Apunte único: Álgebra I - Práctica 6

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

<u>Disclaimer:</u>
Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Si usás este apunte vas a reprobar!

Not really. Dependerá de como lo uses, puede ser un arma de doble filo.
Ya sabés como se usa esto. Depende de vos lo que hagas con él.
Si estás trabado, antes de ver la solución que hizo otra persona:

- Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
- Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
- ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
- Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
- Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir *'no me sale'* $\nexists +$. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles de un tema en particular, no te van a salir los ejercicios más difíciles: Sentido común.

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confiaza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada.* Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber.* A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas de Teresa que son buenísimos.

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra: Prácticas Pandemia.

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre Just Do IT!

Eh, loco, fatalista, distópico, relajá un toque te vas a quedar (más) pelado... *va a salir todo bien!*

El repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

https://github.com/nad-garraz/algebraUno

La Guía 6 se actualizó por última vez: 11/11/24 @ 10:55

Guía 6

https://github.com/nad-garraz/algebraUno/blob/main/6-guia/6-sol.pdf

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

https://t.me/+1znt2GV1i8cwMTNh

Notas teóricas:

Raíces de un número complejo:

- Sean $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z = r_z e^{\theta_z i}$ y $w = r_w e^{\theta_w i}$ con r_z, $s_w \in \mathbb{R}_{>0}$ y θ_z, $\theta_w \in \mathbb{R}$.

  Entonces $z = w \overset{!!}{\iff} \begin{cases} r_z = r_w \\ \theta_z = \theta_w + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- raíces n-esimas: $w^n = z \overset{!!}{\iff} \begin{cases} (r_w)^n = r_z \\ \theta_w \cdot n = \theta_z + 2k\pi \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

  De donde se obtendrán n raíces distintas:

  $$w_k = z_w e^{\theta_{w_k} i}, \text{ donde } r_w = \sqrt[n]{r_z} \quad \text{y} \quad \theta_{w_k} = \frac{\theta_z}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta_z + 2k\pi}{n}$$

  Entender bien como sacar raíces n-ésimas es importantísimo para toda la guía de complejos y la próxima de polinomios.

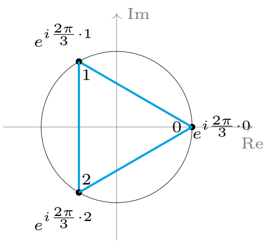
Grupos G_n:

- $G_n = \{w \in \mathbb{C} \,/ w^n = 1\} = \left\{ e^{\frac{2k\pi}{n} i} \;:\; 0 \le k \le n-1 \right\}$

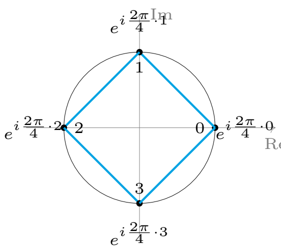
(n=1) $w = 1$

(n=2) $w = \pm 1$

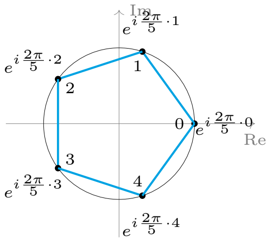
(n=3)



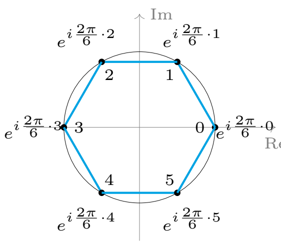
(n=4)



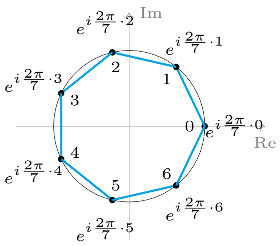
(n=5)



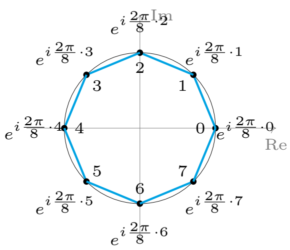
(n=6)



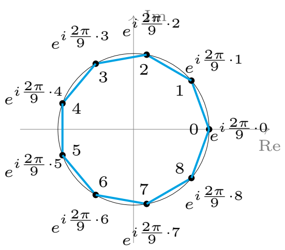
(n=7)



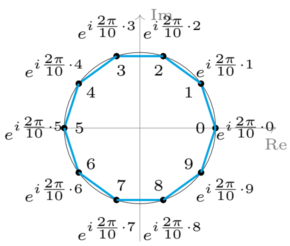
(n=8)



(n=9)



(n=10)



Notar que:

- Si n es par el grupo tiene al -1.
- Toda raíz compleja tiene a su conjugado complejo.
- Para ir de un punto a otro, se lo múltiplica por $e^{i\theta}$ eso *rota* al número en θ respecto al origen.

- $(G_n, \cdot)$ es un grupo abeliano, o conmutativo.
  - $\forall w, z \in G_n, wz = zw$ y $zm \in G_n$.
  - $1 \in G_n,\ w \cdot 1 = 1 \cdot w = w \qquad \forall w \in G_n$.
  - $w \in G_n \Rightarrow \exists\, w^{-1} \in G_n,\ w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1$
    - $\overline{w} \in G_n,\ w \cdot \overline{w} = |w|^2 = 1 \Rightarrow \overline{w} = w^{-1}$

- *Propiedades:* $w \in G_n$
  - $m \in \mathbb{Z}$ y $n \,\big|\, m \Rightarrow w^m = 1$.
  - $m \equiv m'\ (n) \Rightarrow w^m = w^{m'} \quad (w^m = w^{r_n(m)})$
  - $n \,\big|\, m \iff G_n \subseteq G_m$
  - $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
  - La suma de una raíz w de G_n: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} w^k = \frac{w^n - 1}{w - 1} = 0$ si $w \neq 1$

Ejercicios de la guía:

---

1. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→.

---

2. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→.

---

3. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→.

---

4. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→.

---

5. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→.

6.

a) Determinar la formar binomial de $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17}$.

b) Determinar la forma binomial de $(-1+\sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

---

a) Multiplico y divido por el conjugado complejo para sacar la parte imaginaria del denominador:

$$z \overset{\star^{1}}{=} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17} \overset{!}{=} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{(1-i)} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right)^{17} = \left(\frac{(1+\sqrt{3}i)\cdot(1+i)}{2}\right)^{17} =$$

Ahora paso eso a notación exponencial y acomodo usando propiedades de exponentes:

$$\begin{cases} 1+\sqrt{3}i = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} \\ 1+i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i} \end{cases}$$

$$\left(\frac{(1+\sqrt{3}i)\cdot(1+i)}{2}\right)^{17} = \left(\frac{2\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{2}\right)^{17} = 2^{\frac{17}{2}} \cdot e^{\frac{119}{12}\pi i} \overset{!}{=} 2^{\frac{17}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i}$$

$$\star^{1}\ z = 2^{\frac{17}{2}} \cos(\tfrac{1}{12}\pi) - i 2^{\frac{17}{2}} \sin(\tfrac{1}{12}\pi)$$

Un espanto. Pero bueh, $\frac{1}{12}\pi = 15°$

b) ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LATEX→.

---

7. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

a) $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$

b) $(-\sqrt{3} + i)^n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ es un número real negativo.

c) $\arg((-1+i)^{2n}) = \frac{\pi}{2}$ y $\arg((1-\sqrt{3}i)^{n-1}) = \frac{2}{3}\pi$

---

i) $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$

$$\overline{(\sqrt{3}-i)^n = 2^n e^{i\frac{11}{12}\pi n} = 2^{n+1} \cdot 2e^{i\frac{2}{3}\pi}}$$

$$\to \begin{cases} 2^n = 2^n \\ \frac{11}{12}\pi n = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \to 11n = 8 + 8k \xrightarrow{8(\mathrm{k+1})} \boxed{n \equiv 0\ (8)} \end{cases}$$

ii) Un número real negativo tendrá un $\arg(z) = \pi$

$$\underbrace{(-\sqrt{3}+i)^n}_{2^n e^{i\frac{5}{6}\pi n}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}_{e^{\frac{\pi}{3}i}} = 2^n e^{i(\frac{5}{6}n + \frac{1}{3})\pi} \to \theta = (\tfrac{5}{6}n + \tfrac{1}{3})\pi$$

$$\xrightarrow{\theta = \pi + 2k\pi} \cancel{\pi}\frac{5}{6}n + \frac{\cancel{\pi}}{3} = \cancel{\pi} + 2k\cancel{\pi} \xrightarrow[\text{congruencia}]{\text{acomodo}} 5n \equiv 4\ (12) \xrightarrow[\text{por 5}]{\text{multiplico}} \boxed{n \equiv 8\ (12)}$$

iii) $\arg((-1+i)^{2n}) = \frac{\pi}{2}$ y $\arg((1-\sqrt{3}i)^{n-1}) = \frac{2}{3}\pi$

---

8. Hallara en cada caso las raíces n-ésimas de $z \in \mathbb{C}$:

i) $z = 8,\ n = 6$

ii) $z = -4,\ n = 3$

iii) $z = -1 + i,\ n = 7$

iv) $z = (2-2i)^{12},\ n = 6$

Ejercicio importante. La raíz n-ésima de z es el número que multiplicado por sí mismo n veces me da z:

$$w^n = z,$$

es decir que quiero encontrar w. Siempre va a haber tantas soluciones como n.

i) Dado un número *genérico* $w = r \cdot e^{\theta i}$, lo visto con la info del enunciado:

$$w^6 = w = \left(r \cdot e^{\theta i}\right)^6 = r^6 \cdot e^{6\theta i} \bigstar^{1}$$

Ahora hago lo mismo con el otro número $z = 8$:

$$z = 8 \cdot e^{0i} = 8 \bigstar^{2}$$

Una vez con todo escrito en forma exponencial, es igualar prestar atención a la periodicidad del argumento y listo:

$$w^6 = z \overset{\bigstar^1}{\underset{\bigstar^2}{\Longleftrightarrow}} r^6 \cdot e^{6\theta i} = 8 \overset{!}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r^6 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} \\ 6\theta \overset{!}{=} 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta_k = \frac{1}{3}k\pi \end{cases}$$

Con eso concluímos que las raíces son de la forma:

$$w_k = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{1}{3}k\pi} \text{ con } k \in [0, 5]$$

ii) Mismo procedimiento, te tiro una pista: Los números negativos tienen argumento π, así que en notación exponencial:

$$-4 = 4 \cdot e^{\pi i}$$

iii) En notación exponencial z, que está en segundo cuadrante:

$$z = -1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

iv) En notación exponencial z se calcula primero con la base:

$$z = (2 - 2i)^{12} = \left(2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{7}{4}\pi i}\right)^{12} = 2^{18} \cdot e^{21\pi i} \overset{!}{=} 2^{18} \cdot e^{\pi i}$$

---

9. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0$

Para que se cumpla la igualdad entre 2 números complejos, *las partes reales y imaginarias* deben ser iguales:

$$3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3z^5}_{\in\mathbb{C}} = \underbrace{-2|z|^5 - 32}_{\in\mathbb{R}} \overset{!}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(3z^5) = -2|z|^5 - 32 \\ \operatorname{Im}(3z^5) = 0 \end{array} \right\}$$

De la ecuación de la parte imaginaria: (Es útil recordar que $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$)

$$\operatorname{Im}(3z^5) = 3 \cdot \frac{z^5 - \bar{z}^5}{2} = 0 \iff z^5 = \bar{z}^5 \iff |z|^5 e^{5\theta i} = |z|^5 e^{-5\theta i} \underset{2k\pi}{\overset{!}{\iff}} \left\{ \begin{array}{l} 5\theta = -5\theta + 2k\pi \\ \underset{\star^1}{\overset{!}{\iff}} \theta_k = \frac{1}{5}k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

De la ecuación de la parte real: (Es útil recordar que si $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$, entonces se puede expresar $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$)

$$\operatorname{Re}(3z^5) = 3 \cdot \tfrac{z^5 + \bar{z}^5}{2} = 3 \cdot \tfrac{|z|^5 e^{5\theta i} + |z|^5 e^{-5\theta i}}{2} = 3|z|^5 \cos(5\theta) = -2|z|^5 - 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z|^5(3\cos(5\theta) + 2) = -2^5 \xrightarrow[\text{en } \theta_k \star^1]{\text{evaluando}} |z|^5(3\cos(k\pi) + 2) = -2^5 \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{par}]{k} \quad 0 < |z|^5(3+2) \neq -2^5 \text{ ☠} \\ \xrightarrow[\text{impar}]{k} \quad |z|^5(-3+2) = -2^5 \Leftrightarrow |z| = 2 \end{array} \right.$$

Finalmente teniendo en cuenta que k tiene que ser impar, y que el $\arg(z) \in [0, 2\pi)$:

$$z_k = 2e^{\theta_k i} \quad \text{con } \theta_k = \frac{1}{5}k\pi \quad \text{y} \quad k \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

---

10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales la ecuación $z^n + i\bar{z}^2 = 0$, tenga exactamente 6 soluciones y resolver en ese caso.

$$\xrightarrow[\text{ecuación}]{\text{acomodo la}} z^n = -i\bar{z}^2 \xrightarrow[\text{en notación exponencial}]{r = |z|, \text{ expreso todo}} \left\{ \begin{array}{l} z^n = r^n e^{n\theta i} \\ \bar{z}^2 = r^2 e^{-2\theta i} \\ -i = e^{\frac{3}{2}\pi} \end{array} \right\} \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{notación exponencial}]{\text{reescribo ecuación con}} r^n e^{n\theta i} = r^2 e^{(\frac{3}{2}\pi - 2\theta)i} \iff \left\{ \begin{array}{l} n\theta = \frac{3}{2}\pi - 2\theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ r^n = r^2 \to r^2(r^{n-2} - 1) = 0 \end{array} \right\}$$

La ecuación de r:
$r = 0$ aporta una solución trivial para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
$r = 1$ es un comodín que me deja usar cualquier n para jugar con la ecuación de θ.
$n = 2$ es un valor que daría una solución para cada $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. No sirve porque necesito solo 6 soluciones.

La ecuación de θ:
$\xrightarrow[n \text{ libre}]{r=1} (n+2)\theta = (\frac{3}{2} + 2k)\pi \xrightarrow[\forall n \in \mathbb{N}]{n+2 \neq 0} \theta = \frac{1}{n+2}(\frac{3}{2} + 2k)\pi \xrightarrow[5 \text{ porciones de } 2k\pi]{n=3 \text{Cómo justificar esto elegantemente?}} \theta = \frac{3+4k}{10}\pi$

Las 6 soluciones para $n = 3$:

$$z^n + i\overline{z}^2 = 0 \iff \begin{cases} n = 3 \\ z = 0, \text{ cuando } r = 0 \\ \text{o} \\ z_k = e^{\theta_k i} \text{ con } \theta_k = \frac{3+4k}{10}\pi,\ k \in [0,4] \end{cases}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

11.

a) Calcular $w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

b) Calcular $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

c) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

d) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$

Voy a estar usando las siguientes propiedades en G_n:

$$\text{Si } w \in G_n \Rightarrow \begin{cases} w^n = 1 \Rightarrow w^k = w^{r_n(k)} \\ \overline{w}^k = w^{r_n(-k)} \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n, \text{ lo uso para saber con cuales raíces hay que tener cuidado} \\ \text{Si } w \in G_p \text{ con } p \text{ primo} \end{cases}$$

a) Calcular $w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

Raíces de G_7 de interés: 7 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.
Si $w = 1$:
$w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = 6$
Si $w \neq 1$:
$w + \underbrace{\overline{w}}_{w^6} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = w + w^6 + w^2 + 2w^3 + w^4 - \underbrace{(w^7)^5}_{=1} w^3(1 - w^2) =$
$= -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6}_{=0} = -1 \quad \checkmark$

b) Calcular $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

Raíces de G_3 de interés: 3 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.

Si $w = 1$:

$w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8 = 10$

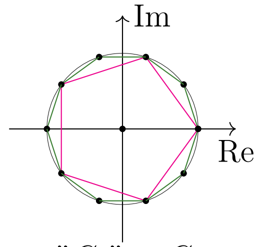
Si $w \neq 1$:

$\underbrace{w^{73}}_{w} + \underbrace{\overline{w} \cdot w^9}_{w^2 \cdot 1} + 8 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2}_{=0} + 8 = 7$

c) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

Raíces de G_{10} de interés: $2 \,|\, 10$ y $5 \,|\, 10$. 10 es par $\Rightarrow w = \pm 1$ y raíces de G_2 y de G_5 se hacen a parte.

$G_5 \subseteq G_{10}$



- *Si* $w = \pm 1$:

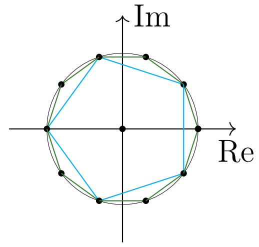
  $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 5 \quad \checkmark$

- *Si* $w \in G_{10}$ y $w \neq \pm 1$:

  $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 1 + w^2 + w^8 + w^4 + w^6 =$

  $= \sum_{k=0}^{4} (w^2)^k = \frac{(w^2)^5 - 1}{w^2 - 1} = \frac{\overbrace{w^{10}}^{=1} - 1}{w^2 - 1} = 0$

"G_5" $\subseteq G_{10}$



d) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$

Si $w = 1$:

$w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}} = 4$

Si $w \neq 1$:

$w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}} = w^4 + w^2 + w + w^3 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = -1$

12.

a) Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$

b) Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\text{Re}\left(\sum_{k=0}^{60} w^k\right)$.

---

a) Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$

Sé que si $w \in G_{36} \Rightarrow \begin{cases} w^{36} = 1 \\ \sum_{k=0}^{35} w^k = 0 \end{cases}$

Como $w^4 \neq 1$ sé que $w \neq \pm 1$. Si no tendría que considerar casos particulares para la suma.

$$\text{Si } \sum_{k=7}^{60} w^{4k} = \underbrace{\sum_{k=7}^{60} w^{4k} + \sum_{k=0}^{6} w^{4k}}_{\sum_{k=0}^{60} w^{4k}} - \sum_{k=0}^{6} w^{4k} = \sum_{k=0}^{60} w^{4k} - \sum_{k=0}^{6} w^{4k} = \frac{(w^4)^{61}-1}{w^4-1} - \frac{(w^4)^{7}-1}{w^4-1} = \frac{(w^4)^{61}-(w^4)^7}{w^4-1}$$

$$\xrightarrow[w^36=1]{61=9\cdot 6+7} \frac{(\overbrace{w^{36}}^{=1})^6\cdot(w^4)^7-(w^4)^7}{w^4-1} \to \boxed{\sum_{k=7}^{60} w^{4k} = 0}$$

b) Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\text{Re}\left(\sum_{k=0}^{60} w^k\right)$.

$$\text{Sé que si } w \in G_{11} \Rightarrow \begin{cases} w^{11} = 1 \\ \sum_{k=0}^{10} w^k = 0 \\ 11 \text{ es impar} \Rightarrow -1 \notin G_{11} \end{cases}$$

Como $w \neq 1$ no calculo caso particular para la suma. Me piden la parte real $\xrightarrow{\text{uso}} \text{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.

Probé hacer la suma de Gauss como en el anterior, pero no llegué a nada, abro sumatoria y uso que $61 = 5 \cdot 11 + 6$, porque hay 61 sumandos.

$$\sum_{k=0}^{60} w^k = w^0 + \cdots + w^{60} = 5 \cdot \underbrace{\overbrace{(w^0 + w^1 + \cdots + w^9 + w^{10})}^{=0}}_{\text{agrupé usando: } w\in G^{11} \Rightarrow w^k = w^{r_{11}(k)}} + w^{55} + w^{56} + w^{57} + w^{58} + w^{59} + w^{60} =$$

$$= w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 \bigstar^1$$

También voy a usar que si $w \in G_{11} \Rightarrow \overline{w}^k = w^{r_{11}(-k)}$

$$\text{Re}\left(\sum_{k=0}^{60} w^k\right) = \frac{\sum_{k=0}^{60} w^k + \sum_{k=0}^{60} \overline{w}^k}{2} \overset{\bigstar^1}{=} \frac{w^0+w^1+w^2+w^3+w^4+w^5+\overline{w}^0+\overline{w}^1+\overline{w}^2+\overline{w}^3+\overline{w}^4+\overline{w}^5}{2} =$$

$$= \frac{w^0}{2} + \frac{\overbrace{w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^{10} + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}^{\sum_{k=0}^{10} w^k}}{2} = \frac{\overbrace{w^0}^{1}}{2} + \frac{\overbrace{\sum_{k=0}^{10} w^k}^{=0}}{2} = \frac{1}{2}$$

---

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ raíz cúbica de la unidad y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$. Concluir que $z_n \in G_6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hay que probar por inducción. Quiero probar:

$$p(n): z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

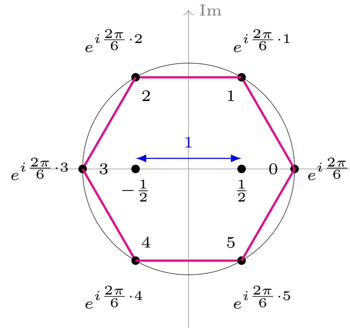
Caso base:

$$\begin{cases} p(1): z_1 = 1 + e^{\frac{2\pi}{3}i} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ p(2): z_2 = \overline{1 + z_1^2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = 1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$

Paso inductivo:

$$\begin{cases} p(2k): z_{2k} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero } \Rightarrow p(2k+2) \text{ ¿Verdadero?} \\ p(2k+1): z_{2k+1} = e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero } \Rightarrow p(2k+3) \text{ ¿Verdadero?} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{2k+2} = \overline{1 + z_{2k+1}^2} \overset{\text{HI}}{\iff} z_{2k+2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{\frac{\pi}{3}i}} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ z_{2k+3} = \overline{1 + z_{2k+2}^2} \overset{\text{HI}}{\iff} z_{2k+3} = \overline{1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{-\frac{\pi}{3}i}} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$



Dado que $p(1), p(2), p(2k), p(2k+1), p(2k+2), p(2k+3)$ resultaron ser verdaderas, entonces por el principio de inducción se concluye que $p(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado que la sucesión z_n tiene solo 2 imágenes, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y teniendo en cuenta que $e^{-i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{6}\cdot 5} \in G_6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

---

14. Se define en $\mathbb{C} - \{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por $z \,\mathcal{R}\, w \iff z\overline{w} \in \mathbb{R}_{>0}$.

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Dibujar en le plano complejo la clase de equivalencia de $z = 1 + i$.

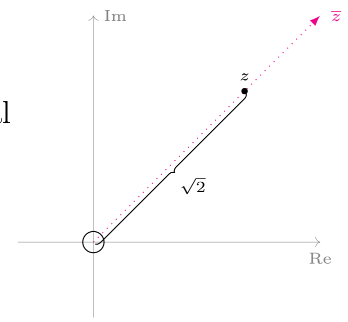
---

i) Dado un $z = re^{i\theta}$, tengo que $z \in \mathbb{R}_{>0} \iff \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) = 0 \iff r > 0 \wedge \theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

- *Reflexividad:* $z = re^{i\theta}$, $z \,\mathcal{R}\, z = r^2 e^{2\theta i}$ por lo tanto $z \,\mathcal{R}\, z \iff 2\theta = 2k\pi \iff \theta = k\pi \quad \checkmark$
- *Simetría:* $\begin{cases} z \,\mathcal{R}\, w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \quad \checkmark \\ w \,\mathcal{R}\, z = rse^{(\varphi-\theta)i} \iff \theta = -2k_2\pi + \varphi = 2k_3\pi + \varphi \quad \checkmark \end{cases}$
- *Transitividad:* $\begin{cases} z \,\mathcal{R}\, w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \\ w \,\mathcal{R}\, v = rte^{(\varphi-\alpha)i} \iff \varphi = 2k_2\pi + \alpha \\ \Rightarrow z \,\mathcal{R}\, v \iff \theta = 2k_1\pi + \underbrace{\varphi}_{2k_2\pi+\alpha} = 2\pi(k_1+k_2) + \alpha = 2k_3\pi + \alpha \quad \checkmark \end{cases}$

La relación $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

ii) Tengo que el $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. La clase $\overline{z}$ estará formada por los $w \in \mathbb{C}$ tal que: $\boxed{w \,\mathcal{R}\, z \iff \arg(w) = \frac{1}{4}\pi}$



---

15. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en G_{20}:

$$z \mathcal{R} w \iff zw^9 \in G_2.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Calcular la cantidad de elementos que hay en cada clase de equivalencia.

---

i) *Reflexividad:*

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \Rightarrow z \mathcal{R} z \iff e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \cdot e^{i\frac{9}{10}\pi k_z} = e^{ik_z\pi} = \begin{cases} 1 & k_z \text{ par} \\ -1 & k_z \text{ impar} \end{cases} \quad \checkmark$$

Simetría:

$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z}$ y $w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \in G_{20}$.

$\mathcal{R}$ es simétrica si: $z \mathcal{R} w \iff w \mathcal{R} z$

$$\begin{cases} zw^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_w)} \in G_2 \Leftrightarrow \frac{1}{10}(k_z+9k_w) = k \Leftrightarrow k_z + 9k_w = 10k \Leftrightarrow k_z \equiv -9k_w\ (10) \Leftrightarrow k_z \equiv k_w\ (10) \\ \to \boxed{z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w\ (10)} \\ wz^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9k_z)} = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9(10k+k_w))} = e^{i\frac{\pi}{10}(90k+10k_w)} = e^{i(9k+k_w)\pi} = e^{ik'\pi} \end{cases}$$

$\boxed{z \mathcal{R} w \iff w \mathcal{R} z}$ $\forall k,\ k_w \in \mathbb{Z}$ con $k_z \equiv k_w\ (10)$ $\checkmark$

Transitividad:

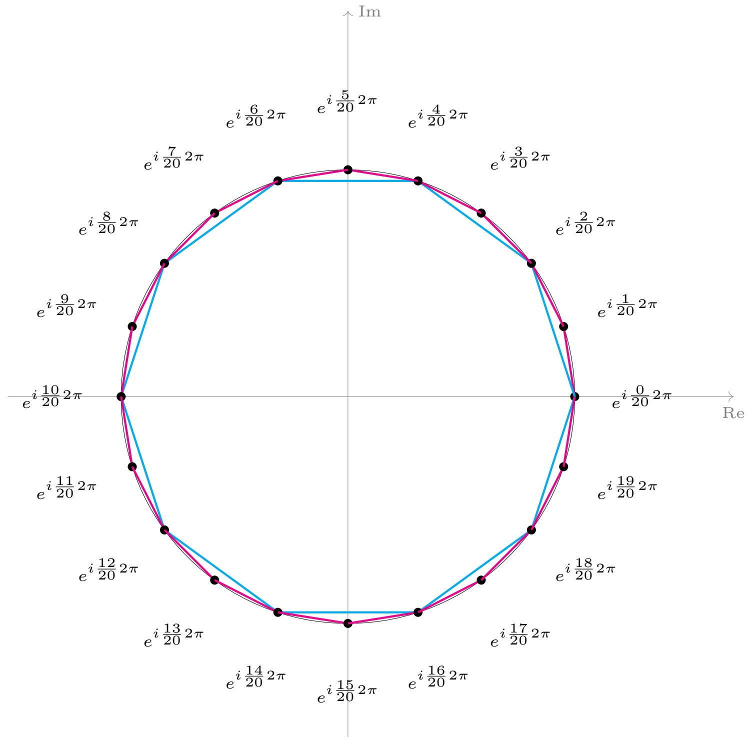
$$\left.\begin{cases} z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \\ w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \\ y = e^{i\frac{1}{10}\pi k_y} \end{cases}\right\} \in G_{20} \to \mathcal{R} \text{ es transitiva si: } z \mathcal{R} w \text{ y } w \mathcal{R} y \Rightarrow z \mathcal{R} y$$

$$\left\{\begin{array}{l} z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w\ (10)\bigstar^1 \\ w \mathcal{R} y \iff k_w \equiv k_y\ (10)\bigstar^2 \end{array}\right\}$$

$$\to zy^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_y)} \overset{\bigstar^1}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k+k_w+9k_y)} \overset{\bigstar^1}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k+10k'+k_y+9k_y)} = e^{i(k+k'+k_y)\pi} = e^{ik''\pi}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} z \mathcal{R} w \\ w \mathcal{R} z \end{array}\right\} \Rightarrow z \mathcal{R} y}$$

ii) $\#\overline{e^{i\frac{2\pi}{20}k}} = 2$ para algún $k \in \mathbb{Z}/r_{20}(k) < 20$. Dada la condición $k_z \equiv k_w\ (10)$, solo hay 2 números que tienen misma cifra de unidad entre 0 y 20. En el gráfico se ve que si $z \mathcal{R} w \Rightarrow w = -z$


Im
Re
$e^{i\frac{0}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{1}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{2}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{3}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{4}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{5}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{6}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{7}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{8}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{9}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{10}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{11}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{12}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{13}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{14}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{15}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{16}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{17}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{18}{20}2\pi}$
$e^{i\frac{19}{20}2\pi}$

Ejercicios extras:

---

1. Para $w \in G_6$, calcular $S = w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023}$

Si $w = 1$:

$S = 5$

Si $w = -1$:

$S = -1 + 1 + 5 - 1 - 4 - 1 = -1$

Si $w \neq \pm 1$:

$S = w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023} = w^5 + w^4 + 5w^2 + w^3 - 4w^2 + w^1 = w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = -1 + \underbrace{1 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5}_{=0} = -1$

---

2. Sea $w \in G_{14}$. Hallar todos los posibles valores de $w^7 + \sum\limits_{j=7}^{140} w^{2j}$

Voy a usar que: $\begin{cases} w \in G_n \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ \text{Si } m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n \end{cases}$

Si $w = 1$:

$$\underbrace{w^7}_{=1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{w^{2j}}_{=1} = 1 + (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{=134}) = 1 + 134 = 135 \quad \checkmark$$

Si $w = -1$:

$$\underbrace{w^7}_{=-1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{(w^j)^2}_{=1} = -1 + (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{=134}) = -1 + 134 = 133 \quad \checkmark$$

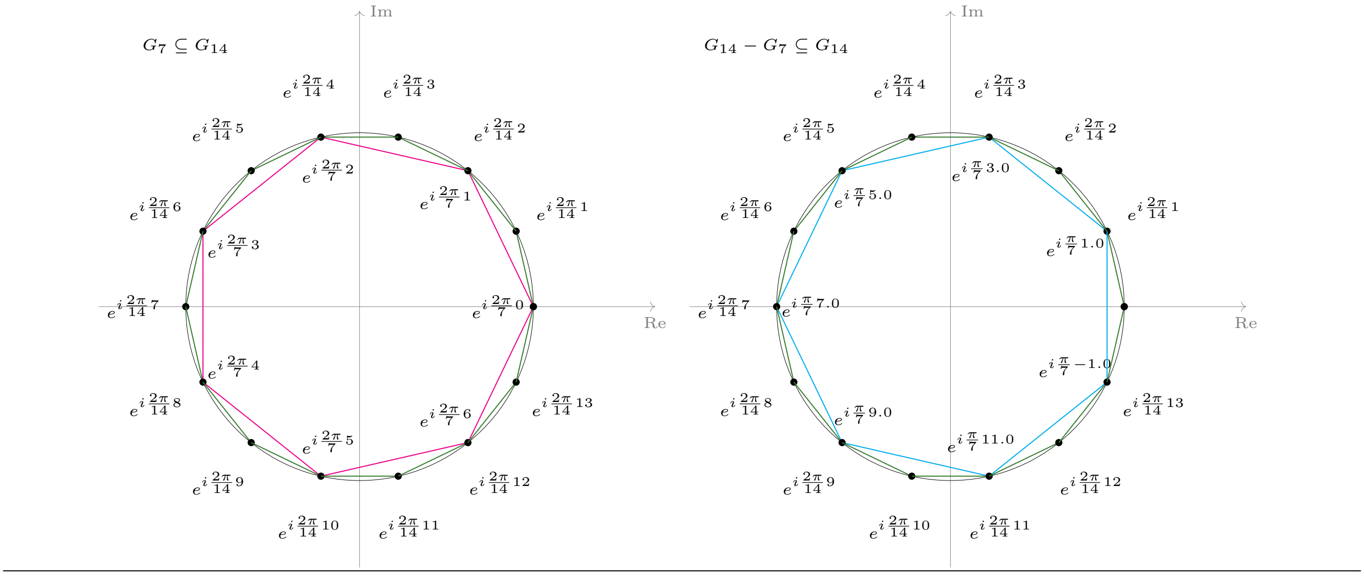
Si $w \neq \pm 1$:

$w \in G_{14} \Rightarrow w = e^{i\frac{2k\pi}{14}}$ con $k \in \mathbb{Z}_{[0,13]} \Rightarrow w^2 = \left(e^{i\frac{2k\pi}{14}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{7}\cdot k} \in G_7 \Rightarrow \sum\limits_{j=0}^{6} (w^2)^j = 0$

$$w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j} = w^7 + \sum_{j=0}^{140} (w^2)^j - \underbrace{\sum_{j=0}^{6} (w^2)^j}_{=0} = w^7 + \frac{(w^2)^{141} - 1}{w^2 - 1} - 0 = w^7 + \underbrace{\frac{w^2((\overbrace{w^{14}}^{=1})^{20} - 1}{w^2 - 1}}_{=1} = w^7 + 1$$

Si $\begin{cases} w \in G_7 & \Rightarrow w^7 = 1 \\ w \in G_{14} - G_7 & \Rightarrow w^7 = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} w \in G_7 & \to 1 + 1 = 2 \quad \checkmark \\ w \in G_{14} - G_7 & \to -1 + 1 = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$



---

3. Sea $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- $8 \mid 3n + |z^3|$
- $\arg(z^{7n+6}) = \arg(i)$

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ \theta_z = \frac{11}{6}\pi \end{cases} \to z = |z|e^{\theta_z i} = e^{i\frac{11}{6}\pi} \Rightarrow z^3 = e^{i\frac{11}{2}\pi} = -1 \Leftrightarrow |z^3| = 1$$

Primera condición:

$$8 \mid 3n + |z^3| = 3n + 1 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 3n + 1 = 8k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 3n + 1 \equiv 0\ (8) \Leftrightarrow 3n \equiv 7\ (8) \underset{(\Leftarrow)3\ \perp\ 8}{\overset{\times 3}{\Longleftrightarrow}} 9n \equiv 21\ (8) \Leftrightarrow n \equiv 5\ (8) \quad \checkmark$$

Segunda condición:

$$\arg(z^{7n+6}) = \arg(i) \Leftrightarrow \left(e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^{7n+6} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{i\frac{77}{6}\pi + 11\pi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{77}{6}n\pi + 11\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\underset{n}{\xrightarrow{\text{despejo}}} \frac{77}{6}n + 11 = \frac{1}{2} + 2k \Leftrightarrow 77n = -63 + 12k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 77n \equiv -63\ (12) \Leftrightarrow 5n \equiv -3\ (12) \underset{(\Leftarrow)5\ \perp\ 12}{\overset{!\quad \times 5}{\Longleftrightarrow}} n \equiv 9\ (12) \quad \checkmark$$

$$\underset{\text{TCHR}}{\xrightarrow{\text{junto info}}} \begin{cases} n \equiv 9\ (12) \\ n \equiv 5\ (8) \end{cases} \underset{\textit{divisores coprimos}}{\overset{\text{quiero}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} n \equiv 1\ (4) & \checkmark \\ n \equiv 0\ (3) & \\ n \equiv 1\ (4) & \checkmark \quad \checkmark \\ n \equiv 1\ (2) & \checkmark \end{cases} \underset{\text{de mayor divisor}}{\overset{\text{me quedo con el}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} n \equiv 0\ (3) \star^1 \\ n \equiv 5\ (8) \star^2 \end{cases}$$

Ahora sí, tengo el sistema con *divisores coprimos*, por TCHR tengo solución.

$$\underset{\star^1}{\xrightarrow{\text{de}}} n = 3k\star^3 \quad \checkmark \quad \underset{\text{en } \star^2}{\xrightarrow{\text{reemplazo}}} 3k \equiv 5\ (8) \underset{(\Leftarrow)3\ \perp\ 5}{\overset{\times 3}{\Longleftrightarrow}} k \equiv 7\ (8) \Leftrightarrow k = 8j + 7 \quad \checkmark$$
$$\underset{k \text{ en } \star^3}{\xrightarrow{\text{reemplazo}}} n = 3(8j + 7) = 24j + 21 \Leftrightarrow \boxed{n \equiv 21\ (24)} \quad \checkmark$$

---

4. Sea $w = e^{\frac{\pi}{18}i}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente:

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = 0 \qquad \sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = 0.$$

Expresar la solución como una única ecuación de congruencia.

Como $w = e^{\frac{\pi}{18}i} \neq \pm 1 \begin{cases} w^3 \neq \pm 1 \\ w^4 \neq \pm 1 \end{cases}$, puedo usar Gauss para las sumas.

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = \sum_{k=0}^{5n+1} (w^3)^k = \frac{(w^3)^{5n+2}-1}{w^3-1} = 0 \Leftrightarrow (w^3)^{5n+2} = 1$$

$$(w^3)^{5n+2} = 1 \underset{\text{exponente}}{\overset{\text{laburo}}{\Longleftrightarrow}} \frac{15n+6}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 5n+2 = 12k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 5n \equiv 10\ (12) \bigstar^1$$

$$\sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = \sum_{k=0}^{4n+6} (w^4)^k = \frac{(w^4)^{4n+7}-1}{w^4-1} = 0 \Leftrightarrow (w^4)^{4n+7} = 1$$

$$(w^4)^{4n+7} = 1 \underset{\text{exponente}}{\overset{\text{laburo}}{\Longleftrightarrow}} \frac{16n+28}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 4n+7 = 9k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 4n \equiv 2\ (9) \bigstar^2$$

$$\begin{matrix} \bigstar^1 \\ \bigstar^2 \end{matrix} \begin{cases} n \equiv 2\ (12) \\ n \equiv 5\ (9) \end{cases} \to \begin{cases} n \equiv 2\ (3) \\ n \equiv 2\ (4) \\ n \equiv 2\ (3) \end{cases} \xrightarrow[\text{me quedo con } n \equiv 5\ (9)]{\text{Sistema compatible}} \begin{cases} n \equiv 2\ (4) \\ n \equiv 5\ (9) \end{cases} \xrightarrow[\text{solución por TCR}]{9\ \perp\ 4 \text{ hay}} \boxed{n \equiv 14\ (36)} \quad \checkmark$$