x3). Tengo un conjunto de 7 elementos  $\{c, m, b, n, a, t, r\}$  sin repetición. Puedo ubicar las letras con combinación en los 12 lugares *o* y luego las *i* en los 9 lugares restantes. Una vez hecho eso puedo *inyectar* (*biyectar*?) las letras no repetidas restantes:

$$\rightarrow \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{2} \cdot 7! = \underbrace{\frac{12!}{3!2!}}_{\text{notar } 4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 39.916.800$$

<sup>2</sup>Que sea lo mismo quiere decir que no lo cuenta nuevamente, el contador aumenta solo si cambian los elementos y no el lugar de los elementos

<sup>3</sup>Primero ubico lo que no está repetido. Luego agrego, en una dada posición, a eso 3 o más elementos repetidos. Esta última acción no altera la cantidad de permutaciones. Pensar en esto:  $\text{lmntosEEE}$  cuenta como  $\text{lmntos}\_\_\_$ .

<sup>4</sup>Esto es el total de biyecciones dividido entre las cantidades de repeticiones de los elementos en cuestión.

22. ¿Cuántas palabras se pueden formar permutando las letras de *cuadros*

- con la condición de que todas las vocales estén juntas?
- con la condición de que las consonantes mantengan el orden relativo original?
- con la condición de que nunca haya dos (o más) consonantes juntas?

El conjunto de consonantes es  $C = \{c, d, r, s\}$  y de vocales  $V = \{u, a, o\}$

- i) Para que las vocales estén juntas pienso a las 3 como un solo elemento, fusionadas las 3 letras, con sus permutaciones, es decir que tengo  $3!$  cosas de la siguiente pinta:

$$\begin{cases} u & a & o \\ u & o & a \\ o & a & u \\ o & u & a \\ a & o & u \\ a & u & o \end{cases}$$

Los anagramas para que las letras estén juntas los formo combinando  $\binom{5}{1} = 5$  poniendo los  $3!=6$  valores así en cada uno de los 5 lugares:

$$\begin{cases} uao & - & - & - & - \\ - & uao & - & - & - \\ - & - & - & uao & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{cases}$$

Ahora puedo *inyectar* las 4 consonantese en los 4 lugares que quedan libres. Finalmente se pueden formar  $\underbrace{4!}_{\text{consonantes}} \cdot \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{vocales}} \cdot 3! = 720$  anagramas con la condición pedida.

- ii) Supongo que el **orden relativo** es que aparezcan ordenadas así " $c \dots d \dots r \dots s$ ", quiere decir que tengo que combinar un grupo de 4 letras en 7 que serían los lugares de la letras teniendo un total de  $\binom{7!}{4!}$  y luego tengo  $1!$  permutaciones o, *no permuto dicho de otra forma*, dado que eso alteraría el orden y no quiero que pase eso. Obtengo cosas así:

$$\begin{cases} c & d & r & s & - & - & - \\ - & c & - & d & - & r & s \\ c & - & - & d & r & - & s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{cases} \rightarrow \text{lo cual deja 3 lugares libres para permutar con las 3 vocales, esa}$$

permutación es una biyección da  $3!$ .

Por último se pueden formar  $\underbrace{\binom{7!}{4!}}_{\text{consonantes}} \cdot 1! \cdot \underbrace{3!}_{\text{vocales}} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 3! = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$

- iii)  $C = \{c, d, r, s\}$  sin que estén juntas quiere decir que puedo ordenar de pocas formas, muy pocas porque solo hay 7 lugares.  $\left\{ \frac{c}{1} \quad \frac{d}{2} \quad \frac{r}{3} \quad \frac{s}{4} \quad \frac{-}{5} \quad \frac{-}{6} \quad \frac{-}{7} \right\} \rightarrow$  esta combinación es única  $\binom{7!}{7!} = 1$ , lo único que resta hacer es permutar las consonantes en esos espacios. 4 espacios para 4 consonantes. Luego relleno *inyectando* las vocales, como antes. El total de anagramas será  $\underbrace{\binom{7!}{7!}}_{\text{consonantes}} \cdot 4! \cdot \underbrace{3!}_{\text{vocales}} = 144$

23. Con la palabra *polinomios*,

- ¿Cuántos anagramas pueden formarse en las que las 2 letras *i* no estén juntas?
- ¿Cuántos anagramas puede formarse en los que la letra *n* aparezca a la izquierda de la letra *s* y la letra *s* aparezca a la izquierda de la letra *p* (no necesariamente una al lado de la otra)?

- i) Tengo 10 letras,  $\{p, l, n, m, s, o, o, o, i, i\}$ . ~~Para que no hayan "ii" calculo  $\binom{10}{3} = 120$ , pensando que en un conjunto de 3, siempre puedo poner las letras "i    i". Para cada uno de estas 120 configuraciones de la pinta:~~ **Está mal!**

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} i & - & i & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & i & - & - & - & - & i & - & - \\ - & - & - & i & - & - & - & - & i & - \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \text{Con las } i \text{ donde están el " - " tiene 4 posiciones} \\ \rightarrow \text{Con las } i \text{ donde están el " - " tiene 5 posiciones} \end{array}$$

Estoy contando de más. La cantidad para que las *i* no estén juntas es 36... salieron contando a mano <sup>5</sup>. Luego inyectando con las repeticiones de la "o":  $36 \cdot \frac{8!}{3!} = 241.920$

Pensando en el complemento:

Las posiciones que pueden tomar las *ii* juntas, se calculan a mano enseguida. Habrían en total

$$\rightarrow \frac{10!}{3! \cdot 2!} - \underbrace{9 \cdot \frac{8!}{3!}}_{\text{complemento}} = 241.920$$

- ii) Tengo 10 letras,  $\{p, l, n, m, s, o, o, o, i, i\}$ . Para que se forme "*n...s...p*" calculo  $\binom{10}{3} = 120$ , pensando que en un conjunto de 3, siempre puedo poner las letras "n    s    p". Para cada uno de estas 120 configuraciones de la pinta:

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} n & s & p & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & n & s & - & - & - & p & - & - \\ - & - & - & n & - & s & - & - & - & p \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \right. \rightarrow \text{tengo que rellenar con 7 letras los lugares que sobran,}$$

teniendo en cuenta las repeticiones de las "o" y de las "i":  $\binom{10}{3} \cdot \frac{7!}{3!2!}$

24.  **Falta hacerlo!**

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

25.  **Falta hacerlo!**

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

26.  **Falta hacerlo!**

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

27.  **Falta hacerlo!**

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

$${}^5\sum_1^8 k = 36$$

**28.** En este ejercicio no hace falta usar inducción.

i) Probar que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ . sug:  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

ii) Probar que  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ .

iii) Probar que  $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$  y deducir que  $\binom{2n}{n} < 4^n$ .

iv) Calcular  $\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$  y deducir que  $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$ .

 **Falta hacerlo!**

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

Binomio de Newton:  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

i)

ii)

iii)

iv)

**29.** Sea  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ , y sea  $R$  la relación de orden en  $\mathcal{P}(X)$  definida por:  $A \mathcal{R} B \iff A - B = \emptyset$ .

¿Cuántos conjuntos  $A \in \mathcal{P}(X)$  cumplen simultáneamente  $\#A \geq 2$  y  $A \mathcal{R} \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ?

**Hacer!**

**30.** Sea  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, \cancel{6}, 7, 8, 9, 10\}$ , y sea  $R$  la relación de equivalencia en  $\mathcal{P}(X)$  definida por:  $A \mathcal{R} B \iff A \cap \{1, 2, 3\} = B \cap \{1, 2, 3\}$ .

¿Cuántos conjuntos  $B \in \mathcal{P}(X)$  de exactamente 5 elementos tiene la clase de equivalencia  $\overline{A}$  de  $A = \{1, 3, 5\}$ ?

Como  $A$  tiene al 1 y al 3, los elementos  $B$ , conjuntos en este caso, pertenecientes a la clase  $\overline{A}$  deberían cumplir que si  $B \subseteq \overline{A} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \in B \\ 3 \in B \\ 2 \notin B \end{array} \rightarrow \text{si } 2 \in B \Rightarrow A \mathcal{R} B \right\}$ .

Los conjuntos de 5 elementos serán de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad \_ \quad \_ \quad \_ \\ \cap \{1, 2, 3\} \subsetneq \{1, 3\} \end{array} \xrightarrow{5 \text{ elementos}} \binom{7}{3} = 35. \text{ Los 7 números usados son } \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

¿Es solo eso o interpreto mal la  $\mathcal{R}$  u otra cosa?

**31.** Sean  $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$  y  $A = \{1\}$  ¿Cuántos subconjuntos  $B \subseteq X$  satisfacen que el conjunto  $A \triangle B$  tiene a lo sumo 2 elementos?

...

*a lo sumo = como mucho = como máximo*

*al menos = por poco = como mínimo*

...

La diferencia simétrica es la unión de los elementos no comunes a los conjuntos  $A$  y  $B$ . Si me piden que:

$$\#(A \triangle B) \leq 2 \Rightarrow B = \begin{cases} 1 \in B \rightarrow \#B \leq 3 \xrightarrow[\text{de la forma}]{\text{Busco conjuntos}} \begin{cases} \underline{1} - - \xrightarrow[\text{quedan 99. Elijo 2.}]{\text{el 1 está usado}} \binom{99}{2} \\ \underline{1} - \xrightarrow[\text{quedan 99. Elijo 1.}]{\text{el 1 está usado}} \binom{99}{1} \\ \underline{1} \xrightarrow[\text{quedan 99. Elijo 0.}]{\text{el 1 está usado}} \binom{99}{0} \end{cases} \\ 1 \notin B \rightarrow \#B \leq 1 \xrightarrow[\text{de la forma}]{\text{Busco conjuntos}} \begin{cases} - \xrightarrow[\text{elegir } 1 \notin B. \text{ Elijo 1}]{\text{tengo 99 números para}} \binom{99}{1} \\ \emptyset \xrightarrow[\text{elegir } 1 \notin B. \text{ Elijo 0}]{\text{tengo 99 números para}} \binom{99}{0} \end{cases} \end{cases}$$


Por último habría un total de  $\binom{99}{2} + \binom{99}{1} + \binom{99}{0} + \binom{99}{1} + \binom{99}{0}$  subconjuntos  $B \subseteq X$  para cumplir lo pedido.

**32.**

- Sea  $A$  un conjunto con  $2n$  elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en  $A$  que cumplan la condición de que para todo  $a \in A$  la clase de equivalencia de  $a$  tenga  $n$  elementos?
- Sea  $A$  un conjunto con  $3n$  elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en  $A$  que cumplan la condición de que para todo  $a \in A$  la clase de equivalencia de  $a$  tenga  $n$  elementos?

Hacer!

## Ejercicios extras:

 1. Sea  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$  la relación de equivalencia  $X \mathcal{R} Y \iff X \Delta Y \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\}$ .  
¿Cuántos conjuntos hay en la clase de equivalencia de  $X = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 6\}$ ?

1. La relación toma valores de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
2. Los elementos del conjunto  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$
3. El conjunto  $X = \{6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$  es simplemente un elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Los conjuntos  $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  tales que  $X \mathcal{R} Y$  van a ser los conjuntos que junto a  $X$  formarán la clase de equivalencia.  
 $\bar{X} = \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : X \mathcal{R} Y\}$

Para tener una relación de equivalencia deben cumplirse:

- Reflexividad.  $X \Delta X = \emptyset \checkmark \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\}$
- Simetría.  $X \Delta Y \checkmark = Y \Delta X, \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- Transitividad.


Condiciones que debería cumplir un elemento  $Y$  para pertenecer a la la clase de equivalencia, en otras palabras estar relacionado con  $X$ :

Los elementos  $\rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, 2, 3 \text{ no deben pertenecer a } Y \xrightarrow[\text{ejemplo}]{\text{por}} \left\{ \begin{array}{l} X \Delta \underbrace{\{3, 8, 9, \dots\}}_Y = \{3, 6, 7\} \not\subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \\ X \Delta \underbrace{\{1, 2, 3\}}_Y = \{1, 2, 3, 6, 7, \dots\} \not\subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \end{array} \right. \\ \hline 4, 5, 6, 7, 8 \text{ pueden o no pertenecer a } Y \xrightarrow[\text{ejemplo}]{\text{por}} \left\{ \begin{array}{l} X \Delta \underbrace{\{4, 6, 8, 9, \dots\}}_Y = \{4, 7\} \checkmark \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \\ X \Delta \underbrace{\{9, \dots\}}_Y = \{6, 7, 8\} \checkmark \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \end{array} \right. \\ \hline 9, 10, \dots \text{ deben pertenecer a } Y \xrightarrow[\text{ejemplo}]{\text{por}} \left\{ \begin{array}{l} X \Delta \underbrace{\{6, 7, 8\}}_Y = \{9, 10, \dots\} \not\subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \\ X \Delta \underbrace{\{10, \dots\}}_Y = \{9\} \not\subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \\ X \Delta \underbrace{\{9, \dots\}}_Y = \{6, 7, 8\} \checkmark \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Se concluye que la clase de equivalencia será el conjunto  $\bar{X}$  (notación inventada):

$\bar{X} = \{Y_1 \cup \{9, 10, \dots\}, Y_2 \cup \{9, 10, \dots\}, \dots, Y_{32} \cup \{9, 10, \dots\}\}$  con  $Y_i \in \mathcal{P}(\{4, 5, 6, 7, 8\})$   $i \in [1, 2^5]$  donde  $\#\bar{X} = 2^5$

 2. Sea  $\mathcal{F} = \{f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$ .

- a) Determinar cuántas funciones  $f \in \mathcal{F}$  satisfacen  $\#\{x \in \text{Dom}(f) / f(x) = 9\} = 2$ .
- b) Determinar cuántas funciones  $f \in \mathcal{F}$  satisfacen  $\#\text{Im}(f) = 4$

Observo que  $\# \text{Dom}(f) = 5$  y  $\# \text{Cod}(f) = 9$ .

- a) Quiero contar cuántas cosas hay con esta pinta:  $\star^1$
- |              |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $f(1)$       | $f(2)$       | $f(3)$       | $f(4)$       | $f(5)$       |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| 9            | $\beta$      | $\gamma$     | 9            | $\delta$     |

A partir de ese ejemplo puedo pensar que quiero que haya 2 valores de  $x$ , cualesquiera, que vayan a parar al 9 y el resto de los números,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  tiene que ir a parar a algo que sea  $\neq 9$ .

Lo primero que calculo es de cuántas maneras distintas puedo agarrar 2  $x$  de entre las 5 que tengo para usar del conjunto de partida de las  $f$ :  $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ , entonces tengo 10 situaciones de la pinta de  $\star^1$  donde para cada una de esas situaciones los números que no van al 9 pueden ir a parar a cualquier

valor del 1 al 8. Por lo tanto

|              |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $f(1)$       | $f(2)$       | $f(3)$       | $f(4)$       | $f(5)$       |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| 9            | $\beta$      | $\gamma$     | 9            | $\delta$     |
| #1           | #8           | #8           | #1           | #8           |

posibles valores  $\rightarrow \rightarrow 8^3$  funciones.

Eso es solo para el caso con lo 9 en esos lugares en particular. Tengo 10 de esos caso. Por lo que la cantidad de funciones total va a ser:  $10 \cdot 8^3$

- b) Parecido al anterior. Voy a contar cosas con la pinta:  $\star^2$
- |              |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $f(1)$       | $f(2)$       | $f(3)$       | $f(4)$       | $f(5)$       |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| $\alpha$     | $\beta$      | $\gamma$     | $\alpha$     | $\delta$     |

con  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$ , para que  $\text{Im}(f) = 4$ . En un razonamiento análogo a lo hecho antes, tengo 2 valores iguales ( $\alpha$ ), que pueden estar en cualquier lugar de los 5 que hay eso, *nuevamente*:  $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \star^3$ , elijo los posibles valores, pero a diferencia del caso anterior teniendo en cuenta de no repetir.

posibles valores  $\rightarrow$

|              |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $f(1)$       | $f(2)$       | $f(3)$       | $f(4)$       | $f(5)$       |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| $\alpha$     | $\beta$      | $\gamma$     | $\alpha$     | $\delta$     |
| #9           | #8           | #7           | #1 $\star^4$ | #6           |

$\rightarrow 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$  funciones.

El valor en  $\star^4$  es 1, porque una vez seleccionado un  $\alpha$  el otro *solo puede valer lo mismo*, bueno, porque son la misma letra, ¿no?. Entonces en esas posiciones en particular hay  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$ , y al igual que

antes hay  $\star^3$  10 de esas configuraciones así que la cantidad de funciones total va a ser:  $10 \cdot \frac{9!}{5!} = \frac{10!}{5!}$