

Álgebra I

Práctica 2 resuelta

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

- [Notas teóricas](#)
- Ejercicios de la guía:

1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.
2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	

- [Ejercicios Extras](#)

Notas teóricas:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$
3. Inducción: Sea $H \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que H es un conjunto *inductivo* si se cumplen las dos condiciones siguiente:
 - $1 \in H$
 - $\forall x, x \in H \Rightarrow x+1 \in H$
4. Principio de inducción: Sea $p(n), n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales. Si p satisface
 - (Caso Base) $p(1)$ es Verdadera.
 - (Paso inductivo) $\forall h \in \mathbb{N}, p(h) \text{ Verdadera} \Rightarrow p(h+1) \text{ Verdadera}$, entonces $p(n)$ es Verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.
5. Principio de inducción *corrido*: Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $p(n), n \geq n_0$, una afirmación sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si p satisface:
 - (Caso Base) $p(n_0)$ es Verdadera.
 - (Paso inductivo) $\forall h \geq n_0, p(h) \text{ Verdadera} \Rightarrow p(h+1) \text{ Verdadera}$, entonces $p(n)$ es Verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. explicación de las torres de Hanoi.

1) $a_1 = 1$

2) $a_3 = 7$

3) $a_4 = 15$

4) $a_9 = a_9 + 1 + a_9 = 2a_9 + 1$

$\rightarrow \boxed{a_n + 1 = 2a_n + 1}$

2. Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como las torres de Hanoi $a_1 = 1 \wedge a_{n+1} = 2a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$, es una sucesión definida por recurrencia.
3. El patrón de las torres de Hanoi parece ser $\underbrace{a_n = 2^n - 1}_{\text{término general}} \forall n \in \mathbb{N}$. Esto puedo probarse por inducción.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Proposición: } p(n) : a_n = 2^n - 1 \\ \text{Caso Base: } p(1) \text{ es verdadero? } a_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } p(h) \text{ es verdadero} \Rightarrow p(h+1) \text{ V?} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{HI : } a_h = 2^h - 1 \\ \text{QPQ : } a_{h+1} = 2^{h+1} \end{array} \right. \rightarrow \text{cuentas y queda que } \boxed{p(n) \text{ es V, } \forall n \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$$

4. \sum es una def por recurrencia $\rightarrow \sum_{k=1}^1 a_k = a_1 \wedge \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \dots \text{facil}$

Principio de inducción III: Sea $p(n)$ una proposición sobre \mathbb{N} . Si se cumple:

1. $p(1) \wedge p(2) \vee$
2. $\forall h \in \mathbb{N}, p(h) \wedge p(h+1), V \Rightarrow p(h+2) \vee$ (paso inductivo), entonces $p(n)$ es verdadera.

$p(n) : a_n = 3^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{caso base: } a_1 = 3, a_2 = 9 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } \forall h \in \mathbb{N}, p(h) \wedge p(h+1) \vee \Rightarrow p(h+2) \vee \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{HI: } a_h = 3^h \wedge a_{h+1} = 3^{h+1} \\ \text{Quiero probar que: } a_{h+2} = 3^{h+2} \\ \text{Usando la fórmula de recurrencia sale enseguida} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Principio de inducción IV Sea $p(n)$ una proposición sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si se cumple:

1. $p(n_0) \wedge p(n_0 + 1) \vee$
2. $\forall h \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}, p(h+1) \wedge p(h+2) \vee \Rightarrow p(h+2) \vee$ (paso inductivo), entonces $p(n)$ es verdadera. $\forall n \geq n_0$

Sucesión de Fibonacci: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \geq 0$

Truco para sacar fórmulas a partir de Fibo.

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 = \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \tilde{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1 \wedge \tilde{\Phi}^2 = \tilde{\Phi} + 1$$

- defino sucesiones Φ^n que satisfacen la recurrencia de la sucesión de Fibonacci pero no sus condiciones iniciales.
- puedo formar una combineta lineal talque: $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (a\Phi^n + b\tilde{\Phi}^n)$ es la sucesión que satisface:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = a + b \\ c_1 = a\Phi + b\tilde{\Phi} \end{array} \right. \text{ y la recurrencia de Fibonacci.}$$
 Resuelvo todo y llego a \square

Sucesione de Lucas: Generalizaciones de Fibonacci. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$a_0 = \alpha, a_1 = \beta \wedge a_{n+2} = \gamma a_{n+1} + \delta a_n, \forall n \geq 0$, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dados.

Esto lo meto en la ecuación característica: $x^2 - \gamma x - \delta = 0$, necesito raíces distintas. Notar que $r^2 = \gamma r^1 + \delta$, y lo mismo es para \tilde{r} . Las sucesiones (r^n) y (\tilde{r}^n) satisfacen la recurrencia de Lucas, pero no las condiciones iniciales α y β . $c_n = (ar^n + b\tilde{r}^n)$, satisface Lucas, pero las condiciones iniciales son c_0 y c_1 o

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = \alpha \\ ra + \tilde{r}b = \beta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ra + rb = r\alpha \\ ra + \tilde{r}b = \beta \end{array} \right. \text{ luego hago lo mismo con } \tilde{r} \text{ Como resultado: } a = \frac{\beta - \tilde{r}\alpha}{r - \tilde{r}}$$

Ejercicios de la guía:

1. Hacer!

2. Hacer!

3. Calcular

i) $\sum_{i=1}^n (4i + 1)$ Hacer!

ii) $\sum_{i=6}^n 2(i - 5)$ Hacer!

4. Calcular

i) $\sum_{i=0}^n 2^i$
 $\sum_{i=0}^n 2^i \stackrel{q \neq 1}{=} \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

ii) $\sum_{i=1}^n q^i$
 $\sum_{i=1}^n q^i = -1 + 1 + \sum_{i=1}^n q^i = -1 + \sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} n + 1 - 1 = n & \text{si } q = 1 \\ \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - 1 = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$

iii) Hacer!

iv) Hacer!

5.

i) Hacer!

ii) $S = \underbrace{\frac{N(N+1)}{2}}_{\text{Gauss}} = \sum_1^N i \rightarrow \sum_1^n 2i - 1 = 2 \sum_1^n i - \sum_1^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2 \quad \checkmark$

$$\text{iii)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Primer caso } n = 1 \rightarrow \sum_1^1 2i - 1 = 1 = 1^2 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo } n = h \rightarrow \sum_1^k 2i - 1 = k^2 \quad \checkmark \Rightarrow \sum_1^{k+1} 2i - 1 \stackrel{?}{=} (k+1)^2 \\ \sum_1^{k+1} 2i - 1 = \underbrace{\sum_1^k 2i - 1}_{\text{HI}} + \underbrace{2(k+1) - 1}_{k+1\text{-ésimo}} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \quad \checkmark \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2}$$

6. **Hacer!**

7.

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Primer caso } n = 1 \rightarrow \sum_1^1 (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^2 \cdot 1 = 1 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo} \left\{ \begin{array}{l} n = k \rightarrow \sum_1^k (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^{k+1} \frac{k(k+1)}{2} \\ \Rightarrow \\ n = k+1 \rightarrow \sum_1^{k+1} (-1)^{i+1} i^2 \stackrel{?}{=} (-1)^{(k+1)+1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ \rightarrow \sum_1^{k+1} (-1)^{i+1} i^2 = \underbrace{\sum_1^k (-1)^{i+1} i^2}_{\text{HI}} + \underbrace{(-1)^{k+2} (k+1)^2}_{k+1\text{-ésimo}} = \\ (-1)^{k+1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (-1)^2 (k+1)^2 \xrightarrow[\text{factor común}]{\text{acomodar}} (-1)^k (k+1) \left[-\frac{k}{2} + (k+1) \right] = \\ (-1)^k (k+1) \frac{(k+2)}{2} \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}}$$

ii) **Hacer!**

iii) **Hacer!**

$$\text{iv)} \prod_{i=1}^n (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primer caso } n = 1 \rightarrow \prod_{i=1}^1 (1 + a^{2^{i-1}}) = 1 + a^{2^0} = 1 + a = \frac{1-a^{2^1}}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1 + a \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo } n = k \rightarrow \prod_{i=1}^k (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^k}}{1-a} \Rightarrow n = k+1 \rightarrow \prod_{i=1}^{k+1} (1 + a^{2^{i-1}}) \stackrel{?}{=} \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a} \\ \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=1}^{k+1} (1 + a^{2^{i-1}}) = \underbrace{\prod_{i=1}^k (1 + a^{2^{i-1}})}_{\text{HI}} \cdot \underbrace{1 + a^{2^k}}_{k+1\text{-ésimo}} = \frac{1-a^{2^k}}{1-a} \cdot 1 + a^{2^k} \xrightarrow[\text{de cuadrados}]{\text{diferencia}} \frac{1-(a^{2^k})^2}{1-a} = \\ \frac{1-a^{2 \cdot 2^k}}{1-a} = \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a} \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$v) \prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$$

En este ejercicio conviene abrir la productoria y acomodar los factores. Por inducción:

$$\left\{ \begin{array}{l} p(n) : \prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n) \\ \text{Caso Base: } p(1) \text{ V? } \rightarrow \prod_{i=1}^1 \frac{1+i}{2i-3} = \frac{1+1}{2 \cdot 1 - 3} = 2^1(1-2 \cdot 1) = -2 \\ \text{Paso inductivo: Supongo } p(k) \text{ Verdadero } \xrightarrow[\text{que}]{\text{quiero ver}} p(k+1) \text{ Verdadero para algún } k \in \mathbb{N}. \\ \text{Hipótesis inductiva: Supongo } \prod_{i=1}^k \frac{k+i}{2i-3} = 2^k(1-2k), \text{ quiero ver que } \prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = 2^{k+1}(1-2(k+1)) \\ \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=1}^k \frac{k+i}{2i-3} = \frac{k+1}{2 \cdot 1 - 3} \cdot \frac{k+2}{2 \cdot 2 - 3} \cdot \frac{k+3}{2 \cdot 3 - 3} \cdots \frac{2k}{2 \cdot k - 3} = 2^k(1-2k) \\ \prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = \frac{k+2}{2 \cdot 1 - 3} \cdot \frac{k+3}{2 \cdot 2 - 3} \cdots \frac{k+1+(k-1)}{2(k-1)-3} \cdot \frac{k+1+k}{2k-3} \cdot \frac{k+1+(k+1)}{2(k+1)-3} \\ \text{Masajear: multiplico por } 1 = \frac{k+1}{k+1} \rightarrow \frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 - 3} \cdot \frac{k+2}{2 \cdot 2 - 3} \cdot \frac{k+3}{2 \cdot 3 - 3} \cdots \frac{2k}{2k-3} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \frac{2k+2}{1} = \\ \text{corro los denominadores una fracción hacia } \leftarrow \\ \text{acomodo para que } \xrightarrow{\text{aparezca la HI}} \frac{k+1}{2 \cdot 1 - 3} \cdot \frac{k+2}{2 \cdot 2 - 3} \cdot \frac{k+3}{2 \cdot 3 - 3} \cdots \frac{2k}{2k-3} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \frac{2k+2}{k+1} = \\ = 2^k(1-2k) \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \frac{2k+2}{k+1} \stackrel{\text{HI}}{=} 2^k(1-2k) \cdot \frac{2k+1}{(-1)(1-2k)} \cdot \frac{2(k+1)}{k+1} = 2^{k+1}(-1)(2k+1) = \\ = 2^{k+1}(1-2(k+1)) \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Como $p(1)$ es verdadero y $p(k)$ es verdadero y $p(k+1)$ también lo es, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

8. Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=1}^n a^{i-1} b^{n-i}$. Deducir la fórmula de la serie geométrica: para todo $a \neq 1$, $\sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primer paso: } n=1 (a-b) \sum_{i=1}^1 a^{i-1} \cdot b^{1-i} = a-b = a^1 - b^1 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } n=k a^k - b^k = (a-b) \sum_{i=1}^k a^{i-1} \cdot b^{k-i} \Rightarrow a^{k+1} - b^{k+1} \stackrel{?}{=} (a-b) \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} \cdot b^{k+1-i} \\ \left\{ \begin{array}{l} (a-b) \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} \cdot b^{k+1-i} = (a-b) \sum_{i=1}^k a^{i-1} \cdot \underbrace{b^{k+1-i}}_{b \cdot b^{k-i}} + \underbrace{(a-b)a^k \cdot b^{k+1-(k+1)}}_{k+1\text{-ésimo}} = \\ b \cdot \underbrace{(a-b) \sum_{i=1}^k a^{i-1} \cdot b^{k-i}}_{\text{HI}} + (a-b)a^k \stackrel{\text{HI}}{=} b \cdot a^k - b^k + (a-b)a^k = a^{k+1} - b^{k+1} \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Para deducir la fórmula de la serie geométrica $b=1 \rightarrow (a-1) \sum_{i=1}^n a^{i-1} = a^n - 1 \rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a-1) \sum_1^n a^{i-1} = (a-1) \cdot (1+a+a^2+\dots+a^{n-1}) = a^n - 1 \xrightarrow[\text{divido por } (a-1) \text{ M.A.M.}]{\text{multiplico por } a \text{ y}} \\ \sum_1^n a^i = a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1}-a}{a-1} \xrightarrow[\text{M.A.M.}]{\text{sumo un } 1} \sum_{i=0}^n a^i = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1}-a}{a-1} + 1 \rightarrow \\ \boxed{\frac{a^{n+1}-a}{a-1} + 1 = \sum_{i=0}^n a^i} \end{array} \right.$$

9. Hacer!

10. Hacer!

11. Hacer!

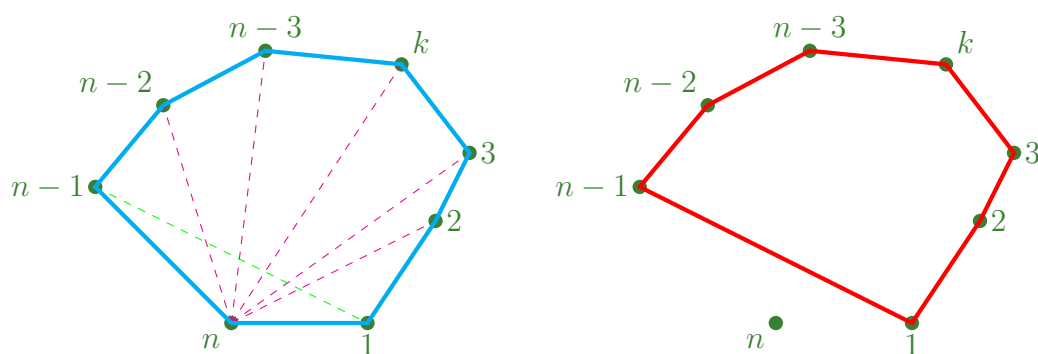
12. Hacer!

13. _____

Hacer!

14. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que:

- i) La cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.
Ejercicio donde hay que encontrar una fórmula a partir de algún método *creativo* para luego probar por inducción.



Se desprende del gráfico el siguiente razonamiento: En el polígono **cyan** de n lados voy a tener una cantidad de diagonales dada por la sucesión d_n . El polígono **rojo** me genera polígono que tiene un lado menos y un lado menos, cantidad que viene determinada por d_{n-1} . Las líneas punteadas son las diagonales de d_n que no estarán en d_{n-1} . Ahora voy a encontrar una relación entre ambas sucesiones. Al sacan un lado pierdo las **diagonales** desde 2 hasta $n-2$ que serían $n-3$ en total y además pierdo la **diagonal** que conectan el vértice 1 con el $n-1$: $d_n = d_{n-1} + 1 + n - 2 = d_{n-1} + n - 1 \rightarrow d_n = d_{n-1} + n - 1$

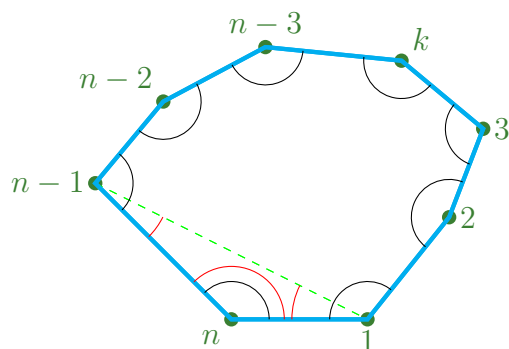
Ahora inducción:

$$p(n) : d_n = \frac{n(n-3)}{2} \quad \forall n \geq 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Caso Base: } p(3) \text{ verdadera?} \rightarrow \frac{3(3-3)}{2} = 0, \text{ lo cual es verdad para el triángulo. } \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } p(k) \text{ es verdadero para algún } k \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera?} \\ \text{Hipótesis Inductiva: } d_k = \frac{k(k-3)}{2} \Rightarrow d_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} \\ d = k+1 \stackrel{\text{def}}{=} d_k + k - 1 \stackrel{\text{HI}}{=} \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k-2)(k+1)}{2} \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Como $p(3) \wedge p(k) \wedge p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$.



En este caso estoy generando la suma de los ángulos internos de 2 polígonos, uno con α_n de n lados y otro con $n-1$, α_{n-1} . Es más claro en este caso que al sacarle un lado, estoy robando un triángulo que tiene como suma de sus ángulos internos π , entonces afirmo $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \pi$. Ahora pruebo por inducción lo pedido. $p(n) : \alpha_n = \pi(n-2) \quad \forall n \geq 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Caso Base: } p(3) \text{ verdadera?} \rightarrow \pi(3-2) = \pi, \text{ lo cual es verdad para el triángulo. } \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } p(k) \text{ es verdadero para algún } k \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera?} \\ \text{Hipótesis Inductiva: } \alpha_k = \pi(k-2) \Rightarrow \alpha_{k+1} = \pi(k-1) \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{k+1} - \pi \\ \alpha_k \stackrel{\text{HI}}{=} \pi(k-2) \end{array} \right\} \rightarrow \alpha_{k+1} = \pi(k-2) + \pi = \pi(k-1) \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Como $p(3) \wedge p(k) \wedge p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

Recurrencia

15.

- i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:

$$a_1 = 2 \text{ y } a_{n+1} = 2na_n + 2^{n+1}n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n n!$.

Hecho en cuaderno, pasar

- ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:

$$a_1 = 0 \text{ y } a_{n+1} = a_n + n(3n + 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^2(n - 1)$.

Hecho en cuaderno, pasar

16. Hallar la fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Hacer!

17. Hacer!

18. Hacer!

19. Hacer!

20. Hacer!

Ejercicios extras:

1. Se cumple que: $\frac{(2n)!}{n!^2} \leq (n+1)!, \forall n \in \mathbb{N}$?

1. La proposición: $p(n) : \frac{(2n)!}{n!^2} \leq (n+1)!$

2. Caso base: $p(n=1)$ es Verdadera? $\xrightarrow[n=1]{\text{evalúo}} \frac{(2 \cdot 1)!}{1!^2} = 2 \leq (1+1)! \quad \checkmark$

3. Mi **HI** es que vale $\frac{(2h)!}{h!^2} \leq (h+1)!$

4. Quiero probar que $\frac{(2(h+1))!}{(h+1)!^2} \leq ((h+1)+1)! \xrightarrow{\text{acomodo}} \frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} \leq (h+2)!$

5. Hay que hacer cosas para poder meter la **HI** en las cuentas del punto anterior.

Noto que: $\frac{(2h+2)!}{(h+1)!^2} = \frac{(2h+2) \cdot (2h+1) \cdot (2h)!}{(h+1)^2 \cdot h!^2} \stackrel{HI}{\leq} \frac{(2h+2) \cdot (2h+1)}{(h+1)^2} (h+1)! \leq (h+2)!$

Probando esa última desigualdad se prueba lo buscado.

2. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{n+k} \leq \frac{5}{2}.$$

Inducción: $p(n) : \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{n+k} \leq \frac{5}{2} \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1)$:

$$\sum_{k=1}^{1+1} \frac{3}{1+k} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \leq \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \rightarrow p(1) \text{ Verdadera} \quad \checkmark$$

Paso inductivo:

$p(j) : \sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} \leq \frac{5}{2}$ Verdadera \Rightarrow quiero probar que $p(j+1) : \sum_{k=1}^{j+1+1} \frac{3}{j+1+k} \leq \frac{5}{2}$ Verdadera

En los ejercicios donde la n aparece adentro de la sumatoria, conviene abrirla para encontrar la hipótesis

inductiva: $\sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} \leq \frac{5}{2}$

$$\sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} = \frac{3}{j+1} + \frac{3}{j+2} + \frac{3}{j+3} + \frac{3}{j+4} + \cdots + \frac{3}{2j} + \frac{3}{2j+1} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{j+1+1} \frac{3}{j+1+k} &= \sum_{k=1}^{j+2} \frac{3}{j+1+k} = \frac{3}{j+1+1} + \frac{3}{j+1+2} + \frac{3}{j+1+3} + \cdots + \frac{3}{j+1+j-1} + \frac{3}{j+1+j} + \frac{3}{j+1+j+1} + \frac{3}{j+1+j+2} = \\ &= \frac{3}{j+2} + \frac{3}{j+3} + \frac{3}{j+4} + \cdots + \frac{3}{2j} + \frac{3}{2j+1} + \frac{3}{2j+2} + \frac{3}{2j+3} = -\frac{3}{j+1} + \underbrace{\frac{3}{j+1} + \frac{3}{j+2} + \frac{3}{j+3} + \frac{3}{j+4} + \cdots + \frac{3}{2j} + \frac{3}{2j+1}}_{\sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k}} + \frac{3}{2j+2} + \frac{3}{2j+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} - \frac{3}{j+1} + \frac{3}{2j+2} + \frac{3}{2j+3} = \sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} - \underbrace{\frac{3}{2k+2} + \frac{3}{2j+3}}_{\leq 0} \stackrel{HI}{\leq} \frac{5}{2} - \underbrace{\frac{3}{(2k+2)(2k+3)}}_{\leq 0} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{j+2} \frac{3}{j+1+k} \leq \frac{5}{2} \text{ Verdadera} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Dado que $p(1), p(j), p(j+1)$ resultaron verdaderas por principio de inducción también lo es $p(n) \forall n \in \mathbb{N}$.