Apunte único: Álgebra I - Práctica 7

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

Disclaimer:
Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:

1. Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
2. Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
3. ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
4. Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
5. Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir *'no me sale'* $\nexists +$. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda, no te van a salir los ejercicios más difíciles: Sentido común.

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confiaza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada.* Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber.* A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas:
de Teresa que son buenísimos.

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra:
Prácticas Pandemia.

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre Just Do IT!

Eh, loco, fatalista, distópico, relajá un toque te vas a quedar (más) pelado... *va a salir todo bien!*

Esta Guía 7 que tenés se actualizó por
última vez:
14/02/25 @ 14:18
Escaneá el QR para bajarte (quizás) una
versión más nueva:

Guía 7

El resto de las guías repo en github para descargar
las guías con los últimos updates.

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error,
lo más fácil es por Telegram.

Notas teóricas:

- *Operaciones:*

  $+:$ Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i X^i$

  $$\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

  $\cdot :$ Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j X^j$

  $\Rightarrow f \cdot g = \sum\limits_{k=0}^{n+m} (\sum\limits_{i+j=k} a_i \cdot b_j) X^k \in \mathbb{K}[X]$

- *Algoritmo de división*:

  $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos q y $R \in \mathbb{K}[X]$ tal que

  $$f = q \cdot g + R$$

  con $\text{gr}(R) < \text{gr}(f)$ o $R = 0$.

- *Raíz de un Polinomio:*

  $$\alpha \text{ es raíz de } f \iff X - \alpha \,\big|\, f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$$

- *Máximo común divisor:*

  Polinomio, $(f : g) \in \mathbb{K}[X]$, *mónico* de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.

  - $(f : g) \,\big|\, f \quad \text{y} \quad (f : g) \,\big|\, g$
  - $f = (f : g) \cdot k_f \quad \text{y} \quad g = (f : g) \cdot k_g \quad \text{con} \quad k_f \quad \text{y} \quad k_g$ en $\mathbb{K}[X]$
  - Dos polinomios son coprimos si $(f : g) = 1 \iff f \neq g$

- *Raíces múltiples:*

  Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se dice que:

  - Cuando f tiene una raíz múltiple:

    $$\alpha \text{ es raíz } \textit{múltiple} \text{ de } f \iff f = (X - \alpha)^2 q$$
    $$f = (X - \alpha) \cdot q, \quad \text{con } q \in \mathbb{K}[X] \quad \text{y} \quad q(\alpha) = 0.$$

  - Cuando la raíz *no* es múltiple, es *simple* cuando:

    $$\alpha \text{ es raíz } \textit{simple} \text{ de } f \iff (X - \alpha) \,\big|\, f \quad \text{y} \quad (X - \alpha)^2 \overset{!!}{\not|}\, f$$

    $$f = (X - \alpha) \cdot q, \quad \text{con } q \in \mathbb{K}[X] \quad \text{y} \quad q(\alpha) \neq 0.$$

  Prestale atención a los ! porque sino la vas a cagar.

- Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Se dice que α es raíz de multiplicidad (exactamente) m de f, y se nota:

$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff (X-\alpha)^m \mid f,$$

y también

$$(X-\alpha)^{m+1} \nmid f.$$

O equivalentemente,

$$f = (X-\alpha)^m q \quad \text{con} \quad q \in \mathbb{K}[X], \quad \text{y} \quad q(\alpha) \neq 0.$$

- *Raíces y MCD:*
Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no ambos nulos, y $\alpha \in \mathbb{K}$: Esta se usa bastante.

$$\Rightarrow f(\alpha) = g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (f : g)(\alpha) = 0$$

- α es raíz múltiple de f si y solo si:

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad f'(\alpha) = 0 \iff \alpha \text{ es raíz de } (f : f') \iff X - \alpha \mid (f : f')$$

- La multiplicidad m de una raíz, será $m-1$ en la derivada:

$$\text{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \text{mult}(\alpha; f') = m - 1$$

- Relación entre la multiplicidad de una raíz de f y sus derivadas:

$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{mult}(\alpha; f) \geq m \left\} \begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \end{array} \right. \\ \hline \text{mult}(\alpha; f) = m \ \} \ f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \text{ la } m\text{-ésima derivada no se anula.} \end{array} \right.$$

Todo ese quilombo de cosas lo que dice es por ejemplo, que si tenés una raíz α de f **triple** entonces la **tercera derivada** NO PUEDE SER 0, $f'''(\alpha) \overset{!!}{\neq} 0$.

Pero tanto la función, su primera y segunda derivada DEBEN SER 0, $f(\alpha) \overset{!!}{=} f'(\alpha) \overset{!!}{=} f''(\alpha) \overset{!!}{=} 0$

- *Lema de Gauss:*
Sea $f = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ con $a_0 \neq 0$. Si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[X]$ es una raíz racional de f, con α y $\beta \in \mathbb{Z}$ coprimos, entonces $\alpha \mid a_0$ y $\beta \mid a_n$.
El *Lema de Gauss* implica que en el conjunto de fracciones irreducibles $\frac{\alpha}{\beta}$ están todas las raíces racionales de f.

- Polinomios irreducibles:
Sea $f \in K[X]$
  - Se dice que f es *irreducible* en $K[X]$ cuando $f \notin K$ y los únicos divisores de f son de la forma $g = c$ o $g = cf$ para algún $c \in K^\times$. O sea f tiene únicamente dos divisores mónicos (distintos), que son 1 y $\frac{f}{\text{cp}(f)}$
  - Se dice que f es *reducible* en $K[X]$ cuando $f \notin K$ y f tiene algún divisor $g \in K[X]$ con $g \neq c$ y $g \neq cf$, $\forall c \in K^\times$, es decir f tiene algún divisor $g \in K[X]$ (no nulo por definición) con $0 < \text{gr}(g) < \text{gr}(f)$.

Ejercicios de la guía:

---

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$,

ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$,

iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$,

---

i) *coeficiente principal:* 4^{77}

grado: $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:* $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$

grado: 28

iii) *coeficiente principal:* $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)}_{f}{}^4 + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_{g}$

Cuando sumo me queda: $\mathrm{cp}(f^4) - \mathrm{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0$, esto quiere decir que no sé cual es el coeficiente principal, porque el 0 está matando al término X^{20}. Tengo entonces $\mathrm{gr}(\mathrm{f}^4 + g) < 20$

Calculo el $\mathrm{cp}(f^4 + g)$ con $\mathrm{gr}(f^4 + g) = 19$.

Laburo a f:

$$\xrightarrow[\text{fórmula de } f \cdot g]{\text{para usar}} (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = (-3X^5 + 1X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2$$

$$f^2 \cdot f^2 = \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \star^2$$

$$\sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \xrightarrow[\text{el término con } k = 19]{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \overset{\star^1}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \overset{\star^2}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{b_{10} \text{ sale a}} b_{10} = (-3)^2 = 9 \\ \xrightarrow[\text{a usar } \sum f \cdot g \text{ en } k = 9]{a_9 \text{ no tan fácil, volver}} f \cdot f = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow{k = 9} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \overset{\star^3}{=} c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4 \overset{\star^2}{=} 2 \cdot c_4 \cdot d_5 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{d_5 \text{ sale a}} d_5 = -3 \\ \xrightarrow[\text{ojímetro}]{c_4 \text{ sale a}} c_4 = 1 \end{array} \right\} \to a_9 = -6 \to \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{cp}\, f^4 = 2 \cdot (-6) \cdot (9) = -108 \\ \mathrm{cp}\, g = 19 \end{array} \right\} \to \boxed{\mathrm{cp}\, f^4 + g = -89} \quad \checkmark$$

$\star^1$: Sabemos que el $\mathrm{gr}(f^4) = 20 \Rightarrow \mathrm{gr}(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \leq 10$ solo puede ocurrir *cuando los exponentes* $\left\{ \begin{array}{c} i = 10,\ j = 9 \\ \vee \\ i = 9,\ j = 10 \end{array} \right\}$

$\star^2$: porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

$\star^3$: Idem $\star^1$ para el polinomio f

grado: 19

2. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX →.

3. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que:

i) $f^2 = Xf + X + 1$,

ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$,

iii) $(X+1)f^2 = X^6 + Xf$,

iv) $f \neq 0 \quad \text{y} \quad f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2 f$.

---

i) La ecuación se tiene que cumplir para todo valor de X, así que no es cuestión de buscar algún valor para el que la igualdad se cumpla. Acomodo la ecuación:

$$f^2 = Xf + X + 1 \overset{!}{\Leftrightarrow} (f-1)\cdot(f+1) = X\cdot(f-1) \overset{!}{\Leftrightarrow} (f+1)\cdot(f-(X+1)) = 0$$

Eso último es una igualación de polinomios, donde el polinomio del miembro derecho es $g = 0$. Entonces, para que se cumpla esa igualdad para todo valor de X, el miembro derecho también tiene que ser 0 para todo valor de X. Eso ocurre cuando:

$$f = -1 \quad \text{o} \quad f = X + 1$$

ii) Mirando la ecuación se puede calcular el grado que debería tener f:

1) ¿Puede ser $\text{gr}(f) = 0$?

$$f = k \Rightarrow k^2 - X\cdot k = -X^2 + 1,$$

No cierra el tema del grado. Para que un polinomio sea igual a otro, estos deben tener igual grado.

2) ¿Puede ser $\text{gr}(f) = 1$?

$$f = bX + c \Rightarrow b^2X + 2bcX + c^2 - bX^2 + Xc = -X^2 + 1,$$

en el miembro izquierdo se cancelan los términos cuadráticos, por lo que nuevamente no voy a poder tener un polinomios iguales en ambos miembros de la ecuación.

3) ¿Puede ser $\text{gr}(f) = 2$?

$$f = aX^2 + bX + c \overset{!}{\Rightarrow} (aX^2 + b^2X + c)^2 - X(aX^2 + bX + c) = -X^2 + 1,$$

Acá nos queda el miembro izquierdo con $\text{gr}(4)$ y el izquierdo con $\text{gr}(2)$, así que no hay f, *bla, bla, bla.*

4) ¿Puede ser $\text{gr}(f) \geq 3$?. Diría que no por razones muy interesantes.

iii) En este caso se puede ver que el miembro izquierdo va a tener siempre grado impar. Para que el miembro derecho tenga grado impar, necesito que f sea algo que cancele el X^6

$$\text{gr}((X+1)\cdot f^2) = \text{gr}(X\cdot(X^5+f)) \Leftrightarrow \text{gr}(X+1) + \text{gr}(f^2) = \text{gr}(X)\cdot\text{gr}(X^5+f) \overset{!}{\Leftrightarrow} 2\cdot\text{gr}(f) = \text{gr}(X^5+f)$$

Analizamos la última ecuación para distintos grados:

$$\begin{gathered}\text{gr}(f) > 5 \Rightarrow \text{gr}(X^5+f) = 5 \star^1 \\ \text{gr}(f) = 5 \Rightarrow \text{gr}(X^5+f) \leq 5 \star^2 \\ \text{gr}(f) > 5 \Rightarrow \text{gr}(X^5+f) = \text{gr}(f) \star^3\end{gathered}$$

Entonces no tenemos un valor para el grado de f en el que haya un balance en la ecuación, porque: Para el caso $\star^1$ el miembro derecho tiene un valor par así que descartado.

Para el caso $\star^2$ el miembro derecho tiene un grado igual a 10 así que descartado.

Y por último para el caso $\star^3$ el miembro derecho tiene un grado del doble que el polinomio del miembro izquierdo.

iv) Si $f \neq 0$:

$$f^3 = \operatorname{gr}(f) \cdot X^2 f \overset{!}{\Leftrightarrow} f \cdot (f^2 - \operatorname{gr}(f)X^2) = 0$$

Como por enunciado $f \neq 0$, para que el miembro izquierdo sea 0, necesitamos que:

$$(f^2 - \operatorname{gr}(f)X^2) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{gr}(f^2) = \operatorname{gr}\left(\operatorname{gr}(f) \cdot X^2\right) = 2 \Leftrightarrow 2\operatorname{gr}(f) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{gr}(f) = 1$$

Entonces $\operatorname{gr}(f) = 1 \Rightarrow f = aX$, evalúo en la ecuación del enunciado para averiguar el valor de a:

$$a^3 \cdot X^3 = 1 \cdot X^2 \cdot aX = aX^3 \Leftrightarrow a \cdot (a^2 - 1)X^3 = 0 \underset{\Rightarrow a \neq 0}{\overset{\text{si } f \neq 0}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} a = 1 \\ \text{y} \\ a = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto los polinomios f que cumplen son:

$$f = -X \quad \text{y} \quad f = X$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

---

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$ y $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$ y $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iii) $f = X^n - 1$ y $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

---

i)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5X^4 & +2X^3 & & -X & +4 & X^2+2 \\ \cline{6-6}
-5X^4 & & -10X^2 & & & 5X^2+2X-10 \\ \cline{1-3}
 & 2X^3 & -10X^2 & -X & & \\
 & -2X^3 & & -4X & & \\ \cline{2-4}
 & & -10X^2 & -5X & +4 & \\
 & & 10X^2 & & +20 & \\ \cline{3-5}
 & & & -5X & +24 &
\end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

ii)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4X^4 & +X^3 & & & -4 & 2X^2+1 \\ \cline{6-6}
-4X^4 & & -2X^2 & & & 2X^2+\frac{1}{2}X-1 \\ \cline{1-3}
 & X^3 & -2X^2 & & & \\
 & -X^3 & & -\frac{1}{2}X & & \\ \cline{2-4}
 & & -2X^2 & -\frac{1}{2}X & -4 & \\
 & & 2X^2 & & +1 & \\ \cline{3-5}
 & & & -\frac{1}{2}X & -3 &
\end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

En $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2+1) \cdot \underbrace{(2X^2+4X+6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X+4)}_{r[X]}$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división asoma la idea de que:

$X^n - 1 = (X-1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} X^j}_{q[X]} + \underbrace{0}_{r[X]}$, (que es la geométrica con $X \neq 1$)

Inducción: Quiero probar que $p(n) : X^n - 1 = (X-1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1) : X^1 - 1 = (X-1) \underbrace{\sum_{j=0}^{1-1} X^j}_{X^0=1} \Rightarrow p(1)$ es Verdadero ✓

Paso inductivo:

$p(k) : \underbrace{X^k - 1 = (X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI}$ es Verdadera $\overset{?}{\Rightarrow} p(k+1) : X^{k+1} - 1 = (X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k} X^j$ es Verdadera

$(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k} X^j = (X-1) \cdot (\sum_{j=0}^{k-1} X^j + X^k) = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI} + (X-1) \cdot X^k = X^k - 1 + X^{k+1} - X^k =$

$X^{k+1} - 1$ ✓

Dado que $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera $p(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

Nad Garraz

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$,

ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$,

iii) El resto de la división de $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

---

i) Haciendo la division de $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = (X - a + 2)(X^2 + aX + 1) + \underbrace{(a^2 - 2a + 1)X + a - 1}_{\text{resto}}$$

Así, para que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$ tiene que ocurrir que el resto sea 0. O sea,

$$\begin{aligned} X^2+aX+1 \mid X^3+2X^2+2X+1 &\iff (a^2-2a+1)X+a-1=0 \\ &\iff \begin{cases} a^2-2a+1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a-1=0 \iff a=1$
- $a^2-2a+1=0 \xrightarrow{a=1} 1^2-2.1+1=1-2+1=0 \quad \checkmark$

Luego, el valor de $a\in\mathbb{C}$ tal que X^3+2X^2+2X+1 es divisible por X^2+aX+1 es $\boxed{a=1}$.

ii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow$, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX$\rightarrow$.

iii) Haciendo la division de $X^5-3X^3-X^2-2X+1$ por X^2+aX+1, se tiene que:

$$X^5-3X^3-X^2-2X+1=q(X^2+aX+1)+\underbrace{r}_{\text{resto}}$$

con $q=(X^3-aX^2+(a^2-4)X-a^3+5a-1)$ y $r=(a^4-6a^2+a+2)X+a^3-5a+2$.

Así,

$$\begin{aligned} & r=-8X+4 \\ \iff & (a^4-6a^2+a+2)X+a^3-5a+2=-8X+4 \\ \iff & \begin{cases} a^4-6a^2+a+2=-8 \\ a^3-5a+2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} a^4-6a^2+a+10=0 \\ a^3-5a-2=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a^3-5a-2=0 \Leftrightarrow a(a^2-5)-2=0$

  Veo que $a=-2$ es solución, por lo que divido a^3-5a-2 por $a+2$ con Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -5 & -2 \\ -2 & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

  Por lo que $a^3-5a-2=(a+2)(a^2-2a-1)$

  Busco las raíces de a^2-2a-1 con la fórmula resolvente:

$$\begin{aligned} a_{+,-} &= \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)}}{2} \\ &= \frac{2\pm\sqrt{8}}{2} \\ &= 1\pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

  Por lo que $a^3-5a-2=(a+2)(a-1+\sqrt{2})(a-1-\sqrt{2})=0 \iff \begin{cases} a=-2 \\ a=1+\sqrt{2} \\ a=1-\sqrt{2} \end{cases}$

- $a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0$
  Me fijo que valores de a obtenidos antes verifican:
  - Si $a = -2 \Rightarrow (-2)^4 - 6(-2)^2 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0$ ✓
  - Si $a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow (1+\sqrt{2})^4 - 6(1+\sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 10 = 10 + \sqrt{2} \neq 0$
  - Si $a = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow (1-\sqrt{2})^4 - 6(1-\sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2} + 10 = 10 - \sqrt{2} \neq 0$

Luego, el único valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que el resto de dividir a $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$ es $\boxed{\text{a = -2}}$

6. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in \mathbb{K}[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in \mathbb{K}[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \,\big|\, f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g\ (h)$.

i) Probar que $\equiv\ (h)$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{K}[X]$.

ii) Probar que si $f_1 \equiv g_1\ (h)$ y $f_2 \equiv g_2\ (h)$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2\ (h)$ $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2\ (h)$.

iii) Probar que si $f \equiv g\ (h)$ entonces $f^n \equiv g^n\ (h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iv) Probar que r es el resto de la división de f por h si y solo si $f \equiv r\ (h)$ y $r = 0$ o $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

---

i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*,

- *reflexiva*: Es f congruente a f módulo h?
  $f \equiv f\ (h) \iff h \,\big|\, f - f = 0 \iff h \,\big|\, 0$ ✓
- *simétrica*: Si $f \equiv g\ (h) \overset{?}{\iff} g \equiv f\ (h)$
  $f \equiv g\ (h) \iff h \,\big|\, f - g \iff h \,\big|\, -(g - f) \iff h \,\big|\, g - f \iff g \equiv f\ (h)$ ✓
- *transitiva*: Si $\begin{cases} f \equiv g\ (h) \\ g \equiv p\ (h) \end{cases} \overset{?}{\iff} f \equiv p\ (h)$.

$$\begin{cases} h \,\big|\, f - g \\ h \,\big|\, g - p \end{cases} \xrightarrow[\to F_2]{F_1 + F_2} \begin{cases} h \,\big|\, f - g \\ h \,\big|\, f - p \end{cases} \to f \equiv p\ (h) \quad ✓$$

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en $\mathbb{K}[X]$

ii) Si $\begin{cases} f_1 \equiv g_1\ (h) \\ f_2 \equiv g_2\ (h)\star^1 \end{cases}$

$$f_1 \equiv g_1\ (h) \iff h \,\big|\, f_1 - g_1 \Rightarrow h \,\big|\, f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2\ (h) \overset{\star^1}{\iff} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2\ (h)$$

iii) *Inducción:* Quiero probar $p(n)$: Si $f \equiv g\ (h)$ entonces $f^n \equiv g^n\ (h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Caso base: $p(1) : f^1 \equiv g^1\ (h)\star^2$ Verdadera ✓

Paso inductivo: $p(k) : \underbrace{f^k \equiv g^k\ (h)}_{HI}$ es verdadera $\overset{?}{\Rightarrow} p(k+1) : f^{k+1} \equiv g^{k+1}\ (h)$ ¿También lo es?

$$f^k \equiv g^k\ (h) \iff h \,\big|\, f^k - g^k \Rightarrow h \,\big|\, f \cdot (f^k - g^k) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^k\ (h) \overset{\star^2}{\iff} f^{k+1} \equiv g^{k+1}\ (h) \quad ✓$$

Finalmente $p(1), p(k), p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

7. Hallar el resto de la división de f por g para:

i) $f = X^{353} - X - 1$ y $g = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$ y $g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, y $g = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$, y $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ (Sugerencia ver **4. ??**).

---

i) $g \mid g \iff X^{31} - 2 \equiv 0 \ (X^{31} - 2) \iff X^{31} \equiv 2 \ (g)$

$$f = X^{353} - X - 1 = (\underbrace{X^{31}}_{\overset{(g)}{\equiv} 2})^{11} X^{12} - X - 1 \overset{(g)}{\equiv} 2^{11} X^{12} - X - 1 \to \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} - 1}$$

ii) $g \mid g \iff X^6 + 1 \equiv 0 \ (X^6 + 1) \iff X^6 \equiv -1 \ (g)$

$$f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166} X^4 + (X^6)^6 X^4 + (X^6)^3 X^2 + 1 \overset{(g)}{\equiv} X^4 + X^4 - X^2 + 1 = 2X^4 - X^2 + 1$$
$$\to \boxed{r_g(f) = 2X^4 - X^2 + 1}$$

¿Qué onda en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$? $\to \begin{cases} \text{si } p = 2 \to \boxed{X^2 + 1} \\ \text{si } p > 2 \to \boxed{2X^4 + (p-1)X^2 + 1} \end{cases}$

iii) $g \mid g \iff X^{100} - X + 1 \equiv 0 \ (X^{100} - X + 1) \iff X^{100} \equiv X - 1 \ (g)$

$$f = X^{200} - 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 - 3X^{100} X + 2 \overset{(g)}{\equiv} (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2$$
$$\to \boxed{r_g(f) = (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2}$$

iv) *Usando la sugerencia*: Del ejercicio **4. ??** sale que $X^n - 1 = (X-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$

$$\xrightarrow[\text{para el } g]{n=5} X^5 - 1 = (X-1)\underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_{g} \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)} \ (g) \quad \checkmark$$

$$f = (X^5)^{603} X + 2(X^5)^{366} X^3 - (X^5)^{34} X^4 + (X^5)^{27} X^2 + 2X^4 - X^3 + 1$$
$$f \equiv \underbrace{X + 2X^3 - X^4 + X^2 + 2X^4 - X^3 + 1}_{= X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = g} \ (g) \iff \boxed{f \equiv 0 \ (g)}$$

8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2,\ g = X^4 - X^3 - X^2 + 1,$

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1,\ g = X^3 + X,$

iii) $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1,\ g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1,$

---

i)

$$\begin{array}{r|l}
X^5 \qquad + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 & X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-X^5 + X^4 + X^3 \qquad - X} & X + 1 \\
X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X + 2 & \\
\underline{-X^4 + X^3 + X^2 \qquad - 1} & \\
3X^3 - 5X^2 + X + 1 &
\end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Euclides}} (f : g) = (g : 3X^3 - 55X^2 + X + 1)$$
$$\xrightarrow[\text{en función de } g]{\text{escribo a } f} f = (X+1)\cdot g + 3X^3 - 55X^2 + X + 1$$

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - X^3 - X^2 \qquad + 1 & 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X} & \frac{1}{3}X + \frac{2}{9} \\
\frac{2}{3}X^3 - \frac{4}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + 1 & \\
\underline{-\frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9}} & \\
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3X^3 - 5X^2 + X + 1 & -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\ \cline{2-2}
\underline{-3X^3 - \frac{15}{2}X^2 + \frac{21}{2}X} & -\frac{27}{2}X + \frac{225}{4} \\
-\frac{25}{2}X^2 + \frac{23}{2}X + 1 & \\
\underline{\frac{25}{2}X^2 + \frac{125}{4}X - \frac{175}{4}} & \\
\frac{171}{4}X - \frac{171}{4} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \\ \cline{2-2}
\underline{\frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X} & -\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \\
-\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} & \\
\underline{\frac{7}{9}X - \frac{7}{9}} & \\
0 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 &= \big(X^4 - X^3 - X^2 + 1\big) \cdot \big(X + 1\big) + \big(3X^3 - 5X^2 + X + 1\big) \\
X^4 - X^3 - X^2 + 1 &= \big(3X^3 - 5X^2 + X + 1\big) \cdot \big(\tfrac{1}{3}X + \tfrac{2}{9}\big) + \big(-\tfrac{2}{9}X^2 - \tfrac{5}{9}X + \tfrac{7}{9}\big) \\
3X^3 - 5X^2 + X + 1 &= \big(-\tfrac{2}{9}X^2 - \tfrac{5}{9}X + \tfrac{7}{9}\big) \cdot \big(-\tfrac{27}{2}X + \tfrac{225}{4}\big) + \big(\tfrac{171}{4}X - \tfrac{171}{4}\big) \\
-\tfrac{2}{9}X^2 - \tfrac{5}{9}X + \tfrac{7}{9} &= \big(\tfrac{171}{4}X - \tfrac{171}{4}\big) \cdot \big(-\tfrac{8}{1539}X - \tfrac{28}{1539}\big) + 0
\end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\boxed{\to (f : g) = X - 1}$

ii)
$$\begin{aligned}
X^6 + X^4 + X^2 + 1 &= \big(X^3 + X\big) \cdot X^3 + \big(X^2 + 1\big) \\
X^3 + X &= \big(X^2 + 1\big) \cdot X + 0
\end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\to \boxed{(f : g) = X^2 + 1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y g $\to$ $\boxed{X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)}$

iii) $\xrightarrow[\text{Euclides}]{\text{Haciendo}}$

$$
\begin{aligned}
2X^6-4X^5+X^4+4X^3-6X^2+4X+1 &= \left(X^5-2X^4+2X^2-3X+1\right)\cdot 2X+\left(X^4+2X+1\right)\\
X^5-2X^4+2X^2-3X+1 &= \left(X^4+2X+1\right)\cdot\left(X-2\right)+3\\
X^4+2X+1 &= 3\cdot\left(\tfrac{1}{3}X^4+\tfrac{2}{3}X+\tfrac{1}{3}\right)+0
\end{aligned}
$$

El MCD será el último resto no nulo y *mónico* $\to \boxed{(f:g)=1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \to \boxed{1=\frac{1}{3}g\cdot(2X^2-4X+1)-\frac{1}{3}f\cdot(X-2)}$

10. Sea $f\in\mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1)=-2, f(2)=1$ y $f(-1)=0$. Hallar el resto de la división de f por X^3-2X^2-X+2.

Sea $P\in\mathbb{K}[X]\Rightarrow$ el resto de dividir a P por $X-a$ es $P(a)$.

$f(X)=q(X)\cdot\underbrace{X^3-2X^2-X+2}_{g(X)}+r(X)$, con $g(X)=(X-2)\cdot(X-1)\cdot(X+1)$ y $r(X)=a^2+bX+c$, ya que el $\text{gr}(r)<\text{gr}(g)$ $\xrightarrow{\text{evaluar}}$ $\begin{cases} f(1)=-2=q(1)\cdot\cancelto{0}{g(1)}+r(1)=-2\\ f(2)=1=q(2)\cdot\cancelto{0}{g(2)}+r(2)=1\\ f(-1)=0=q(-1)\cdot\cancelto{0}{g(-1)}+r(-1)=0\end{cases}\to\begin{cases} r(1)=a+b+c=-2\\ r(2)=4a+2b+c=1\\ r(-1)=a-b+c=0\end{cases}\to$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-2\\4&2&1&1\\1&-1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{4}{3}\\0&1&0&-1\\0&0&1&-\frac{7}{3}\end{array}\right)\to\boxed{r(X)=\frac{4}{3}X^2-X-\frac{7}{3}}$$

11. Sea $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n}+3X^{n+1}+3X^n-5X^2+2X+1$ por X^3-X en $\mathbb{Q}[X]$.

$\begin{cases} f(X)=X^{2n}+3X^{n+1}+3X^n-5X^2+2X+1\\ g(X)=X\cdot(X-1)\cdot(X+1)\end{cases}\Rightarrow f=q(X)\cdot g(X)+r(X)$ con $\text{gr}(\underbrace{aX^2+bX+c}_{r(X)})\leq 2$

$$\begin{cases} f(0)=q(0)\cdot\underbrace{g(0)}_{=0}+r(0)=1\\ f(1)=q(1)\cdot\underbrace{g(1)}_{=0}+r(1)=3\\ f(-1)=q(-1)\cdot\underbrace{g(-1)}_{=0}+r(-1)=1+3(-1)^{n+1}+3(-1)^n-5-2+1=\begin{cases}2 & n\text{ impar}\\ 1 & n\text{ par}\end{cases}\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{ecuaciones de } r(X)]{\text{sistema de}}\begin{cases} r(0)=c=1\\ r(1)=a+b+1=3\to a+b=2\\ r(-1)=a-b+1=\begin{cases}2\to a-b=1 & n\text{ impar}\\ 1\to a-b=0 & n\text{ par}\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\xrightarrow[\text{impar}]{n}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&2\\1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\to\boxed{r_{impar}(X)=\frac{3}{2}X^2+\frac{1}{2}X+1}\ \checkmark\\ \xrightarrow[\text{par}]{n}\left(\begin{array}{cc|c}1&1&2\\1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&1\end{array}\right)\to\boxed{r_{par}(X)=X^2+X+1}\ \checkmark\end{cases}$$

---

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $f(X)=X^6+X^3-2$.

Primera raíz: $f(\alpha_1 = 1) = 0 \to f(X) = q(X)\cdot(X-1)$. Busco $q(X)$ con algoritmo de división.

$$
\begin{array}{l|l}
X^6 \qquad\qquad + X^3 \qquad\qquad - 2 & X - 1 \\ \cline{2-2}
-X^6 + X^5 & X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2 \\ \cline{1-1}
\quad X^5 & \\
\quad -X^5 + X^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad X^4 \quad + X^3 & \\
\qquad -X^4 \quad + X^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 2X^3 & \\
\qquad\qquad -2X^3 + 2X^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 2X^2 & \\
\qquad\qquad\qquad -2X^2 + 2X & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad 2X - 2 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -2X + 2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

El cociente $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ se puede factorizar en grupos como $q(X) = (X^2 + X + 1)\cdot(X^3 + 2)$. Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener $f \in \mathbb{C}[X]$ salen de esos dos polinomios.

$$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X^3 + 2 = 0 \xrightarrow[X = re^{i\theta}]{\text{exponencial}} \left\{ \begin{array}{l} r^3 = 2 \to r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \to \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ con } k = 0,\, 1,\, 2. \end{array} \right\} \to \begin{cases} \alpha_4 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \alpha_5 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ \alpha_6 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. Probar que $w + w^2 + w^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$

Voy a usar que si $w \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^{6} w^j = 0 \quad (w \neq 1)$

Si $f(X) = X^2 + X + 2$ y $w + w^2 + w^4$ es raíz $\Rightarrow f(w + w^2 + w^4) = 0$

$$(w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8}_{=w} + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2\cdot\sum_{j=0}^{6} w^j = 0 \quad \checkmark$$

14.

i) Probar que si $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces $X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})]\cdot[X - (w^2 + w^{-2})]$.

ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

---

i) Voy a usar que si $w \in G_5 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^{4} w^j = 0 \quad (w \neq 1)\star^2 \\ w^k = w^{r_5(k)}\star^1 \end{cases}$

$$X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})]\cdot[X - (w^2 + w^{-2})] =$$
$$X^2 - (w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + \underbrace{(w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\star^1} =$$
$$= X^2 - X(\underbrace{w^2 + w^{-2} + w + w^{-1}}_{\star^1}) + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2} =$$

$$= X^2 - X(\underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2}) + -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = X^2 - X(-1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0}) - 1 =$$
$$= X^2 + X - 1 \quad \checkmark$$

ii) Calculando las raíces a mano de $X^2 + X - 1 \to \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{y} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Pero del resultado del inciso i) tengo que :

$$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow[\text{la factorización es}]{\text{sé que una raíz dada}} w + w^{-1} = w + \overline{w} = 2\,\mathrm{Re}(w) = 2 \cdot \underbrace{\cos(\tfrac{2\pi}{5})}_{\cos\theta \geq 0,\, \theta \in [0,2\pi]} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\to \boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$$

15.

i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y g si y sólo sí a es raíz de $(f : g)$.

ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz en común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

---

i) Hacer!

ii) Busco el $(f : g)$:

$$\begin{aligned}
X^4 + 3X - 2 &= \big(X^4 + 3X^3 - 3X + 1\big) \cdot 1 + \big(-3X^3 + 6X - 3\big) \\
X^4 + 3X^3 - 3X + 1 &= \big(-3X^3 + 6X - 3\big) \cdot \big(-\tfrac{1}{3}X - 1\big) + \big(2X^2 + 2X - 2\big) \\
-3X^3 + 6X - 3 &= \big(2X^2 + 2X - 2\big) \cdot \big(-\tfrac{3}{2}X + \tfrac{3}{2}\big) + 0
\end{aligned}$$

$$(f : g) = X^2 + X - 1 \xrightarrow{\text{raíces}} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$X^4 + 3X - 2 = \big(X^2 + X - 1\big) \cdot \big(X^2 - X + 2\big) + 0$$

16. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1,$

ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i,$

iii) $f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2,$

iv) $f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3, \quad a = 2.$

---

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1,$

Todos casos de factoreo:

$$f = X^5 - 2X^3 + X = X(X^4 - 2X^2 + 1) = X(X^2-1)^2 = X(X-1)^{2}(X+1)^2 =$$

$\boxed{\text{La multiplicidad de } a = 1 \text{ como raíz es 2.}}$

ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i,$
Si $a = i$ es raíz, entonces $-i$ también lo es en un polinomio $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{rrrr|l} X^6 & -3X^4 & & +4 & X^2+1 \\ \cline{5-5} -X^6 & -X^4 & & & X^4-4X^2+4 \\ \cline{1-2} & -4X^4 & & & \\ & 4X^4 & +4X^2 & & \\ \cline{2-3} & & 4X^2 & +4 & \\ & & -4X^2 & -4 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

$f = (X^2+1)(X^4-4X^2+4) = (X^2+1)(X^2-2)^2 = (X^2+1)(X-\sqrt{2})^2(X+\sqrt{2})^2 =$
$(X-i)^1(X+i)(X-\sqrt{2})^2(X+\sqrt{2})^2 =$

$\boxed{\text{La multiplicidad de } a = i \text{ como raíz de } f \text{ es } 1.}$

iii) $f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2,$
$f = (X-2)^3((X+2)+(X+1)) = (X-2)^3(2X+3)$

$\boxed{\text{La multiplicidad de } a = 2 \text{ como raíz de } f \text{ es } 3.}$

iv) $f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3, \quad a = 2,$
$f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3 = (X-2)^2(X-2)(X+2) - 4(X-2)^3 =$
$(X-2)^3(X+2-4) = (X-2)^4$

$\boxed{\text{La multiplicidad de } a = 2 \text{ como raíz de } f \text{ es } 4.}$

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene solo raíces simples en $\mathbb{C}$.

$f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$
$\xrightarrow{\text{derivo}} f' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} \overset{n>0}{\iff} f' = n(n+1)X^{n-1}(X-1)$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n > 1 \Rightarrow f'(\alpha = 1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(\alpha = 0) = 0 \\ n = 1 \Rightarrow f'(\alpha = 1) = 0^{\star 1} \end{cases}$$

Para que las raíces α, de f no sean simples, es necesario que $f'(\alpha) = 0$. Por lo tanto, estudio solo los valores de raíces encontrados para la derivada. Si f ha de tener raíces dobles, estás deberían ser $\alpha = 1 \quad \text{o} \quad \alpha = 0$.
Entonces:

$$\begin{cases} f(\alpha = 1) = a - 1 \Rightarrow f(1) \neq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \neq 1 \\ f(\alpha = 0) = a \Rightarrow f(0) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$$

Si $a = 0 \wedge n \overset{\star 1}{=} 1 \Rightarrow f$ tiene solo una raíz simple en 0.
Si $a \neq 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Si $a \neq 0 \wedge n > 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples.
seguramente hay una mejor forma de expresar la respuesta.

18. Controlar y Pasar

19. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en $\mathbb{C}$. Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

Si f tiene raíces múltiples $\alpha_k \Leftrightarrow f(\alpha_k) = f'(\alpha_k) = 0$, por lo tanto tanto comienzo buscando las raíces de f' para sacarme ese a de en medio.

$f' = 20X^{19} + 80X^9 = 20X^9(X^{10}+4) \Rightarrow f' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X^{10} = -4 \Leftrightarrow X = \sqrt[10]{4} e^{i\frac{2k+1}{10}\pi} \ k \in \mathbb{Z}_{[0,9]} \end{cases}$

Hay de momento 11 raíces de f'. Me interesa saber si son raíces de f:

$f(0) = 2a \Rightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$f = (X^{10})^2 + 8X^{10} + 2a \Rightarrow f(\alpha = X^{10} = -4) = (-4)^2 + 8(-4) + 2a = -16 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 8$

Entonces:

Si $a = 0 \Rightarrow f = X^{10}(X^{10}+8)$

$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X = 0 \quad \text{o} \quad X^{10} = -8$, donde $\boxed{\mu(0; f) = 10}$ y $\boxed{\mu(\sqrt[10]{8} e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}); f) = 1 \ k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}$.

11 raíces distintas.

Si $a = 8 \Rightarrow f = X^{20} + 8X^{10} + 16 = (X^{10}+4)^2$

$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X^{10} = -4$, donde $\boxed{\mu(\sqrt[10]{4} e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}); f) = 2 \ k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}$.

10 raíces distintas.

20. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

21.

i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.

ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.

---

i) $(X-1)^2 \mid f \ \ \forall a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow 1$ es *por lo menos* raíz doble de $f \Leftrightarrow f(1) = f'(1) = 0$.

$$\begin{cases} f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1 & \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \\ f' = 6X^5 - 10X^4 + 4(1+a)X^3 - 6aX^2 + 2(1+a)X - 2 & \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f'(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Calculando $f(1)$ y $f'(1)$ se comprueba. ✓

ii) $(X-1)^3 \mid f \Leftrightarrow f''(1) = 0$

$\Rightarrow f'' = 30X^4 - 40X^3 + 12(1+a)X^2 - 12aX + 2(1+a) \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f''(1) = 2a$

$\Rightarrow f''(1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$\boxed{(X-1)^3 \mid f \iff a = 0}$ ✓

Observar que si $a \neq 0$, 1 es una raíz *doble* de f de otra forma es una raíz *por lo menos* triple.

22. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

23. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

24. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

25. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

26. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

27. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

28. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

29. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

30. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

31. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

32. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

33. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

34. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

35. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

36. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

37. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

38. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

39. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

Ejercicios de parciales:

1.

a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} > 0$ tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\frac{3\pi}{2}$

b) Para cada valor de $\mathbf{c}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

---

a) Si la raíz $\alpha = re^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) \Rightarrow f(r(-i)) = 0$
Voy a usar que:

$$\star^1 \begin{cases} (-i)^2 &= -1 \\ (-i)^3 &= i \\ (-i)^4 &= 1 \\ (-i)^5 &= -i \\ (-i)^6 &= -1 \end{cases}$$

Evalúo $f(r(-i))$:

$$\begin{aligned} f(r(-i)) &= (r(-i))^6 - 4(r(-i))^5 - (r(-i))^4 + 4r^3 i + 4(r(-i))^2 + 48(r(-i)) + \mathbf{c} \\ &\overset{\star^1}{=} -r^6 + 4r^5 i - r^4 + 4r^3 i - 4r^2 - 48ri + \mathbf{c} = 0 \end{aligned}$$

Esta expresión va a ser 0 cuando su parte imaginaria y su parte real sean ambas 0:

$$f(r(-i)) = -r^6 + 4r^5 i - r^4 - 4r^3 i - 4r^2 - 48ri + \mathbf{c} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(f(r(-i))) : 4r(r^4 + r^2 - 12) = 0 \underset{r>0}{\overset{r\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}} r = \sqrt{3}\star^2 \\ \operatorname{Re}(f(r(-i))) : -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 \underset{r=\sqrt{3}}{\overset{\star^2}{\Longleftrightarrow}} \boxed{\mathbf{c} = 48} \end{cases}$$

Por lo tanto con ese $\mathbf{c} = 48$:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48$$

y las raíces que tiene este polinomio son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{3} \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} &= -\sqrt{3}i \\ \alpha_2 &= \sqrt{3} \cdot e^{-i\frac{3}{2}\pi} &= \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Apareció el conjugado de la raíz dado que que $f \in \mathbb{Q}[X]$

b) Debe ocurrir que $(X-\sqrt{3}i)(X+\sqrt{3}i) = X^2+3 \mid f$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^6 & -4X^5 & -X^4 & +4X^3 & +4X^2 & +48X & +48 & X^2+3 \\ \cline{8-8}
-X^6 & & -3X^4 & & & & & X^4-4X^3-4X^2+16X+16 \\ \cline{1-3}
& -4X^5 & -4X^4 & +4X^3 & & & & \\
& 4X^5 & & +12X^3 & & & & \\ \cline{2-4}
& & -4X^4 & +16X^3 & +4X^2 & & & \\
& & 4X^4 & & +12X^2 & & & \\ \cline{3-5}
& & & 16X^3 & +16X^2 & +48X & & \\
& & & -16X^3 & & -48X & & \\ \cline{4-6}
& & & & 16X^2 & & +48 & \\
& & & & -16X^2 & & -48 & \\ \cline{5-7}
& & & & & & 0 &
\end{array}$$

Hasta el momento f queda:

$$f = (X^2+3)\underbrace{(X^4-4X^3-4X^2+16X+16)}_{g}$$

como f tiene al menos una raíz doble la busco en las raíces de la derivada de g:

$$\begin{aligned} g' &= (4X^3-12X^2-8X+16)' \\ &= 4(X^3-3X^2-2X+4) = 0 \end{aligned}$$

Con el lema de Gauss se que las posibles raíces de g' están en:

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

Probando encuentro que $g'(1) = 0$, pero $q(1) \neq 0 \Rightarrow f(1) \neq 0$. Si $X = 1$ no es raíz de g, continúo bajándole el grado a g' para buscar otras raíces:

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -3X^2 & -2X & +4 & X-1 \\ \cline{5-5}
-X^3 & +X^2 & & & X^2-2X-4 \\ \cline{1-2}
& -2X^2 & -2X & & \\
& 2X^2 & -2X & & \\ \cline{2-3}
& & -4X & +4 & \\
& & 4X & -4 & \\ \cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

Con este resultado se puede escribir a g' como:

$$g' = 4(X-1)(X^2-2X-4)$$

De la parte cuadrática salen 2 raíces de g':

$$\alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$$
$$X^2-2X-4 = (X-(1+\sqrt{5}))(X-(1-\sqrt{5}))$$

(para mostrar que son raíces dobles y no triples, por ejemplo, debería comprobar que $\alpha_{1,2}$ no son raíces de $g'' = 4(3X^2-6X-2)$, pero no tengo ganas, elijo creer que no lo son).

Compruebo que sean también raíces de g:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -4X^3 & -4X^2 & +16X & +16 & X^2-2X-4 \\
\cline{6-6}
-X^4 & +2X^3 & +4X^2 & & & X^2-2X-4 \\
\cline{1-3}
& -2X^3 & & +16X & & \\
& 2X^3 & -4X^2 & -8X & & \\
\cline{2-4}
& & -4X^2 & +8X & +16 & \\
& & 4X^2 & -8X & -16 & \\
\cline{3-5}
& & & & 0 &
\end{array}
$$

Dado que el resto dio 0 $\alpha_{1,2}$ son raíces de g y como son raíces de g' entonces son raíces dobles de g, y de f.

Notar que viendo el cociente de esa última división quizás podría haber visto el caso de factoreo a ojo, pero bueh, no pasó.

Factorizaciones:

$$
\boxed{
\begin{array}{lcl}
\mathbb{Q}[X] & \to & f = (X^2+3)\cdot(X^2-2X-4)^2 \\
\mathbb{R}[X] & \to & f = (X^2+3)\cdot(X-(1+\sqrt{5}))^2\cdot(X-(1-\sqrt{5}))^2 \\
\mathbb{C}[X] & \to & f = (X-\sqrt{3}i)\cdot(X+\sqrt{3}i)\cdot(X-(1+\sqrt{5}))^2\cdot(X-(1-\sqrt{5}))^2
\end{array}
}
$$

---

2. Factorizar el polinomio $P = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49$ como producto de irreducibles en $\mathbb{C}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ sabiendo que $\sqrt{7}$ es una raíz múltiple.

Un polinomio con coeficientes racionales, y una raíz irracional $\alpha = \sqrt{7}$, tendrá también al *conjugado irracional* [1] , $\overline{\alpha} = -\sqrt{7}$

Si agregamos la información de que $\sqrt{7}$ es *por lo menos* raíz doble, obtenemos que:

$$
\begin{cases}
\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow (X^2-7) \,\big|\, f \\
\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow (X^2-7)^2 = X^4-14X^2+49 \,\big|\, f \quad \checkmark
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^6 & -X^5 & -13X^4 & +14X^3 & +35X^2 & -49X & +49 & X^4-14X^2+49 \\
\cline{8-8}
-X^6 & & +14X^4 & & -49X^2 & & & X^2-X+1 \\
\cline{1-5}
& -X^5 & +X^4 & +14X^3 & -14X^2 & -49X & & \\
& X^5 & & -14X^3 & & +49X & & \\
\cline{2-6}
& & X^4 & & -14X^2 & & +49 & \\
& & -X^4 & & +14X^2 & & -49 & \\
\cline{3-7}
& & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$$
f = (X^4-14X^2+49)\cdot(X^2-X+1) \xrightarrow{\text{resolvente}} \begin{cases} \alpha_{+,-} = \frac{1 \pm w}{2} \\ w^2 = -3 \end{cases}
$$

$$
\to f = (X^4-14X^2+49)\cdot(X-(\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}))(X-(\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}))
$$

$$
\boxed{
\begin{cases}
\mathbb{Q}[X] \;\to\; f = (X^2+7)^2(X^2-X+1) \\
\mathbb{R}[X] \;\to\; f = (X+\sqrt{7})^2(X-\sqrt{7})^2(X^2-X+1) \\
\mathbb{C}[X] \;\to\; f = (X+\sqrt{7})^2(X-\sqrt{7})^2(X-(\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}))(X-(\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}))
\end{cases}
}
$$

[1] Estoy usando la misma notación para *conjugado racional* y *conjugado complejo*. ¿Está bien? No sé, no me importa mientras se entienda.

---

3. Hallar **todos** los polinomios **mónicos** $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

i) $1 - \sqrt{2}$ es raíz de f;

ii) $X(X-2)^2 \mid (f : f')$;

iii) $(f : X^3 - 1) \neq 1$;

iv) $f(-1) = 27$;

---

i) Como $f \in \mathbb{Q}[X]$ si $\alpha_1 = 1-\sqrt{2}$ es raíz entonces $\alpha_2 = 1+\sqrt{2}$ para que no haya coeficientes irracionales en el polinomio.

$$(X - (1-\sqrt{2})) \cdot (X - (1+\sqrt{2})) = X^2 - 2X - 1$$

Por lo tanto:

$$X^2 - 2X - 1$$

será un factor de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

ii) Para el requerimiento $X(X-2)^2 \mid (f : f')$:

$$X(X-2)^2 \mid (f : f') \overset{\text{def}}{\iff} (f : f') = X(X-2)^2 \cdot q,$$

de donde se deduce que <u>por lo menos</u> (dado que no conoce q y tampoco importa ahora):

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \text{ es por lo menos raíz simple de } f' \Rightarrow \text{ es por lo menos raíz doble de } f \\ \alpha_4 = 2 \text{ es por lo menos raíz doble de } f' \Rightarrow \text{ es por lo menos raíz triple de } f \end{cases}.$$

Por lo tanto como en los ejercicios estos piden *menor grado*:

$$X^2(X-2)^3$$

también serán factores de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

iii) Si $(f : X^3 - 1) \neq 1$ quiere decir que <u>por lo menos</u> alguna de las 3 raíces de:

$$X^3 - 1 \overset{!}{=} (X-1) \cdot (X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \cdot (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))$$

tiene que aparecer en la factorización de f.

Parecido al item i) si tengo una raíz compleja, también necesito el conjugado complejo de la raíz, para que no me queden coeficientes de f con componente imaginaria:

$$X^3 - 1 = (X-1) \cdot (X^2 + X + 1),$$

a priori me quedaría con el *factor de menor grado* siempre que eso no *rompa* otras condiciones, pero todavía no tomo la decisión 😐.

Por lo tanto:

$$(X-1) \quad \text{o} \quad (X^2 + X + 1)$$

ya veremos cual, aparecerá en la factorización de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

iv) $f(-1) = 27$. Hasta el momento juntando los resultados tengo 2 candidatos f_1 y f_2:

$$\begin{array}{lll} f_1 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X-2)^3 \cdot X^2 \cdot (X^2 + X + 1) & \to & f_1(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot 1 = -54 \\ f_2 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X-2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) & \to & f_2(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot (-2) = 108, \end{array}$$

ninguno es el 27 que quiero, así que hay que hacer algo más.

Para encontrar *un* polinomio **mónico** que cumpla lo pedido tomaría el f_2 que tiene menor grado de los dos y lo multiplicaría por:

$$f = f_2 \cdot (X - a) \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{Q}$$

de manera que pueda elegir el a para cumplir lo que quiero:

$$f(-1) = f_2(-1) \cdot (X - a) = 108 \cdot (-1 - a) = 27 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}$$

$$f = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X-2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \cdot (X + \frac{5}{4})$$

así cumpliendo todas las condiciones.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz` `Ale Teran`

---

4. Factorizar como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ al polinomio

$$f = X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15$$

sabiendo $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$

Si el $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$, esto nos da información sobre *raíces comunes* entre f y $X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5$. Puedo hacer el algoritmo de Euclides para encontrar el MCD, con esa o esas raíces. El último resto no nulo hecho **mónico** será el MCD.

$$\begin{array}{rcl} X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 = & \left(X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5\right) \cdot (X + 3) & + \left(-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30\right) \\ X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5 = & \left(-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}X + \frac{3}{10}\right) & + \left(14X^2 - 14X + 14\right) \\ -10X^3 - 20X^2 + 20X - 30 = & \left(14X^2 - 14X + 14\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}X - \frac{15}{7}\right) & + 0 \end{array}$$

Por lo que:

$$(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) = X^2 - X + 1.$$

Las raíces del MCD son $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm w}{2}$ con $w^2 = 3i$.

$$X^2 - X + 1 = (X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})) \quad \checkmark$$

Por definición de lo que es el MCD sabemos que $X^2 - X + 1 \mid f$, haciendo la división bajamos el grado y seguimos buscando las raíces.

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^5+2X^4-7X^3 & -7X^2 & +10X & -15 & X^2-X+1 \\
\cline{5-5}
-X^5 \;\; +X^4 \;\; -X^3 & & & & X^3+3X^2-5X-15 \\
\cline{1-1}
3X^4-8X^3 & -7X^2 & & & \\
-3X^4+3X^3 & -3X^2 & & & \\
\cline{1-2}
-5X^3 & -10X^2 & +10X & & \\
5X^3 & -5X^2 & +5X & & \\
\cline{1-3}
 & -15X^2 & +15X & -15 & \\
 & 15X^2 & -15X & +15 & \\
\cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Obtuvimos que:

$$f = (X^2 - X + 1) \cdot (X^3 + 3X^2 - 5X - 15) + 0.$$

Hermoso resultado, donde la hermosura se mide en su simpleza para ser factorizado. Sin usar calculadora ni Guass ni ninguna cosa extraña podemos expresar a f como:

$$f \overset{!!!}{=} (X^2 - X + 1) \cdot \underbrace{(X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X + 3)}_{X^3+3X^2-5X-15}$$

Si todavía no viste como fue la factorización en ! te recomiendo que sigas mirando sin *spoiler de calculadora o del pesado o pesada sabelotodo* que quizás tenés al lado y que no te deja tiempo para pensar. Son puros casos de factoreo que *deberían verse a ojo*.
Ahora factorizamos en irreducibles, que son polinomios mónicos que solo se dividen por sí mismos y por 1, *los primos en el mundo de polinomios*. Para tener una mejor explicación clickeá acá! Y vas a la teoría del apunte.
Factorizaciones:

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{Q}[X] & \to & f = \overbrace{(X^2-5)}^{\in\mathbb{Q}[X]} \cdot \overbrace{(X^2-X+1)}^{\in\mathbb{Q}[X]} \cdot \overbrace{(X+3)}^{\in\mathbb{Q}[X]} \\
\mathbb{R}[X] & \to & f = \overbrace{(X-\sqrt{5})}^{\in\mathbb{R}[X]} \cdot \overbrace{(X+\sqrt{5})}^{\in\mathbb{R}[X]} \cdot \overbrace{(X^2-X+1)}^{\in\mathbb{R}[X]} \cdot \overbrace{(X+3)}^{\in\mathbb{R}[X]} \\
\mathbb{C}[X] & \to & f = \overbrace{(X+3)}^{\in\mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X-\sqrt{5})}^{\in\mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X+\sqrt{5})}^{\in\mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i))}^{\in\mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i))}^{\in\mathbb{C}[X]}
\end{array}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz` `Ale Teran`

---

5. Sea $(f_n)_{(n\geq 1)}$ la sucesión de poliniomios en $\mathbb{R}[X]$ definida como:

$$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X+2)^2 f_n' + 3f_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que -2 es raíz doble de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

No caer en la *trampilla* de olvidar que para que una raíz de f sea doble, i.e. $\text{mult}(-2; f) \overset{!}{=} 2$ debe ocurrir lo *"obvio"*, $f(-2) = f'(-2) = 0$ y también que $f''(-2) \neq 0$. Si olvidamos esto último solo probaríamos que la $\text{mult}(-1; f) \geq 2$ y tendríamos el ejercicio mal.
Por inducción en n: $q(n)$: "-2 es raíz doble de f_n, $\forall n \in \mathbb{N}$"
Caso base: ¿$q(1)$ es V?

$$\begin{cases} f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} & f_1(-2) = 0 \\ f_1' = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 22X & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} & f_1'(-2) = 0 \\ f_1'' = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 22 & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} & f_1''(-2) = -54 \neq 0 \end{cases}$$

$\therefore$ $\text{mult}(-2; f_1) = 2 \Rightarrow -2$ es raíz doble de $f_1 \Rightarrow q(1)$ es V $\checkmark$

Paso inductivo: ¿Si $q(k)$ verdadera $\Rightarrow q(k+1)$ también lo es, $\forall k \in \mathbb{N}$?

HI: -2 es raíz doble de $f_k \Leftrightarrow \begin{cases} f_k(-2) = 0 \star^1 \\ f_k'(-2) = 0 \star^2 \\ f_k''(-2) \neq 0 \star^3 \end{cases}$

QPQ dado $k \in \mathbb{N}$, $q(k+1)$: -2 es raíz doble de $f_{k+1} \overset{\text{def}}{=} (X+2)^2 f_k' + 3f_k$:

Derivar:

$$\begin{cases} f_{k+1} \overset{\text{def}}{=} (X+2)^2 f_k' + 3 \cdot f_k \\ f_{k+1}' = 2(X+2) f_k' + (X+2)^2 f_k'' + 3 \cdot f_k' \\ f_{k+1}'' = 2f_k' + (2X+4) f_k'' + 2(X+2) f_k'' + (X+2)^2 f_k''' + 3 \cdot f_k'' \end{cases}$$

Evaluar en -2*:*

$$f_{k+1}(-2) \overset{?}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_{k+1}(-2) = \cancel{(-2+2)}^2 f_k'(-2) + 3f_k(-2) = 0^2 f_k'(-2) + 3f_k(-2) = 3f_k(-2) \overset{\star^1}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f_{k+1}'(-2) \overset{?}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_{k+1}'(-2) = 2\cancel{(-2+2)} f_k'(-2) + \cancel{(-2+2)}^2 f'' + f_k'(-2) = f_k'(-2) \overset{\star^2}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f_{k+1}''(-2) \overset{?}{\neq} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_{k+1}''(-2) = 2f_k'(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f_k''(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f_k''(-2) + \\ + \cancel{(-2+2)}^2 f_k'''(-2) + f_k''(-2) = 2\overbrace{f_k'(-2)}^{=0\star^2} + \overbrace{f_k''(-2)}^{\neq 0 \star^3} \neq 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$\therefore$ $\text{mult}(-2; f_{k+1}) = 2 \Rightarrow -2$ es raíz doble de $f_{k+1} \Rightarrow q(k+1)$ es V $\checkmark$

Como $q(1)$, $q(k)$ y $q(k+1)$ resultaron verdaderas, por principio de inducción $q(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`

`Nad Garraz` `Dani Tadd` `No me acuerdo el autor original`

6.

a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ **(positivo)** para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

---

a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ **(positivo)** para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

Solución:

Limpiando los denominadores de f se obtiene el polinomio g con las mismas raíces:

$$g = 3X^5 + nX^4 - 8X^3 + 11X^2 - 3X = X(\underbrace{3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3}_{h})$$

Por enunciado ignoramos la raiz nula y utilizando el Lema de Gauss buscamos las raíces racionales de

$$h = 3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3$$

Aquí, $a_0 = -3$ y $a_n = 3$

$$\text{Div}(a_0) = \text{Div}(a_n) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

Como busco raíces enteras, las busco en el conjunto:

$$\{\pm 1, \pm 3\}$$

Chequeo:

$$\begin{aligned} h(-1) = 0 &\iff n = -19 \notin \mathbb{N} \\ h(1) = 0 &\iff n = -3 \notin \mathbb{N} \\ h(-3) = 0 &\iff \boxed{\text{n=5}} \in \mathbb{N} \\ h(3) = 0 &\iff n = \tfrac{67}{9} \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

Rta: $n = 5$ es el único valor de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el polinomio f tiene una raíz entera no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

Solución:

Primero factorizo la raiz nula de de f

$$f = X^5 + \frac{5}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X = X(X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1)$$

Se, por el item (a), que -3 es una de las raíces racionales de f. Busco otras posibles raiíces racionales en el polinomio h (con $n = 5$) obtenido en el item (a) en el conjunto $\{\pm\frac{1}{3}\}$

$h(-\frac{1}{3}) = -\frac{208}{27}$

$h(\frac{1}{3}) = 0 \implies \frac{1}{3}$ es una raiz racional de f.

Factorizo el polinomio f diviendolo por el producto de las dos raíces encontradas $(X+3)\cdot(X-\frac{1}{3}) = X^2 + \frac{8}{3} - 1$

$$\begin{array}{rrrrr|l} X^4 & +\frac{5}{3}X^3 & -\frac{8}{3}X^2 & +\frac{11}{3}X & -1 & X^2 + \frac{8}{3}X - 1 \\ \cline{6-6} -X^4 & -\frac{8}{3}X^3 & +X^2 & & & X^2 - X + 1 \\ \hline & -X^3 & -\frac{5}{3}X^2 & +\frac{11}{3}X & & \\ & X^3 & +\frac{8}{3}X^2 & -X & & \\ \hline & & X^2 & +\frac{8}{3}X & -1 & \\ & & -X^2 & -\frac{8}{3}X & +1 & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

Factorizo el polinomio cuadrático $X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$$x_+ = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \text{ y } x_- = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$$

Rta:

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)) \in \mathbb{C}$ con todos sus factores de multiplicidad 1 y por lo tanto irreducibles.

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2-X+1) \in \mathbb{R}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto irreducibles en $\mathbb{R}$.

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2-X+1) \in \mathbb{Q}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto irreducibles en $\mathbb{Q}$.

---

7. Determinar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que satisfaga simultáneamente:

- f es mónico,
- $\mathrm{gr}(f : 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11) = 2$
- f tiene una raíz $z \in G_3$ con $z \neq 1$, que es doble,
- $f(0) = 33$;

El dato de $\mathrm{gr}\overbrace{(f : \underbrace{2X^3 - 5X^2 - 20X + 11}_{g})}^{d} = 2$ indica que hay un polinomio, d, con $\mathrm{gr}(d) = 2$ que cumple que $\begin{cases} d \mid f \\ d \mid 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11 \end{cases}$ entonces, f tiene 2 raíces en común con g. Estás raíces pueden ser una doble o dos simples. Dado que nos piden que sea de grado mínimo habrá que tener *cuidado* cual elegir para no violar ninguna condición.

Calculemos las posibles raíces de g usando *lema de gauss*:
Posibles raíces serán los cocientes de los divisores de 11 y los de 2.

$$\mathcal{D}(11) = \{\pm 1, \pm 11\}, \mathcal{D}(2) = \{\pm 1, \pm 2\} :$$

$$\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 11, \pm\frac{11}{2}\right\}.$$

Probando esos valores encuentro que $g(\frac{1}{2}) = 0$ y ninguna de las otras funcionó. Le bajamos el grado con el algoritmo de división a g.

$$\begin{array}{rrrr|l}
2X^3 & -5X^2 & -20X & +11 & X-\frac{1}{2} \\
\cline{5-5}
-2X^3 & +X^2 & & & 2X^2-4X-22 \\
\cline{1-2}
 & -4X^2 & -20X & & \\
 & 4X^2 & -2X & & \\
\cline{2-3}
 & & -22X & +11 & \\
 & & 22X & -11 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Hasta el momento:

$$g = (X - \frac{1}{2}) \cdot (2X^2 - 4X - 22) + 0,$$

buscamos raíces de $2X^2 - 4X - 22$:

$$\alpha_{+,-} = \frac{4 \pm 8\sqrt{3}}{4} = 1 \pm 2\sqrt{3} = \begin{cases} 1 + 2\sqrt{3} \\ 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Entonces: f tiene 2 raíces en común con $g = (X - \frac{1}{2})(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))$. Dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$ voy a seleccionar las raíces que tienen número irracionales por la condición de grado mínimo. Recordar que si $f \in \mathbb{Q}[X]$ tiene una raíz con números irracionales, también debe estar su conjugado irracional.

Con la condición que dice que f tiene una raíz $z \in G_3$ con $z \neq 1$, que es doble, no nos dejan muchas opciones. G_3 tiene tres raíces, solución de $w^3 = 1$, dado que por enunciado no puede ser 1, entonces solo quedan:

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

(Si no te acordás como encontrar raíces de la familia G_n te dejo el ejercicio **12.**) que se hacen las cuentas.

Ok, tengo esas dos raíces: $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ¿Cuál elijo? ¡Cualquiera sirve! Porque, *nuevamente* ☺, como f en $\mathbb{Q}[X]$ si agarro una raíz compleja también necesito su conjugado complejo, lo mismo que antes.
Hasta el momento tenemos:

$$f = \overbrace{(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))}^{X^2 - 2X - 11} \underbrace{(X - (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i))^{2^{\star 1}} (X - (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i))^{2^{\star 1}}}_{(X^2 + X + 1)^2} =$$
$$= (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2$$

$\star^1$ Si es doble una de las complejas, también debe serlo su conjugado, porque $f \in \mathbb{Q}[X]$.

Nos queda cumplir que $f(0) = 33$, si bien ahora $f(0) = -11$. Acá tenemos que tener en cuenta la primera condición. f es *mónico*, así que no podemos corregir el valor poniendo un coeficiente principal.
Hay que proponer otro factor en $\mathbb{Q}[X]$, que al evaluar de el número que al multiplicarse con -11 nos dé 33. El candidato es $(X - 3)$, dado que en 0 vale -3 y así $f(0) = (-11) \cdot (-3) = 33$ como queremos.

El $f \in \mathbb{Q}[X]$ que cumple lo pedido:

$$\boxed{f = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2 (X - 3)}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

8.

a) Determinar todos los $f \in \mathbb{R}[X]$ mónicos de grado mínimo tales que cumplan:

- f contiene entre sus raíces al menos una raíz cúbica de la unidad,
- $X^2 + 1 \,\big|\, (f : f')$,
- f tiene al menos 2 raíces enteras,
- $f(1) = -12$,

b) Con el polinomio f hallado expresar factorización en irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

a) Arrancando con la primera condición, tenemos al menos a una de las w tales que:

$$w^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = 1\star^1 \\ w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}.$$

Si no te acordás como calcular las raíces, mirá el ejercicio 12, donde se resuelve algo casi idéntico.

Como el polinomio *debe ser de grado mínimo* y tiene coeficientes en $\mathbb{R}$ hay que elegir con cuidado. Lo mejor es ver el resto de las condiciones para no hacer *cagadas*. (¡spoiler alert: Elegí el 1 si sos picante!)

De la segunda condición sacamos que:

$$X^2+1 = (X-i)\cdot(X+i) \,\big|\, (f:f') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X^2+1 \,\big|\, f \Leftrightarrow \begin{cases} (X-i)\,\big|\, f \\ \text{y} \\ (X+i)\,\big|\, f \end{cases} \\ \text{y} \\ X^2+1 \,\big|\, f' \Leftrightarrow \begin{cases} (X-i)\,\big|\, f' \\ \text{y} \\ (X+i)\,\big|\, f' \end{cases} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} (X-i)^2 \,\big|\, f \\ \text{y} \\ (X+i)^2 \,\big|\, f \end{cases}$$

Si no entendés el porqué de eso mirate esto de las notas teóricas, para tener contexto. Básicamente si α es una raíz de f y también de f', entoences es una raíz *por lo menos* doble de f.

En el tercer punto, nos dicen que tiene al menos 2 raíces en $\mathbb{Z}$. ¿Una de esas podría ser el 1 que obtuvimos como raíz de G_3?, Dejame que lo piense.

En el último punto tenemos que cumplir que al evaluar en nuestro polinomio f en 1, eso nos dé -12. Y es acá donde nos damos cuenta de que no podemos elegir a $1\star^1$ para que sea raíz de f!! Y dado que $f \in \mathbb{R}[X]$ tenemos que elegir entonces ambas $\begin{cases} w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$. Propongo:

$$\begin{array}{rcl} f &=& (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i))(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i))(X-i)^2(X+i)^2(X-a)(X-b) \\ &\overset{\star^2}{=}& (X^2+X+1)(X^2+1)^2(X-a)(X-b), \end{array}$$

con a y b a determinar, de manera tal de cumplir las últimas dos condiciones: *ambas* enteras y $f(1) = -12$.

$$f(1) = -12 \overset{\star^2}{\Longleftrightarrow} 12\cdot(1-a)(1-b) = -12 \Longleftrightarrow (1-a)(1-b) = -1 \underset{\in\mathbb{Z}}{\overset{a \text{ y } b}{\Longleftrightarrow}} a = 2 \quad \text{y} \quad b = 0.$$

Esas serían las candidatas a raíces enteras, obteniendo así un único polinomio

$$f = (X^2+X+1)(X^2+1)^2(X-2)(X-0) = X(X-2)(X^2+X+1)(X^2+1)^2$$

mónico y de grado mínimo que cumple las condiciones pedidas.

b) La definición de polinomio irreducible está acá.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{Q}[X] & \to & f = X(X-2)(X^2+X+1)(X^2+1)^2 \\ \mathbb{R}[X] & \to & f = X(X-2)(X^2+X+1)(X^2+1)^2 \\ \mathbb{C}[X] & \to & f = X(X-2)(X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i))(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i))(X-i)^2(X+i)^2 \end{array}}$$

Notar que en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$ las factorizaciones son iguales, dado que no hay raíces irracionales.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Nad Garraz Dani Tadd

9. Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que cumpla las siguientes condiciones

- f comparte una raíz con $X^3 - 3X^2 + 7X - 5$
- $X + 3 - \sqrt{2} \mid f$,
- $1 - 2i$ es raíz de f y $f'(1 - 2i) = 0$

Vamos con la primera. Si dos polinomios , f y $g = X^3 - 3X^2 + 7X - 5$, comparten raíz buscamos raíces de g con el *lema de Gauss* de donde tomaremos las raíces que nos sirvan para construir nuestro f *mónico y de grado mínimo*: $A = \{\pm 1, \pm 5\}$, con $\alpha = 1 \Rightarrow g(1) = 0 \quad \checkmark$.
Como $\alpha = 1$ es raíz, entonces $X - 1 \mid g$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -3X^2 & +7X & -5 & X-1 \\
\cline{5-5}
-X^3 & +X^2 & & & X^2 - 2X + 5 \\
\cline{1-2}
 & -2X^2 & +7X & & \\
 & 2X^2 & -2X & & \\
\cline{2-3}
 & & 5X & -5 & \\
 & & -5X & +5 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$g = (X - 1) \cdot (X^2 - 2X + 5)$, busco raíces del cociente $X^2 - 2X + 5$, usando resolvente

$$r_{+,-} = \frac{2 \pm w}{2}, \text{ con } w^2 = -16 \to \begin{cases} r_+ = 1 + 2i \\ r_- = 1 - 2i. \end{cases}$$

Finalmente,

$$g \overset{\star^1}{=} (X - 1) \cdot \underbrace{(X - (1 + 2i)) \cdot (X - (1 - 2i))}_{X^2 - 2X + 5} \quad \checkmark,$$

antes de elegir cuales de estas raíces serán comunes a f
es recomendable estudiar las otras condiciones del enunciado.

$X + 3 - \sqrt{2} = X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f$, por lo que $(-3 + \sqrt{2})$ es una raíz de f y dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$ también debe estar el conjugado irracional $-3 - \sqrt{2}$.

$$\begin{cases} X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f \\ \quad\quad \text{y} \\ X - (-3 - \sqrt{2}) \mid f \end{cases} \overset{!}{\Leftrightarrow} X^2 + 6X + 7 \mid f \quad \checkmark.$$

La tercera condición tiene *mucha data*. Nos da una raíz compleja de f, por lo cual también tendremos su conjugado complejo porque $f \in \mathbb{Q}[X]$.
Esa raíz es una de las que está en $g^{\star 1}$.
El dato de f', también nos indica que la multiplicidad de $1 - 2i$ como raíz es por lo menos 2, ya que $f'(1 - 2i) = 0$, y por lo tanto $\text{mult}(1 + 2i; f)$ también será por lo menos 2.

Tenemos todo para armar a f:

$$f = (X^2 - 2X + 5)^2 \cdot (X^2 + 6X + 7) \quad \checkmark$$

---

10. Determinar todos los primos p positivos tales que el polinomio

$$f = pX^3 - X^2 + 13X - 1$$

tenga al menos una raíz racional positiva. Para cada valor de p hallado, factorizar f como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

El lema de Gauss dice que las raíces racionales que el polinomio puede tener, tienen que estar en el conjunto de los divisores del *coeficiente principal* p y el *termino independiente* -1:

$$\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{7}, \dots, \pm\frac{1}{p}\right\}$$

Ahora hay que hacer cuentas para todos los primos y ver cuál funciona, *nah, mentira.* Si $\frac{1}{p}$ es raíz entonces hay que dividir $(p^{-1} = \frac{1}{p}$, boludeces, no!$)$:

$$\begin{array}{rrr|l}
pX^3 - X^2 + 13X & & -1 & X - p^{-1} \\ \cline{4-4}
-pX^3 + X^2 & & & pX^2 + 13 \\ \cline{1-1}
13X & & -1 & \\
-13X & & +13p^{-1} & \\ \cline{1-3}
& & (-1 + 13p^{-1}) &
\end{array}$$

Y a esto hay que pedirle que el resto sea 0, porque $\frac{1}{p}$ es raíz racional:

$$-1 + \frac{13}{p} = 0 \Leftrightarrow p = 13$$

Si p tiene que ser primo y positivo entonces $p = 13$, usando el resultado de la división:

$$\begin{array}{rcl}
f = 13X^3 - X^2 + 13X - 1 & = & 13(X - \frac{1}{13}) \cdot (X^2 + 1) \\
& = & 13(X - \frac{1}{13}) \cdot (X - i) \cdot (X + i)
\end{array}$$

Todo lindo las raíces:

$$\begin{cases} X_1 & = & \frac{1}{13} \\ X_2 & = & i \\ X_3 & = & -i \end{cases}$$

Y factorizado en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ queda.

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
\mathbb{Q}[X]: \quad f & = & 13 \cdot (X - \frac{1}{13}) \cdot (X^2 + 1) \\
\mathbb{R}[X]: \quad f & = & 13 \cdot (X - \frac{1}{13}) \cdot (X^2 + 1) \\
\mathbb{C}[X]: \quad f & = & 13 \cdot (X - \frac{1}{13}) \cdot (X - i) \cdot (X + i)
\end{array}}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

---

11. Hallar todos los $k \in \mathbb{Q}$ para los cuales el polinomio $f = X^6 + kX^3 + 25 \in \mathbb{Q}[X]$ tiene al menos una raíz compleja múltiple. Para cada uno de los valores de k hallados, factorizar f en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.

Antes de empezar este ejercicio, estaría bueno que hagas un minuto de silencio por los que rindieron este examen...

1 minuto después

Si f tiene raíces múltiples, busco raíces en su derivada, f':

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow f' = 6r^5 + 3kr^2 = 0 \Leftrightarrow 3r^2 \cdot (2r^3 + k) = 0 \Leftrightarrow k = -2r^3$$

Entonces para el valor de una raíz r, tengo lo que tiene que valer k. Como tengo raíces múltiples, meto a r y el valor de k encontrado en f:

$$f(r) = 0 \xLeftrightarrow{k=-2r^3} r^6 - 2r^6 + 25 = 0 \Leftrightarrow \boxed{r^6 = 25}$$

Ese último resultado es G_6 con módulo $\sqrt[3]{5}$:

$$r_q = \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q\pi} \quad \text{con} \quad q \in [0, 5]$$

Estos valores son las raíces de f, pero hay que ver para cuál valor de k:

$$k = -2(r_q)^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } q \text{ es par} \Rightarrow & k = -2\left(\sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q_{par}\pi}\right)^3 = -10 \\ \text{si } q \text{ es impar} \Rightarrow & k = -2\left(\sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{1}{3}q_{impar}\pi}\right)^3 = 10 \end{cases}$$

Por lo tanto hay 2 valores posibles para k:

$$k \in \{-10, 10\}$$

Hay 2 valores de k que formarán 2 polinomios distintos. Cada uno de esos polinomios tiene 3 raíces tanto de f como de f' por lo tanto las mencionadas raíces son raíces dobles de f.
Notar en el resultado de la derivada metiendo los valores de k:

$$f'_{-10}(r_{q_{par}}) = 0 \Leftrightarrow r^3 = 5 \quad \text{y} \quad f'_{10}(r_{q_{impar}}) = 0 \Leftrightarrow r^3 = -5.$$

A esta altura esas ecuaciones se resuelven solas y todas esas soluciones son la r_q de antes, *miti y miti.*

Tengo entonces que factorizar 2 polinomios f:

$$\boxed{f_{-10} = X^6 - 10X^3 + 25 \quad \text{y} \quad f_{10} = X^6 + 10X^3 + 25}$$

Esto va a ser útil:

$$\boxed{(X - z)(X - \overline{z}) \overset{\star^1}{=} X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2}$$

Factorizo f_{-10}:
El valor $k = -10$ tiene asociadas las raíces con q par:

$$\left\{\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}, \sqrt[3]{5} \cdot e^{i\frac{4}{3}\pi}\right\} = \left\{\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

Que cosa horrible esto:

$$\left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cdot \left(X - \sqrt[3]{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \overset{\star^1}{=} X^2 + \sqrt[3]{5} \cdot X + (\sqrt[3]{5})^2$$

$$\begin{aligned} f_{-10} &= X^6 - 10X^3 + 25 \\ &\overset{!}{=} (X^3-5)^2 \in \mathbb{Q}[X] \\ &\overset{!}{=} \Big((X-\sqrt[3]{5})\cdot(X^2+\sqrt[3]{5}\cdot X+(\sqrt[3]{5})^2)\Big)^2 = \Big(X-\sqrt[3]{5}\Big)^2\cdot\Big(X^2+\sqrt[3]{5}\cdot X+(\sqrt[3]{5})^2)\Big)^2 \in \mathbb{R}[X] \\ &\overset{!}{=} \Big(X-\sqrt[3]{5}\Big)^2\cdot\Big(X-\sqrt[3]{5}\big(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big)\Big)^2\cdot\Big(X-\sqrt[3]{5}\big(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big)\Big)^2 \in \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

Factorizo f_{10}:
El valor $k=10$ tiene asociadas las raíces con q impar:

$$\left\{-\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}\cdot e^{i\frac{1}{3}\pi}, \sqrt[3]{5}\cdot e^{i\frac{5}{3}\pi}\right\} = \left\{-\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}\cdot\Big(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big), \sqrt[3]{5}\cdot\Big(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\right\}.$$

Esto es igual de horrible, pero solo *hay que cambiar un par de signos a lo de antes*:

$$\left(X-\sqrt[3]{5}\cdot\Big(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\right)\cdot\left(X-\sqrt[3]{5}\cdot\Big(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\right) \overset{\star^1}{=} X^2-\sqrt[3]{5}\cdot X+(\sqrt[3]{5})^2$$

$$\begin{aligned} f_{10} &= X^6 + 10X^3 + 25 \\ &\overset{!}{=} (X^3+5)^2 \in \mathbb{Q}[X] \\ &\overset{!}{=} \Big((X+\sqrt[3]{5})\cdot(X^2-\sqrt[3]{5}\cdot X+(\sqrt[3]{5})^2)\Big)^2 = \Big(X+\sqrt[3]{5}\Big)^2\cdot\Big(X^2-\sqrt[3]{5}\cdot X+(\sqrt[3]{5})^2)\Big)^2 \in \mathbb{R}[X] \\ &\overset{!}{=} \Big(X+\sqrt[3]{5}\Big)^2\cdot\Big(X-\sqrt[3]{5}\big(\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big)\Big)^2\cdot\Big(X-\sqrt[3]{5}\big(\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big)\Big)^2 \in \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

---

12. Factorizar como producto de polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})[X]$ el polinomio

$$f(X) = X^4 + X^3 + X + 2 \in \mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})[X].$$

Busco una raíz:

$$f(i) = i^4 + i^3 + i + 2 = 1 + -i + i + 2 = 3 \overset{(3)}{\equiv} 0$$

El conjugado de i también, es raíz, por lo tanto bajo el grado del polinomio dividiendo por

$$(X-i)\cdot(X+i) = X^2+1$$

$$\begin{array}{rrrr|l} X^4 & +X^3 & & +X+2 & X^2+1 \\ \cline{5-5} -X^4 & & -X^2 & & X^2+X-1 \\ \cline{1-4} & X^3 & -X^2 & +X & \\ & -X^3 & & -X & \\ \cline{2-4} & & -X^2 & +2 & \\ & & X^2 & +1 & \\ \cline{3-4} & & & 3 & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$X^4+X^3+X+2 = (X^2+1)\cdot(X^2+X-1)+3 \overset{(3)}{\equiv} (X^2+1)\cdot(X^2+X+2)+0$$

Al buscar las raíces de $(X^2 + X + 2)$, con la resolvente:

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Raíces que no tienen número enteros, así que no van a figurar en la factorización.
Nos piden factorización en $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z})$ por lo que:

$$\boxed{f(X) = (X^2 + 1) \cdot (X^2 + X + 2)}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Nad Garraz