Apunte único: Álgebra I - Práctica 2

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1.	**4.**	**7.**	**10.**	**13.**	**16.**	**19.**	**22.**
2.	**5.**	**8.**	**11.**	**14.**	**17.**	**20.**	
3.	**6.**	**9.**	**12.**	**15.**	**18.**	**21.**	

- Ejercicios de Parciales

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**

Disclaimer:
Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:

1. Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
2. Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
3. ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
4. Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
5. Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir *'no me sale'* $\nexists+$. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda, no te van a salir los ejercicios más difíciles: Sentido común.

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confiaza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada*. Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber*. A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas:
de Teresa que son buenísimos.

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra:
Prácticas Pandemia.

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre Just Do IT!

Eh, loco, fatalista, distópico, relajá un toque te vas a quedar (más) pelado... *va a salir todo bien!*

Esta Guía 2 que tenés se actualizó por última vez:
28/02/25 @ 11:54
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una versión más nueva:

Guía 2

El resto de las guías repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

Notas teóricas:

- *Propiedades de la sumatoria y productoria:*
  - $(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k) + (\sum\limits_{k=1}^{n} b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$
  - Sea c un número dado:
    $\sum\limits_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$
  - $(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k) \cdot (\prod\limits_{k=1}^{n} b_k) = \prod\limits_{k=1}^{n} (a_k b_k)$
  - Sea c un número dado:
    $\prod\limits_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = (\prod\limits_{k=1}^{n} c) \cdot (\prod\limits_{k=1}^{n} a_k) = c^n \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$
- *Suma de Gauss:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

  Y cuando empieza desde $i = 0$ u otro valor se hace:

$$\sum_{i=0}^{n} i \overset{!}{=} 1 + \sum_{i=1}^{n} i \overset{!}{=} 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \checkmark$$

- *Suma geométrica:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$$

  Y cuando empieza desde $i = 1$ u otro valor se hace:

$$\sum_{i=1}^{n} q^i \overset{!}{=} -1 + 1 + \sum_{i=1}^{n} q^i \overset{!}{=} -1 + \sum_{i=0}^{n} q^i = \begin{cases} -1 + n + 1 = n & \text{si} \quad q = 1 \\ -1 + \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{q^{n+1}-q}{q-1} & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$$

- *Inducción:*

  Sea $H \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que H es un conjunto *inductivo* si se cumplen las dos condiciones siguiente:

  - $1 \in H$
  - $\forall x, x \in H \implies x + 1 \in H$

- *Principio de inducción:* que se usará infinitas veces

  Sea $p(n), n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales.

  Si $p(n)$ satisface:

  - *Caso Base:*

$$p(1) \text{ es Verdadera.}$$

  - *Paso inductivo:*

$$\forall h \in \mathbb{N},\ p(h) \text{ es Verdadera} \implies p(h+1) \text{ también es Verdadera,}$$

  entonces $p(n)$ es Verdadera $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- Principio de inducción *corrido*: A los fines prácticos todos los principios corridos y la mar en coche, son iguales... bueh, son muy parecidos de resolver.

Ejercicios de la guía:

1.

i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

a) $1+2+3+4+\cdots+100$

b) $1+2+4+8+16+\cdots+1024$

c) $1+(-4)+9+(-16)+25+\cdots+(-144)$

d) $1+9+25+49+\cdots+441$

e) $1+3+5+\cdots+(2n+1)$

f) $n+2n+3n+\cdots+n^2$

ii) Reescribir cada una de los siguientes productos usando el símbolo de productoria y/o de factorial.

¿Cómo resolver este ejercicio?
Lo que queremos hacer es compactar la suma para evitar el uso de puntos suspensivos, la notación ideal para esos casos es el símbolo de sumatoria. El primer paso es fijarse en el comportamiento de cada término de nuesta suma. Por ejemplo, en el punto b) notamos que cada término comienza a duplicarse.

i) a) $1+2+3+4+\cdots+100 = \sum_{i=1}^{100} i$

b) $1+2+4+8+16+\cdots+1024 = \sum_{i=0}^{10} 2^i$

c) $1+(-4)+9+(-16)+25+\cdots+(-144) = \sum_{i=1}^{12} i^2(-1)^{n+1}$

d) $1+9+25+49+\cdots+441 = \sum_{i=0}^{10}(1+2i)^2$

e) $1+3+5+\cdots+(2n+1) = \sum_{i=0}^{n} 2i+1$

f) $n+2n+3n+\cdots+n^2 = \sum_{i=1}^{n} in$

ii) a) $5\cdot 6\cdots 99\cdot 100 = \prod_{i=5}^{100} i = \frac{100!}{4!}$

b) $1\cdot 2\cdot 4\cdot 8\cdot 16\cdots 1024 = \prod_{i=0}^{10} 2^i$

c) $n\cdot 2n\cdot 3n\cdots n^2 = \prod_{i=1}^{n} in = n^n\cdot n!$

---

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes

i) $\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$ ii) $\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$ iii) $\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$ iv) $\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$ v) $\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$

Llamo t_1, t_2 a los primeros términos y t_{m-1}, t_m a los últimos

i) $\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$

$t_1 = 2(6-5) = 2 \quad t_2 = 2(7-5) = 4$

$t_{m-1} = 2((n-1)-5) = 2n-12 \quad t_m = 2(n-5) = 2n-10$

ii) $\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$

$t_1 = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} \quad t_2 = \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} = \frac{1}{n^2+3n+2}$

$t_{m-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n-1+1)} = \frac{1}{4n^2-2n} \quad t_m = \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{4n^2+2n}$

iii) $\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$

$t_1 = \frac{n+1}{2} \quad t_2 = \frac{n+2}{4}$

$t_{m-1} = \frac{n+(n-1)}{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2n-2} \quad t_m = \frac{n+n}{2n} = \frac{2n}{2n} = 1$

iv) $\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$

$t_1 = n \quad t_2 = \frac{n}{2}$

$t_{m-1} = \frac{n}{n^2-1} \quad t_m = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

v) $\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$

$t_1 = \frac{n+1}{2-3} = -n-1 \quad t_2 = \frac{n+2}{4-3} = n+2$

$t_{m-1} = \frac{n+(n-1)}{2(n-1)-3} = \frac{2n-1}{2n-5} \quad t_m = \frac{n+n}{2n-3} = \frac{2n}{2n-3}$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Gabriel Garcia
Nad Garraz
FedeMisterio

---

3. Calcular

i) $\sum_{i=1}^{n} (4i+1)$ ii) $\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$

Para resolver estos ejercicios haremos uso la notas teóricas, en particular y .

i) $\sum_{i=1}^{n} (4i+1) = (\sum_{i=1}^{n} 4i) + (\sum_{i=1}^{n} 1) = (4 \cdot \sum_{i=1}^{n} i) + n = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = \boxed{2n^2+3n}$

ii) $\sum_{i=6}^{n} 2(i-5) = 2 \cdot \sum_{i=6}^{n} (i-5) = 2 \cdot [(\sum_{i=6}^{n} i) - (\sum_{i=6}^{n} 5)] = 2 \cdot [(\sum_{i=0}^{n} i) - (\sum_{i=0}^{5} i) - 5(n-5)]$
$= 2 \cdot (\frac{n(n+1)}{2} - \frac{5(5+1)}{2} - 5n + 25) = 2 \cdot (\frac{n(n+1)}{2} - 5n + 10) = n(n+1) - 10n + 20 = \boxed{n^2-9n+20}$

---

4. Calcular

i) $\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i$

ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} q^i \quad q \in \mathbb{R}$

iii) $\sum\limits_{i=0}^{n} q^{2i}, \quad q \in \mathbb{R} - \{0\}$

iv) $\sum\limits_{i=1}^{2n} q^i \quad q \in \mathbb{R}$

---

i) $\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i \underset{q \neq 1}{=} \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$

ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} q^i = -1 + 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} q^i = -1 + \sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \begin{cases} n+1-1 = n & \text{si} \quad q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - 1 = \underbrace{\frac{q^{n+1}-q}{q-1}}_{\bigstar^1 \sum\limits_{k=1}^{n} q^i} & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$

iii) $\sum\limits_{i=0}^{n} q^{2i} \overset{!}{=} 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} q^{2i} = \begin{cases} 1+\underbrace{q^2+q^4+\cdots+(q^{n-1})^2+q^{2n}}_{\text{n elementos}}=n+1 & \text{si} \quad q = \pm 1 \\ 1+\underbrace{(q^2)^1+(q^2)^2+\cdots+(q^2)^{n-1}+(q^2)^n}_{\text{n elementos}} \overset{\bigstar^1}{=} \frac{(q^2)^{n+1}-q^2}{q^2-1}+1=\frac{q^{2(n+1)}-1}{q^2-1} & \text{si} \quad q \neq \pm 1 \end{cases}$

iv) $\sum\limits_{i=1}^{2n} q^i \overset{?}{=} \begin{cases} 2n \text{ si } q = 1 \\ \frac{q^{2n-1}-q}{q-1} \text{ si } q \neq 1 \end{cases}$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

---

5. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$:

i) Contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama. (hacer diagrama)

ii) Usando la suma aritmética (o suma de Gauss).

iii) Usando el principio de inducción.

---

i)

ii) $\underbrace{s = \frac{n(n+1)}{2} = \sum\limits_{1}^{n} i}_{Gauss} \to \sum\limits_{i=1}^{n} 2i - 1 = 2\sum\limits_{i=1}^{n} i - \sum\limits_{1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2 \quad \checkmark$

iii) *Proposición:*

$p(n) : \sum\limits_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base : $p(1) : \sum\limits_{i=1}^{1} 2i - 1 = 1 = 1^2 \implies p(1)$ es verdadera. $\checkmark$

Paso inductivo: $p(h) : \sum_{i=1}^{h} 2i-1 = k^2$ verdadera con $h \in \mathbb{Z} \implies$ quiero ver que $\sum_{i=1}^{h+1} 2i-1 \stackrel{?}{=} (h+1)^2$.

$\sum_{i=1}^{h+1} 2i - 1 = \sum_{i=1}^{h}(2i-1) + 2(h+1) - 1 \stackrel{\text{HI}}{=} h^2 + 2h + 1 = (h+1)^2 \quad \checkmark$

Dado que $p(1)$, $p(h)$, $p(h+1)$ resultaron verdaderas, por criterio de inducción también lo es $p(n) \in \mathbb{N}$

---

6. *(Suma de cuadrados y de cubos)* Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ii) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

---

i) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Proposición: $p(n) : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1)$ verdadero $\iff \sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} \iff 1 = \frac{2\cdot3}{6} \iff 1 = 1 \quad \checkmark$

Paso Inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongo $\underbrace{p(k)}_{\text{HI}}$ verdadero, quiero ver que $p(k+1)$ verdadero.

$$
\begin{aligned}
p(k+1)\text{Verdadero} &\iff \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \\
&\iff \left(\sum_{i=1}^{k} i^2\right) + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&\underset{\text{HI}}{\iff} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&\iff k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2 = (k+1)(k+2)(2k+3) \\
&\iff k(2k+1) + 6(k+1) = (k+2)(2k+3) \\
&\iff 2k^2 + 7k + 6 = 2k^2 + 7k + 6 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Como se cumple tanto el *caso base* como el *paso inductivo*, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$P(n) :$ " $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ " $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Caso Base</u>: $P(1) : \sum_{i=1}^{1} i^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \iff 1 = \frac{4}{4} \iff 1 = 1 \quad \checkmark$

Paso Inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongo $\underbrace{P(k)}_{\text{HI}}$ Verdadero, quiero ver que $P(k+1)$ Verdadero.

$$\begin{aligned}
P(k+1)\text{Verdadero} &\iff \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} \\
&\iff (\sum_{i=1}^{k} i^3) + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&\underset{\text{HI}}{\iff} \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&\iff k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3 = (k+1)^2(k+2)^2 \\
&\iff k^2 + 4(k+1) = (k+2)^2 \\
&\iff k^2 + 4k + 4 = k^2 + 4k + 4 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Como se cumple tanto el caso base como el paso inductivo, por el principio de inducción $P(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

---

7. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$

ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} (2i+1)3^{i-1} = n3^n$

iii) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

iv) $\prod\limits_{i=1}^{n} (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$, $a \in \mathbb{R} - \{1\}$

v) $\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

---

i) *Proposición:*

$$p(n) : \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : \sum_{i=1}^{1} (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^2 \cdot 1 = 1 \overset{!}{=} \frac{(-1)^{1+1} 1(1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

$p(1)$ resulta ser verdadera.

Paso inductivo: Asumo que

$$p(k) : \underbrace{\sum_{1}^{k} (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^{k+1} \frac{k(k+1)}{2}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Entonces quiero ver que:

$$p(k+1) : \sum_{1}^{k+1} (-1)^{i+1} i^2 = (-1)^{(k+1)+1} \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}.$$

también lo sea.

Para probar arranco de $p(k+1)$ y en medio uso la hipótesis inductiva para resolver:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}i^2=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}i^2+(-1)^{k+2}(k+1)^2\underset{!}{\overset{\text{HI}}{=}}(-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(-1)^2(k+1)^2\overset{!!!}{=}(-1)^k(k+1)\frac{(k+2)}{2} \quad \checkmark$$

Por lo tanto p(k+1) resulta ser verdadera también.

Si te quedaste ahí pedaleando en el aire en el !!! es solo acomodar la expresión, nada raro, algún factor común, $\underbrace{(-1)^2=1}$ y coso... power!. Si lo hago yo es puro spoiler y no ganás nada.

Dado que $p(1)$, $p(k)$, $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por criterio de inducción también lo es $p(n) \in \mathbb{N}$

ii) *Proposición:*

$$p(n) : \sum_{i=1}^{n}(2i+1)3^{i-1} = n3^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : \sum_{i=1}^{1}(2i+1)3^{i-1} = (2\cdot 1+1)\cdot 3^{1-1} = 3 \overset{!}{=} 1\cdot 3^1 = 3$$

$p(1)$ resulta ser verdadera

Paso inductivo: Asumo que

$$\underbrace{p(k) : \sum_{i=1}^{n}(2i+1)3^{i-1} = k3^k}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Entonces quiero ver que

$$p(k+1) : \sum_{1}^{k+1}(2i+1)3^{i-1} = (k+1)3^{k+1}$$

también lo sea.

Muy parecido al ejercicio anterior:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i+1)3^{i-1} = \sum_{i=1}^{k}(2i+1)3^{i-1} + (2(k+1)+1)3^{(k+1)-1} \underset{!}{\overset{\text{HI}}{=}} k3^k + 3^k(2k+3) \overset{!!!}{=} (k+1)\cdot 3^{k+1}$$

Y sí, en el !!! hay más cuentas. Pero ya a esta altura te vas dando cuenta de que la parte de *inducción* no estaría siendo el desafío, sino que (en estos ejercicios) son las cuentas, por eso mirá fijo las cuentas y dale tiempo a tu para que encuentre el factor común etc ¡Curtite, vieja!. Las cuentas son en gran medida lo que complica los parciales, no tanto los temas.

Dado que $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el criterio de inducción también lo es $p(n) \in \mathbb{N}$

iii) *Proposición:* $p(n) \sum_{i=1}^{n} \frac{i2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1) : \sum_{i=1}^{1} \frac{i2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{1*2^1}{(1+1)(1+2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \frac{2^2-3}{1+2} \implies p(1)$ es verdadera $\checkmark$

Paso inductivo: Asumo $p(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{i2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$ como verdadera.

$\implies p(n+1)$: quiero ver que $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{i2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{(n+1)+1}}{(n+1)+2} - 1$ también lo sea.

$\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{i2^i}{(i+1)(i+2)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i2^i}{(i+1)(i+2)} + \frac{(n+1)2^{n+1}}{((n+1)+1)((n+1)+2)} \overset{\text{HI}}{=} \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1 + \frac{(n+1)2^{n+1}}{((n+1)+1)((n+1)+2)}$

Si $\frac{2^{n+1}}{n+2} - 1 + \frac{(n+1)2^{n+1}}{((n+1)+1)((n+1)+2)} = \frac{2^{(n+1)+1}}{(n+1)+2} - 1 \implies$ sera verdadero

$$\begin{aligned}
\frac{2^{n+1}}{n+2} - 1 + \frac{(n+1)2^{n+1}}{(n+2)(n+3)} &= \frac{2^{n+2}}{n+3} - 1 \\
(n+3)\frac{2^{n+1}}{n+2} + \frac{(n+1)2^{n+1}}{(n+2)} &= 2^{n+2} \\
(n+3)2^{n+1} + (n+1)2^{n+1} &= 2^{n+2}(n+2) \\
(n+3) + (n+1) &= 2(n+2) \\
2n+4 &= 2(n+2) \\
2n+4 &= 2n+4 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

iv) $\prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 + a^{2^{i-1}}\right) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$

Caso Base:

$$p(1) : \prod_{i=1}^{1}(1 + a^{2^{i-1}}) = 1 + a^{2^0} = 1 + a = \frac{1 - a^{2^1}}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1 + a \quad \checkmark$$

Por lo cual $p(1)$ resultó ser verdadera.

Paso inductivo :

$$p(k): \text{ Asumo que } \underbrace{\prod_{i=1}^{k}(1 + a^{2^{i-1}}) = \tfrac{1-a^{2^k}}{1-a}}_{\text{hipótesis inductiva}} \text{ es verdadera.}$$

Entonces quiero ver que:

$$p(k+1) : \prod_{i=1}^{k+1}(1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1 - a^{2^{k+1}}}{1-a}$$

también lo sea.

Arranco de $p(k+1)$ y usando la hipótesis inductiva trato de llegar al valor esperado:

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1+a^{2^{i-1}}) \overset{!}{=} (1+a^{2^k}) \cdot \prod_{i=1}^{k}(1+a^{2^{i-1}}) \overset{\text{HI}}{=} (1+a^{2^k}) \cdot \frac{1-a^{2^k}}{1-a} \overset{!!}{=} \frac{1-(a^{2^k})^2}{1-a} = \frac{1-a^{2 \cdot 2^k}}{1-a} = \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a} \quad \checkmark$$

Si te quedaste pedaleando en los !, pensá en *diferencia de cuadrados*, *propidades de potencias* y coso 👏.

Esto muetra que $p(k+1)$ también es verdadera.

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

v) $\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

En este ejercicio conviene abrir la productoria y acomodar los factores. Por inducción:

$$p(n): \prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$$

Caso Base:

$$p(1): \prod_{i=1}^{1} \frac{1+i}{2i-3} = \frac{1+1}{2\cdot 1-3} = 2^1(1-2\cdot 1) = -2$$

Paso inductivo:

$$p(k): \overbrace{\prod_{i=1}^{k} \frac{k+i}{2i-3} = 2^k(1-2k)}^{\text{hipótesis inductiva}} \text{ asumo verdadera para algún } k \in \mathbb{N}$$

$$\xrightarrow[\text{ver que}]{\text{quiero}} p(k+1): \prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = 2^{k+1}(1-2(k+1) \text{ también lo sea para algún } k \in \mathbb{N}.$$

Nota que puede ser de utilidad: Esta productoria tiene a la n en el término general. Cuando pasa esto en el ejercicio, abrir la productoria para acomodar los factores y así formar la HI, suele ser el camino a seguir, ojo con modificar el término general.

Fin nota que puede ser de utilidad

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{k+i}{2i-3} = \frac{k+1}{2\cdot1-3} \cdot \frac{k+2}{2\cdot2-3} \cdot \frac{k+3}{2\cdot3-3} \cdots \frac{2k}{2\cdot k-3} = 2^k(1-2k)$$

$$\prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = \frac{k+2}{2\cdot1-3} \cdot \frac{k+3}{2\cdot2-3} \cdots \frac{k+1+(k-1)}{2(k-1)-3} \cdot \frac{k+1+k}{2k-3} \cdot \frac{\overbrace{k+1+(k+1)}^{2k+2}}{2(k+1)-3} \overset{\bigstar^1}{=} \frac{1}{2\cdot1-3} \cdot \frac{k+2}{2\cdot2-3} \cdot \frac{k+3}{2\cdot3-3} \cdots \frac{2k}{2k-3} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \frac{2k+2}{1}$$

$$\overset{\bigstar^2}{=} \underbrace{\frac{k+1}{2\cdot1-3} \cdot \frac{k+2}{2\cdot2-3} \cdot \frac{k+3}{2\cdot3-3} \cdots \frac{2k}{2k-3}}_{\text{hipótesis inductiva}} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \frac{2k+2}{k+1} \overset{HI}{=} 2^k(1-2k) \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \frac{2k+2}{k+1} \overset{!}{=} 2^{k+1}(1-2(k+1)) \quad \checkmark$$

En $\bigstar^1$ Corro los denominadores un lugar hacia la izquierda. Pinto con rojo las fracciones de los bordes solo para ayuda visual.

En $\bigstar^2$ multiplico por $1 = \frac{k+1}{k+1}$ y lo ubico en los lugares *apropiados* para que me aparezca la hipótesis inductiva.

Si te preguntás qué pasó en "!", eso son cuentas, *simplificá*, *factorizá* y yo que sé, que te dejo a vos, por mi parte yo 👏.

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Iñaki Frutos Nad Garraz

---

8. Sea a, $b \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b)\sum\limits_{i=1}^{n} a^{i-1}b^{n-i}$. Deducir la fórmula de la serie geométrica: para todo $a \neq 1$, $\sum\limits_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

Quiero probar por inducción:

$$p(n) : a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}b^{n-i} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : (a^1 - b^1)\sum_{i=1}^{1} a^{i-1}\cdot b^{1-i} = a - b = a^1 - b^1$$

Resulta que el *caso base* es verdadero.

Paso inductivo:
Asumo como verdadero para algún $k \in \mathbb{Z}$:

$$\underbrace{p(k) : a^k - b^k = (a-b)\sum_{i=1}^{k} a^{i-1}\cdot b^{k-i}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

y quiero probar que:

$$p(k+1) : a^{k+1} - b^{k+1} \overset{?}{=} (a-b)\sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1}\cdot b^{k+1-i}$$

Arranco por el paso $k+1$ y busco de usar la hipótesis inductiva para probar lo que quiero:

$$(a-b)\sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1}\cdot b^{k+1-i} \overset{!!}{=} b\cdot(a-b)\sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1}\cdot b^{k-i} \overset{!}{=} b\cdot(a-b)\left(\sum_{i=1}^{k} a^{i-1}\cdot b^{k-i} + a^k\cdot b^{-1}\right) \overset{\star 1}{=}$$

En el !! hice un factor común y en el ! el truquito de separar un término de la sumatoria. Acomodo la expresión:

$$\overset{\star 1}{=} b\cdot(a-b)\sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1}\cdot b^{k-i} + (a^{k+1}b^2 - a^k b^2) \overset{\text{HI}}{=} b\cdot(a^k - b^k) + (a^{k+1} - a^k b) = a^{k+1} - b^{k+1}$$

Por lo que $p(k+1)$ es verdadero.

Como $p(1), p(k) \quad \text{y} \quad p(k+1)$ resultaron verdaderas, porque principio de inducción $p(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para deducir la fórmula de la serie geométrica pongo $b = 1$ en la expresión original:

$$a^n - 1 = (a-1)\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}\cdot 1 \overset{a\neq 1}{\iff} \frac{a^n - 1}{a-1} = \sum_{i=1}^{n} a^{i-1}$$

Multiplico por a miembro a miembro:

$$a\cdot\frac{a^n - 1}{a-1} = a\cdot\sum_{i=1}^{n} a^{i-1} \overset{!}{\iff} \frac{a^{n+1} - a}{a-1} = \sum_{i=1}^{n} a^i \overset{!!}{=} -1 + \sum_{i=0}^{n} a^i$$

Por lo tanto:

$$\frac{a^{n+1} - a}{a-1} = -1 + \sum_{i=0}^{n} a^i \overset{!}{\iff} \boxed{\frac{a^{n+1} - 1}{a-1} = \sum_{i=0}^{n} a^i}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`naD GarRaz`

9.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\sum\limits_{1}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_1$.

ii) Calcular $\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$).

iii) Calcular $\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}$).

---

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Sea $n\in\mathbb{N}$ y

$$P(n):\sum_{1}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_1$$

1) Caso base, $n=1$:

$$P(1):\sum_{i=1}^{1}(a_{i+1}-a_i)=a_{1+1}-a_1$$
$$P(1):a_2-a_1=a_2-a_1$$
$$P(1):V$$

2) Paso inductivo. Sea $n\in\mathbb{N}$:

HI. $P(n):\ V$

TI. $P(n+1):\sum\limits_{i=1}^{n+1}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+2}-a_1$

Desarrollo la TI:

$$P(n+1):\sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+2}-a_{n+1}+\sum_{1}^{n}(a_{i+1}-a_i)\overset{\text{HI}}{=}a_{n+2}-a_{n+1}+a_{n+1}-a_1$$
$$P(n+1):\sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+2}-a_1$$
$$P(n+1):V$$

Tenemos que

$$P(1):V$$
$$P(n):V\implies P(n+1):V$$

y esto implica que $P(n):V\quad\forall n\in\mathbb{N}$.

ii) $\sum\limits_{1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum\limits_{1}^{n}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})=-\sum\limits_{1}^{n}(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i})\overset{\text{Aux}}{=}-(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{1})$

$=-(\frac{1-(n+1)}{n+1})=-(\frac{-n}{n+1})=\frac{n}{n+1}$

Auxiliar

Sea $a_n = \frac{1}{n}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Queremos calcular $\sum\limits_{1}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right)$.

$$\sum_{1}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right) = \sum_{1}^{n} (a_{i+1} - a_i) \overset{9.i)}{=} a_{n+1} - a_1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\sum_{1}^{n} \tfrac{1}{(2i-1)(2i+1)} &\overset{\text{Aux.1}}{=} \sum_{1}^{n} \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2i-1} - \tfrac{1}{2i+1}\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left(\tfrac{1}{2i-1} - \tfrac{1}{2i+1-2+2}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left(\tfrac{1}{2i-1} - \tfrac{1}{2i+2-2+1}\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left(\tfrac{1}{2i-1} - \tfrac{1}{2(i+1)-2+1}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left(\tfrac{1}{2i-1} - \tfrac{1}{2(i+1)-1}\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n} -\left(\tfrac{1}{2(i+1)-1} - \tfrac{1}{2i-1}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left(\tfrac{1}{2(i+1)-1} - \tfrac{1}{2i-1}\right) \overset{Aux.2}{=} -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2(n+1)-1} - \tfrac{1}{2\cdot 1-1}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2n+1} - 1\right) = -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1-(2n+1)}{2n+1}\right) = -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{-2n}{2n+1}\right) \\
&= \tfrac{n}{2n+1}
\end{aligned}$$

Auxiliar 1

Calculamos la sugerencia dada

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} &= \frac{2i+1-(2i-1)}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{2i+1-2i+1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{2}{(2i-1)(2i+1)} \\
\frac{2}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} \\
\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right)
\end{aligned}$$

Auxiliar 2

Sea $a_n = \frac{1}{2n-1}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Queremos calcular $\sum\limits_{1}^{n} \left(\frac{1}{2(i+1)-1} - \frac{1}{2i-1}\right)$.

$$\sum_{1}^{n} \left(\frac{1}{2(i+1)-1} - \frac{1}{2i-1}\right) = \sum_{1}^{n} (a_{i+1} - a_i) \overset{9i)}{=} a_{n+1} - a_1 = \frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2\cdot 1-1}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

Marcos Zea

---

10. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

ii) $3^n \leq n^3$

iii) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

iv) $\sum\limits_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

v) $\sum\limits_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$

vi) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

vii) $\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} \geq 1$

---

i) $P(n) : 3^n + 5^n \geq 2^{n+2},\ n \in \mathbb{N}$

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : 3^1 + 5^1 \geq 2^{1+2}$$
$$P(1) : 8 \geq 8 \implies P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : 2^{n+3} \leq 3^{n+1} + 5^{n+1}$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$2^{n+3} = 2 \cdot 2^{n+2} \overset{\text{HI}}{\leq} 2 \cdot (3^n + 5^n) = 2 \cdot 3^n + 2 \cdot 5^n \leq 3 \cdot 3^n + 5 \cdot 5^n = 3^{n+1} + 5^{n+1}$$
$$2^{n+3} \leq 3^{n+1} + 5^{n+1}$$
$$\implies P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : V$.

ii) $P(n) : 3^n \geq n^3,\ n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : 3^1 \geq 1^3$$
$$P(1) : 3 \geq 1 \implies P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : 3^{n+1} \geq (n+1)^3$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \overset{\text{HI}}{\geq} 3 \cdot n^3 \overset{\text{Aux}}{\geq} (n+1)^3,\ n \geq 3$$
$$3^{n+1} \geq (n+1)^3,\ n \geq 3$$
$$\implies P(n+1) : V,\ n \geq 3$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo, este último para los $n \geq 3$. Como solo probamos el paso inductivo para $n \geq 3$, deberiamos ver que $P(2)$ y $P(3)$ son verdaderas.

$$P(2): 3^2 \geq 2^3 \implies P(2): 9 \geq 9 \implies P(2): V$$
$$P(3): 3^3 \geq 3^3 \implies P(3): V$$

Tenemos que

$P(1): V \wedge\ P(2): V \wedge P(3): V$
si $n \geq 3,\ P(n): V \implies P(n+1): V$

Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n): V.$

Auxiliar

$3n^3 \geq (n+1)^3 \iff \sqrt[3]{3n^3} \geq \sqrt[3]{(n+1)^3} \iff \sqrt[3]{3}n \geq n+1 \iff \sqrt[3]{3}n - n \geq 1$
$\iff n(\sqrt[3]{3}-1) \geq 1 \iff n \geq \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} \approx 2.6 \iff n \geq 3$
$\therefore 3n^3 \geq (n+1)^3 \iff n \geq 3$

iii) $P(n): \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n+i}{1+i} \leq 1 + n(n-1),\ n \in \mathbb{N}.$

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1): \sum_{i=1}^{1} \frac{1+i}{1+i} \leq 1 + 1(1-1)$$
$$P(1): \frac{1+1}{1+1} \leq 1 \implies P(1): V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n): V$

TI. $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{1+i} \leq 1 + (n+1)n$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{1+i} = \frac{2(n+1)}{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{n+1+i}{1+i} = \frac{2(n+1)}{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i} + \frac{n+i}{1+i} \right)$$
$$= \frac{2(n+1)}{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{1+i} \overset{\text{Aux}}{\leq} \frac{2\cancel{(n+1)}^{1}}{\cancel{(n+1)}_{1}} + \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{1+i} \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} 2 + n + \sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{1+i} \overset{\text{HI}}{\leq} 2 + n + 1 + n(n-1) = 2 + n + 1 + n^2 - n \overset{**}{=}$$
$$\overset{**}{=} 1 + n^2 + 2 \overset{(2 \leq n)}{\leq} 1 + n^2 + n = 1 + (n+1)n$$
$$\implies \sum_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{1+i} \leq 1 + (n+1)n,\ \text{si } n \geq 2$$
$$\implies P(n+1): V,\ \text{si } n \geq 2$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo, este último para los $n \geq 2$. Como solo probamos el paso inductivo para $n \geq 2$, deberiamos ver que $P(2)$ es verdadera.

$$P(2) : \sum_{i=1}^{2} \frac{2+i}{1+i} \leq 1 + 2(2-1)$$
$$P(2) : \frac{2+1}{1+1} + \frac{2+2}{1+2} \leq 3$$
$$P(2) : \frac{17}{6} \leq 3 \implies P(2) : V$$

Tenemos que

$P(1) : V \wedge P(2) : V$
si $n \geq 2$, $P(n) : V \implies P(n+1) : V$

Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : V$.

Auxiliar

Acotemos $1/(n+2)$

$$n+1 \leq n+2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Acotemos la sumatoria

$$\frac{1}{1+i} \leq 1, \quad \forall i \in \mathbb{N} \implies \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i} \leq \sum_{i=1}^{n} 1$$

iv) $P(n) : \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n,\ n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : \sum_{i=1}^{2\cdot 1} \frac{i}{2^i} \leq 1$$
$$P(1) : \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \leq 1 \implies P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : \sum_{i=n+1}^{2(n+1)} \frac{i}{2^i} \leq n+1$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n+1}^{2(n+1)} \frac{i}{2^i} &= \frac{2n+2}{2^{2n+2}} + \frac{2n+1}{2^{2n+1}} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{i}{2^i} = \frac{n}{2^n} - \frac{n}{2^n} + \frac{2n+2}{2^{2n+2}} + \frac{2n+1}{2^{2n+1}} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{i}{2^i} \\
&= -\frac{n}{2^n} + \frac{2n+2}{2^{2n+2}} + \frac{2n+1}{2^{2n+1}} + \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} = -\frac{2^{n+2}}{2^{n+2}}\frac{n}{2^n} + \frac{2n+2}{2^{2n+2}} + \frac{2}{2}\frac{2n+1}{2^{2n+1}} + \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \\
&= -\frac{4n2^n}{2^{2n+2}} + \frac{2n+2}{2^{2n+2}} + \frac{4n+2}{2^{2n+2}} + \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} = \frac{-4n2^n+6n+4}{2^{2n+2}} + \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \overset{\text{HI}}{\leq} \\
&\overset{\text{HI}}{\leq} \frac{-4n2^n+6n+4}{2^{2n+2}} + n \overset{\text{Aux}}{\leq} 1+n, \; n \geq 2
\end{aligned}$$

$$\implies \sum_{i=n+1}^{2(n+1)} \frac{i}{2^i} \leq n+1, \; n \geq 2 \implies P(n+1): V, \; n \geq 2$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo, este último para los $n \geq 2$. Como solo probamos el paso inductivo para $n \geq 2$, deberiamos ver que $P(2)$ es verdadera.

$$\begin{aligned}
&P(2): \sum_{i=2}^{2\cdot 2} \frac{i}{2^i} \leq 2 \\
&P(2): \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} \leq 2 \\
&P(2): \frac{9}{8} \leq 2 \implies P(2): V
\end{aligned}$$

Tenemos que

$P(1): V \wedge P(2): V$

si $n \geq 2, \; P(n): V \implies P(n+1): V$

Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N}, \; P(n): V$.

Auxiliar

Acotemos el termino $-4n2^n$

$$-4n2^n \leq -4n \cdot 2 = -8n \implies -4n2^n \leq -8n$$

Usemos esto para acotar toda la fracción

$$\frac{-4n2^n+6n+4}{2^{2n+2}} \leq \frac{-8n+6n+4}{2^{2n+2}} \leq \frac{-2n+4}{2^{2n+2}} \overset{(n\geq 2)}{\leq} \frac{1}{2^{2n+2}} \leq 1$$

Por último, veamos porque $-2n+4 \leq 1$

$$\begin{aligned}
&-2n+4 \leq 0 \iff -2n \leq -4 \iff n \geq \frac{-4}{-2} \iff n \geq 2 \\
&-2n+4 \leq 0, \text{ si } n \geq 2 \implies -2n+4 \leq 1, \text{ si } n \geq 2
\end{aligned}$$

v) $P(n): \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}, \; n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : \sum_{i=1}^{2^1} \frac{1}{2i-1} > \frac{1+3}{4}$$
$$P(1) : \frac{1}{1} + \frac{1}{3} > 1 \implies P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:
HI. $P(n) : V$
TI. $P(n+1) : \sum\limits_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+4}{4}$
Desarrollemos el lado derecho de la desigualdad:

$$\frac{n+4}{4} = \frac{1}{4} + \frac{n+3}{4} \overset{\text{HI}}{<} \frac{1}{4} + \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} = \frac{1}{4} + \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} + \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} \frac{1}{4} - \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} + \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} \overset{\text{Aux.1}}{<} 0 + \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} = \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1}$$
$$\implies \frac{n+4}{4} < \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} \implies P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : V$.

Auxiliar 1

$$\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} = \frac{1}{2^{n+1}+1} + \frac{1}{2^{n+1}+3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+2}-1} > \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+2}} \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} 1 \overset{\text{Aux.2}}{=} \frac{1}{2^{n+2}} 2^n = \frac{\cancelto{1}{2^n}}{2^2 \cancelto{1}{2^n}} = \frac{1}{4}$$
$$\implies \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} > \frac{1}{4} \implies -\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} < -\frac{1}{4} \implies \frac{1}{4} - \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1} < 0$$

Auxiliar 2

Cantidad de sumandos en una sumatoria

$$\sum_{i=A}^{B} a_i = a_A + \cdots + a_B$$
$$\#Elementos = \sum_{i=A}^{B} 1 = B + 1 - A$$

Calculemos la cantidad de sumandos en $\sum\limits_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2i-1}$

$$B = 2^{n+1}, A = 2^n + 1 \implies \#Elementos = B + 1 - A = 2^{n+1} + 1 - (2^n + 1) = 2 \cdot 2^n + 1 - 2^n - 1$$
$$\implies \#Elementos = 2^n$$

vi) $P(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \ n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{1-1}}$$
$$P(1) : \frac{1}{1} \leq 1 \implies P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^n}$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!} = \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \overset{\text{HI}}{\leq} \frac{1}{(n+1)!} + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{(n+1)!} + 2 - \frac{2}{2^n} \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{(n+1)!} \overset{\text{Aux}}{\leq} 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$
$$\implies \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^n} \implies P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N}, \ P(n) : V$.

Auxiliar

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n} \iff 2^n \leq (n+1)!$$

Probemos esto último usando inducción. Sea $Q(n) : 2^n \leq (n+1)!, \ n \in \mathbb{N}$.

1) Caso base, $n = 1$:

$$Q(1) : 2^1 \leq (1+1)!$$
$$Q(1) : 2 \leq 2 \implies Q(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $Q(n) : V$

TI. $Q(n+1) : 2^{n+1} \leq (n+2)!$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{HI}}{\leq} 2(n+1)! \overset{(2 \leq n+2)}{\leq} (n+2)(n+1)! = (n+2)!$$
$$\implies 2^{n+1} \leq (n+2)! \implies Q(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N}, \ Q(n) : V$.

vii) $P(n) : \prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} \geq 1, \;\; n \in \mathbb{N}.$

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : \prod_{i=1}^{1} \frac{4i-1}{1+i} \geq 1$$
$$P(1) : \frac{3}{2} \geq 1 \implies P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} \geq 1$

Desarrollemos el lado derecho de la desigualdad:

$$1 \overset{\text{HI}}{\leq} \prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} = \frac{4(n+1)-1}{4(n+1)-1} \cdot \frac{n+(n+1)}{n+(n+1)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} \frac{n+(n+1)}{4(n+1)-1} \cdot \frac{4(n+1)-1}{n+(n+1)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} = \frac{n+(n+1)}{4(n+1)-1} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+i} \overset{**}{=}$$
$$\overset{**}{=} \frac{2n+1}{4n+3} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+i} \cdot \frac{n+1+i}{n+1+i} = \frac{2n+1}{4n+3} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} \cdot \frac{n+1+i}{n+i} \overset{***}{=}$$
$$\overset{***}{=} \frac{2n+1}{4n+3} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{n+i} \overset{\text{Aux.1}}{=} \frac{2n+1}{4n+3} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} \cdot 2 =$$
$$= 2 \cdot \frac{2n+1}{4n+3} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} = \frac{4n+2}{4n+3} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} \overset{\text{Aux.2}}{\leq} 1 \cdot \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i}$$
$$\implies 1 \leq \prod_{i=1}^{n+1} \frac{4i-1}{n+1+i} \implies P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $\forall n \in \mathbb{N}, \; Q(n) : V$.

Auxiliar 1

Recordemos la formula del factorial de n

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \dots n$$

Veamos que pasa si sumamos una constante $k \in \mathbb{N}$ a la parte de la productoria

$$\prod_{i=1}^{n} (k+i) = (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n) = \frac{1 \cdot 2 \dots k}{1 \cdot 2 \dots k} (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n)$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \dots k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n)}{1 \cdot 2 \dots k} = \frac{(k+n)!}{k!}$$
$$\prod_{i=1}^{n} (k+i) = \frac{(k+n)!}{k!}$$

Calculemos $\prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{n+i}$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{n+i} &= \frac{\prod_{i=1}^{n+1} n+1+i}{\prod_{i=1}^{n+1} n+i} = \frac{\frac{(n+1+n+1)!}{(n+1)!}}{\frac{(n+n+1)!}{n!}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}}{\frac{(2n+1)!}{n!}} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} : \frac{(2n+1)!}{n!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)!}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{(2n+1)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)!}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{(2n+1)!} \\
&= 2\frac{(n+1)(2n+1)!n!}{(n+1)(2n+1)!n!} = 2
\end{aligned}$$

$$\implies \prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{n+i} = 2$$

Auxiliar 2

$$2 \leq 3 \implies 4n+2 \leq 4n+3 \implies \frac{4n+2}{4n+3} \leq 1$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Marcos Zea

11.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales todos del mismo signo y tales que $a_n > -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

¿En qué paso de la demostración se usa que $a_n > -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$? ¿Y que todos los términos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tienen el mismo signo?

ii) Deducir que si $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > -1$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + na$.

---

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales tales que

$$sg(a_n) = sg(a_1), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$
$$a_n > -1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff 1 + a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

donde $sg(x)$ es la función signo de x

$$sg(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Definamos nuestra proposición $P(n)$

$$P(n): \prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i,\ n \in \mathbb{N}$$

Caso Base, $n = 1$:

$$P(1): \prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{1} a_i$$
$$P(1): 1 + a_1 \geq 1 + a_1 \implies P(1): V$$

Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n): V$

TI. $P(n+1): \prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) = (1+a_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \underset{(2)}{\overset{\text{HI}}{\geq}} (1+a_{n+1})\left(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} + a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} 1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i + a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{\text{Aux}}{\geq} 1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i \implies P(n+1): V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo, entonces $P(n): V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Auxiliar Queremos ver que $a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i > 0$. La Ec.(1) nos dice que a_n nunca cambia de signo mientras que la Ec.(2) nos dice que a_n puede ser positiva o negativa. Entonces

$$sg(a_n) < 0 \vee sg(a_n) > 0$$

Caso $sg(a_n) < 0$

$$sg(a_n) < 0 \overset{(1)}{\implies} sg(a_{n+1}) < 0 \tag{3}$$

$$sg(a_n) < 0 \overset{(1)}{\implies} \sum_{i=1}^{n} a_i < 0 \tag{4}$$

Por la Ec.(3) y la Ec.(4), tenemos que

$$a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i > 0$$

Caso $sg(a_n) > 0$

$$sg(a_n) > 0 \overset{(1)}{\implies} sg(a_{n+1}) > 0 \tag{5}$$

$$sg(a_n) > 0 \overset{(1)}{\implies} \sum_{i=1}^{n} a_i > 0 \tag{6}$$

Por la Ec.(5) y la Ec.(6), tenemos que

$$a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i > 0$$

¿En qué paso de la demostración se usa que $a_n > -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$? En la misma parte donde utilizamos la HI, pues la desigualdad de la HI sigue siendo valida solo si multiplicamos a ambos lados por un número positivo. Ese número positivo esta en la Ec.(2).

¿Y que todos los términos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tienen el mismo signo? En la parte donde utilizamos el calculo auxiliar.

ii) Como $a > -1$ y $a \in \mathbb{R}$, cumple con las condiciones impuestas sobre $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el punto (i). Tomamos $a_n = a, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Como $P(n)$ es verdadera

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a$$
$$(1+a)^n \geq 1 + a\sum_{i=1}^{n} 1$$
$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Marcos Zea`

---

12. Probar que

i) $n! \geq 3^{n-1}, \quad \forall n \geq 5$

ii) $3^n - 2^n > n^3, \quad \forall n \geq 4$

iii) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5, \quad \forall n \geq 3$

---

i) $P(n) : n! \geq 3^{n-1}, \quad \forall n \geq 5$

Caso Base, $n = 5$:

$$P(5) : 5! \geq 3^{5-1}$$
$$P(5) : 120 \geq 81 \implies P(5) : V$$

Paso inductivo. $Sean \geq 5$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : (n+1)! \geq 3^n$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad en la TI

$$(n+1)! = (n+1)n! \overset{\text{HI}}{\geq} (n+1)3^{n-1} \overset{\text{Aux}}{\geq} 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \implies P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Entonces $P(n) : V, \quad \forall n \geq 5$.

Auxiliar $n \geq 5 \implies n \geq 3 \implies (n+1) \geq 3$

ii) $P(n) : 3^n - 2^n > n^3, \quad \forall n \geq 4$
Caso Base, $n = 4$:

$$P(4) : 3^4 - 2^4 > 4^3$$
$$P(4) : 65 > 64 \implies P(5) : V$$

Paso inductivo. *Sean* ≥ 4:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : 3^{n+1} - 2^{n+1} > (n+1)^3$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad en la TI

$$3^{n+1} - 2^{n+1} = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n \geq 3 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n = 3(3^n - 2^n) \overset{\text{HI}}{>} 3n^3 \overset{\text{Aux}}{>} (n+1)^3 \implies P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Entonces $P(n) : V, \quad \forall n \geq 4$.

Auxiliar $3n^3 > (n+1)^3 \iff \sqrt[3]{(3n^3)} > \sqrt[3]{(n+1)^3} \overset{\text{Aux}}{\iff} \sqrt[3]{3}n > n+1 \overset{*}{\Leftrightarrow}$
$\overset{*}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{3}n - n > 1 \Leftrightarrow n(\sqrt[3]{3} - 1) > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} \simeq 2.3 \implies 3n^3 > (n+1)^3, \quad \forall n \geq 4$

iii) $P(n) : \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5, \quad \forall n \geq 3$
Caso Base, $n = 3$:

$$P(3) : \sum_{i=1}^{3} \frac{3^i}{i!} < 6 \cdot 3 - 5$$
$$P(4) : \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} > 13$$
$$P(4) : 12 < 13 \implies P(5) : V$$

Paso inductivo. Sea $n \geq 3$:

HI. $P(n) : V$

TI. $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{3^i}{i!} < 6(n+1) - 5$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad en la TI

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{3^i}{i!} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} \overset{\text{HI}}{<} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + 6n - 5 \overset{\text{Aux}}{<} 6 + 6n - 5 = 6(n+1) - 5, \; n \geq 5$$
$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{3^i}{i!} < 6(n+1) - 5, \; n \geq 5$$
$$\implies P(n+1) : V, \; n \geq 5$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo, este último para los $n \geq 5$. Como solo probamos el paso inductivo para $n \geq 5$, deberiamos ver que $P(4)$ y $P(5)$ son verdaderas.

$$P(4) : \sum_{i=1}^{4} \frac{3^i}{i!} < 6 \cdot 4 - 5 \implies P(4) : 15.75 < 19 \implies P(4) : V$$
$$P(5) : \sum_{i=1}^{5} \frac{3^i}{i!} < 6 \cdot 5 - 5 \implies P(4) : 17.4 < 25 \implies P(5) : V$$

Tenemos

$$P(3) : V \wedge P(4) : V \wedge P(5) : V$$
$$\forall n \geq 5, P(n) : V \implies P(n+1) : V$$

Entonces $P(n) : V, \quad \forall n \geq 3$.

Auxiliar Por el punto (i), si $n \geq 5$ tenemos que $3^{n-1} \leq n! \implies 3^n \leq (n+1)! \overset{*}{\Rightarrow}$
$\overset{*}{\Rightarrow} \frac{3^n}{(n+1)!} \leq 1 \implies 3\frac{3^n}{(n+1)!} \leq 3 \implies \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \leq 3 \xRightarrow{(3<6)} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} < 6$
Llegamos a que $\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} < 6$, si $n \geq 5$.

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Marcos Zea`

---

13. Hallar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que $n^2 + 1 < 2^n$.

Pruebo algunos valores de n:

- $n = 1 \to 1^2 + 1 = 2 \not< 2$
- $n = 2 \to 2^2 + 1 = 5 \not< 4$
- $n = 3 \to 3^2 + 1 = 10 \not< 8$
- $n = 4 \to 4^2 + 1 = 17 \not< 16$
- $n = 5 \to 5^2 + 1 = 26 < 32 \quad \checkmark$

Parece ser que se cumple para los $n \geq 5$. Lo pruebo por inducción corrida.

$$P(n) : "n^2 + 1 < 2^n" \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$$

Caso Base:
$$P(5)\text{Verdadero} \iff 5^2 + 1 < 2^5 \iff 26 < 32 \quad \checkmark$$

Paso Inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}_{\geq 5}$. Supongo $\underbrace{P(k)}_{\text{HI}}$ Verdadero, quiero ver que $P(k+1)$ Verdadero.

$$P(k+1)\text{Verdadero} \iff (k+1)^2 + 1 < 2^{k+1}$$
$$\iff (k+1)^2 + 1 < 2^k \cdot 2$$

y como $(k^2+1) \cdot 2 < 2^k \cdot 2$ por HI, si $(k+1)^2 + 1 \leq (k^2+1) \cdot 2 \implies (k+1)^2 + 1 < 2^k \cdot 2$ como se quiere ver.

$$\begin{aligned}(k+1)^2+1 \leq (k^2+1)\cdot 2 &\iff k^2+2k+2 \leq 2k^2+2 \\ &\iff 2k \leq k^2 \\ &\underset{k>0}{\iff} 2 \leq k \quad \checkmark (\text{Pues } k \geq 5 \text{ por HI})\end{aligned}$$

Así, $(k+1)^2+1 < 2^k \cdot 2 \quad$ y $\therefore P(k+1)$ Verdadero.
Como se cumple tanto el caso base como el paso inductivo, por el principio de inducción $P(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

---

14. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que

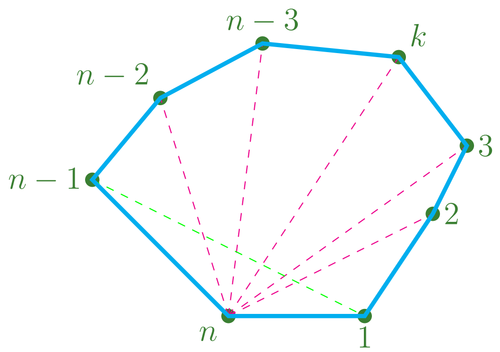
i) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.

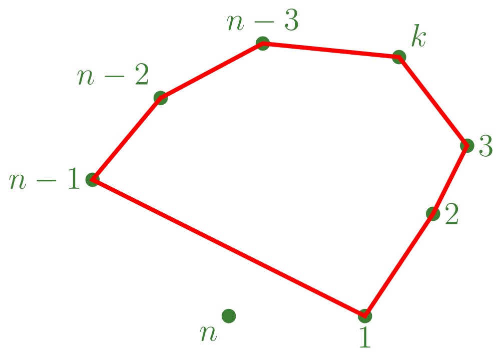
ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$.

---

i) La cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.

Ejercicio donde hay que encontrar una fórmula a partir de algún método *creativo* para luego probar por inducción.



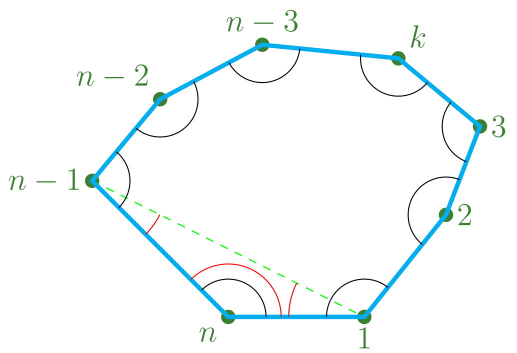


Se desprende del gráfico el siguiente razonamiento: En el polígono cyan de n lados voy a tener una cantidad de diagonales dada por la sucesión d_n. El polígono rojo me genera polígono que tiene un lado menos y un lado menos, cantidad que viene determinada por d_{n-1}. Las líneas punteadas son las diagonales de d_n que no estarán en d_{n-1}. Ahora voy a encontrar una relación entre ambas sucesiones. Al sacan un lado pierdo las diagonales desde 2 hasta $n-2$ que serían $n-3$ en total y además pierdo la diagonal que conectan el vértice 1 con el $n-1$: $d_n = d_{n-1} + 1 + n - 2 = d_{n-1} + n - 1$ $\rightarrow d_n = d_{n-1} + n - 1$
Ahora inducción:
$p(n) : d_n = \frac{n(n-3)}{2} \quad \forall n \geq 3$

$$\begin{cases} \textit{Caso Base: } p(3) \text{ verdadera ?} \rightarrow \frac{3(3-3)}{2} = 0, \text{ lo cual es verdad para el triángulo.} \quad \checkmark \\ \textit{Paso inductivo: } p(k) \text{ es verdadero para algún } k \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \implies p(k+1) \text{ verdadera ?} \\ \textit{Hipótesis Inductiva: } d_k = \frac{k(k-3)}{2} \implies d_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} \\ d = k+1 \overset{\text{def}}{=} d_k + k - 1 \overset{\text{HI}}{=} \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k-2)(k+1)}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

Como $p(3)$ y $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$.



En este caso estoy generando la suma de los ángulos internos de 2 polígonos, uno con α_n de n lados y otro con $n-1, \alpha_{n-1}$ Es más claro en este caso que al sacarle un lado, estoy formando un triángulo (en el gráfico con vértices n, $n-1$, 1) que tiene como suma de sus ángulos internos π, entonces afirmo $\alpha_{n+1} \overset{\star 1}{=} \alpha_n + \pi$.

Ahora pruebo por inducción lo pedido:

$$p(n) : \alpha_n = \pi(n-2) \;\; \forall n \geq 3$$

Arrancamos inducción:

Caso Base:

$$p(3) : \pi(3-2) = \pi,$$

lo cual es verdad para el triángulo, como aprendiste en el secundario.

Paso inductivo , asumo que:

$$p(k) : \underbrace{\alpha_k = \pi(k-2)}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadero para algún $k \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$, entonces también quiero que:

$$p(k+1) : \alpha_{k+1} = \pi(k-1)$$

también sea verdadero.

Arranco con la definición y uso la hipótesis inductiva:

$$\alpha_k \overset{\star 1}{=} \alpha_{k+1} - \pi \quad \text{y} \quad \alpha_k \overset{\text{HI}}{=} \pi(k-2)$$

Metés por acá sacás por allá:

$$\alpha_{k+1} \overset{!}{=} \pi(k-2) + \pi = \pi(k-1) \quad \checkmark$$

Como $p(3)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Nad Garraz

Recurrencia

15.

i) Sea $(a_n)_{n\ en\, \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = 2na_n + 2^{n+1}n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = 2^n n!$.

ii) Sea $(a_n)_{n\ en\, \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

---

i) Inducción. *Proposición:*

$$p(n) : a_n = 2^n n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : \begin{cases} a_1 \stackrel{\text{def}}{=} 2 = 2^1 \cdot 1! \quad \checkmark \\ a_{1+1} = a_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cdot 1 \cdot a_1 + 2^{1+1} 1! = 8 \stackrel{!}{=} 2^2 \cdot 2 \quad \checkmark. \end{cases}$$

Resulta que $p(1)$ es verdadera.

Paso inductivo:

$$p(k) : \underbrace{a_k = 2^k k!}_{\textit{hipótesis inductiva}}$$

asumo verdadera para algún $k \in \mathbb{Z}$ entonces quiero que

$$p(k+1) : a_{k+1} = 2^{k+1}(k+1)!$$

también lo sea.

$$a_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} 2k \cdot a_k + 2^{k+1} k! \stackrel{\text{HI}}{=} 2k \cdot 2^k k! + 2^{k+1} k! = 2^{k+1} k!(k+1) \stackrel{!}{=} 2^{k+1}(k+1)! \quad \checkmark$$

Resulta que $p(k+1)$ también es verdadera.

Como $p(1), p(k) \quad \text{y} \quad p(k+1)$ son verdaderas, por el principio de inducción también lo es $p(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

ii) Inducción. *Proposición:*

$$p(n) : a_n = n^2(n-1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : \begin{cases} a_1 \stackrel{\text{def}}{=} 0 = 1^2 \cdot (1-1) \quad \checkmark \\ a_{1+1} = a_2 \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + 1(3 \cdot 1 + 1) = 4 = 2^2 \cdot (2-1) \quad \checkmark. \end{cases}$$

Resulta que $p(1)$ es verdadera.

Paso inductivo:

$$p(k) : \underbrace{a_k = k^2(k-1)}_{\textit{hipótesis inductiva}}$$

asumo verdadera para algún $k \in \mathbb{Z} \implies$, enteonces quiero ver que

$$p(k+1): a_{k+1} = (k+1)^2(k+1-1) = k(k+1)^2$$

también lo sea.

$$a_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} a_k + k(3k+1) \stackrel{\text{HI}}{=} k^2(k-1) + 3k^2 + k = k^3 + 2k^2 + k \stackrel{!}{=} k(k+1)^2 \quad \checkmark$$

Resulta que $p(k+1)$ también es verdadera.

Como $p(1), p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas, por el principio de inducción también lo es $p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

---

16. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas recursivamente a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = (1+\sqrt{a_n})^2, \ \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = 2a_n + 3^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

iii) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = na_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

iv) $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

---

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 1 \tag{1}$$
$$a_{n+1} = (1+\sqrt{a_n})^2, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Veamos si hay algún patrón entre los términos de la sucesión para poder conjeturar una formula para su termino n-ésimo

$$\begin{aligned} a_2 &= (1+\sqrt{a_1})^2 = (1+\sqrt{1})^2 = 4 = 2^2 \\ a_3 &= (1+\sqrt{a_2})^2 = (1+\sqrt{4})^2 = 9 = 3^2 \\ a_4 &= (1+\sqrt{a_3})^2 = (1+\sqrt{9})^2 = 16 = 4^2 \\ &\vdots \\ a_n &= n^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión que conjeturamos en la Ec.(3). Hagamoslo por inducción

$$P(n): a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$$

<u>Caso Base</u>, $n = 1$:

$$P(1): a_1 = 1^2 = 1 \stackrel{1}{=} 1 \implies P(1): V$$

<u>Paso inductivo.</u> Sea $n \geq 1$:

HI. $P(n): V$

TI. $P(n+1): a_{n+1} = (n+1)^2$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI

$$a_{n+1} \overset{(2)}{=} (1+\sqrt{a_n})^2 \overset{\text{HI}}{=} (1+\sqrt{n^2})^2 = (1+n)^2 \implies P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 3 \tag{1}$$
$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Veamos si hay algún patrón entre los términos de la sucesión para poder conjeturar una formula para su termino n-ésimo

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 3^1 = 2\cdot 3 + 3 = 9 = 3^2 \\ a_3 &= 2a_2 + 3^2 = 2\cdot 9 + 3^2 = 9 = 27 = 3^3 \\ a_4 &= 2a_3 + 3^2 = 2\cdot 27 + 3^3 = 81 = 3^4 \\ &\vdots \\ a_n &= 3^n \end{aligned}$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión que conjeturamos en la Ec.(3). Hagamoslo por inducción

$$P(n) : a_n = 3^n, n \in \mathbb{N}$$

<u>Caso Base</u>, $n = 1$:

$$P(1) : a_1 = 3^1 = 3 \overset{(1)}{=} 3 \implies P(1) : V$$

<u>Paso inductivo.</u> Sea $n \geq 1$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : a_{n+1} = 3^{n+1}$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI

$$a_{n+1} \overset{(2)}{=} 2a_n + 3^n \overset{\text{HI}}{=} 2\cdot 3^n + 3^n = 3\cdot 3^n = 3^{n+1} \implies P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

iii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 3 \tag{1}$$
$$a_{n+1} = na_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Veamos si hay algún patrón entre los términos de la sucesión para poder conjeturar una formula de su termino n-ésimo

$$\begin{aligned} a_2 &= 1\cdot a_1 = 1\cdot 1 \\ a_3 &= 2\cdot a_2 = 2\cdot 1 \\ a_4 &= 3\cdot a_3 = 3\cdot 2 = 3\cdot 2\cdot 1 \\ a_5 &= 4\cdot a_4 = 4\cdot 6 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \\ &\vdots \\ a_n &= (n-1)! \end{aligned} \tag{3}$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión que conjeturamos en la Ec.(3). Hagamoslo por inducción

$$P(n) : a_n = 3^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Caso Base</u>, $n = 1$:

$$P(1) : a_1 = 3^1 = 3 \overset{(1)}{=} 3 \implies P(1) : V$$

<u>Paso inductivo.</u> Sea $n \geq 1$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : a_{n+1} = 3^{n+1}$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI

$$a_{n+1} \overset{(2)}{=} 2a_n + 3^n \overset{\text{HI}}{=} 2 \cdot 3^n + 3^n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1} \implies P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

iv) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 2 \tag{1}$$

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Veamos si hay algún patrón entre los términos de la sucesión para poder conjeturar una formula de su termino n-ésimo

$$\begin{aligned}
a_2 &= 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
a_3 &= 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{1}{3/2} = \frac{4}{3} \\
a_4 &= 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{1}{4/3} = \frac{5}{4} \\
a_5 &= 2 - \frac{1}{a_4} = 2 - \frac{1}{5/4} = \frac{6}{5} \\
&\vdots \\
a_n &= \frac{n+1}{n}
\end{aligned} \tag{3}$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión que conjeturamos en la Ec.(3). Hagamoslo por inducción

$$P(n) : a_n = \frac{n+1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Caso Base</u>, $n = 1$:

$$P(1) : a_1 = \frac{1+1}{1} = 2 \overset{(1)}{=} 2 \implies P(1) : V$$

<u>Paso inductivo</u>. Sea $n \geq 1$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI

$$a_{n+1} \overset{(2)}{=} 2 - \frac{1}{a_n} \overset{\text{HI}}{=} 2 - \frac{1}{(n+1)/n} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2(n+1)-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \implies P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Marcos Zea`

17.

i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + n \cdot n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n!$, y, aplicando el Ej.9i), calcular $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!$.

ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^3$, y, aplicando el Ej.9i, calcular de otra forma $\sum_{i=1}^{n} i^2$ (comparar con Ej.6).

---

i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 1 \tag{1}$$
$$a_{n+1} = a_n + n \cdot n!, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión $a_n = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hagamoslo por inducción

$$P(n) : a_n = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Caso Base</u>, $n = 1$:

$$P(1) : a_1 = 1! = 1 \overset{(1)}{=} 1 \implies P(1) : V$$

<u>Paso inductivo.</u> Sea $n \geq 1$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : a_{n+1} = (n+1)!$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI

$$a_{n+1} \overset{(2)}{=} a_n + n \cdot n! \overset{\text{HI}}{=} n! + n \cdot n! = n!(n+1) = (n+1)! \implies P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Calculemos $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!$:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! \underset{1}{\overset{\text{Aux}}{=}} \sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) \underset{2}{\overset{\text{Aux}}{=}} a_{n+1} - a_1 = (n+1)! - 1$$

Auxiliar 1 Usemos la Ec.(2)

$$a_{n+1} = a_n + n \cdot n! \implies n \cdot n! = a_{n+1} - a_n$$

Auxiliar 2 Ecuación dada por el ejercicio 19.i)

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_1) = a_{n+1} - a_1$$

ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 1 \tag{1}$$
$$a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión $a_n = n^3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hagamoslo por inducción

$$P(n) : a_n = n^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Caso Base</u>, $n = 1$:

$$P(1) : a_1 = 1! = 1 \overset{(1)}{=} 1 \implies P(1) : V$$

<u>Paso inductivo.</u> Sea $n \geq 1$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : a_{n+1} = (n+1)^3$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI

$$a_{n+1} \overset{(2)}{=} a_n + 3n^2 + 3n + 1 \overset{\text{HI}}{=} n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 \implies P(n+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Calculemos $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 &\overset{\text{(Aux.1)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}-a_i-3i-1}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i-3i-1) \\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) - \sum_{i=1}^{n}3i - \sum_{i=1}^{n}1\right) = \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) - 3\sum_{i=1}^{n}i - \sum_{i=1}^{n}1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) + \frac{1}{3}\left(-3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) \\
&\overset{\text{(Aux.2)}}{=} \frac{1}{3}(a_{n+1}-a_1) + \left(-\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3}\right) = \frac{1}{3}((n+1)^3-1) + \left(-\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3}\right) \\
&= \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{3} \\
&= (n+1)\left(\frac{(n+1)^2}{3} - \frac{n}{2} - \frac{1}{3}\right) = (n+1)\left(\frac{n^2+2n+1}{3} - \frac{n}{2} - \frac{1}{3}\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{2n^2+4n+2-3n-2}{6}\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2+n}{6}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Auxiliar 1 Usemos la Ec.(2)

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + 3n^2 + 3n + 1 \\
,3n^2 &= a_{n+1} - a_n - 3n - 1 \\
n^2 &= \frac{a_{n+1} - a_n - 3n - 1}{3}
\end{aligned}
$$

Auxiliar 2 Ecuación dada por el ejercicio 19.i)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_1) = a_{n+1} - a_1$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Marcos Zea`

---

18. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones definidas recursivamente a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ y $a_{n+2} = na_{n+1} + 2(n+1)a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $a_1 = 1,\ a_2 = 4$ y $a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

iii) $a_1 = 1,\ a_2 = 3$ y $2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

iv) $a_1 = -3,\ a_2 = 6$ y $a_{n+2} = \begin{cases} -a_{n+1} - 3, & \text{si } n \text{ es impar} \\ a_{n+1} + 2a_n + 9, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

---

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 && (1)\\ a_2 &= 2 && (2)\\ a_{n+2} &= na_{n+1} + 2(n+1)a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} && (3) \end{aligned}$$

Veamos si hay algún patrón entre los términos de la sucesión para poder conjeturar una fórmula para su término n-ésimo

$$\begin{aligned} a_3 &= 1\cdot a_2 + 2(1+1)a_1 = 1\cdot 2 + 2(1+1)1 = 6 = 3!\\ a_4 &= 2a_3 + 2(2+1)a_2 = 2\cdot 6 + 2(2+1)2 = 24 = 4!\\ a_5 &= 3a_4 + 2(3+1)a_3 = 3\cdot 24 + 2(3+1)6 = 120 = 5!\\ &\vdots\\ a_n &= n! && (4) \end{aligned}$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión que conjeturamos en la Ec.(4). Hagámoslo por inducción

$$P(n) : a_n = n!,\ n \in \mathbb{N}$$

Caso Base, $n = 1$ y $n = 2$:

$$P(1) : a_1 = 1! = 1 \overset{(1)}{=} 1 \implies P(1) : V$$
$$P(2) : a_2 = 2! = 2 \overset{(2)}{=} 2 \implies P(2) : V$$

Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$ y $P(n+1) : V$, donde $P(n+1) : a_{n+1} = (n+1)!$

TI. $P(n+2) : a_{n+2} = (n+2)!$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\overset{(3)}{=} na_{n+1} + 2(n+1)a_n \overset{\text{HI}}{=} n(n+1)! + 2(n+1)n! = n(n+1)! + 2(n+1)!\\ a_{n+2} &= (n+1)!(n+2) = (n+2)! \implies P(n+2) : V \end{aligned}$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 && (1)\\ a_2 &= 4 && (2)\\ a_{n+2} &= 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} && (3) \end{aligned}$$

Veamos si hay algún patrón entre los términos de la sucesión para poder conjeturar una fórmula para su término n-ésimo

$$\begin{aligned}
a_3 &= 4\sqrt{a_2} + a_1 = 4\sqrt{4} + 1 = 9 = 3^2 \\
a_4 &= 4\sqrt{a_3} + a_2 = 4\sqrt{9} + 4 = 16 = 4^2 \\
a_5 &= 4\sqrt{a_4} + a_3 = 4\sqrt{16} + 9 = 25 = 5^2 \\
&\vdots \\
a_n &= n^2 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión que conjeturamos en la Ec.(4). Hagámoslo por inducción

$$P(n) : a_n = n^2,\ n \in \mathbb{N}$$

<u>Caso Base</u>, $n = 1$ y $n = 2$:

$$P(1) : a_1 = 1^2 = 1 \overset{(1)}{=} 1 \implies P(1) : V$$
$$P(2) : a_2 = 2^2 = 4 \overset{(2)}{=} 4 \implies P(2) : V$$

<u>Paso inductivo</u>. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$ y $P(n+1) : V$, donde $P(n+1) : a_{n+1} = (n+1)^2$

TI. $P(n+2) : a_{n+2} = (n+2)^2$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI

$$a_{n+2} \overset{(3)}{=} 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n \overset{\text{HI}}{=} 4\sqrt{(n+1)^2} + n^2 = 4(n+1) + n^2 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$
$$a_{n+2} = (n+2)^2 \implies P(n+2) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

iii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 1 \qquad (1)$$
$$a_2 = 3 \qquad (2)$$
$$2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5, \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n + 3n + 5}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (3)$$

Veamos si hay algún patrón entre los términos de la sucesión para poder conjeturar una fórmula para su término n-ésimo

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{a_2 + a_1 + 3\cdot 1 + 5}{2} = \frac{3 + 1 + 3 + 5}{2} = 6 = 3 + 2 + 1 \\
a_4 &= \frac{a_3 + a_2 + 3\cdot 2 + 5}{2} = \frac{6 + 3 + 6 + 5}{2} = 10 = 4 + 3 + 2 + 1 \\
a_5 &= \frac{a_4 + a_3 + 3\cdot 3 + 5}{2} = \frac{10 + 6 + 9 + 5}{2} = 15 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
a_n &= \sum_{i=1}^{n} i \implies a_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión que conjeturamos en la Ec.(4). Hagámoslo por inducción:

$$P(n) : a_n = \frac{n(n+1)}{2},\ n \in \mathbb{N}$$

<u>Caso Base</u>, $n = 1$ y $n = 2$:

$$\begin{aligned} P(1) : a_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \overset{(1)}{=} 1 \implies P(1) : V \\ P(2) : a_2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3 \overset{(2)}{=} 3 \implies P(2) : V \end{aligned}$$

<u>Paso inductivo</u>. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V \quad$ y $\quad P(n+1) : V$, donde $P(n+1) : a_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

TI. $P(n+2) : a_{n+2} = \dfrac{(n+2)(n+3)}{2}$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\overset{(3)}{=} \frac{a_{n+1} + a_n + 3n + 5}{2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n + 3n + 5) \overset{\text{HI}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + 3n + 5\right) \\ a_{n+2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n+2) + n(n+1) + 6n + 10}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2 + 3n + 2 + n^2 + n + 6n + 10}{2}\right) \\ a_{n+2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n^2 + 10n + 12}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2(n+2)(n+3)}{2}\right) = \frac{(n+2)(n+3)}{2} \\ a_{n+2} &= \frac{(n+2)(n+3)}{2} \implies P(n+2) : V \end{aligned}$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

iv) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = -3 \quad (1)$$
$$a_2 = 6 \quad (2)$$

Y como a_{n+2} está partida:

$$a_{n+2} = -a_{n+1} - 3, \quad \text{si } n \text{ es impar} \quad (3)$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 9, \quad \text{si } n \text{ es par} \quad (4)$$

Veamos si hay algún patrón entre los términos de la sucesión para poder conjeturar una fórmula para su término n-ésimo

$$
\begin{aligned}
a_3 &= -a_2 - 3 = -6 - 3 = -9 = (-1)\cdot 3\cdot 3 \\
a_4 &= a_3 + 2a_2 + 9 = -9 + 2\cdot 6 + 9 = 12 = (-1)^2\cdot 3\cdot 4 \\
a_5 &= -a_4 - 3 = -12 - 3 = -15 = (-1)\cdot 3\cdot 5 \\
a_6 &= a_5 + 2a_4 + 9 = -15 + 2\cdot 12 + 9 = 18 = (-1)^2\cdot 3\cdot 6 \\
&\vdots \\
a_n &= (-1)^n 3n \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión que conjeturamos en la Ec.(5). Hagámoslo por inducción

$$P(n) : a_n = (-1)^n 3n,\ n \in \mathbb{N}$$

Caso Base, $n = 1$ y $n = 2$:

$$
\begin{aligned}
P(1) &: a_1 = (-1)^1\cdot 3\cdot 1 = -3 \overset{(1)}{=} 1 \implies P(1) : V \\
P(2) &: a_2 = (-1)^2\cdot 3\cdot 2 = 6 \overset{(2)}{=} 6 \implies P(2) : V
\end{aligned}
$$

Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$ y $P(n+1) : V$, donde $P(n+1) : a_{n+1} = (-1)^{n+1}3(n+1)$

TI. $P(n+2) : a_{n+2} = (-1)^{n+2}3(n+2)$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI. Como este depende de la paridad de n tendremos que analizar dos casos, uno con n impar y otro con n par.
Caso n impar:

$$
\begin{aligned}
a_{n+2} &\overset{(3)}{=} -a_{n+1} - 3 \overset{\text{HI}}{=} -(-1)^{n+1}3(n+1) - 3 \underset{1}{\overset{Aux}{=}} (-1)^{n+2}3(n+1) - 3 \underset{2}{\overset{Aux}{=}} -3(n+1) - 3 \\
a_{n+2} &= -3n - 3 - 3 = -3n - 6 = -3(n+2) = (-1)3(n+2) \underset{2}{\overset{Aux}{=}} (-1)^{n+2}3(n+2) \\
a_{n+2} &= (-1)^{n+2}3(n+2) \implies P(n+2) : V,\ n \text{ impar}
\end{aligned}
$$

Caso n par:

$$
\begin{aligned}
a_{n+2} &\overset{(4)}{=} a_{n+1} + 2a_n + 9 \overset{\text{HI}}{=} (-1)^{n+1}3(n+1) + 2(-1)^n 3n + 9 \underset{4}{\overset{Aux}{=}} -3(n+1) + 2\cdot 3n + 9 \\
a_{n+2} &= -3n - 3 + 6n + 9 = 3n + 6 = 3(n+2) = 1\cdot 3(n+2) \overset{\text{Aux.5}}{=} (-1)^{n+2}3(n+2) \\
a_{n+2} &= (-1)^{n+2}3(n+2) \implies P(n+2) : V,\ n \text{ par}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $P(n+2) : V$ para cualquier n natural. Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Auxiliar Sabemos que

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es par} \\ -1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Auxiliar 2 Tenemos n impar

$$-(-1)^{n+1} = (-1)^1 \cdot (-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}$$

Auxiliar 2 Tenemos n impar

$$(-1)^{n+2} = (-1)^n \cdot (-1)^2 = (-1)^n \cdot 1 \overset{\text{Aux}}{=} -1$$

Auxiliar 3 Tenemos n impar

$$-1 = (-1) \cdot (-1)^2 \overset{\text{Aux}}{=} (-1)^n \cdot (-1)^2 = (-1)^{n+2}$$

Auxiliar 4 Tenemos n par

- $(-1)^{n+1} = (-1)^n \cdot (-1)^1 \overset{\text{Aux}}{=} 1 \cdot (-1) = -1$
- $(-1)^n \overset{\text{Aux}}{=} 1$

Auxiliar 3 Tenemos n par

$$1 = 1 \cdot (-1)^2 \overset{\text{Aux}}{=} (-1)^n \cdot (-1)^2 = (-1)^{n+2}$$

v) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida por

$$a_0 = 1 \tag{1}$$
$$a_1 = 4 \tag{2}$$
$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{3}$$

Veamos si hay algún patrón entre los términos de la sucesión para poder conjeturar una fórmula para su término n-ésimo

$$\begin{aligned}
a_2 &= 4a_1 - 4a_0 = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 2^2 \cdot 2^2 - 2^2 = 2^2(2^2 - 1) = 2^2 \cdot 3 \\
a_3 &= 4a_2 - 4a_1 \overset{\text{Aux}}{=} 4 \cdot 2^2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3 - 2^2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3(2 \cdot 3 - 2) = 2^3 \cdot 4 \\
a_4 &= 4a_3 - 4a_2 = 4 \cdot 2^3 \cdot 4 - 4 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 4 - 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^4(2 \cdot 4 - 3) = 2^4 \cdot 5 \\
a_5 &= 4a_4 - 4a_3 = 4 \cdot 2^4 \cdot 5 - 4 \cdot 2^3 \cdot 4 = 2^2 \cdot 2^4 \cdot 5 - 2^2 \cdot 2^3 \cdot 4 = 2^5(2 \cdot 5 - 4) = 2^5 \cdot 6 \\
&\vdots \\
a_n &= 2^n(n+1) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión que conjeturamos en la Ec.(4). Hagámoslo por inducción

$$P(n) : a_n = 2^n(n+1),\ n \in \mathbb{N}_0$$

<u>Caso Base</u>, $n = 0$ y $n = 1$:

$$P(0) : a_0 = 2^0(0+1) = 1 \overset{(1)}{=} 1 \implies P(0) : V$$
$$P(1) : a_1 = 2^1(1+1) = 4 \overset{(2)}{=} 4 \implies P(1) : V$$

<u>Paso inductivo</u>. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V \quad \text{y} \quad P(n+1) : V$, donde $P(n+1) : a_{n+1} = 2^{n+1}(n+2)$

TI. $P(n+2) : a_{n+2} = 2^{n+2}(n+3)$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI

$$a_{n+2} \overset{(3)}{=} 4a_{n+1} - 4a_n \overset{\text{HI}}{=} 4 \cdot 2^{n+1}(n+2) - 4 \cdot 2^n(n+1) = 2^2 \cdot 2^{n+1}(n+2) - 2^2 \cdot 2^n(n+1)$$
$$a_{n+2} = 2^{n+2}(2(n+2) - (n+1)) = 2^{n+2}(2n+4-n-1) = 2^{n+2}(n+3)$$
$$a_{n+2} = 2^{n+2}(n+3) \implies P(n+2) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Auxiliar Escribimos a $a_1 = 4$ como $a_1 = 2 \cdot 2$ para simplificar pasos en la obtención del termino general de a_n. Si utilizamos $a_1 = 4$, llegamos a que $a_3 = 2^5$, despues a que $a_5 = 2^6 \cdot 3$ y no es tan fácil ver el patrón de nuestro termino generale.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Marcos Zea

19.

i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \ (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2} a_n \ (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n > n + \frac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

---

i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 1 \quad (1)$$
$$a_2 = 3 \quad (2)$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Probemos la desigualdad que nos pide el ejercicio por inducción

$$P(n) : a_n < 1 + 3^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$$

Caso Base, $n = 1$ y $n = 2$:

$$P(1) : a_1 < 1 + 3^{1-1} \overset{(1)}{\Longrightarrow} P(1) : 1 < 2 \implies P(1) : V$$
$$P(2) : a_2 < 1 + 3^{2-1} \overset{(2)}{\Longrightarrow} P(2) : 3 < 4 \implies P(2) : V$$

Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V \quad$ y $\quad P(n+1) : V$, donde $P(n+1) : a_{n+1} < 1 + 3^n$

TI. $P(n+2) : a_{n+2} < 1 + 3^{n+1}$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad en la TI

$$a_{n+2} \overset{(3)}{=} a_{n+1} + 5a_n \overset{\text{HI}}{<} 1 + 3^n + 5(1 + 3^{n-1}) = 1 + 3^n + 5 + 5 \cdot 3^{n-1} \overset{\text{Aux}}{<} 1 + 3^n + 3^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1} \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} 1 + 3^n + 6 \cdot 3^{n-1} = 1 + 3^n + 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} = 1 + 3^n + 2 \cdot 3^n = 1 + 3 \cdot 3^n = 1 + 3^{n+1},\ n \geq 3$$
$$\implies a_{n+2} < 1 + 3^{n+1},\ n \geq 3 \implies P(n+2) : V,\ n \geq 3$$

Como solo probamos el paso inductivo para $n \geq 3$, deberiamos ver que $P(n)$ y $P(n+1)$ son verdaderas para $n = 3$. O sea, queremos ver que $P(3)$ y $P(4)$ son verdaderas.

$$P(3) : a_3 < 1 + 3^{3-1} \overset{(3)}{\implies} P(3) : 8 < 9 \implies P(3) : V$$
$$P(4) : a_4 < 1 + 3^{4-1} \overset{(3)}{\implies} P(3) : 23 < 27 \implies P(4) : V$$

Probamos

- $P(1) : V,\ P(2) : V,\ P(3) : V,\ P(4) : V$
- $P(n) : V \land P(n+1) : V \implies P(n+2) : V, \quad \forall n \geq 3$

Podemos concluir que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Auxiliar Sea $n \in \mathbb{N}$

$$5 < 3^{n-1} \Leftrightarrow \log_3(5) < \log_3(3^{n-1}) \Leftrightarrow \log_3(5) < (n-1)\log_3(3) \Leftrightarrow \log_3(5) < n - 1$$
$$\overset{*}{\Leftrightarrow} n > 1 + \log_3(5) \simeq 2.5 \implies 5 < 3^{n-1}, \quad \forall n \geq 3$$

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_1 = 1 \tag{1}$$
$$a_2 = \frac{3}{2} \tag{2}$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2} a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Probemos la desigualdad que nos pide el ejercicio por inducción

$$P(n) : a_n > n + \frac{1}{3},\ n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$$

Caso Base, $n = 4$ y $n = 5$:

$$P(4) : a_4 < 4 + \frac{1}{3} \overset{(3)}{\implies} P(4) : \frac{35}{8} < \frac{13}{3} \implies 3 \cdot 35 > 8 \cdot 13 \implies 105 > 104 \implies P(4) : V$$
$$P(5) : a_5 < 5 + \frac{1}{3} \overset{(3)}{\implies} P(5) : \frac{63}{8} < \frac{16}{3} \implies 3 \cdot 63 > 8 \cdot 16 \implies 189 > 128 \implies P(5) : V$$

Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$:

HI. $P(n) : V \quad$ y $\quad P(n+1) : V$, donde $P(n+1) : a_{n+1} > n + 1 + \dfrac{1}{3}$

TI. $P(n+2) : a_{n+2} > n + 2 + \frac{1}{3}$

Desarrollemos el lado izquierdo de la desigualdad en la TI

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\overset{(3)}{=} a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2} a_n \overset{\text{HI}}{>} n + 1 + \frac{1}{3} + \frac{2n+1}{n+2}\left(n + \frac{1}{3}\right) = n + 1 + \frac{1}{3} + \frac{2n+1}{n+2}\left(n + \frac{1}{3}\right) + 1 - 1 \\ &\overset{*}{=} n + 2 + \frac{1}{3} + \frac{2n+1}{n+2}\left(n + \frac{1}{3}\right) - 1 \overset{\text{Aux.1}}{\geq} n + 2 + \frac{1}{3} + 1 \cdot \left(n + \frac{1}{3}\right) - 1 = n + 2 + \frac{1}{3} + n + \frac{1}{3} - 1 \\ &\overset{**}{=} n + 2 + \frac{1}{3} + n - \frac{2}{3} \overset{\text{Aux.2}}{\geq} n + 2 + \frac{1}{3} \\ &\implies a_{n+2} > n + 2 + \frac{1}{3} \implies P(n+2) : V \end{aligned}$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Podemos concluir que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$.

Auxiliar 1 Sea $n \in \mathbb{N}$

$$1 \leq n \iff 1 + 1 \leq n + 1 \iff 2 \leq n + 1 \iff n + 2 \leq n + n + 1 \iff n + 2 \leq 2n + 1 \iff 1 \leq \frac{2n+1}{n+2}$$

Auxiliar 2 Sea $n \in \mathbb{N}$

$$1 \leq n \iff \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \leq n \iff \frac{1}{3} \leq n - \frac{2}{3}$$

---

20. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones definidas recursivamente a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $a_0 = 5$ y $a_n = \begin{cases} 2a_{n-1}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{5} a_{\frac{n}{2}}^2, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

---

i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definida por

$$a_1 = \frac{1}{2} \tag{1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Veamos si hay algún patrón entre los términos de la sucesión para conjeturar una fórmula de su término n-ésimo

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{2}\left(1-\sum_{i=1}^{1} a_i\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}\\
a_3 &= \frac{1}{2}\left(1-\sum_{i=1}^{2} a_i\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}\\
a_4 &= \frac{1}{2}\left(1-\sum_{i=1}^{3} a_i\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}\\
&\vdots\\
a_n &= \frac{1}{2^n} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión que conjeturamos en la Ec.(3). Hagamoslo por inducción

$$P(n) : a_n = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}$$

Caso Base, $n = 1$:

$$P(1) : a_1 = \frac{1}{2^1} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2} \implies P(1) : V$$

Paso inductivo. Sean $n, k \in \mathbb{N}$, donde $1 \leq k \leq n$:

HI. $P(k) : V, \quad \forall k$

TI. $P(n+1) : a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \overset{\text{HI}}{=} \frac{1}{2}\left(1-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\right) \overset{\text{Aux}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\\
a_{n+1} &= \frac{1}{2^{n+1}} \implies P(n+1) : V
\end{aligned}$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Auxiliar Recordemos la suma geométrica para $q \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \qquad (4)$$

Calculemos $1 - \sum_{i=1}^{n} 1/2^i$

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - 1 + 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 + 1 - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \overset{(1=1^i)}{=} 2 - \sum_{i=0}^{n} \frac{1^i}{2^i}$$
$$= 2 - \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i \overset{(4)}{=} 2 - \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right) = 2 - \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{-1}{2}}\right)$$
$$= 2 + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2}}\right) \overset{!!}{=} \frac{1}{2^n}$$
$$\implies 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por

$$a_0 = 5 \tag{1}$$
$$a_n = 2a_{n-1}, \text{ si } n \text{ es impar} \tag{2}$$
$$a_n = \frac{1}{5}a_{\frac{n}{2}}^2, \text{ si } n \text{ es par} \tag{3}$$

Veamos si hay algún patrón entre los términos de la sucesión para conjeturar una fórmula de su término n-ésimo

$$a_1 = 2a_0 = 2 \cdot 5 = 10 = 2 \cdot 5$$
$$a_2 = \frac{1}{5}a_1^2 = \frac{1}{5} \cdot 10^2 = 20 = 2^2 \cdot 5$$
$$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 20 = 40 = 2^3 \cdot 5$$
$$a_4 = \frac{1}{5}a_2^2 = \frac{1}{5}20^2 = 80 = 2^4 \cdot 5$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2^n \cdot 5 \tag{4}$$

Tenemos que probar que la sucesión dada por recurrencia satisface la sucesión que conjeturamos en la Ec.(4). Hagamoslo por inducción

$$P(n) : a_n = 2^n \cdot 5, \; n \in \mathbb{N}_0$$

Caso Base, $n = 0$:

$$P(0) : a_0 = 2^0 \cdot 5 = 5 \overset{(1)}{=} 5 \implies P(0) : V$$

Paso inductivo. Sean $n, k \in \mathbb{N}_0$, donde $0 \leq k \leq n$:

HI. $P(k) : V, \quad \forall k$

TI. $P(n+1) : a_{n+1} = 2^{n+1} \cdot 5$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI. Como a_n es sucesión partida, analizemos los casos donde n es par y otro donde es impar.
Caso n par (n par $\implies n+1$ impar):

$$a_{n+1} \overset{(2)}{=} 2a_{n+1-1} = 2a_n \overset{\text{HI}}{=} 2 \cdot 2^n \cdot 5 = 2^{n+1} \cdot 5$$
$$a_{n+1} = 2^{n+1} \cdot 5 \implies P(n+1) : V, \; n \text{ par}$$

Caso n impar (n impar $\implies n+1$ par):

$$a_{n+1} \overset{(3)}{=} \frac{1}{5} a^2_{\frac{n+1}{2}} \overset{\text{HI}}{=} \frac{1}{5} \cdot (2^{\frac{n+1}{2}} \cdot 5)^2 = \frac{1}{5} \cdot 2^{2\frac{n+1}{2}} \cdot 5^2 = 2^{n+1} \cdot 5$$
$$a_{n+1} = 2^{n+1} \cdot 5 \implies P(n+1) : V,\ n \text{ impar}$$

Por lo tanto, $P(n+1) : V$ para cualquier n natural. Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Marcos Zea

21. Sea $f : \mathbb{R} - \{0,1\} \to \mathbb{R} - \{0,1\}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Para $n \in \mathbb{N}$ se define:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}}$$

Probar que $f^{3k}(x) = x$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $f : \mathbb{R} - \{0,1\} \to \mathbb{R} - \{0,1\}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \tag{1}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, definimos f^n como la composición de f consigo misma n veces

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}} \tag{2}$$

Probemos lo que pide el ejercicio por inducción

$$P(k) : f^{3k}(x) = x,\ k \in \mathbb{N}$$

<u>Caso Base</u>, $k = 1$:

$$P(1) : f^{3 \cdot 1}(x) = f^3(x) \overset{(2)}{=} f \circ f \circ f(x) = f(f(f(x))) \overset{(1)}{=} f\left(f\left(\frac{1}{1-x}\right)\right) \overset{(1)}{=} f\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}\right)$$
$$= f\left(\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{-x}{1-x}}\right) = f\left(\frac{1-x}{-x}\right) = f\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$
$$P(1) : f^3(x) = x \implies P(1) : V$$

<u>Paso inductivo.</u> Sea $k \geq 1$:

HI. $P(k) : V$

TI. $P(k+1) : f^{3(k+1)}(x) = x$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI

$$f^{3(k+1)}(x) = f^{3k+3}(x) \overset{(2)}{=} f^{3k} \circ f^3(x) = f^{3k}\left(f^3(x)\right) \overset{P(1)}{=} f^{3k}(x) \overset{\text{HI}}{=} x$$
$$f^{3(k+1)}(x) = x \implies P(k+1) : V$$

Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(k) : V, \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Marcos Zea`

---

22. Probar que todo número natural n se escribe como suma de distintas potencias de 2, incluyendo $2^0 = 1$.

Probemos que todo número natural n se escribe como suma de distintas potencias de 2 usando inducción

$$P(n) : n = \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i},\ 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r,\ n \in \mathbb{N}$$

Caso Base, $n = 1$:

$$P(1) : 1 = 2^0 \overset{\text{Obs}}{\implies} P(1) : V$$

Paso inductivo. Sean $n, k \in \mathbb{N}$, donde $1 \leq k \leq n$:

HI. $P(n) : V, \quad \forall k$

TI. $P(n+1) : n+1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} 2^{\beta_i},\ 0 \leq \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k$

Desarrollemos el lado izquierdo de la igualdad en la TI. Para ello analizemos el caso donde n es par y otro donde es impar.
Caso n impar:
Si n impar esto implica que $n+1$ es par. Podemos escribir a $n+1$ como $n+1 = 2h$, $h \in \mathbb{N}$

$$h \overset{\text{Aux.1}}{\leq} n \overset{\text{HI}}{\implies} h = \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i} \implies 2h = 2\sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i} \implies 2h = \sum_{i=1}^{r} 2 \cdot 2^{\alpha_i} \implies 2h = \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i+1}$$
$$\overset{2h=n+1}{\implies} n+1 = \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i+1},\ 1 \leq \alpha_1+1 < \alpha_2+1 < \cdots < \alpha_r+1$$
$$\overset{\text{Obs}}{\implies} P(n+1) : V,\ n \text{ impar}$$

Caso n par:
Si n par esto implica que $n+1$ es impar. Podemos escribir a $n+1$ como $n+1 = 2h+1$, $h \in \mathbb{N}$

$$h \overset{\text{Aux.2}}{\leq} n \overset{\text{HI}}{\implies} h = \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i} \implies 2h = 2\sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i} \implies 2h = \sum_{i=1}^{r} 2 \cdot 2^{\alpha_i} \implies 2h = \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i+1}$$
$$\implies 1 + 2h = 1 + \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i+1} \implies 2h+1 = 2^0 + \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i+1}$$
$$\overset{2h+1=n+1}{\implies} n+1 = 2^0 + \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i+1},\ 1 \leq \alpha_1+1 < \alpha_2+1 < \cdots < \alpha_r+1$$
$$\overset{\text{Obs}}{\implies} P(n+1) : V,\ n \text{ impar}$$

Por lo tanto, $P(n+1) : V$ para cualquier n natural. Hemos probado el caso base y el paso inductivo. Concluimos que $P(n) : V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Auxiliar 1 Acotemos h

$$2h = n+1 \implies h = \frac{n+1}{2} \implies h = \frac{n+1}{2} \leq \frac{2n}{2} \implies h \leq n$$

Auxiliar 1 Acotemos h

$$2h+1 = n+1 \implies h = \frac{n}{2} \implies h = \frac{n}{2} \leq n \implies h \leq n$$

Observación Aclaraciones sobre el uso de las preposiciones $P(n)$ y $P(n+1)$

- El caso base nos queda verdadero porque encontramos una forma de escribir a 1 como una suma de potencias de 2, en este caso la sumatoria solo posee un término que es 2^0. En nuestra proposición $P(n)$ aparecen r y los α_i (exponentes de 2). Para nuestro caso base, tenemos que $r = 1$ y $\alpha_1 = 0$.
- En el paso inductivo, caso n impar, llegamos a escribir $n+1$ como suma de potencias de 2, lo cual hace que $P(n+1)$ sea verdadera. Otra forma de verlo, es que encontramos los β_i mencionados en la TI. Basta tomar $\beta_i = \alpha_i + 1$, con $i = 1, \cdots, r$, con lo cual $s = r$. Estos β_i son válidos pues se deducen de la HI.
- En el paso inductivo, caso n par, llegamos a escribir $n+1$ como suma de potencias de 2, lo cual hace que $P(n+1)$ sea verdadera. Otra forma de verlo, es que encontramos los β_i mencionados en la TI. Basta tomar $\beta_1 = 0$ y $\beta_{i+1} = \alpha_i + 1$, con $i = 1, \cdots, r$, con lo cual $s = r+1$. Estos β_{i+1} son válidos pues se deducen de la HI.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`

- `Marcos Zea`

Ejercicios de parciales:

1. Probar para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq (n+1)!$$

Se prueba usando el principio de inducción $\in \mathbb{N}$.
Proposición:

$$p(n) : \frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq (n+1)!$$

Caso base: Evalúo en $n = 1$.

$$p(1) : \frac{(2 \cdot 1)!}{1!^2} = 2 \leq (1+1)! \quad \checkmark$$

Se concluye que $p(1)$ es verdadera.
Paso inductivo:

$$p(k) : \underbrace{\frac{(2k)!}{(k!)^2} \leq (k+1)!}_{\text{HI}}$$

la supongo verdadera.
Quiero probar que:

$$p(k+1) : \frac{(2(k+1))!}{(k+1)!^2} \leq (k+1+1)!$$

también lo es.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(2k+2)!}{(k+1)!^2} \leq (k+2)! \xLeftrightarrow[\text{factorial}]{\text{abrir}} \\ \frac{(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot(2k)!}{(k+1)^2\cdot(k!)^2} \overset{\text{HI}}{\leq} \overbrace{\frac{(2k+2)\cdot(2k+1)}{(k+1)^{\cancel{2}}}}^{4\cdot\cancel{(k+1)}(k+\frac{1}{2})}(k+1)! = \overbrace{\frac{4\cdot(k+\frac{1}{2})}{(k+1)}}^{\frac{4(k+\frac{1}{2})}{k+1} \bigstar^1 \leq k+2}(k+1)! \leq (k+2)(k+1)! = (k+2)! \\ \boxed{\frac{(2(k+1))!}{(k+1)!^2} \leq (k+2)!} \end{array} \right.$$

$\bigstar^1$ se prueba fácil en 2 cuentas, queda como ejercicio para vos. Es así que $p(1), p(k)$, y $p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ también lo será $\forall n \in \mathbb{N}$.

---

2. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{n+k} \leq \frac{5}{2}.$$

Inducción: $p(n) : \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{3}{n+k} \leq \frac{5}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}$
Caso base: $p(1)$:
$\sum\limits_{k=1}^{1+1} \frac{3}{1+k} = \frac{3}{2} + \frac{3}{3} = \frac{5}{2} \overset{\checkmark}{\leq} \frac{5}{2} \to p(1)$ Verdadera $\checkmark$

Paso inductivo:

$p(j) : \sum\limits_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} \leq \frac{5}{2}$ Verdadera $\implies$ quiero probar que $p(j+1) : \sum\limits_{k=1}^{j+1+1} \frac{3}{j+1+k} \leq \frac{5}{2}$ Verdadera

En los ejercicios donde la n aparece adentro de la sumatoria, conviene abrirla para encontrar la *hipótesis inductiva:* $\sum\limits_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} \leq \frac{5}{2}$

$\sum\limits_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} = \frac{3}{j+1} + \frac{3}{j+2} + \frac{3}{j+3} + \frac{3}{j+4} + \cdots + \frac{3}{2j} + \frac{3}{2j+1}$ ✓

$\sum\limits_{k=1}^{j+1+1} \frac{3}{j+1+k} = \sum\limits_{k=1}^{j+2} \frac{3}{j+1+k} = \frac{3}{j+1+1} + \frac{3}{j+1+2} + \frac{3}{j+1+3} + \cdots + \frac{3}{j+1+j-1} + \frac{3}{j+1+j} + \frac{3}{j+1+j+1} + \frac{3}{j+1+j+2} =$

$= \frac{3}{j+2} + \frac{3}{j+3} + \frac{3}{j+4} + \cdots + \frac{3}{2j} + \frac{3}{2j+1} + \frac{3}{2j+2} + \frac{3}{2j+3} = -\frac{3}{j+1} + \underbrace{\frac{3}{j+1} + \frac{3}{j+2} + \frac{3}{j+3} + \frac{3}{j+4} + \cdots + \frac{3}{2j} + \frac{3}{2j+1}}_{\sum\limits_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k}} + \frac{3}{2j+2} + \frac{3}{2j+3}$

$= \sum\limits_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} - \frac{3}{j+1} + \frac{3}{2j+2} + \frac{3}{2j+3} = \sum\limits_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} \underbrace{- \frac{3}{2k+2} + \frac{3}{2j+3}}_{\leq 0} \overset{HI}{\leq} \frac{5}{2} - \underbrace{\frac{3}{(2k+2)(2k+3)}}_{\geq 0} \leq \frac{5}{2} \implies \sum\limits_{k=1}^{j+2} \frac{3}{j+1+k} \overset{\checkmark}{\leq}$

$\frac{5}{2}$ Verdadera ✓

Dado que $p(1)$, $p(j), p(j+1)$ resultaron verdaderas por principio de inducción también lo es $p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

---

3. Probar que

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \geq \frac{(2n-1)^3}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Ejercicio de inducción. Voy a probar que la preposición $p(n) : \sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \geq \frac{(2n-1)^3}{6}$ sea verdadera para todos los naturales.

Caso base: $p(1) : \sum\limits_{k=1}^{1} (2k-1)^2 = (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1 \geq \frac{(2 \cdot 1 - 1)^3}{6} = \frac{1}{6}$. por lo tanto $p(1)$ es verdadera ✓

Paso inductivo:

Asumo $p(h)$ verdadera, entonces quiero probar que $p(h+1)$ también lo sea. En este caso:

$$p(h) : \sum_{k=1}^{h} (2k-1)^2 \geq \frac{(2h-1)^3}{6}$$

para algún $h \in \mathbb{Z}$. Ésta será nuestra *hipótesis inductiva*: HI.

Quiero probar que:

$$\sum_{k=1}^{h+1} (2k-1)^2 \geq \frac{(2(h+1)-1)^3}{6} = \frac{(2h+1)^3}{6},$$

sea verdadera para algún $h \in \mathbb{Z}$.

$\sum\limits_{k=1}^{h+1} (2k-1)^2 = \sum\limits_{k=1}^{h} (2k-1)^2 + (2(h+1)-1) = \sum\limits_{k=1}^{h} (2k-1)^2 + (2h+1)^2$

Nota innecesaria pero que quizás aporta:

Lo que acabamos de hacer recién nos deja la HI regalada. Pero atento que esto solo suele funcionar cuando no tenemos a la 'n' en el término principal de la sumatoria. Después de hacerte éste, mirá el **2.**

Fin nota innecesaria pero que quizás aporta.

$$\sum_{k=1}^{h+1}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{h}(2k-1)^2+(2h+1)^2 \overset{HI}{\geq} \underbrace{\tfrac{(2h-1)^3}{6} + (2h+1)^2 \geq \tfrac{(2h+1)^3}{6}}_{\text{Si ocurre esto, } p(h+1) \text{ será verdadera}} \overset{\times 6}{\Longleftrightarrow} (2h-1)^3+6(2h+1)^2 \geq (2h+1)^3$$

$$\underset{\text{a morir}}{\overset{\text{distribuyo}}{\Longleftrightarrow}} \cancel{8h^3} + \cancel{12h^2} + 30h + 5 \geq \cancel{8h^3} + \cancel{12h^2} + 6h + 1 \Leftrightarrow 24h + 4 \overset{\checkmark}{\geq} 0 \qquad \forall h \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{h+1}(2k-1)^2 \geq \frac{(2h+1)-1)^3}{6}$, concluyéndose que $p(h+1)$ también es verdadera.

Como tanto $p(1), p(h)$ y $p(h+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción se tiene que $p(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

---

4. Hallar una fórmula cerrada para

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}\,.$$

Probar su validez usando inducción.

Probando números viendo de encontrar un patrón:

$$\begin{cases} n = 1 \to \sum\limits_{k=1}^{1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \\ n = 2 \to \sum\limits_{k=1}^{2} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \\ n = 3 \to \sum\limits_{k=1}^{3} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{5}{6} + \frac{1}{8} = \frac{23}{24} \\ n = 4 \to \sum\limits_{k=1}^{4} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{23}{24} + \frac{1}{30} = \frac{119}{120} \end{cases}$$

Es notable que una potencial fórmula cerrada sería:

$$(a_n)_{n\geq 1} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}.$$

Inducción para probar la fórmula.

$$p(n) : \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} = \frac{(1+1)!-1}{(1+1)!} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

p(1) es verdadera.

Paso inductivo:

$$\text{asumo que } p(j) : \overbrace{\sum_{k=1}^{j} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(j+1)!-1}{(j+1)!}}^{\text{hipótesis inductiva}} \quad \text{para algún } j \in \mathbb{N}, \text{ es verdadera.}$$

entonces, quiero ver que

$$p(j+1) : \sum_{k=1}^{j+1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(j+1+1)!-1}{(j+1+1)!} \quad \text{también es verdadera.}$$

$$\sum_{k=1}^{j+1} \frac{k}{(k+1)!} \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{j} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{j+1}{(j+2)!} \overset{\text{HI}}{=} \frac{(j+1)!-1}{(j+1)!} + \frac{j+1}{(j+2)!} \overset{!!!}{=} \frac{(j+2)!-(j+2)+j+1}{(j+2)!} = \frac{(j+2)!-1}{(j+2)!}.$$

Por lo tanto $p(j+1)$ es verdadera.
Si te quedaste pedaleando en el !!!, multipliqué y dividí por *algo* en el primer término, para tener mismo denominador y bla, bla, listo.

Dado que $p(1), p(j)$ y $p(j+1)$ son verdaderas por el principio de inducción, $p(n)$ también lo es para todo $n \in \mathbb{N}$.

---

5. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{i!}{i+n} \geq \frac{1}{10}.$$

Ejercicio de inducción que tiene una productoria o sumatoria y una n en el término general. Si hiciste los ejercicios anteriores, sabés que hay que atacar el problema *abriendo la productoria.*

Proposición:

$$p(n) : \prod_{i=1}^{n} \frac{i!}{i+n} \geq \frac{1}{10} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base

$$p(1) : \prod_{i=1}^{1} \frac{i!}{i+1} = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{10} \quad \checkmark$$

El caso $p(1)$ resulta verdadero.

Paso inductivo:
Asumo que

$$p(k) : \underbrace{\prod_{i=1}^{k} \frac{i!}{i+k} \geq \frac{1}{10}}_{\text{hipótesis inductiva}} \quad \checkmark$$

es verdadero para algún $k \in \mathbb{Z}$. Y quiero probar que:

$$p(k+1) : \prod_{i=1}^{k+1} \frac{i!}{i+k+1} \geq \frac{1}{10}$$

también lo sea.
Empiezo abriendo las productorias para estudiar los factores, uno por uno:

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{i!}{i+k} = \frac{1!}{k+1} \cdot \frac{2!}{k+2} \cdots \frac{(k-2)!}{2k-2} \cdot \frac{(k-1)!}{2k-1} \cdot \frac{k!}{2k}$$

$$\prod_{i=1}^{k+1} \frac{i!}{i+k+1} = \frac{1!}{k+2} \cdot \frac{2!}{k+3} \cdots \frac{(k-2)!}{2k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{2k} \cdot \frac{k!}{2k+1} \cdot \frac{(k+1)!}{2k+2}$$

Con esos resultados hay que ver que todos los factores *corridos* de la productoria hasta k están ahí escondidos en la productoria de $k+1$. Tomate un tiempo para acomodar y hacer aparecer la hipótesis inductiva.
Queda como corriendo los numeradores un lugar a la izquierda, no?

$$\prod_{i=1}^{k+1} \frac{i!}{i+k+1} = \overbrace{\frac{k+1}{k+1}}^{1} \cdot \frac{1!}{k+2} \cdot \frac{2!}{k+3} \cdots \frac{(k-2)!}{2k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{2k} \cdot \frac{k!}{2k+1} \cdot \frac{(k+1)!}{2k+2} = \overset{!}{=} \frac{1!}{k+1} \cdot \frac{2!}{k+2} \cdot \frac{3!}{k+3} \cdots \frac{(k-2)!}{2k-2} \cdot \frac{(k-1)!}{2k-1} \cdot \frac{k!}{2k} \cdot \frac{(k+1)!}{2k+1} \cdot \frac{k+1}{2k+2}$$

Oka, mismo truco viejo de siempre. Acomodar y multiplicar por un 1 disfrazado de cosas útiles. Ahora nos sacamos un montón de términos con la hipótesis inductiva y luego acotamos.

$$\prod_{i=1}^{k+1} \frac{i!}{i+k+1} \overset{HI}{\geq} \frac{1}{10} \cdot \frac{(k+1)!}{2k+1} \cdot \frac{k+1}{2k+2} = \frac{1}{20} \cdot \frac{(k+1)!}{2k+1} \overset{!}{\geq} \frac{1}{20} \cdot \frac{(k+1)!}{2k+2} = \frac{1}{40} \cdot k! \overset{!}{\geq} \frac{1}{10} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_{>2}$$

$$\prod_{i=1}^{k+1} \frac{i!}{i+k+1} \geq \frac{1}{10} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_{>2}$$

Y dado que

$$p(2) : \prod_{i=1}^{2} \frac{i!}{i+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \geq \frac{1}{10} \quad \checkmark$$

es verdadera la acotación que hicimos nos sirve.

Es así que $p(1), p(2), p(k),$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ también lo será $\forall n \in \mathbb{N}$.

---

6. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $a_1 = 3, a_2 = 6$, y para $n \geq 1$,

$$a_{n+2} = \frac{2n+3}{7}(a_{n+1} + 2a_n)$$

Probar que $a_n > 2^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Sucesiones definidas por recurrencia e inducción.
Proposición: Quiero probar que

$$p(n) : a_n > 2^n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Casos base:

$$p(1) : a_1 = 3 > 2^1 = 2 \to a_1 > 2^1$$
$$p(2) : a_2 = 6 > 2^2 = 4 \to a_2 > 2^2$$

Los casos base $p(1), p(2)$ resultaron verdaderos.

Paso inductivo: Asumo como verdadero para algún $k \in \mathbb{N}$:

$$p(k) : \underbrace{a_k > 2^k}_{\text{hipótesis inductiva}}$$
$$p(k+1) : \underbrace{a_{k+1} > 2^{k+1}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

Entonces quiero probar que:

$$p(k+2) : a_{k+2} > 2^{k+2}$$

también lo sea.
Usando la definición:

$$a_{k+2} \overset{\text{def}}{=} \frac{2k+3}{7} \cdot (a_{k+1} + 2 \cdot a_k) \overset{\text{HI}}{>} \frac{2k+3}{7} \cdot (2^{k+1} + 2 \cdot 2^k) = \frac{2k+3}{7} \cdot (2^{k+2})$$

Por lo tanto se tiene que:

$$a_{k+2} > \frac{2k+3}{7} \cdot (2^{k+2}) \geq 2^{k+2} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

Es así que se cumple $p(k+2)$ $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$
El caso que faltaría es con $k = 1$

$$p(3) : a_{1+2} = a_3 \overset{\text{def}}{=} \frac{5}{7}(6+6) = \frac{60}{7} > 2^3 = 8 \to a_3 > 2^3$$

también se cumple.
Dado que $p(1), p(2), p(3), p(k), p(k+1)$ y $p(k+2)$ son todas verdaderas, por principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

---

7. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i)2^{i-1} = 2^n - n - 1.$$

Ejercicio de inducción.
Queremos probar nuestras proposición $p(n)$:

$$p(n) : \sum_{i=1}^{n} (n-i)2^{i-1} = 2^n - n - 1 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Caso base ¿$p(1)$ es verdadera?:

$$p(1) : \sum_{i=1}^{1} (1-i)2^{i-1} = 0 = 2^1 - 1 - 1$$

Por lo tanto $p(1)$ resulta verdadera.
Paso inductivo:
Se asume que para algún $k \in \mathbb{Z}$

$$p(k) : \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (k-i)2^{i-1} = 2^k - k - 1}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera. Y queremos probar que:

$$p(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} (k+1-i)2^{i-1} = 2^{k+1} - (k+1) - 1 = 2^{k+1} - k - 2$$

también lo sea.
Empenzando con $p(k+1)$. Acomodamos y vemos de hacer aparecer la hipótesis inductiva:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (k+1-i)2^{i-1} &\overset{!!}{=} \sum_{i=1}^{k} (k-i)2^{i-1} + \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} + 0 \\ &\overset{\text{HI}}{=} 2^k - k - 1 + \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} \end{aligned}$$

En el !! saqué el término $k+1$ y después agrupé de manera conveniente para separar las sumatorias. Nos queda ahora esa sumatoria que no es otra cosa que una querida y odiada *serie geométrica*, esa que no te acordás, que si empieza en 0 o en 1, pero acá tenés la fórmulita y coso en la teoría.

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k} 2^{i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{k+1}-2}{2-1} \overset{!}{=} 2^k - 1$$

Por lo tanto con ese resultado:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (k+1-i)2^{i-1} \overset{!!}{=} 2^k - k - 1 + 2^k - 1 = 2^{k+1} - k - 2$$

Por lo tanto $p(k+1)$ también es verdadera.

Se demostró que $p(1), p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

Nad Garraz   Ale Teran

---

8. Pruebe que la siguiente igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(-\frac{n}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 1.$$

Bueh, *induccionemos*!

Quiero probar que:

$$p(n) \ : \ \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(-\frac{n}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base: ¿Es $p(1)$ verdadera?

$$p(1) \ : \ \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{1} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{9} \overset{!}{=} \left(-\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{1} + 1 = \frac{1}{9}$$

Por lo que $p(1)$ resultó ser verdadera.
Paso inductivo, asumo que:

$$p(h) \ : \ \underbrace{\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{h} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(-\frac{h}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{h} + 1}_{\text{hipótesis inductiva}} \quad \text{para algún } h \in \mathbb{N}$$

es verdadero, entonces quiero probar que:

$$p(h+1) \ : \ \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{h+1} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(-\frac{h+1}{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{h+1} + 1$$

también lo sea.

Parto de $p(h+1)$ trato de enchufar la hipótesis inductiva en algún lado. Acomodo la sumatoria:

$$\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{h+1} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{h} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{9}(h+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{h} \overset{\text{HI}}{=} \left(-\frac{h}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{h} + 1 + \frac{1}{9}(h+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{h} \overset{!}{=}$$
$$\overset{!}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^{h}\left(-\frac{h}{3}-1+\frac{1}{9}(h+1)\right)+1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{h}\left(-\frac{2}{9}h-\frac{8}{9}\right)+1 \overset{!}{=}$$
$$\overset{!}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^{h+1}\left(-\frac{1}{3}h-\frac{4}{3}\right)+1 \overset{!!}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^{h+1}\left(-\frac{h+1}{3}-1\right)+1$$

Probando así que $p(h+1)$ también es verdadera.

Dado que $p(1)$, $p(h)$ y $p(h+1)$ son verdaderas por criterio de inducción también lo es $p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`

`naD GarRaz`