

Apunte único: Álgebra I - Práctica 4

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(doubleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas

- Ejercicios de la guía:

1.	6.	11.	16.	21.	26.	31.	36.
2.	7.	12.	17.	22.	27.	32.	37.
3.	8.	13.	18.	23.	28.	33.	38.
4.	9.	14.	19.	24.	29.	34.	39.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.

- Ejercicios de Parciales

 1.	 4.	 7.	 10.	 13.	 16.	 19.
 2.	 5.	 8.	 11.	 14.	 17.	 20.
 3.	 6.	 9.	 12.	 15.	 18.	

Disclaimer:

Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:

- 📺₁ Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
- 📺₂ Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
- 📺₃ ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
- 📺₄ Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
- 📺₅ Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir '*no me sale*' ≠ +. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda, no te van a salir los ejercicios más difíciles: [Sentido común](#).

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confianza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada*. Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber*. A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas:
[de Teresa que son buenísimos](#) .

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra:
[Prácticas Pandemia](#) .

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre [Just Do IT](#) .

Eh, loco, fatalista, distópico, [relajá un toque te vas a quedar \(más\) pelado...](#)  *va a salir todo bien!*

Esta Guía 4 que tenés se actualizó por
última vez:

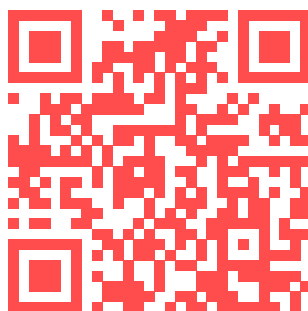
20/02/25 @ 23:43


Escaneá el QR para bajarte (quizás) una
versión más nueva:

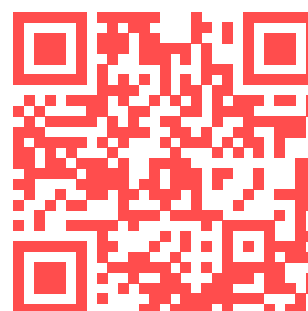
Guía 4



El resto de las guías repo en [github](#)  para descargar
las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error,
lo más fácil es por [Telegram](#) .



Notas teóricas:*Divisibilidad:*

- Definición divisibilidad y notación:

$$d \text{ divide a } a \xLeftrightarrow[\text{que decir}]{\text{es lo mismo}} a \text{ es un múltiplo entero de } d$$

$$d \mid a \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = k \cdot d$$

- Conjunto de divisores de a :

$$\mathcal{D}(a) = \{-|a|, \dots, -1, 1, \dots, |a|\}.$$

- $d \mid 0$, dado que $0 = 0 \cdot d$. Se desprende que $\mathcal{D}(0) = \{\mathbb{Z} - \{0\}\}$
- A la hora de laburar con la divisibilidad “*los signos no importan*”:

$$\begin{cases} d \mid a \iff -d \mid a \text{ (pues } a = k \cdot d \iff a = (-k) \cdot (-d)) \\ d \mid a \iff d \mid -a \text{ (pues } a = k \cdot d \iff (-a) = (-k) \cdot d) \end{cases} \xRightarrow{\text{corta}} \boxed{d \mid a \iff |d| \mid |a|}$$

- Propiedades súper útiles para justificar los cálculos en los ejercicios:

$$\begin{cases} d \mid a \text{ y } d \mid b \Rightarrow d \mid a \pm b \\ d \mid a \Rightarrow d \mid c \cdot a, \forall c \in \mathbb{Z} \\ d \mid a \xLeftrightarrow{!!} d^n \mid a^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Error recurrente: $d \mid a \cdot b \not\Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ \text{o} \\ d \mid b \end{cases}$. Por ejemplo $6 \mid 3 \cdot 4$ pero $\begin{cases} 6 \nmid 3 \\ \text{ni} \\ 6 \nmid 4 \end{cases}$

Definición congruencia:

- Definición congruencia:**

$$\begin{cases} 'a' \text{ es congruente a } 'b' \text{ módulo } 'd' \text{ si } d \mid a - b. & \text{Notación } \boxed{a \equiv b (d)} \\ a \equiv b (d) \iff d \mid a - b \end{cases}$$

- Sumar ecuaciones de congruencia *de mismo módulo*, conserva la congruencia:

$$\begin{cases} a_1 \equiv b_1 (d) \\ \vdots \\ a_n \equiv b_n (d) \end{cases} \Rightarrow a_1 + \dots + a_n \equiv b_1 + \dots + b_n (d)$$

- Multiplicar ecuaciones de congruencia *de mismo módulo*, conserva la congruencia:

$$\begin{cases} a_1 \equiv b_1 (d) \\ \vdots \\ a_n \equiv b_n (d) \end{cases} \Rightarrow a_1 \cdot \dots \cdot a_n \equiv b_1 \cdot \dots \cdot b_n (d)$$

Un caso particular con un simpático resultado:

$$n \text{ ecuaciones } \begin{cases} a \equiv b (d) \\ \vdots \\ a \equiv b (d) \end{cases} \Rightarrow \boxed{a^n \equiv b^n (d)}$$

Algoritmo de división:

- Dados $a, d \in \mathbb{Z}$ con $d \neq 0$, existen únicos q (cociente), r (resto) $\in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\begin{cases} a = q \cdot d + r, \\ \text{con } 0 \leq r < |d|. \end{cases}$$

- Notación:** $\boxed{r_d(a)}$ es el resto de dividir a entre d
- $\underbrace{0 \leq r < |d|}_{\text{cumple condición de resto}} \Rightarrow r = r_d(r)$. Un número que cumple condición de resto, es su resto.

- Así es como me gusta pensar a la congruencia. La derecha es el resto de dividir a entre d :

$$a \equiv r_d(a) \ (d).$$

- Si d divide al número a , entonces el resto de la división es 0:

$$r_d(a) = 0 \iff d \mid a \iff a \equiv 0 \ (d)$$

- El resto es único:

$$a \equiv r \ (d) \text{ con } \underbrace{0 \leq r < |d|}_{\text{cumple condición de resto}} \Rightarrow r = r_d(a)$$

$$r_1 \equiv r_2 \ (d) \text{ con } \underbrace{0 \leq r_1, r_2 < |d|}_{\text{cumple condición de resto}} \Rightarrow r_1 = r_2$$

- Dos números que son congruentes módulo d entre sí, tienen igual resto al dividirse por d :

$$a \equiv b \ (d) \iff r_d(a) = r_d(b).$$

- Propiedades útiles para los ejercicios de calcular restos:

$$r_d(a + b) = r_d(r_d(a) + r_d(b)) \quad \text{y} \quad r_d(a \cdot b) = r_d(r_d(a) \cdot r_d(b))$$

ya que si,

$$\begin{cases} a \equiv r_d(a) \ (d) \\ b \equiv r_d(b) \ (d) \end{cases} \xrightarrow[\text{ecuaciones}]{\text{sumo}} a + b \equiv r_d(a) + r_d(b) \ (d)$$

y,

$$\begin{cases} a \equiv r_d(a) \ (d) \\ b \equiv r_d(b) \ (d) \end{cases} \xrightarrow[\text{ecuaciones}]{\text{multiplico}} a \cdot b \equiv r_d(a) \cdot r_d(b) \ (d)$$

Máximo común divisor:

- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no ambos nulos. El MCD entre a y b es el mayor de los divisores común entre a y b y se nota:

$$\boxed{\text{máximo común divisor: } \text{MCD} = (a : b)}$$

- $(a : b) \in \mathbb{N}$ (pues $(a : b) \geq 1$) *siempre existe* y es *único*.
- Propiedades del $(a : b)$, con a y $b \in \mathbb{Z}$, no ambos nulos.

- ✳ Los signos no importan: $(a : b) = (\pm a : \pm b)$
- ✳ Es simétrico: $(a : b) = (b : a)$
- ✳ Entre 1 y $a \in \mathbb{Z}$ siempre $(a : 1) = 1$
- ✳ Entre 0 y a siempre $(a : 0) = |a|$, $\forall a \in \mathbb{Z} - \{0\}$
- ✳ si $b \mid a \Rightarrow (a : b) = |b|$ con $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$
- ✳ Útil para ejercicios: $(a : b) = (a : b + na)$ con $n \in \mathbb{Z}$
- ✳ Útil para ejercicios: $(a : b) = (a : r_a(b))$ con $n \in \mathbb{Z}$
- ✳ Útil para ejercicios: Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos, y sea $k \in \mathbb{N}$

$$(ka : kb) = k(a : b)$$

- *Algoritmo de Euclides*: Para encontrar el $(a : b)$ con números o expresiones feas. Hay que saber hacer esto. Fin. ¡Se usa de acá hasta el final de la materia!.
- *Combinación Entera*: Otra herramienta gloriosa que sale de hacer *Euclides*. Por ejemplo se usa cuando no se ve a ojo una solución en ecuaciones diofánticas. ¡Se usa de acá hasta el final de la materia!.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos, entonces $\exists s, t \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : b) = s \cdot a + t \cdot b$.

- ✳ Todos los divisores comunes entre a y b dividen al $(a : b)$. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos, $d \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Entonces:

$$d \mid a \quad \text{y} \quad d \mid b \iff d \mid \underbrace{(a : b)}_{s \cdot a + t \cdot b}.$$

- ✳ Sea $c \in \mathbb{Z}$ entonces $\exists s', t' \in \mathbb{Z}$ con $c = s'a + t'b \iff (a : b) \mid c$.
- ✳ Todos los números múltiplos del MCD se escriben como combinación entera de a y b .
- ✳ Si un número es una combinación entera de a y b entonces es un múltiplo del MCD.

Coprimos:

- Definición coprimos:

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, no ambos nulos, se dice que son *coprimos* si $(a : b) = 1$

$$\begin{aligned} a \perp b &\iff (a : b) = 1 \\ a \perp b &\iff \exists s, t \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 1 = s \cdot a + t \cdot b \end{aligned}$$

- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos. *coprimizar* los números es dividirlos por su máximo común divisor, para obtener un nuevo par que sea coprimo:

$$(a : b) \neq 1 \xrightarrow{\text{coprimizar}} a' = \frac{a}{(a : b)}, b' = \frac{b}{(a : b)}, \Rightarrow \boxed{(a' : b') = 1} \quad \checkmark$$

- ¡Causa de muchos errores! Sean $a, c, d \in \mathbb{Z}$ con c, d no nulos. Entonces:

$$c \mid a \quad \text{y} \quad d \mid a \quad \text{y} \quad c \perp d \iff c \cdot d \mid a$$

Al ser c y d coprimos, pienso a a como un número cuya factorización tiene a c, d y la coprimicidad hace que en la factorización aparezca $c \cdot d$. (no sé, así lo piensa mi 🍷).

- Sean $a, b, d \in \mathbb{Z}$ con $d \neq 0$. Entonces:

$$d \mid a \cdot b \quad \text{y} \quad d \perp a \Rightarrow d \mid b$$

- *Primos y Factorización:*

- Sea p primo y sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$p \mid a \cdot b \Rightarrow p \mid a \quad \text{o} \quad p \mid b$$

- Si p divide a algún producto de números, tiene que dividir a alguno de los factores \rightarrow
Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} p \mid a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \Rightarrow p \mid a_i \text{ para algún } i \text{ con } 1 \leq i \leq n. \\ p \mid a^n \Rightarrow p \mid a. \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{Z}$, p primo:

$$\begin{cases} (a : p) = 1 \iff p \nmid a \\ (a : p) = p \iff p \mid a \end{cases}$$

- Sea $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $n = \underbrace{s}_{\{-1,1\}} \cdot \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ su factorización en primos. Entonces todo divisor m positivo de n se escribe como:

$$\begin{cases} \text{Si } m \mid n \rightarrow m = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k} \text{ con } 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, \quad \forall i \ 1 \leq i \leq k \\ \text{y hay} \\ (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) = \prod_{i=1}^k \alpha_i + 1 \\ \text{divisores positivos de } n. \end{cases}$$

- Sean a y $b \in \mathbb{Z}$ no nulos, con

$$\begin{cases} a = \pm p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r} \text{ con } m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}_0 \\ b = \pm p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r} \text{ con } n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}_0 \\ \Rightarrow (a : b) = p_1^{\min\{m_1, n_1\}} \cdots p_r^{\min\{m_r, n_r\}} \\ \Rightarrow [a : b] = p_1^{\max\{m_1, n_1\}} \cdots p_r^{\max\{m_r, n_r\}} \end{cases}$$

- Sean $a, d \in \mathbb{Z}$ con $d \neq 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$d \mid a \iff d^n \mid a^n.$$

- Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ no nulos:

- * $a \perp b \iff$ no tienen primos en común.
- * $(a : b) = 1$ y $(a : c) = 1 \iff (a : bc) = 1$
- * $(a : b) = 1 \iff (a^m : b^n) = 1, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$
- * $(a^n : b^n) = (a : b)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Si $a \mid m \wedge b \mid m$, entonces $[a : b] \mid m$

- $(a : b) \cdot [a : b] = |a \cdot b|$

Ejercicios de la guía:

Divisibilidad

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

- | | |
|--|--|
| a) $a \cdot b \mid c \Rightarrow a \mid c \text{ y } b \mid c$ | f) $a \mid c \text{ y } b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$ |
| b) $4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$ | g) $a \mid b \Rightarrow a \leq b$ |
| c) $2 \mid a \cdot b \Rightarrow 2 \mid a \text{ o } 2 \mid b$ | h) $a \mid b \Rightarrow a \leq b $ |
| d) $9 \mid a \cdot b \Rightarrow 9 \mid a \text{ o } 9 \mid b$ | i) $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$ |
| e) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b \text{ o } a \mid c$ | j) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n, \forall n \in \mathbb{N}$ |

a) $a \cdot b \mid c \Rightarrow a \mid c \text{ y } b \mid c$

$$\begin{cases} c = k \cdot a \cdot b = \underbrace{h}_{k \cdot b} \cdot a \Rightarrow a \mid c \quad \checkmark \\ c = k \cdot a \cdot b = \underbrace{i}_{k \cdot a} \cdot b \Rightarrow b \mid c \quad \checkmark \end{cases}$$

b) $4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$

$$a^2 = k \cdot 4 = \underbrace{h}_{k \cdot 2} \cdot 2 \Rightarrow a^2 \mid 2 \xrightarrow[\Rightarrow a \mid c \wedge b \mid c]{\text{si } a \cdot b \mid c} a \mid 2 \quad \checkmark$$

c) $2 \mid a \cdot b \Rightarrow 2 \mid a \text{ o } 2 \mid b$

$$\text{Si } 2 \mid a \cdot b \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \text{ tiene que ser par} \\ \vee \\ b \text{ tiene que ser par} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{para que}} a \cdot b \text{ sea par. Por lo tanto si } 2 \mid a \cdot b \Rightarrow 2 \mid a \text{ o } 2 \mid b.$$

d) $9 \mid a \cdot b \Rightarrow 9 \mid a \text{ o } 9 \mid b$

Si $a = 3 \wedge b = 3$, se tiene que $9 \mid 9$, sin embargo $9 \nmid 3$

e) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b \text{ o } a \mid c$

$$12 \mid 20 + 4 \Rightarrow 12 \nmid 20 \text{ y } 12 \nmid 4$$

f) _____

🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

g) _____

🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

h) _____

🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

i) $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$

$$a \mid b + a^2 \Rightarrow b + a^2 = k \cdot a \xrightarrow{\text{acomodo}} b = (k - a) \cdot a = h \cdot a \Rightarrow a \mid b \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{decir si:}]{\text{también puedo}} \left\{ \begin{array}{l} a \mid a^2 \\ a \mid b - a^2 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{propiedad}]{\text{por}} a \mid (b - a^2) + (a^2) = b \Rightarrow a \mid b \quad \checkmark$$

j) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Pruebo por inducción.

$$p(n) : a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$$

Caso base:

$$n = 1 \Rightarrow a \mid b \Rightarrow a^1 \mid b^1 \quad \checkmark$$

$p(1)$ resulta verdadera.

Paso inductivo:

Asumo $\underbrace{p(h) : a \mid b \Rightarrow a^h \mid b^h}_{\text{hipótesis inductiva}}$ verdadera \Rightarrow quiero ver que $p(h+1) : a \mid b \Rightarrow a^{h+1} \mid b^{h+1}$

Parto de la hipótesis inductiva y voy llegar a $p(k+1)$. Si:


$$a \mid b \xRightarrow{\text{HI}} a^k \mid b^k \Leftrightarrow a^k \cdot c = b^k \xLeftrightarrow{\times b} b \cdot a^k \cdot c = b^{k+1} \xLeftrightarrow[a \cdot d = b]{a \mid b} a \cdot d \cdot a^k \cdot c = a^{k+1} \cdot (cd) = b^{k+1} \Leftrightarrow a^{k+1} \mid b^{k+1}.$$

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Este resultado es importante y se va a ver en muchos ejercicios:

$$a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n \iff b \equiv 0 \pmod{a} \Rightarrow b^n \equiv 0 \pmod{a^n} \xLeftrightarrow[0 \equiv a^n]{a^n} b^n \equiv a^n \pmod{a^n}$$

$$\boxed{a \mid b \Rightarrow b^n \equiv a^n \pmod{a^n}}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

2. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que:

a) $3n - 1 \mid n + 7$

c) $2n + 1 \mid n^2 + 5$

b) $3n - 2 \mid 5n - 8$

d) $n - 2 \mid n^3 - 8$

a) $3n - 1 \mid n + 7$

Busco eliminar la n del miembro derecho.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3n - 1 \mid n + 7 \xrightarrow[a \mid k \cdot c]{a \mid c \Rightarrow} 3n - 1 \mid 3 \cdot (n + 7) = 3n + 21 \\ \frac{a \mid b \text{ y } a \mid c}{\Rightarrow a \mid b \pm c} \rightarrow 3n - 1 \mid 3n + 21 - (3n - 1) = 22 \end{array} \right\} \rightarrow 3n - 1 \mid 22$$

$$\xrightarrow[\text{para que}]{\text{busco } n} \frac{22}{3n-1} \in \mathcal{D}(22) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 22\} \xrightarrow{\text{probando}} n \in \{1, 4\} \quad \checkmark$$

b)

c)

d) $n - 2 \mid n^3 - 8$

$$\begin{array}{l} \frac{a \mid b}{\Rightarrow a \mid k \cdot b} \rightarrow n - 2 \mid \underbrace{(n - 2) \cdot (n^2 + 2n + 4)}_{n^3 - 8} \text{ Esto va a dividir para todo } n \neq 2 \end{array}$$

3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.a) Probar que $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a \neq b \in \mathbb{Z}$ b) Probar que si n es un número natural par y $a \neq -b$, entonces $a + b \mid a^n - b^n$.c) Probar que si n es un número natural impar y $a \neq -b$, entonces $a + b \mid a^n + b^n$.a) *Inducción:**Proposición:*

$$p(n) : a - b \mid a^n - b^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad a \neq b \in \mathbb{Z}$$

Caso Base:

$$p(1) : a - b \mid a^1 - b^1,$$

 $p(1)$ es verdadera. ✓*Paso inductivo:*

Asumo que $p(k) : a - b \mid a^k - b^k$ es verdadera \Rightarrow quiero probar que $p(k+1) : a - b \mid a^{k+1} - b^{k+1}$ también lo sea.

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b \mid a^k - b^k \\ a - b \mid a^k - b^k \end{array} \right\} \xrightarrow[\times b]{\times a} \left\{ \begin{array}{l} a - b \mid a^{k+1} - ab^k \\ a - b \mid ba^k - b^{k+1} \end{array} \right\} \xRightarrow{+} \{ a - b \mid a^{k+1} - b^{k+1} \}. \quad \checkmark$$

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción $p(n)$ también lo es.

b) Sé que

$$a + b \mid a + b \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a \equiv -b \pmod{a + b}$$

Multiplicando la ecuación de congruencia por a sucesivas veces me formo:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \cdot a = a^2 \stackrel{(a+b)}{\equiv} a \cdot (-b) \stackrel{(a+b)}{\equiv} (-1)^2 b \\ \vdots \\ a^n \stackrel{(a+b)}{\equiv} (-1)^n \cdot b^n \end{array} \right. \xrightarrow{\star^1} \left\{ \begin{array}{l} a^n \equiv b^n \pmod{a+b} \\ a^n \equiv (-1)^n \cdot b^n \pmod{a+b} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{con } n \text{ par} \\ \text{con } n \text{ impar} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Con } n \text{ par:} & a^n \equiv b^n \pmod{a+b} \Rightarrow a + b \mid a^n - b^n \\ \text{Con } n \text{ impar:} & a^n \equiv -b^n \pmod{a+b} \Rightarrow a + b \mid a^n + b^n \end{array} \right.$$

 \star^1 *Inducción:*

$$p(n) : a \equiv -b \pmod{a+b} \Rightarrow a^n \equiv (-1)^n \cdot b^n \pmod{a+b} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso base:

$$p(1) : a \equiv -b (a+b) \Rightarrow a^1 \equiv (-1)^1 \cdot b^1 (a+b)$$

$p(1)$ es verdadera.

Paso inductivo:

$p(k) : a \equiv -b (a+b) \Rightarrow a^k \equiv (-1)^k \cdot b^k (a+b)$ asumo verdadera para algún $k \in \mathbb{Z}$
 \Rightarrow quiero probar que

$$p(k+1) : a \equiv -b (a+b) \Rightarrow a^{k+1} \equiv (-1)^{k+1} \cdot b^{k+1} (a+b)$$

$$\text{Partiendo de } p(k) : \left\{ \begin{array}{l} a \equiv -b (a+b) \Rightarrow a^k \equiv (-1)^k \cdot b^k (a+b) \\ \xrightarrow{\text{multiplico}} \\ a \cdot a^k = a^{k+1} \equiv (-1)^k \cdot \underbrace{a}_{\substack{(a+b) \\ \equiv -b}} \cdot b^k (a+b) \\ \xRightarrow{\text{por } a} \\ a^{k+1} \equiv (-1)^{k+1} \cdot b^{k+1} (a+b) \iff a+b \mid a^{k+1} - (-1)^{k+1} b^{k+1} \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas por principio de inducción lo es también $p(n) \forall n \in \mathbb{N}$

c) Hecho en el anterior 🙌.

4. Sea $a \in \mathbb{Z}$ impar. Probar que $2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Pruebo por inducción:

$$p(n) : 2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1, \text{ con } a \in \mathbb{Z} \text{ e impar. } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Caso base:

$$\begin{aligned} p(1) : 2^3 &= 8 \mid a^2 - 1 = (a-1) \cdot (a+1) \\ &\xrightarrow[a = 2m-1]{a \text{ es impar, si } m \in \mathbb{Z}} \\ (a-1) \cdot (a+1) &\stackrel{\star 1}{=} (2m-2) \cdot (2m) \stackrel{!}{=} 4 \cdot \underbrace{m \cdot (m-1)}_{\text{par: } 2h, h \in \mathbb{Z}} = 4 \cdot 2h = 8 * h \\ &\xrightarrow[\text{tanto}]{\text{por lo}} \\ 8 \mid 8h &= (a-1) \cdot (a+1) \text{ para algún } h \in \mathbb{Z} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Por lo tanto $p(1)$ es verdadera.

Paso inductivo:

Asumo que: $p(k) : 2^{k+2} \mid a^{2^k} - 1$, es verdadera \Rightarrow Quiero ver que $p(k+1) : 2^{k+3} \mid a^{2^{k+1}} - 1$, también lo sea.

$$\begin{aligned} 2^{k+3} \mid a^{2^{k+1}} - 1 &\stackrel{!}{\iff} 2^{k+2} \cdot 2 \mid (a^{2^k} - 1) \cdot \overbrace{(a^{2^k} + 1)}^{\text{par } !} \\ &\xleftrightarrow[\text{hipótesis inductiva}]{\text{Si } a \mid b \text{ y } c \mid d \Rightarrow ac \mid bd} \\ &2^{k+2} \cdot 2 \mid (a^{2^k} - 1) \cdot \underbrace{(a^{2^k} + 1)}_{\text{par}}. \end{aligned}$$

El ! es todo tuyo, *hints*: diferencia de cuadrados, propiedades de exponentes... 🙌

En el último paso se comprueba que $p(k+1)$ es verdadera.

Como $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción también lo será $p(n) \forall n \in \mathbb{N}$.

Dale las gracias y un poco de amor 🍷 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

🍷 Nad Garraz 🍷

5. 🤖... hay que hacerlo! 🍷

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🍷.

6.

- Probar que el producto de n enteros consecutivos es divisible por $n!$
- Probar que $\binom{2n}{n}$ es divisible por 2.

🤖... hay que hacerlo! 🍷

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🍷.

7. Proba que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $99 \mid 10^{2n} + 197$
- $9 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1}$
- $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$
- $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$

$$a) \quad 99 \mid 10^{2n} + 197 \stackrel{\text{def}}{\iff} 10^{2n} + 197 \equiv 0 \pmod{99} \rightarrow 10^{2n} + 198 \equiv 1 \pmod{99} \rightarrow 10^{2n} + \underbrace{198}_{\substack{(99) \\ \equiv 0}} \equiv 1 \pmod{99} \rightarrow 100^n \equiv$$

$$1 \pmod{99} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{que}]{\text{sé}} 100 \equiv 1 \pmod{99} \iff 100^2 \equiv \underbrace{100}_{\substack{(99) \\ \equiv 1}} \pmod{99} \rightarrow 100^2 \equiv 1 \pmod{99} \iff \dots \iff 100^n \equiv 1 \pmod{99} \end{array} \right.$$

$$\text{Se concluye que } 99 \mid 10^{2n} + 197 \iff 99 \mid \underbrace{100 - 1}_{99}$$

$$b) \quad 9 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1} \stackrel{\text{def}}{\iff} 7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1} \equiv 0 \pmod{9} \xrightarrow[\text{M.A.M}]{\text{sumo } 2 \cdot 5^{2n}} \underbrace{9 \cdot 5^{2n}}_{\substack{(9) \\ \equiv 0}} + 2 \cdot 2^{4n} \equiv 2 \cdot 5^{2n} \pmod{9}$$

$$\xrightarrow[\text{y acomodo}]{\text{simplifico}} 2^{4n} \equiv 5^{2n} \pmod{9} \rightarrow 16^n \equiv 25^n \pmod{9} \xrightarrow[\text{congruencia}]{\text{simetría}} 25^n \equiv 16^n \pmod{9} \xrightarrow{25 \equiv 16} 25 \equiv 16 \pmod{9} = 9 \equiv 0 \pmod{9}$$

$$\text{Se concluye que } 9 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1} \iff 9 \mid 9 \leftarrow \text{¿Se concluye esto...?}$$

c) 🤖... hay que hacerlo! 🍷

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 🍷.

- Hermoso ejercicio en el que sin fe en el todo poderoso Gauss sencillamente uno tira la toalla.

Sale por inducción:

Quiero ver que:

$$p(n) : 256 \mid 49^n + 208n - 1$$

O en notación de congruencia:

$$p(n) : 49^n + 208n - 1 \equiv 0 \pmod{256}$$

Caso base:

$$p(1) : 256 \mid 49^1 + 208 \cdot 1 - 1 \quad \checkmark$$

Por lo tanto $p(1)$ resulta verdadera.

Paso inductivo:

Uso la notación de congruencia de acá en adelante, porque es mucho más cómodo. Supongo que:

$$p(k) : \underbrace{49^k + 208 \cdot k - 1 \equiv 0 \pmod{256}}_{\text{hipótesis inductiva}} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

es una proposición verdadera. Entonces quiere probar que:

$$p(k+1) : 49^{k+1} + 208 \cdot (k+1) - 1 \equiv 0 \pmod{256},$$


también sea verdadera. Arranco del paso $(k+1)$ y haciendo un poco de *matemagia*:

$$\begin{aligned} 49^{k+1} + 208 \cdot (k+1) - 1 &= 49 \cdot 49^k + 208k + 208 - 1 \stackrel{(256)}{\equiv} 49 \cdot (-208k + 1) + 208k + 208 - 1 \\ &\stackrel{(256)}{\equiv} 49 \cdot (48k + 1) - 48k - 48 - 1 = 2352k + 49 - 48k - 49 \\ &\stackrel{(256)}{\equiv} 48k + 49 - 48k - 49 = 0 \quad \checkmark \\ &\quad \text{!!} \end{aligned}$$

En !! y gracias a Gauss $2352 \equiv 48 \pmod{256}$ ¿Casualidad? No sé y no me importa.

Dado que $49^{k+1} + 208 \cdot (k+1) - 1 \equiv 0 \pmod{256}$, la proposición $p(k+1)$ resultó verdadera.

Dado que $p(1), p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por principio de inducción $p(n)$ también lo es para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

Algoritmo de División:

8. Calcular el cociente y el resto de la división de a por b en los casos:

a) $a = 133, \quad b = -14.$

d) $a = b^2 - 6, \quad b \neq 0.$

b) $a = 13, \quad b = 111.$

e) $a = n^2 + 5, \quad b = n + 2 \quad (n \in \mathbb{N}).$

c) $a = 3b + 7, \quad b \neq 0.$

f) $a = n + 3, \quad b = n^2 + 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$

a) $133 : (-14) \Rightarrow 133 = (-9) \cdot (-14) + 7$

b)

c) $a = 3b + 7 \rightarrow$ me interesa: $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |b| \leq |a| \quad \checkmark \\ 0 \leq r < |b| \quad \checkmark \end{array} \right\} \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Si: } |b| > 7 \rightarrow (q, r) = (3, 7) \\ \text{Si: } |b| \leq 7 \rightarrow (q, r) = (3, 7) \end{array} \right.$$

(a, b)	$(-14, -7)$	$(-11, -6)$	$(-8, -5)$	$(-5, -4)$	$(4, -1)$...
(q, r)	$(2, 0)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$	$(2, 3)$	$(4, 0)$...

d) $a = b^2 - 6$, $b \neq 0$. 😬... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

9. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de:

a) la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18.

b) la división de a por 3.

c) la división de $4a + 1$ por 9.

d) la división de $7a^2 + 12$ por 28.

$$a) \quad r_{18}(a) = r_{18}(\underbrace{r_{18}(a)^2}_{5^2} - \underbrace{r_{18}(3)}_3 \cdot \underbrace{r_{18}(a)}_5 + \underbrace{r_{18}(11)}_{11}) = r_{18}(21) = 3$$

$$b) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \cdot q + r_3(a) \\ 6 \cdot a = 18 \cdot q + \underbrace{6 \cdot r_3(a)}_{r_{18}(6a)} \end{array} \right\} \rightarrow r_{18}(6a) = r_{18}(r_{18}(6) \cdot r_{18}(a)) = r_{18}(30) = 12$$

$$\Rightarrow 6 \cdot r_3(a) = r_{18}(6a) \rightarrow r_3(a) = 2$$

$$c) \quad r_9(4a + 1) = r_9(\underbrace{4 \cdot r_9(a) + 1}_{*1}) \rightarrow$$

$$a = 18 \cdot q + 5 = 9 \cdot \underbrace{(9 \cdot q)}_{q'} + \underbrace{5}_{r_9(a)} \xrightarrow{*1} r_9(a) = r_9(21) = 3$$

$$d) \quad r_{28}(7a^2 + 12) = r_{28}(7 \cdot r_{28}(a)^2 + 12) \xrightarrow{\text{¿qué es}} r_{28}(a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 18 \cdot q + 5 \xrightarrow[\text{para el 28}]{\text{busco algo}} \\ 14 \cdot a = \underbrace{252 \cdot q}_{28 \cdot 9 \cdot q} + 70 \xrightarrow[\text{condición resto}]{\text{corrijo según}} 28 \cdot 9 \cdot q + \underbrace{2 \cdot 28 + 14}_{70} = 28 \cdot (9 \cdot q + 2) + 14 \quad \checkmark \\ \xrightarrow[\text{tanto}]{\text{por lo}} 14a = 28 \cdot q' + 14 \Rightarrow 14 \cdot a \equiv 14 \pmod{28} \iff a \equiv 1 \pmod{28} \end{array} \right.$$

Ahora que sé que $r_{28}(a) = 1$ sale que $r_{28}(7a^2 + 12) = r_{28}(7 \cdot \underbrace{r_{28}(a)^2}_1 + 12) = r_{28}(19) = 19 \quad \checkmark$

10.

a) Si $a \equiv 22 \pmod{14}$, hallar el resto de dividir a a por 14, por 2 y por 7.

b) Si $a \equiv 13 \pmod{5}$, hallar el resto de dividir a $33a^3 + 3a^2 - 197a + 2$ por 5.

c) Hallar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división de $\sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot i!$ por 12

$$a) \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 22 (14) \rightarrow a = 14 \cdot q + \underbrace{22}_{14+8} = 14 \cdot (q+1) + 8 \xrightarrow[\text{es}]{\text{el resto}} r_{14}(a) = 8 \quad \checkmark \\ a \equiv 22 (14) \rightarrow a = \underbrace{14 \cdot q}_{2 \cdot (7 \cdot q)} + \underbrace{22}_{2 \cdot 11} = 2 \cdot (7q+11) + 0 \xrightarrow[\text{es}]{\text{el resto}} r_2(a) = 0 \quad \checkmark \\ a \equiv 22 (14) \rightarrow a = \underbrace{14 \cdot q}_{7 \cdot (2 \cdot q)} + \underbrace{22}_{1+7 \cdot 3} = 7 \cdot (2q+3) + 1 \xrightarrow[\text{es}]{\text{el resto}} r_7(a) = 1 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

b) Dos números congruentes tienen el mismo resto. $a \equiv 13 (5) \iff a \equiv 3 (5)$ $r_5(33a^3+3a^2-197a+2) = r_5(3 \cdot r_5(a)^3 + 3 \cdot r_5(a)^2 - 2 \cdot r_5(a) + 2)$
 $\xrightarrow[\text{como } a \equiv 13 (5)]{r_5(a) = 3} r_5(33a^3 + 3a^2 - 197a + 2) = 4$

c) 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

11.

- a) Probar que $a^2 \equiv -1 (5) \iff a \equiv 2 (5) \vee a \equiv 3 (5)$
 b) Probar que no existe ningún entero a tal que $a^3 \equiv -3 (7)$
 c) Probar que $a^7 \equiv a (7) \quad \forall a \in \mathbb{Z}$
 d) Probar que $7 \mid a^2 + b^2 \iff 7 \mid a \wedge 7 \mid b$.
 e) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 + 1 \Rightarrow 5 \mid a \quad \text{o} \quad 5 \mid b$. ¿Vale la implicación recíproca?

a) Me piden que pruebe una congruencia es válida solo para ciertos $a \in \mathbb{Z}$. Pensado en términos de *restos* quiero que el resto al poner los a en cuestión cumplan la congruencia.

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 \equiv -1 (5) \Leftrightarrow a^2 \equiv 4 (5) \Leftrightarrow a^2 - 4 \equiv 0 (5) \Leftrightarrow (a-2) \cdot (a+2) \equiv 0 (5) \\ \xrightarrow[\text{resto } 0]{\text{quiero}} r_5(a^2 + 1) = r_5(a^2 - 4) = r_5(r_5(a-2) \cdot r_5(a+2)) = \underbrace{r_5((r_5(a)-2) \cdot (r_5(a)+2))}_{\star^1} = 0 \\ r_5(a^2 + 1) = 0 \xLeftrightarrow^{\star^1} r_5((r_5(a)-2) \cdot (r_5(a)+2)) = 0 \left\{ \begin{array}{ll} r_5(a) = 2 & \Leftrightarrow a \equiv 2 (5) \quad \checkmark \\ r_5(a) = -2 & \Leftrightarrow a \equiv 3 (5) \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Más aún:

Para una congruencia módulo 5 habrá solo 5 posibles restos, por lo tanto se pueden ver todos los casos haciendo una *table de restos*.

a	0	1	2	3	4
$r_5(a)$	0	1	2	3	4
$r_5(a^2)$	0	1	4	4	1

\rightarrow La tabla muestra que para un dado a

$$\rightarrow r_5(a) = \left\{ \begin{array}{l} 2 \iff a \equiv 2 (5) \iff a^2 \equiv 4 (5) \iff a^2 \equiv -1 (5) \\ 3 \iff a \equiv 3 (5) \iff a^2 \equiv 4 (5) \iff a^2 \equiv -1 (5) \end{array} \right\}$$

b) 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

- c) Me piden que exista una dada congruencia para todo $a \in \mathbb{Z}$. Eso equivale a probar a que al dividir el *lado izquierdo* entre el *divisor*, el *resto* sea lo que está en el *lado derecho* de la congruencia.

$$a^7 - a \equiv 0 \pmod{7} \iff a \cdot \underbrace{(a^6 - 1)}_{(a^3-1) \cdot (a^3+1)} \equiv 0 \pmod{7} \iff a \cdot (a^3 - 1) \cdot (a^3 + 1) \equiv 0 \pmod{7} \xrightarrow[\text{sus propiedades lineales}]{\text{tabla de restos con}}$$

a	0	1	2	3	4	5	6
$r_7(a)$	0	1	2	3	4	5	6
$r_7(a^3 - 1)$	6	0	0	5	0	5	5
$r_7(a^3 + 1)$	1	2	2	0	2	0	0

→ Cómo para todos los a , alguno de los factores del resto siempre

se anula, es decir:

$$r_7(a^7 - a) = r_7(r_7(a) \cdot r_7(a^3 - 1) \cdot r_7(a^3 + 1)) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

d)

e)

12.

- (a) Probar que $2^{5k} \equiv 1 \pmod{31}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- (b) Hallar el resto de la división de 2^{51833} por 31.
- (c) Sea $k \in \mathbb{N}$. Sabiendo que $2^k \equiv 39 \pmod{31}$, hallar el resto de la división de k por 5.
- (d) Hallar el resto de la división de $43 \cdot 2^{163} + 11 \cdot 5^{221} + 61^{999}$ por 31.

- (a) Probémoslo por inducción.

Sea la proposición $P(k) : 2^{5k} \equiv 1 \pmod{31}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

- **Caso base:** $P(1)$

$$P(1) : 2^{5 \cdot 1} \equiv 1 \pmod{31} \iff 32 \equiv 1 \pmod{31} \quad \checkmark$$

Luego, $P(1)$ es verdadera.

- **Paso inductivo** $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Asumiendo verdadero $2^{5k} \equiv 1 \pmod{31}$, queremos probar que $2^{5(k+1)} \equiv 1 \pmod{31}$ es verdadero.

De la hipótesis inductiva tenemos que

$$2^{5k} \equiv 1 \pmod{31} \xrightarrow{32 \equiv 1 \pmod{31}} 2^{5k} \cdot 32 \equiv 1 \cdot 1 \pmod{31} \iff 2^{5k} \cdot 2^5 \equiv 1 \pmod{31} \iff 2^{5(k+1)} \equiv 1 \pmod{31} \quad \checkmark$$

Luego, $P(k+1)$ es verdadera.

Como $P(1)$ es verdadera y $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, por el principio de inducción, $P(k)$ es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$

- (b) Queremos hallar el resto de la división de 2^{51833} por 31, lo que es lo mismo que buscar a qué es congruente 2^{51833} módulo 31.

Observemos que $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$, con lo que dividiendo 51833 por 5, tenemos que $51833 = 5 \cdot 10366 + 3$.
Luego

$$2^{51833} \equiv 2^{5 \cdot 10366 + 3} \equiv 2^{5 \cdot 10366} \cdot 2^3 \equiv (2^5)^{10366} \cdot 8 \equiv 1^{10366} \cdot 8 \equiv 8 \pmod{31}$$

Entonces, $\boxed{r_{31}(2^{51833}) = 8}$

(c) Como $39 \equiv 8 \pmod{31}$, tenemos que $2^k \equiv 8 \pmod{31}$. Busquemos ahora que valores puede tomar k .

Si van probando valores, van a darse cuenta que el 3, 8, 13, 18, ... funcionan, lo que nos permite conjeturar que $k = 3 + 5q$, $q \in \mathbb{N}$. Entonces podemos conjeturar que

$$2^k \equiv 8 \pmod{31} \iff k = 3 + 5q, \quad q \in \mathbb{N}$$

Probemos la doble implicación.

• \Leftarrow

Reemplazando $k = 3 + 5q$, tenemos que

$$2^k \equiv 2^{3+5q} \equiv 2^3 \cdot 2^{5q} \equiv 8 \cdot 32^q \equiv 8 \cdot 1^q \equiv 8 \pmod{31} \quad \checkmark$$

• \Rightarrow

Tenemos que probar que k solo puede ser de la forma $k = 3 + 5q$. Para esto debemos verificar que si k es igual a $c + 5q$, con $c \in \{0, 1, 2, 4\}$ entonces $2^k \not\equiv 8 \pmod{31}$. Pues así estaríamos viendo todas las posibilidades. Reemplacemos entonces $k = c + 5q$:

$$2^k \equiv 2^{c+5q} \equiv 2^c \cdot 2^{5q} \equiv 2^c \cdot 32^q \equiv 2^c \cdot 1^q \equiv 2^c \pmod{31}$$

Veamos ahora los valores de c

$$c = 0 \rightarrow 2^k \equiv 2^0 \equiv 1 \not\equiv 8 \pmod{31}$$

$$c = 1 \rightarrow 2^k \equiv 2^1 \equiv 2 \not\equiv 8 \pmod{31}$$

$$c = 2 \rightarrow 2^k \equiv 2^2 \equiv 4 \not\equiv 8 \pmod{31}$$

$$c = 4 \rightarrow 2^k \equiv 2^4 \equiv 16 \not\equiv 8 \pmod{31}$$

Dado que ninguno es congruente a 8 módulo 31, llegamos a la conclusión de que los únicos valores que puede tomar k son los de la forma $k = 3 + 5q$, $q \in \mathbb{N}$.

Por último, dado que $k = 3 + 5q$, es evidente que $3 + 5q \equiv 3 \pmod{5}$. Entonces $\boxed{r_5(k) = 3}$

(d) Reduzcamos cada término módulo 31.

Es fundamental notar que $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$, que $5^3 \equiv 1 \pmod{31}$ y que $61 \equiv -1 \pmod{31}$

Entonces

$$43 \equiv 12 \pmod{31}$$

$$2^{163} \equiv 2^{5 \cdot 32 + 3} \equiv (2^5)^{32} \cdot 8 \equiv 8 \pmod{31}$$

$$5^{221} \equiv 5^{3 \cdot 73 + 2} \equiv (5^3)^{73} \cdot 25 \equiv 25 \pmod{31}$$

$$61^{999} \equiv (-1)^{999} \equiv -1 \pmod{31}$$

Juntando todo

$$43 \cdot 2^{163} + 11 \cdot 5^{221} + 61^{999} \equiv 12 \cdot 8 + 11 \cdot 25 - 1 \equiv 370 \equiv 29 \pmod{31}$$

$$\text{Luego, } \boxed{r_{31}(43 \cdot 2^{163} + 11 \cdot 5^{221} + 61^{999}) = 29}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

13. Se define por recurrencia la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = -5 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} - 6^{2n} \cdot a_n + 21^n \cdot n^{21}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n \equiv 3^n \pmod{7}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La infumabilidad de esos números me obliga a atacar a esto con el resto e inducción.

$$r_7(a_{n+2}) = r_7(r_7(a_{n+1}) - \underbrace{r_7(36)^n}_{\equiv 1 \pmod{7}} \cdot r_7(a_n) + \underbrace{r_7(21)^n}_{\equiv 0 \pmod{7}} \cdot r_7(n)^{21}) = \underbrace{r_7(a_{n+2})}_{\star^1} = r_7(a_{n+1}) - r_7(a_n) \quad \checkmark$$

$$\text{Puesto de otra forma } a_{n+2} \equiv a_{n+1} - a_n \pmod{7} \rightarrow \begin{cases} a_1 \equiv 3^1 \pmod{7} \iff a_1 \equiv 3 \pmod{7} \\ a_2 \equiv 3^2 \pmod{7} \iff a_2 \equiv 2 \pmod{7} \\ a_3 \equiv 3^3 \pmod{7} \iff a_3 \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$

Quiero probar que $a_n \equiv 3^n \pmod{7} \rightarrow$ inducción completa:

$$p(n) : a_n \equiv 3^n \pmod{7} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Casos base: } \begin{cases} p(1) : a_1 \equiv 3^1 \pmod{7} \quad \checkmark, \quad p(1) \text{ es verdadera} \\ p(2) : a_2 \equiv 3^2 \pmod{7} \equiv 2 \equiv -5 \pmod{7} \quad \checkmark, \quad p(2) \text{ es verdadera} \\ p(k) : a_k \equiv 3^k \pmod{7} \quad \checkmark, \quad p(k) \text{ la asumo verdadera} \end{cases}$$

$$\text{Paso Inductivo: } \begin{cases} \text{y} \\ p(k+1) : a_{k+1} \equiv 3^{k+1} \pmod{7} \quad \checkmark, \quad p(k+1) \text{ también asumo verdadera} \\ \Rightarrow p(k+2) : a_{k+2} \equiv 3^{k+2} \pmod{7} \text{ quiero probar que es verdadera} \end{cases}$$

$$\text{Hipótesis inductiva: } \begin{cases} a_k \equiv 3^k \pmod{7} \\ a_{k+1} \equiv 3^{k+1} \pmod{7} \\ \xrightarrow[\star^1]{\text{sumo}} a_{k+2} = a_{k+1} - a_k \equiv 3^{k+1} - 3^k = 2 \cdot 3^k \equiv 9 \cdot 3^k = 3^{k+2} \pmod{7} \quad \checkmark \\ p(k+2) \text{ resultó ser verdadera.} \end{cases}$$

Concluyendo como $p(1), p(2), p(k), p(k+1)$ y $p(k+2)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

14.

(a) Hallar el desarrollo en base 2 de

i. 1365

ii. 2800

iii. $3 \cdot 2^{12}$

iv. $13 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^{n-1}$

(b) Hallar el desarrollo en base 16 de 2800.

... hay que hacerlo! 

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

 ¡Aportá con correcciones, subiendo ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

[Ir a índice !\[\]\(eff7520f80aa06fb7298beb68337d76d_img.jpg\)](#)

15. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

16. Enunciar y demostrar criterios de divisibilidad por 8 y por 9.

• Criterio de divisibilidad por 8:

Sea $a = (r_n r_{n-1} \dots r_3 r_2 r_1 r_0)_{10}$ el desarrollo decimal de a , con $0 \leq r_k \leq 9$. Entonces

$$8 \mid a \iff 8 \mid (r_2 r_1 r_0)_{10}$$

Es decir, a es divisible por 8 si y solo si el número formado por las 3 últimas cifras de a es divisible por 8.

Demostración:

Observemos que $10^3 \equiv 0 \pmod{8}$. Probemos entonces por inducción que $P(m) : 10^m \equiv 0 \pmod{8}$, $m \geq 3$

- **Caso Base:** $P(3)$
 $10^3 \equiv 0 \pmod{8} \quad \checkmark$
- **Paso inductivo:** $P(m) \Rightarrow P(m+1)$

$$10^{m+1} \equiv 10^m \cdot 10 \stackrel{(\text{HI})}{\equiv} 0 \cdot 10 \equiv 0 \pmod{8}$$

Entonces, $P(m)$ es verdadera para todo $m \geq 3$

Luego, como $a = 10^n r_n + 10^{n-1} r_{n-1} + \dots + 10^3 r_3 + 10^2 r_2 + 10 r_1 + r_0$, tomando congruencia módulo 8 tenemos que

$$a = 10^n r_n + 10^{n-1} r_{n-1} + \dots + 10^3 r_3 + 10^2 r_2 + 10 r_1 + r_0 \equiv 0 + 0 + \dots + 0 + 10^2 r_2 + 10 r_1 + r_0 \pmod{8}$$

Luego,

$$8 \mid a \iff a \equiv 0 \pmod{8} \iff 10^2 r_2 + 10 r_1 + r_0 \equiv 0 \pmod{8} \iff (r_2 r_1 r_0)_{10} \equiv 0 \pmod{8} \iff 8 \mid (r_2 r_1 r_0)_{10}$$

• Criterio de divisibilidad por 9:

Sea $a = (r_n r_{n-1} \dots r_1 r_0)_{10}$ el desarrollo decimal de a , con $0 \leq r_k \leq 9$. Entonces

$$9 \mid a \iff 9 \mid r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0$$

Es decir, a es divisible por 9 si y solo si la suma de los dígitos de a es divisible por 9.

Demostración:

Observemos que $10 \equiv 1 \pmod{9}$, con lo que $10^m \equiv 1 \pmod{9}$, $m \in \mathbb{N}_0$

Luego, como $a = 10^n r_n + 10^{n-1} r_{n-1} + \dots + 10 r_1 + r_0$, tomando congruencia módulo 9 tenemos que

$$a = 10^n r_n + 10^{n-1} r_{n-1} + \dots + 10 r_1 + r_0 \equiv r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0 \pmod{9}$$

Luego,

$$9 \mid a \iff a \equiv 0 \pmod{9} \iff r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0 \equiv 0 \pmod{9} \iff 9 \mid r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0$$

17. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

Máximo común divisor:

18. En cada uno de los siguientes casos calcular el máximo común divisor entre a y b y escribirlo como combinación lineal entera de a y b :

- i) $a = 2532$, $b = 63$.
- ii) $a = 131$, $b = 23$.
- iii) $a = n^4 - 3$, $b = n^2 + 2$ ($n \in \mathbb{N}$).

Hacer!

19. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

20. Sea $a \in \mathbb{Z}$.

- a) Probar que $(5a + 8 : 7a + 3) = 1$ o 41. Exhibir un valor de a para el cual da 1, y verificar que efectivamente para $a = 23$ da 41.
- b) Probar que $(2a^2 + 3a : 5a + 6) = 1$ o 43. Exhibir un valor de a para el cual da 1, y verificar que efectivamente para $a = 16$ da 43
- c) Probar que $(a^2 - 3a + 2 : 3a^3 - 5a^2) = 2$ o 4, y exhibir un valor de a para cada caso.
(Para este ítem es **indispensable** mostrar que el máximo común divisor nunca puede ser 1).

i) 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

ii) 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

$$\text{iii) } (a^2 - 3a + 2 : 3a^3 - 5a^2) \xrightarrow{\text{Euclides}} (\underbrace{a^2 - 3a + 2}_{\star^1_{\text{par}}} : \underbrace{6a - 8}_{\star^1_{\text{par}}})$$

$$\xrightarrow[\text{divisor}]{\text{busco}} \left\{ d \mid \begin{array}{l} a^2 - 3a + 2 \\ 6a - 8 \end{array} \right\} \xrightarrow[\times a]{\times 6} \left\{ d \mid \begin{array}{l} 10a - 12 \\ 6a - 8 \end{array} \right\} \xrightarrow[\times 10]{\times 6} \{ d \mid 8 \} \rightarrow \mathcal{D}_+(8) = \{1, 2, 4, 8\} \star^1 = \{2, 4, 8\}$$

$$\begin{cases} a = 1 & (0 : -2) = 2 \\ a = 2 & (0 : 4) = 4 \end{cases}$$

Parecido al hecho en clase.

¿Qué onda el 8? Hice mal cuentas? Si no, cómo lo descarto?

21. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos. Probar que $7a - 3b$ y $2a - b$ son coprimos.

$$\left\{ \begin{array}{l} d \mid 7a - 3b \xrightarrow{\cdot 2} d \mid b \rightarrow d \mid b \\ d \mid 2a - b \xrightarrow{\cdot 7} d \mid 2a - b \rightarrow d \mid a \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{divisor y (a:b)}]{\text{propiedad}} d \mid (a : b) \xrightarrow[\text{coprimos}]{(a : b)} d \mid 1$$

Por lo tanto $(7a - 3b : 2a - b) = 1$ son coprimos como se quería mostrar.

22. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

23.

- a) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\frac{b+4}{a} + \frac{5}{b} \in \mathbb{Z}$.
- b) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\frac{9a}{b} + \frac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$.
- c) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\frac{2a+3}{a+1} + \frac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$.

- a) Acomodo el enunciado como:

$$\frac{b+4}{a} + \frac{5}{b} = \frac{b^2 + 4b + 5a}{ab}$$

Quiero que esa fracción sea entera, lo cual es lo mismo que decir:

$$ab \mid b^2 + 4b + 5a$$

Dado que $a \perp b$:

$$\begin{cases} a \mid b^2 + 4b + 5a \\ b \mid b^2 + 4b + 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \mid b^2 + 4b \\ b \mid 5a \end{cases} \xrightarrow[b \text{ debe dividir a } 5]{\text{sé que } b \nmid a} \begin{cases} a \mid b \cdot (b+4) \star^1 \\ b \mid 5 \end{cases}$$

Sale que:

$$b \in \{\pm 1, \pm 5\}$$

Puedo entonces probar valores de b y así ver que valor de a queda:

Si $b = 1$

$$\stackrel{\star^1}{\Rightarrow} a \mid 5 \Rightarrow (a, b) = \begin{cases} (\pm 1, 1) \\ (\pm 5, 1) \end{cases}$$

Si $b = -1$

$$\stackrel{\star^1}{\Rightarrow} a \mid -3 \Rightarrow (a, b) = \begin{cases} (\pm 1, -1) \\ (\pm 3, -1) \end{cases}$$

Si $b = 5$

$$\stackrel{\star^1}{\Rightarrow} a \mid 45 \Rightarrow (a, b) \stackrel{!!}{=} \begin{cases} (\pm 1, 5) \\ (\pm 3, 5) \\ (\pm 9, 5) \end{cases}$$

Si $b = -5$

$$\stackrel{\star^1}{\Rightarrow} a \mid 5 \Rightarrow (a, b) \stackrel{!!}{=} \{ (\pm 1, 5) \}$$

En el $!!$ se usa que $a \perp b$

- b) Acomodo el enunciado sacando denominador común:

$$\frac{9a}{b} + \frac{7a^2}{b^2} = \frac{9ab + 7a^2}{b^2}$$

Quiero que esa fracción sea entera, lo cual es lo mismo que decir:

$$b^2 \mid 9ab + 7a^2 \stackrel{!!!}{\Rightarrow} b \mid 9ab + 7a^2 \Leftrightarrow b \mid 7a^2 \stackrel{a \perp b}{\Leftrightarrow} b \mid 7$$

Sale que:

$$b \in \{\pm 1, \pm 7\}$$

Puedo entonces probar valores de b y así ver que valor de a queda:

Si $b = \pm 1$:

$$\frac{\pm 9a + 7a^2}{1} \in \mathbb{Z} \quad \forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a, b) = (a, \pm 1)$$

Si $b = 7$:

$$\frac{9a \cdot 7 + 7a^2}{49} = \frac{9a + a^2}{7}$$

Esto último va a ocurrir cuando:

$$a^2 + 9a \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow a \cdot (a + 2) \equiv 0 \pmod{7} \stackrel{a \perp 7}{\Leftrightarrow}_{b=7} a + 2 \equiv 0 \pmod{7} \Leftrightarrow a \equiv 5 \pmod{7}$$

Los pares (a, b) para satisfacer lo pedido son de la forma:

$$(a, b) = (a, 7) \quad \text{con} \quad a \equiv 5 \pmod{7}$$

Si $b = -7$: El desarrollo es igual que para el caso anterior y los pares quedan:

$$(a, b) = (a, -7) \quad \text{con} \quad a \equiv 2 \pmod{7}$$

c)

$$\frac{2a + 3}{a + 1} + \frac{a + 2}{4} = \frac{a^2 + 11a + 14}{4a + 4} \star^1$$

Para que $\frac{a^2 + 11a + 14}{4a + 4} \in \mathbb{Z}$ debe ocurrir que

$$4a + 4 \mid a^2 + 11a + 14$$

Busco eliminar la a del lado derecho:

$$\begin{cases} 4a + 4 \mid a^2 + 11a + 14 \\ 4a + 4 \mid 4a + 4 \end{cases} \xrightarrow{!} \begin{cases} 4a + 4 \mid 16 \\ 4a + 4 \mid 4a + 4 \end{cases}$$


Las cuentas del **!** te las dejo a vos.

$4a + 4$ tiene que dividir a 16, por lo tanto mis posibles valores serán $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$.

Teniendo en cuenta que $4a + 4 \in \mathbb{Z}$ y también que $a \in \mathbb{Z}$, quedan como únicos posibles valores:

$$\begin{aligned} 4(-5) + 4 &= -16 \quad \checkmark \\ 4(-2) + 4 &= -4 \quad \checkmark \end{aligned}$$

reemplazando esos valores de a en \star^1 se obtiene tiene valor $-1 \in \mathbb{Z}$.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

 ¡Aportá con correcciones, subiendo ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

[Ir a índice](#) 

24. Probar que existen infinitos primos positivos congruentes a 3 módulo 4.

Sugerencia: probar primero que si $a \in \mathbb{N}$ satisface $a \equiv 3 \pmod{4}$, entonces existe p primo con $p \equiv 3 \pmod{4}$ tal que $p \mid a$. Luego probar que si existieran sólo finitos primos congruentes a 3 módulo 4, digamos p_1, p_2, \dots, p_n , entonces $a = -1 + 4 \prod_{i=1}^n p_i$ sería mayor que 1 y no es divisible por ningún primo congruente a 3 módulo 4.

Comencemos probando la primera parte de la sugerencia:

Dado $a \in \mathbb{N}, a \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow \exists p$ primo con $p \equiv 3 \pmod{4}$ tal que $p \mid a$

Como $a \equiv 3 \pmod{4} \iff a = 4k + 3$ y dado que $a \in \mathbb{N}$, es evidente que $a > 1$. Luego sabemos que $\exists p$ primo tal que $p \mid a$. Ahora debemos ver que $p \equiv 3 \pmod{4}$. Para esto, apliquemos el TFA:

$$a = (P_1)^{n_1} \cdot (P_2)^{n_2} \cdots (P_r)^{n_r}, \quad n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$$

Notemos ahora que ninguno de los primos en la factorización de a puede ser 2, pues $a = 4k + 3 = 2(2k + 1) + 1$ es impar. Esto nos descarta que $p \equiv 0 \pmod{4}$ o que $p \equiv 2 \pmod{4}$, pues el único primo que cumple alguna es el 2. De modo que nos quedan dos opciones:

$$p \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{o} \quad p \equiv 3 \pmod{4}$$

Prestemos atención a lo siguiente. Si todos los primos en la factorización de a fueran congruentes a 1 módulo 4, esto es

$$P_1 \equiv 1 \pmod{4}, P_2 \equiv 1 \pmod{4}, \dots, P_r \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow (P_1)^{n_1} \equiv 1 \pmod{4}, (P_2)^{n_2} \equiv 1 \pmod{4}, \dots, (P_r)^{n_r} \equiv 1 \pmod{4}$$

tendríamos que

$$a = (P_1)^{n_1} \cdot (P_2)^{n_2} \cdots (P_r)^{n_r} \equiv 1 \pmod{4}$$

lo cual contradice nuestra hipótesis de que $a \equiv 3 \pmod{4}$.

Así, probamos que al menos debe existir un p en la factorización de a (esto asegura que $p \mid a$), que cumpla que $p \equiv 3 \pmod{4}$ si es que tenemos que $a \equiv 3 \pmod{4}$, que era lo que queríamos probar.

Veamos ahora la segunda parte de la sugerencia (no voy a probar eso exactamente, pero es parecido).


Supongamos que existen finitos primos congruentes a 3 módulo 4, digamos p_1, p_2, \dots, p_n . Esto nos permite definir a como $a = -1 + 4 \prod_{i=1}^n p_i$. Notemos que como $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ y $a \equiv 3 \pmod{4}$, podemos aplicar lo que probamos en la primera parte. Esto es: existe p primo con $p \equiv 3 \pmod{4}$ tal que $p \mid a$. Notemos que este p debe ser alguno de los p_i .

Luego

$$\begin{cases} p_i \mid -1 + 4 \prod_{i=1}^n p_i \\ p_i \mid 4 \prod_{i=1}^n p_i \end{cases} \xrightarrow{F_2 - F_1} p_i \mid 1$$

Lo cual es absurdo. Esta contradicción proviene de la única suposición que hicimos, que existen finitos primos congruentes a 3 módulo 4.

Luego, existen infinitos primos congruentes a 3 módulo 4, que era lo que queríamos probar.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

(b) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

- b) A simple vista, no parece haber una solución obvia. Veamos la factorización en primos para ver si encontramos una contradicción.

Por TFA, se tiene que

$$\begin{cases} a = (P_1)^{m_1} \dots (P_r)^{m_r}, & m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}_0 \\ b = (P_1)^{n_1} \dots (P_r)^{n_r}, & n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = (P_1)^{2m_1} \dots (P_r)^{2m_r} \\ b^2 = (P_1)^{2n_1} \dots (P_r)^{2n_r} \end{cases}$$

Entonces

$$7a^2 = 8b^2 \iff 7^1 \cdot (P_1)^{2m_1} \dots (P_r)^{2m_r} = 2^3 \cdot (P_1)^{2n_1} \dots (P_r)^{2n_r}$$

Del lado izquierdo de la igualdad, el 7 aparece con el exponente $2m_7 + 1$.


Del lado derecho de la igualdad, el 7 aparece con el exponente $2n_7$.

Entonces, por unicidad de la factorización, se debería tener que

$$2m_7 + 1 = 2n_7$$

Lo cual es absurdo, pues un número es impar y el otro par.

Luego, $\nexists a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos tal que $7a^2 = 8b^2$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

- 27.** Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Probar que si p es un número primo positivo entonces $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$.

Supongamos que $\sqrt[n]{p} \in \mathbb{Q}$ y lleguemos a una contradicción.

$$\sqrt[n]{p} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt[n]{p} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad b \neq 0$$

Tomemos $\frac{a}{b}$ como una fracción irreducible, es decir, con a y b coprimos.

Luego,


$$\sqrt[n]{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow b \cdot \sqrt[n]{p} = a \Rightarrow b^n \cdot p = a^n \Rightarrow p \mid a^n \xrightarrow{p \text{ primo}} p \mid a$$

Como $p \mid a$, entonces $a = p \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$. Reemplazando, tenemos que

$$b^n \cdot p = a^n \Rightarrow b^n \cdot p = (p \cdot k)^n \Rightarrow b^n \cdot p = p^n \cdot k^n \xRightarrow{!!} b^n = p^{n-1} \cdot k^n \xRightarrow{!!!} b^n = p \cdot p^{n-2} \cdot k^n \Rightarrow p \mid b^n \xrightarrow{p \text{ primo}} p \mid b$$

El paso en **!!** tiene sentido porque $n \in \mathbb{N}$ y en **!!!** porque $n \geq 2$. Esto asegura que las expresiones p^{n-1} y p^{n-2} pertenezcan \mathbb{N}_0 .

Así, obtuvimos que $p \mid a$ y $p \mid b$, lo cual contradice el hecho que a y b son coprimos. La contradicción proviene de la única suposición que hicimos, que $\sqrt[n]{p} \in \mathbb{Q}$. Luego, $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$, tal como queríamos probar.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

- 28.** Sean p y q primos positivos distintos. Probar que $p^{113} \cdot q^{201} \mid a^{378}$ si y sólo si $pq \mid a$.

Antes de empezar, notemos que como $p \neq q$ y ambos son primos, se tiene que $(p : q) = 1$


- $p^{113} \cdot q^{201} \mid a^{378} \Rightarrow pq \mid a.$

$$p^{113} \cdot q^{201} \mid a^{378} \iff a^{378} = p^{113} \cdot q^{201} \cdot k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} p \mid a^{378} \xrightarrow{p \text{ primo}} p \mid a \\ q \mid a^{378} \xrightarrow{q \text{ primo}} q \mid a \end{cases} \xrightarrow{(p:q)=1} pq \mid a \quad \checkmark$$

- $pq \mid a \Rightarrow p^{113} \cdot q^{201} \mid a^{378}$

$$pq \mid a \iff a = pq \cdot k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^{378} = p^{378} \cdot q^{378} \cdot k^{378} \iff a^{378} = p^{113} \cdot q^{201} (p^{265} \cdot q^{177} \cdot k^{378})$$

$$\xrightarrow{(p^{265} \cdot q^{177} \cdot k^{378}) \in \mathbb{Z}} p^{113} \cdot q^{201} \mid a^{378} \quad \checkmark$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

29. Determinar cuántos divisores positivos tiene 9000 , $15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5$ y $10^n \cdot 11^{n+1}$. ¿Y cuántos divisores en total?

Lo único que hay que hacer en este ejercicio es factorizar en primos cada número y utilizar la formula de cantidad de divisores (poco interesante).

- 9000


$$9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \Rightarrow \begin{cases} \#Div_+(9000) = (3+1)(2+1)(3+1) = \boxed{48} \\ \#Div(9000) = 2 \cdot 48 = \boxed{96} \end{cases}$$

- $15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5$

$$15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5 = 2^{18} \cdot 3^7 \cdot 5^4 \cdot 7^8 \Rightarrow \begin{cases} \#Div_+(15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5) = (18+1)(7+1)(4+1)(8+1) = \boxed{6840} \\ \#Div(15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5) = 2 \cdot 6840 = \boxed{13680} \end{cases}$$

- $10^n \cdot 11^{n+1}$

$$10^n \cdot 11^{n+1} = 2^n \cdot 5^n \cdot 11^{n+1} \Rightarrow \begin{cases} \#Div_+(10^n \cdot 11^{n+1}) = (n+1)(n+1)(n+1+1) = \boxed{(n+2)(n+1)^2} \\ \#Div(10^n \cdot 11^{n+1}) = \boxed{2(n+2)(n+1)^2} \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

30. Hallar la suma de los divisores positivos de $2^4 \cdot 5^{123}$ y de $10^n \cdot 11^{n+1}$.

- $2^4 \cdot 5^{123}$

Sabemos que $Div_+(2^4 \cdot 5^{123}) = \{2^i \cdot 5^j, 0 \leq i \leq 4 \text{ y } 0 \leq j \leq 123\}$

Entonces, la suma de los divisores será igual a:

$$\sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^{123} 2^i \cdot 5^j = \left(\sum_{i=0}^4 2^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{123} 5^j \right) = \left(\frac{1-2^{4+1}}{1-2} \right) \cdot \left(\frac{1-5^{123+1}}{1-5} \right) = \boxed{\frac{31}{4}(5^{124} - 1)}$$


- $10^n \cdot 11^{n+1}$

$$10^n \cdot 11^{n+1} = 2^n \cdot 5^n \cdot 11^{n+1}$$

Sabemos que $Div_+(10^n \cdot 11^{n+1}) = \{2^i \cdot 5^j \cdot 11^k, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n \text{ y } 0 \leq k \leq n+1\}$

Entonces, la suma de los divisores será igual a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n+1} 2^i \cdot 5^j \cdot 11^k &= \left(\sum_{i=0}^n 2^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n 5^j \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n+1} 11^k \right) = \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \right) \cdot \left(\frac{1-5^{n+1}}{1-5} \right) \cdot \left(\frac{1-11^{n+1+1}}{1-11} \right) = \\ &= \boxed{\frac{1}{40}(2^{n+1} - 1)(5^{n+1} - 1)(11^{n+2} - 1)} \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

31. Hallar el menor número natural n tal que $6552n$ sea un cuadrado, es decir, que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que $6552n = k^2$.

Como $k \in \mathbb{N}$ y como claramente $k \neq 1$, por TFA, se tiene que

$$k = (P_1)^{m_1} \cdot (P_2)^{m_2} \cdots (P_r)^{m_r}, m_1, m_2, \dots, m_r \in \mathbb{N} \Rightarrow k^2 = (P_1)^{2m_1} \cdot (P_2)^{2m_2} \cdots (P_r)^{2m_r}$$


Entonces

$$6552n = k^2 \iff 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot n = (P_1)^{2m_1} \cdot (P_2)^{2m_2} \cdots (P_r)^{2m_r}$$

Esto nos dice que todos los primos del lado izquierdo de la igualdad deben estar elevados a un número de la forma $2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Para lograr esto, notemos que es necesario que n contenga en su factorización un 2, un 7 y un 13 y como nos piden el menor n , esto resulta suficiente.

Luego, $n = 2 \cdot 7 \cdot 13 = \boxed{182}$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

32. Sean $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b \geq 2$. Probar que si ab es un cuadrado en \mathbb{N} y $(a : b) = 1$, entonces, tanto a como b son cuadrados en \mathbb{N} .

$$ab \text{ es un cuadrado en } \mathbb{N} \iff ab = k^2, k \in \mathbb{N}$$

Esto implica que todos los primos en la factorización de ab son de la forma $2q$, con $q \in \mathbb{N}$. Es decir

$$ab = (P_1)^{2n_1} \cdots (P_r)^{2n_r}, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$$

Luego, usando que $(a : b) = 1$, se tiene que a y b no poseen primos en común, de modo que cada primo con su respectivo exponente de ab esta en la factorización de a o de b , pero no en ambas. Entonces, podemos escribir a ambos números en su factorización correspondiente:


$$a = (Q_1)^{2m_1} \cdots (Q_t)^{2m_t}, \quad m_1, \dots, m_t \in \mathbb{N}$$

$$b = (S_1)^{2l_1} \cdots (S_c)^{2l_c}, \quad l_1, \dots, l_c \in \mathbb{N}$$

De esta manera

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} \text{ con } \begin{cases} k_1 = (Q_1)^{m_1} \cdots (Q_t)^{m_t} \\ k_2 = (S_1)^{l_1} \cdots (S_c)^{l_c} \end{cases} \text{ tal que } \begin{cases} a = (k_1)^2 \\ b = (k_2)^2 \end{cases}$$

Esto precisamente quiere decir que a y b son cuadrados en \mathbb{N} , que era lo que queríamos probar.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

33. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

- (a) $(n : 945) = 63$, $(n : 1176) = 84$ y $n \leq 2800$
- (b) $(n : 1260) = 70$ y n tiene 30 divisores positivos.

(a) Trabajemos con la primera condición

$$(n : 945) = 63 \iff (n : 3^3 \cdot 5 \cdot 7) = 3^2 \cdot 7$$

De aca tenemos que, en su factorización, n tiene un 3^2 , no tiene un 5 y tiene un 7^m , $m \geq 1$.

Veamos ahora la segunda condición

$$(n : 1176) = 84 \iff (n : 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

De aca tenemos que, en su factorización, n tiene un 2^2 , tiene un 3^k , $k \geq 1$ y tiene un 7.

Juntando todo, tenemos que

$$n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot (P_1)^{m_1} \cdots (P_r)^{m_r}, \quad m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}_0$$

Veamos ahora la tercer condición.

Si n no tiene ningún primo más, tenemos que $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252 \leq 2800$ ✓

Si n tiene un primo más, sabiendo que el 5 no puede ser, probamos con el 11, que es el que le sigue al 7. Entonces, tenemos que $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = 2772 \leq 2800$ ✓

Si agregamos otro 11, ya nos pasamos, pues $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2 = 30492$. Por otro lado, si no agregamos el 11 sino el que le sigue, el 13, tenemos que $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 = 3276$, con lo que también nos pasamos. De este modo, es evidente que con cualquier otro primo mayor a 13 también nos pasaríamos. Así, solo puede haber como máximo un 11 más.

Luego, los únicos n que cumplen son

$$n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = \boxed{252}$$

$$n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = \boxed{2772}$$

(b) Veamos la primera condición

$$(n : 1260) = 70 \iff (n : 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

De aca deducimos que, en su factorización, n tiene un 2, no tiene un 3, tiene un 5^m , $m \geq 1$ y tiene un 7^k , $k \geq 1$.

Así, tenemos que

$$n = 2^1 \cdot 5^m \cdot 7^k \cdot (P_1)^{m_1} \cdots (P_r)^{m_r}, \quad m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}_0$$

De la segunda condición tenemos que

$$\begin{aligned} \#Div_+(n) = 30 &\iff 30 = (1+1)(m+1)(k+1)(m_1+1) \cdots (m_r+1) \iff \\ 15 &= (m+1)(k+1)(m_1+1) \cdots (m_r+1) \end{aligned}$$

Notemos ahora que las únicas maneras de escribir a $15 = 3 \cdot 5$ como un producto de dos o más números es haciendo $15 \cdot 1$ o $3 \cdot 5$

Para empezar, estos nos dice que no hay más primos en la factorización de n , además del 2, 5 y 7. Luego, tenemos que

$$15 = (m+1)(k+1)$$

Como ambos factores son mayores iguales a 2 (pues k y m son mayores a 1), tenemos que la única manera que el producto de 15 es que uno sea igual a 3 y el otro a 5. Con lo que tenemos dos opciones:

$$(m+1) = 3 \quad \text{y} \quad (k+1) = 5$$


$$(m+1) = 5 \quad \text{y} \quad (k+1) = 3$$

De la primera obtenemos que $m = 2$ y que $k = 4$. Con lo que $n = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^4$. De la segunda obtenemos que $m = 4$ y que $k = 2$. Con lo que $n = 2 \cdot 5^4 \cdot 7^2$.

Luego, los únicos n que cumplen son

$$n = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^4 = \boxed{120050}$$

$$n = 2 \cdot 5^4 \cdot 7^2 = \boxed{2772}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

34. Hallar el menor número natural n tal que $(n : 3150) = 45$ y n tenga exactamente 12 divisores positivos.

Trabajemos con la primera condición:

$$(n : 3150) = 45 \iff (n : 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7) = 3^2 \cdot 5$$

Utilizando que el MCD se calcula como primos en común a la menor potencia, concluimos que n no tiene en su factorización al 2 ni al 7 y que si tiene en su factorización un 5 y un 3^i , con $i \geq 2$. Es decir:

$$n = 3^i \cdot 5 \cdot (P_1)^{m_1} \dots (P_k)^{m_k}, \quad i \geq 2 \text{ y } m_j \geq 0$$

De la segunda condición tenemos que

$$12 = 2(i+1)(m_1+1)\dots(m_k+1) \iff 6 = (i+1)(m_1+1)\dots(m_k+1)$$


Como $i \geq 2 \Rightarrow i+1 \geq 3$ y como queremos que el producto nos de 6, esto nos deja dos opciones:

- $(i+1) = 6$ y $(m_1+1)\dots(m_k+1) = 1$
- $(i+1) = 3$ y $(m_1+1)\dots(m_k+1) = 2$

De la primera tenemos que $i = 5$ y que no hay otro primo en la factorización. De modo que $n = 3^5 \cdot 5 = 1215$

De la segunda tenemos que $i = 2$ y que solo puede haber otro primo en la factorización con $m_1 = 1$. Como nos piden el menor n , elegimos el menor primo que le sigue a 5 que no sea el 7, es decir, el 11. Entonces, $n = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 495$

Luego, eligiendo el menor entre los dos, la respuesta es $n = 495$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

35.

- Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar que $(2^k + 7^k : 2^k - 7^k) = 1$.
- Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar que $(2^k + 5^{k+1} : 2^{k+1} + 5^k) = 3$ o 9 , y dar un ejemplo para cada caso.
- Caracterizar para cada $k \in \mathbb{N}$ el valor que toma $(12^k - 1 : 12^k + 1286)$.

- Sea $d = (2^k + 7^k : 2^k - 7^k) = 1$. Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} d \mid 2^k + 7^k \\ d \mid 2^k - 7^k \end{array} \right\} \begin{cases} \xrightarrow{F_1 + F_2} d \mid 2 \cdot 2^k \\ \xrightarrow{F_1 - F_2} d \mid 2 \cdot 7^k \end{cases} \Rightarrow d \mid (2 \cdot 2^k : 2 \cdot 7^k) = 2(2^k : 7^k) \stackrel{!!}{=} 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow d \in \{1, 2\}$$

En !! uso que $(2 : 7) = 1 \iff (2^k : 7^k) = 1$

Ahora nos gustaria descartar que d pueda ser 2, con lo que basta ver que 2 no divide a alguna de las expresiones. Para esto, miremos la congruencia módulo 2 de $2^k + 7^k$:

$$2^k + 7^k \equiv 0^k + 1^k \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow r_2(2^k + 7^k) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \nmid 2^k + 7^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

De aca, tenemos que $2 \nmid d$. Entonces, queda que $d = 1$, tal como queriamos probar.

- Sea $d = (2^k + 5^{k+1} : 2^{k+1} + 5^k) = 1$. Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} d \mid 2^k + 5^{k+1} \\ d \mid 2^{k+1} + 5^k \end{array} \right\} \begin{cases} \xrightarrow{2 \cdot F_1} \left\{ \begin{array}{l} d \mid 2^{k+1} + 2 \cdot 5^{k+1} \\ d \mid 2^{k+1} + 5^k \end{array} \right\} \xrightarrow{F_1 - F_2} d \mid 9 \cdot 5^k \\ \xrightarrow{5 \cdot F_2} \left\{ \begin{array}{l} d \mid 2^k + 5^{k+1} \\ d \mid 5 \cdot 2^{k+1} + 5^{k+1} \end{array} \right\} \xrightarrow{F_2 - F_1} d \mid 9 \cdot 2^k \end{cases} \Rightarrow d \mid (9 \cdot 5^k : 9 \cdot 2^k) = 9(5^k : 2^k) \stackrel{!!}{=} 9 \cdot 1 = 9$$

$$\Rightarrow d \in \{1, 3, 9\}$$

En !! uso que $(5 : 2) = 1 \iff (5^k : 2^k) = 1$

Veamos ahora que d puede ser igual a 3 o a 9:

$$\begin{cases} k = 1 \rightarrow d = (2^1 + 5^{1+1} : 2^{1+1} + 5^1) = (27 : 9) = (9 : 0) = 9 \quad \checkmark \\ k = 2 \rightarrow d = (2^2 + 5^{2+1} : 2^{2+1} + 5^2) = (129 : 33) = (33 : 30) = (30 : 3) = (3 : 0) = 3 \quad \checkmark \end{cases}$$

En estos pasos usé el algoritmo de Euclides.

Ahora tenemos que ver que d no puede ser 1, con lo que debemos verificar que ambas expresiones son siempre divisibles por 3. Para esto, miramos la congruencia módulo 3:

$$\begin{cases} 2^k + 5^{k+1} \equiv 2^k + 2^{k+1} \equiv 3 \cdot 2^k \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow r_3(2^k + 5^{k+1}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ 2^{k+1} + 5^k \equiv 2^{k+1} + 2^k \equiv 3 \cdot 2^k \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow r_3(2^{k+1} + 5^k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Entonces, tenemos que

$$3 \mid 2^k + 5^{k+1} \quad \text{y} \quad 3 \mid 2^{k+1} + 5^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Con lo que d no puede ser 1. Entonces $\boxed{d = 3 \text{ o } 9}$, tal como queríamos ver.

(c) Sea $d = (12^k - 1 : 12^k + 1286)$.

Notemos que $(12^k + 1286) - (12^k - 1) = 1287$. De modo que, haciendo Euclides, tenemos que

$$d = (12^k - 1 : 12^k + 1286) = (12^k - 1 : 1287) = (12^k - 1 : 3^2 \cdot 11 \cdot 13)$$

Miremos ahora la congruencia módulo 3, 11 y 13 de $12^k - 1$:

- mod 3

$$12^k - 1 \equiv 0^k + 2 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow r_3(12^k - 1) = 2 \Rightarrow 3 \nmid 12^k - 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Luego, $3 \nmid d$, de modo que $d \in \{11, 13, 11 \cdot 13\}$

- mod 11

$$12^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow r_{11}(12^k - 1) = 0 \Rightarrow 11 \mid 12^k - 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Luego, $11 \mid d$, de modo que $d \in \{11, 11 \cdot 13\}$

- mod 13

$$12^k - 1 \equiv (-1)^k - 1 \pmod{13}$$

Aca se abren dos opciones, dependiendo si k es par o impar.

Si k es par, tenemos que

$$(-1)^k = 1 \Rightarrow 12^k - 1 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow r_{13}(12^k - 1) = 0 \Rightarrow 13 \mid 12^k - 1$$

Luego, tenemos que $13 \mid d$, de modo que $d = 11 \cdot 13 = 143$.

Si k es impar, tenemos que

$$(-1)^k = -1 \Rightarrow 12^k - 1 \equiv 11 \pmod{13} \Rightarrow r_{13}(12^k - 1) = 11 \Rightarrow 13 \nmid 12^k - 1$$

Luego, tenemos que $13 \nmid d$, de modo que $d = 11$.

Resumiendo

$$\begin{cases} \boxed{d = 11} & \text{si } k \text{ es impar} \\ \boxed{d = 143} & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

36. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que si $(a : b) = 1$ entonces $(a^2 \cdot b^3 : a + b) = 1$.

La estrategia es suponer que $(a^2 \cdot b^3 : a + b) \neq 1$ sabiendo que $(a : b) = 1$ y llegar a una contradicción. Sea $d = (a^2 \cdot b^3 : a + b)$ con $d \neq 1$, entonces $\exists p$ primo positivo tal que $p \mid d$.

Luego

$$\begin{cases} d \mid a^2 \cdot b^3 \\ d \mid a + b \end{cases} \xrightarrow{\text{Transitividad}} \begin{cases} p \mid a^2 \cdot b^3 & \xrightarrow{p \text{ primo}} p \mid a \quad \text{o} \quad p \mid b \\ p \mid a + b \end{cases}$$

Esto nos deja dos opciones:

- Caso $p \mid a$

$$\begin{cases} p \mid a \\ p \mid a + b \end{cases} \xrightarrow{F_2 - F_1} p \mid b$$


Lo cual es absurdo, pues $p \mid a$ y $p \mid b$, pero dijimos que $(a : b) = 1$.

- Caso $p \mid b$

$$\begin{cases} p \mid b \\ p \mid a + b \end{cases} \xrightarrow{F_2 - F_1} p \mid a$$

Lo cual es absurdo, pues $p \mid a$ y $p \mid b$, pero dijimos que $(a : b) = 1$.

Sea como fuera, en ambos casos llegamos a un absurdo suponiendo que $d \neq 1$. Luego, $d = 1$ ✓

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

37. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 5$.

- Calcular los posibles valores de $(ab : 5a - 10b)$ y dar un ejemplo para cada uno de ellos.
- Para cada $k \in \mathbb{N}$, calcular $(a^{k-1}b : a^k + b^k)$.

- (a) Coprimizo: defino $5a' = a$ y $5b' = b$, con lo que $(a : b) = (5a' : 5b') = 5(a' : b') = 5$, de modo que $(a' : b') = 1$.

Reemplazo en $d = (ab : 5a - 10b) :$

$$d = (ab : 5a - 10b) = (25a'b' : 25a' - 50b') = 25(a'b' : a' - 2b')$$

Sea ahora $d' = (a'b' : a' - 2b')$. Entonces, $d = 25d'$.

Trabajemos ahora con d'

$$\left\{ \begin{array}{l} d' \mid a'b' \\ d' \mid a' - 2b' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{b' \cdot F_2} \left\{ \begin{array}{l} d' \mid a'b' \\ d' \mid a'b' - 2(b')^2 \end{array} \xrightarrow{F_1 - F_2} d' \mid 2(b')^2 \\ \xrightarrow{\frac{4 \cdot F_1}{2a' \cdot F_2}} \left\{ \begin{array}{l} d' \mid 4a'b' \\ d' \mid 2(a')^2 - 4b'a' \end{array} \xrightarrow{F_1 + F_2} d' \mid 2(a')^2 \end{array} \right. \Rightarrow d' \mid (2(b')^2 : 2(a')^2)$$

$$\Rightarrow d' \mid (2(b')^2 : 2(a')^2) = 2((b')^2 : (a')^2) \stackrel{!!}{=} 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow d' \mid 2 \Rightarrow d' \in \{1, 2\}$$

En !! uso que $(b' : a') = 1 \iff ((b')^2 : (a')^2) = 1$

Como $d' = 1$ o 2 , entonces $d = 25$ o 50 . Veamos ahora que ambos valores son posibles:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a, b) = (0, 5) \xrightarrow{(0, 5) = 5} d = (0 : -50) = 50 \quad \checkmark \\ (a, b) = (5, 15) \xrightarrow{(5, 15) = 5} d = (75 : 25 - 150) = (50 : -125) = 25 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Luego, $\boxed{d = 25 \text{ o } 50}$

- (b) Coprimizo: defino $5a' = a$ y $5b' = b$, con lo que $(a : b) = (5a' : 5b') = 5(a' : b') = 5$, de modo que $(a' : b') = 1$.

Reemplazo en $d = (a^{k-1}b : a^k + b^k) :$

$$d = (a^{k-1}b : a^k + b^k) = ((5a')^{k-1}5b' : (5a')^k + (5b')^k) = (5^k(a')^{k-1}b' : 5^k(a')^k + 5^k(b')^k) = 5^k((a')^{k-1}b' : (a')^k + (b')^k)$$

Sea $d' = ((a')^{k-1}b' : (a')^k + (b')^k)$, entonces $d = 5^k d'$

Trabajemos ahora con d'

$$\left\{ \begin{array}{l} d' \mid (a')^{k-1}b' \\ d' \mid (a')^k + (b')^k \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\frac{a'(b')^{k-1} \cdot F_1}{(a')^k \cdot F_2}} \left\{ \begin{array}{l} d' \mid (a')^k(b')^k \\ d' \mid (a')^{2k} + (b')^k(a')^k \end{array} \xrightarrow{F_2 - F_1} d' \mid (a')^{2k} \\ \xrightarrow{\frac{a'(b')^{k-1} \cdot F_1}{(b')^k \cdot F_2}} \left\{ \begin{array}{l} d' \mid (a')^k(b')^k \\ d' \mid (b')^{2k} + (b')^k(a')^k \end{array} \xrightarrow{F_2 - F_1} d' \mid (b')^{2k} \end{array} \right. \Rightarrow d' \mid ((a')^{2k} : (b')^{2k}) \stackrel{!!}{=} 1$$

$$\Rightarrow d' \mid 1 \Rightarrow d' = 1$$

En !! uso que $(a' : b') = 1 \iff ((a')^{2k} : (b')^{2k}) = 1$

Luego, como $d' = 1$, tenemos que $\boxed{d = 5^k, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}}$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

✂ Nunezca 🐼

38.

- (a) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 3$. Calcular los posibles valores de $(a^2 + 15b + 57 : 4050)$ y dar un ejemplo en cada caso.
- (b) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabiendo que $b \equiv 6 \pmod{24}$ y que $(a : b) = 13$, calcular $(5a^2 + 11b + 117 : 624)$.

- (a) Coprimizo: defino $3x = a$ y $3y = b$, con lo que $(a : b) = (3x : 3y) = 3(x : y) = 3$, de modo que $(x : y) = 1$.

Reemplazo en $d = (a^2 + 15b + 57 : 4050)$:

$$d = (a^2 + 15b + 57 : 4050) = (9x^2 + 45y + 57 : 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2) = 3(3x^2 + 15y + 19 : 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2)$$

Sea ahora $d' = (3x^2 + 15y + 19 : 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2)$. Entonces, $d = 3d'$.

Sabiendo todo esto, tenemos que

$$d' \mid 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \Rightarrow d' \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 27, 30, 45, 50, 54, 75, 90, 135, 150, 225, 270, 450, 675, 1350\}$$

Miremos ahora la congruencia de $3x^2 + 15y + 19$ módulo 3 y 5:

- mod 5

Notemos que $3x^2 + 15y + 19 \equiv 3x^2 + 4 \pmod{5}$. Entonces, veo la tabla de restos de $3x^2 + 4$.

$r_5(x)$	0	1	2	3	4
$r_5(3x^2 + 4)$	4	2	1	1	2

De aca tenemos que $5 \nmid 3x^2 + 15y + 19 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$. Luego, $5 \nmid d'$. Con lo que

$$d' \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$$

- mod 3

Acá no hace falta ver la tabla de restos, pues notemos que $3x^2 + 15y + 19 \equiv 1 \pmod{3}$. Entonces $3 \nmid 3x^2 + 15y + 19 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$. Luego, $3 \nmid d'$. Con lo que

$$d' \in \{1, 2\}$$

Como $d' = 1$ o 2 , entonces, $d = 3$ o 6 . Veamos ahora ejemplos de que cada uno es posible:

$$\begin{cases} (a, b) = (3, 3) \xrightarrow{(3, 3) = 3} d = (111 : 4050) = (111 : 54) = (54 : 3) = (3 : 0) = 3 & \checkmark \\ (a, b) = (6, 3) \xrightarrow{(6, 3) = 3} d = (138 : 4050) = (138 : 48) = (48 : 42) = (42 : 6) = (6 : 0) = 6 & \checkmark \end{cases}$$

Luego, $\boxed{d = 3 \text{ o } 6}$.

- (b) Coprimizo: defino $13x = a$ y $13y = b$, con lo que $(a : b) = (13x : 13y) = 13(x : y) = 13$, de modo que $(x : y) = 1$.

Reemplazo en $d = (5a^2 + 11b + 117 : 624)$:

$$d = (5a^2 + 11b + 117 : 624) = (5 \cdot 13^2 \cdot x^2 + 143y + 117 : 2^4 \cdot 3 \cdot 13) = 13(65x^2 + 11y + 9 : 2^4 \cdot 3)$$

Sea ahora $d' = (65x^2 + 11y + 9 : 2^4 \cdot 3)$. Entonces, $d = 13d'$.

Sabiendo todo esto, tenemos que

$$d' \mid 2^4 \cdot 3 \Rightarrow d' \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

Antes de mirar las congruencias, veamos la condición que dice que $b \equiv 6 \pmod{24}$. De esta obtenemos lo siguiente

$$b \equiv 6 \pmod{24} \Rightarrow \begin{cases} b \equiv 0 \pmod{2} \\ b \equiv 0 \pmod{3} \\ b \equiv 2 \pmod{4} \\ b \equiv 6 \pmod{8} \end{cases}$$

Para obtener condiciones sobre y , usamos $b = 13y$. Entonces

$$\begin{cases} b \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow 13y \equiv 0 \pmod{2} \xrightarrow{13 \equiv 1 \pmod{2}} y \equiv 0 \pmod{2} \\ b \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 13y \equiv 0 \pmod{3} \xrightarrow{13 \equiv 1 \pmod{3}} y \equiv 0 \pmod{3} \\ b \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 13y \equiv 2 \pmod{4} \xrightarrow{13 \equiv 1 \pmod{4}} y \equiv 2 \pmod{4} \\ b \equiv 6 \pmod{8} \Rightarrow 13y \equiv 6 \pmod{8} \xrightarrow{5 \equiv 5 \pmod{8}} 65y \equiv 30 \pmod{8} \xrightarrow{65 \equiv 1 \pmod{8}} y \equiv 6 \pmod{8} \end{cases}$$

Miremos ahora las congruencias con la expresión $65x^2 + 11y + 9$.

- mod 3

Usando que $y \equiv 0 \pmod{3}$, tenemos que $65x^2 + 11y + 9 \equiv 2x^2 \pmod{3}$.

Miremos la tabla de restos con $2x^2$

$r_3(x)$	0	1	2
$r_3(2x^2)$	0	2	2

Notemos que el resto es 0 si y solo $x \equiv 0 \pmod{3}$, pero esto no puede ser, pues tendríamos que $3 \mid x$ y que $3 \mid y$ y no se cumpliría que $(x : y) = 1$. Luego, $3 \nmid 65x^2 + 11y + 9$, con lo que $3 \nmid d'$. Con lo que

$$d' \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

- mod 8

Usando que $y \equiv 6 \pmod{8}$, tenemos que $65x^2 + 11y + 9 \equiv x^2 + 3 \pmod{8}$.

Miremos la tabla de restos con $x^2 + 3$

$r_8(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$r_8(x^2 + 3)$	3	4	7	4	3	4	7	4

De aca tenemos que $8 \nmid 65x^2 + 11y + 9$. Luego, $8 \nmid d'$. Con lo que

$$d' \in \{1, 2, 4\}$$

- mod 2

Usando que $y \equiv 0 \pmod{2}$, tenemos que $65x^2 + 11y + 9 \equiv x^2 + 1 \pmod{2}$.

Miremos la tabla de restos con $x^2 + 1$

$r_2(x)$	0	1
$r_2(x^2 + 1)$	1	0

De aca tenemos que el resto es 0 si y solo si $x \equiv 1 \pmod{2}$. Notemos que en realidad esta es la única opción, pues no puede ser que $x \equiv 0 \pmod{2}$, pues tendríamos que $(x : y) \neq 1$. Luego $2 \mid 65x^2 + 11y + 9$, con lo que $2 \mid d'$. Así tenemos

$$d' \in \{2, 4\}$$

- mod 4


Usando que $y \equiv 2 \pmod{4}$, tenemos que $65x^2 + 11y + 9 \equiv x^2 + 3 \pmod{4}$.

Como del caso anterior obtuvimos que x debe ser impar, basta ver la congruencia módulo 1 y 3:

$r_4(x)$	1	3
$r_4(x^2 + 3)$	0	0

Como en ambos casos el resto es 0, tenemos que $4 \mid 65x^2 + 11y + 9$, de modo que $4 \mid d'$. Así, llegamos a que el único valor que puede tomar d' es 4.

Finalmente, tenemos que $d = 13 \cdot 4 = \boxed{52}$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

39. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

(a) $[n : 130] = 260$.

(b) $[n : 420] = 7560$.

(a)

$$[n : 130] = 260 \iff [n : 2 \cdot 5 \cdot 13] = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$$

Como el mínimo común múltiplo se calcula con los primos a la máxima potencia, tenemos que n tiene un 2^2 y luego tenemos que puede tener al 5 y al 13, a ambos o a ninguno, pues el 5 y el 13 ya están en la factorización del 130.

Entonces, los n que cumplen son:

$$\begin{aligned} n &= 2^2 = \boxed{4} \\ n &= 2^2 \cdot 5 = \boxed{20} \\ n &= 2^2 \cdot 13 = \boxed{52} \\ n &= 2^2 \cdot 5 \cdot 13 = \boxed{260} \end{aligned}$$


(b)

$$[n : 420] = 7560 \iff [n : 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

Como el mínimo común múltiplo se calcula con los primos a la máxima potencia, tenemos que n tiene un 2^3 , un 3^3 y luego tenemos que puede tener al 5 y al 7, a ambos o a ninguno, pues el 5 y el 7 ya están en la factorización del 420.

Entonces, los n que cumplen son:

$$\begin{aligned} n &= 2^3 \cdot 3^3 = \boxed{216} \\ n &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = \boxed{1080} \\ n &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 = \boxed{1512} \\ n &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = \boxed{7560} \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

40. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{N}$ tales que

(a) $(a : b) = 10$ y $[a : b] = 1500$.

(b) $3 \mid a$, $(a : b) = 20$ y $[a : b] = 9000$.

(a) Veamos la primera condición

$$(a : b) = 10 \iff (a : b) = 2 \cdot 5$$

De aca tenemos que tanto a y b poseen en su factorización, como mínimo, un 2 y un 5.

Veamos la segunda condición

$$[a : b] = 1500 \iff [a : b] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$$

De aca tenemos que alguno entre a y b tiene un 2^2 , pero nos los dos a la vez, pues en el MCD aparece un 2. Por la misma razón, alguno tiene un 3, pero no los dos y alguno tiene un 5^3 , pero no los dos.

Resumiendo, tenemos que a y b tienen un 2 y un 5 siempre y debemos repartir un 2 , un 3 y un 5^2 para formar todas las combinaciones posibles. Así, todos los a y b son

$$(a, b) = (2^2 \cdot 3 \cdot 5^3, 2 \cdot 5)$$

$$(a, b) = (2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 5^3)$$

$$(a, b) = (2^2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5^3)$$

$$(a, b) = (2^2 \cdot 5^3, 2 \cdot 3 \cdot 5)$$

$$(a, b) = (2 \cdot 5, 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3)$$

$$(a, b) = (2 \cdot 5^3, 2^2 \cdot 3 \cdot 5)$$

$$(a, b) = (2 \cdot 3 \cdot 5^3, 2^2 \cdot 5)$$

$$(a, b) = (2 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 5^3)$$

(b) Veamos la segunda condición

$$(a : b) = 20 \iff (a : b) = 2^2 \cdot 5$$

De aca tenemos que tanto a y b poseen en su factorización, como mínimo, un 2^2 y un 5.

Veamos la tercera condición

$$[a : b] = 9000 \iff [a : b] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$$

De aca tenemos que alguno entre a y b tiene un 2^3 , pero nos los dos a la vez, pues en el MCD aparece un 2^2 . Por la misma razón, alguno tiene un 5^3 , pero no los dos.

En el caso del 3^2 , como tenemos la primera condición que nos dice que $3 \mid a$, el 3^2 debe estar en la factorización de a si o si.


Resumiendo, tenemos que a tiene un 2^2 , un 3^2 y un 5 , mientras b posee un 2^2 y un 5 . Ahora solo queda repartir un 2 y un 5^2 para formar todas las combinaciones posibles. Así, todos los a y b son



$$(a, b) = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3, 2^2 \cdot 5)$$

$$(a, b) = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^3 \cdot 5^3)$$

$$(a, b) = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 5^3)$$

$$(a, b) = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3, 2^3 \cdot 5)$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nunezca 

Ejercicios de parciales:

 1. 4400 ¿Cuántos divisores distintos tiene? ¿Cuánto vale la suma de sus divisores?

Factorizo el número a estudiar:

$$4400 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 11$$

Quiero encontrar los divisores m de 4400, por lo tanto:

$$m \mid 4400 \Leftrightarrow m = \pm 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 11^\gamma \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 4 \\ 0 \leq \beta \leq 2 \\ 0 \leq \gamma \leq 1 \end{cases}$$


Acá un poco de teoría sobre esto. Hay entonces un total de $(4+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 30$ divisores positivos y 60 enteros.

Busco ahora la suma de esos divisores:

$$\sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^1 2^i \cdot 5^j \cdot 11^k \stackrel{!}{=} \left(\sum_{i=0}^4 2^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^2 5^j \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^1 11^k \right) \stackrel{!!}{=} \frac{2^{4+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^{2+1} - 1}{5 - 1} \cdot \frac{11^{1+1} - 1}{11 - 1} = 31 \cdot 31 \cdot 12 = 11532.$$

Donde se separaran las sumatorias, porque los factores son independientes y luego se usó la fórmula geométrica.

Concluyendo hay un total de 60 divisores distintos, cuya suma es 11532.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 Tobia Loni 

 2. Hallar el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que:

- i) $(n : 2528) = 316$
- ii) n tiene exactamente 48 divisores positivos
- iii) $27 \nmid n$

Analizo los números:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{factorizo}]{2528} 2528 = 2^5 \cdot 79 \quad \checkmark \\ \xrightarrow[\text{factorizo}]{316} 316 = 2^2 \cdot 79 \quad \checkmark \\ \xrightarrow[\text{reescribo}]{\text{condición}} (n : 2^5 \cdot 79) = 2^2 \cdot 79 \end{array} \right. \quad \xrightarrow[\text{encontrar}]{\text{quiero}} n = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^{\alpha_7} \dots 79^{\alpha_{79}} \dots$$

$$\xrightarrow{\text{como}} (n : 2^5 \cdot 79) = 2^2 \cdot 79 \xrightarrow[\text{que}]{\text{tengo}} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 2, \\ \alpha_{79} \geq 1, \\ \xrightarrow[\text{que}]{\text{notar}} \alpha_3 < 3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dado que } 2^2 \cdot 79 \mid n. \text{ busco el menor } n!. \\ \text{Al igual que antes.} \\ \text{si no } 3^3 = 27 \mid n \end{array}$$

La estrategia sigue con el primo más chico que haya:

$$\left\{ \begin{array}{l} 48 = \underbrace{(\alpha_2 + 1)}_{2+1} \cdot (\alpha_3 + 1) \cdots \\ 48 = 3 \cdot (\alpha_3 + 1) \cdots \\ 16 = (\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_5 + 1) \cdot (\alpha_7 + 1) \cdots \underbrace{(\alpha_{79} + 1)}_{=2 \text{ quiero el menor}} \cdots \\ 8 = (\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_5 + 1) \cdot (\alpha_7 + 1) \cdots \\ 8 = \underbrace{(\alpha_3 + 1)}_{=2} \cdot \underbrace{(\alpha_5 + 1)}_{=2} \cdot \underbrace{(\alpha_7 + 1)}_{=2} \cdot 1 \cdots 1 \end{array} \right.$$

El n que cumple lo pedido sería $n = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 79^1$

3. Sabiendo que $(a : b) = 5$. Probar que $(3ab : a^2 + b^2) = 25$

Arranco *comprimizando*:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 5c \\ b = 5d \end{array} \right. \Rightarrow (3ab : a^2 + b^2) = 25 \xrightarrow[\text{!}]{\text{coprimizar}} (3cd : c^2 + d^2) = 1$$

Esto último nos dice que las expresiones $3cd$ y $c^2 + d^2$ son coprimas entre sí, en otras palabras, que *no hay ningún p primo* que divida ambas expresiones a la vez.

Pruebo por absurdo que no existe p primo que divida a ambas expresiones, es decir que no existe un p , tal que $(3cd : c^2 + d^2) = p$. Supongo que $\exists p$ primo tal que:

$$p \mid 3 \cdot c \cdot d \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p \mid 3 \quad \star^1 \\ \text{o} \\ p \mid c \quad \star^2 \\ \text{o} \\ p \mid d \quad \star^3 \end{array} \right.$$

Si ocurre que $p \mid 3 \Leftrightarrow p = 3$. Quiero entonces ver si $3 \mid c^2 + d^2 \Leftrightarrow c^2 + d^2 \stackrel{(3)}{\equiv} 0$. Hago una tabla para estudiar esa última ecuación:

$r_3(c)$	0	1	2
$r_3(d)$	0	1	2
$r_3(c^2 + d^2)$	0	2	2

De la tabla concluimos que para que $c^2 + d^2 \stackrel{(3)}{\equiv} 0$ debe ocurrir que: $c \stackrel{(3)}{\equiv} 0$ y también que $d \stackrel{(3)}{\equiv} 0$, es decir que tanto c como d sean múltiplos de 3. Esto es una contradicción, ya que *no puede* ocurrir porque $(c : d) = 1$. Por lo tanto no puede ser que $\star^1 p \mid 3$

Si ocurre ahora que $\star^2 p \mid c$, estudio a ver si también $p \mid c^2 + d^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \mid c \\ p \mid c^2 + d^2 \end{array} \right. \xrightarrow{F_2 - c \cdot F_1 \rightarrow F_2} \left\{ \begin{array}{l} p \mid c \\ p \mid d^2 \end{array} \right. \xrightarrow[\text{primo}]{p} p \mid d$$

Entonces si $p \mid c$ y también $p \mid c^2 + d^2$ debe ocurrir que $p \mid d$. Nuevamente contradicción ya que *no puede ocurrir* debido a que $(c : d) = 1$.

El caso \star^3 es lo mismo que el caso \star^2 .

Se concluye entonces que $(3cd : c^2 + d^2) = 1$ con $(c : d) = 1$. Así probando que $(3ab : a^2 + b^2) = 25$ con

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 5c \\ b = 5d \end{array} \right.$$

🔥4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $81 \mid (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{2024}$ si y solo si $3 \mid n$.

⇒)

$$\begin{aligned} 81 \mid (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{2024} &\stackrel{!!!}{\Rightarrow} 3 \mid (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{506} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \\ &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{2024} \equiv 0 \pmod{3} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (n^2)^{2024} \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow n^{4048} \equiv 0 \pmod{3} \stackrel{!!}{\Rightarrow} n \equiv 0 \pmod{3} \\ &\boxed{81 \mid (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{2024} \Rightarrow 3 \mid n} \end{aligned}$$

En el !!! uso esto $p^n \mid a^n \Leftrightarrow p \mid a$. En ! son cuentas de congruencia. Y en !! uso esto, $p \mid a^n \Rightarrow p \mid a$.

⇐)

$$\begin{aligned} 3 \mid n &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} n \equiv 0 \pmod{3} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} n^2 \equiv 0 \pmod{3} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} 16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7 \equiv 0 \pmod{3} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \\ &\stackrel{!}{\Leftrightarrow} (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^4 \equiv 0 \pmod{3^4} \stackrel{!}{\Rightarrow} (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{2024} \equiv 0 \pmod{3^4} \\ &\boxed{3 \mid n \Rightarrow 81 \mid (16n^2 + 8^{2n} - 15n - 7)^{2024}} \end{aligned}$$

En el primero y último ! uso que $n \equiv 0 \pmod{d} \Rightarrow n^m \equiv 0 \pmod{d}$ y en los otros la mismas cosas que antes...
ponele

🔥5. Determinar los posibles valores de $d = (a^2 - 2a - 5 : a - 1)$ para $a \in \mathbb{Z}$. Exhibir un valor de a correspondiente a cada uno de los valores de d hallados.

Parecido a cosas que ya se hicieron en otros ejercicios. Simplificamos si se puede con Euclides y después con tabla de restos filtramos los máximos común divisores que quedaron.

Euclides con División de polinomios

$$\begin{array}{r|l} X^2 - 2X - 5 & X - 1 \\ -X^2 + X & X - 1 \\ \hline -X - 5 & \\ X - 1 & \\ \hline -6 & \end{array}$$

Que en el resto quede un número es una excelente noticia, podemos reescribir al mcd:

$$d = (a^2 - 2a - 5 : a - 1) = (a - 1 : -6)$$

Con ese resultado y dado que $d \mid a - 1$ y también $d \mid 6$:

$$d \in \{1, 2, 3, 6\}$$

Tabla de restos para ver para que valores de a se divide la expresión $a - 1$

$r_2(a)$	0	1				
$r_2(a - 1)$	1	0				

$r_3(a)$	0	1	2		
$r_3(a - 1)$	2	0	1		

$r_6(a)$	0	1	2	3	4	5
$r_6(a - 1)$	5	0	1	2	3	4

Ahora hay que elegir un valor a de forma tal que d sea un valor que cumpla con los resultados.

Hay que tener cuidado, porque los conjuntos de a que salen de la tabla de restos no son disjuntos.

Entonces los a que cumplen $a \equiv 4 \text{ (9)}$, son candidatos para obtener d .

Tabla de restos para $d = 3$:

$r_3(a)$	0	1	2
$r_3(-a + 4)$	2	0	2

Entonces los a que cumplen $a \equiv 1 \text{ (3)}$, también son candidatos para obtener d .

Estos resultados deben cumplir la condición $\star^1 a \equiv 7 \text{ (9)}$ como se pide en el enunciado, lo cual no es compatible con el resultado de la tabla de r_9 , pero sí con la tabla r_3 . Notar que: $a = 9k + 7 \stackrel{(3)}{\equiv} 1$.

Finalmente el MCD con $a \in \mathbb{Z}$ que cumplan que $32a \equiv 17 \text{ (9)}$

$$(a^3 + 4a + 1 : a^2 + 2) = 3 \quad \checkmark$$

8. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ con $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$

a) Probar que $a_{n+6} = a_n$

b) Calcular $\sum_{k=0}^{255} a_k$

(a) Por inducción:

$$p(n) : a_{n+6} = a_n \quad \forall n \geq \mathbb{N}_0$$

Primero notar que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2\star^1 \\ a_3 \stackrel{\text{def}}{=} -1 \\ a_4 \stackrel{\text{def}}{=} -3 \\ a_5 \stackrel{\text{def}}{=} -2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_6 \stackrel{\text{def}}{=} 1 \\ a_7 \stackrel{\text{def}}{=} 3 \\ a_8 \stackrel{\text{def}}{=} 2\star^1 \\ a_9 \stackrel{\text{def}}{=} -1 \\ a_{10} \stackrel{\text{def}}{=} -3 \\ a_{11} \stackrel{\text{def}}{=} -2 \end{array} \right\}$$

Se ve que tiene un período de 6 elementos.

$$\text{Caso Base: } p(2) : a_8 \stackrel{?}{=} a_2 \quad \checkmark$$

Paso inductivo: Asumo que

$$p(k) : \underbrace{a_{k+6} = a_k \text{ para algún } k \geq \mathbb{N}_{\geq 2}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

entonces quiero probar que,

$$p(k+1) : a_{k+1+6} = a_{k+1}$$

también sea verdadera.

Parto desde $p(k+1)$

$$a_{k+7} \stackrel{\text{def}}{=} a_{k+6} - a_{k+5} \stackrel{\text{HI}}{=} a_k - a_{k+5} \stackrel{\text{def}}{=} a_k - (a_k + a_{k+4}) = -a_{k+4} \Rightarrow a_{k+7} = -a_{k+4} \quad \checkmark$$

Ahora uso la definición de manera sucesiva:

$$a_{k+7} = -a_{k+4} \stackrel{\text{def}}{=} -(a_{k+3} - a_{k+2}) \stackrel{\text{def}}{=} -(a_{k+2} - a_{k+1} - a_{k+2}) = a_{k+1} \Rightarrow a_{k+7} = a_{k+1} \quad \checkmark$$

Como $p(2), p(3), p(4), p(5), p(k)$ y $p(k+1)$ son verdaderas por el principio de inducción $p(n)$ también es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$


$$(b) \sum_{k=0}^{255} a_k = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}_{=0} + \underbrace{a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}}_{=0} + \cdots + a_{252} + a_{253} + a_{254} + a_{255}$$

En la sumatoria hay **256 términos**. $256 = 42 \cdot 6 + 4$ por lo tanto van a haber 42 bloques que dan 0 y sobreviven los últimos 4 términos.

$$\sum_{k=0}^{255} a_k = \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{42 \text{ ceros}} + a_{252} + a_{253} + a_{254} + a_{255} = \cancel{a_{252}} + a_{253} +$$

$$a_{254} + \cancel{a_{255}} = a_{253} + a_{254} = 5$$

$$\text{Donde usé que: } a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \bmod 6 = 0 \\ 3 & \text{si } n \bmod 6 = 1 \\ 2 & \text{si } n \bmod 6 = 2 \\ -1 & \text{si } n \bmod 6 = 3 \\ -3 & \text{si } n \bmod 6 = 4 \\ -2 & \text{si } n \bmod 6 = 5 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{255} a_k = 5} \quad \checkmark$$

 **9.** Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ que cumplen que

$$\frac{2a-1}{5} - \frac{a-1}{2a-3} \in \mathbb{Z}.$$

Busco una fracción. Para que esa fracción *en* \mathbb{Z} es necesario que el denominador divida al numerador. Fin.

$$\frac{2a-1}{5} - \frac{a-1}{2a-3} = \frac{4a^2 - 13a + 8}{10a - 15} \quad \checkmark$$

$$\star^1 \left\{ \begin{array}{l} 10a - 15 \mid 4a^2 - 13a + 8 \\ 10a - 15 \mid 10a - 15 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{varias}]{\text{operaciones}} \left\{ \begin{array}{l} 10a - 15 \mid -25\star^2 \\ 10a - 15 \mid 10a - 15 \end{array} \right\}.$$

Para que ocurra \star^1 , debe ocurrir \star^2 .

$$10a - 15 \mid -25 \iff 10a - 25 \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 25\} \star^3 \text{ para algún } a \in \mathbb{Z}. \quad \checkmark$$

De paso observo que $|10a - 25| \leq 25$. Busco a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Caso: } d = 10a - 15 = 1 & \iff a = \frac{8}{5} \quad \text{☠} \\ \text{Caso: } d = 10a - 15 = -1 & \iff a = \frac{8}{5} \quad \text{☠} \\ \text{Caso: } d = 10a - 15 = 5 & \iff a = 2 \quad \checkmark \\ \text{Caso: } d = 10a - 15 = -5 & \iff a = 1 \quad \checkmark \\ \text{Caso: } d = 10a - 15 = 25 & \iff a = 4 \quad \checkmark \\ \text{Caso: } d = 10a - 15 = -25 & \iff a = -1 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Los valores de $a \in \mathbb{Z}$ que cumplen \star^2 son $\{-1, 1, 2, 4\}$. Voy a evaluar y así encontrar para cual de ellos se cumple \star^1 , es decir que el numerador sea un múltiplo del denominador para el valor de a usado.

$$\begin{array}{llll} d = 5 & a = 2 & \Rightarrow 4 \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 + 8 = -2 & \rightarrow 5 \nmid -2 \quad \text{☠} \\ d = -5 & a = 1 & \Rightarrow 4 \cdot 1^2 - 13 \cdot 1 + 8 = 1 & \rightarrow -5 \nmid 1 \quad \text{☠} \\ d = 25 & a = 4 & \Rightarrow 4 \cdot 4^2 - 13 \cdot 4 + 8 = 4 & \rightarrow 25 \nmid 4 \quad \text{☠} \\ d = -25 & a = -1 & \Rightarrow 4 \cdot (-1)^2 - 13 \cdot (-1) + 8 = 25 & \rightarrow -25 \mid 25 \quad \checkmark \end{array}$$

El único valor de $a \in \mathbb{Z}$ que cumple lo pedido es $\boxed{a = -1}$

Notas extras sobre el ejercicio:

Para $a = -1$ se obtiene $\frac{2a-1}{5} - \frac{a-1}{2a-3} = -1$. Más aún, si hubiese encarado el ejercicio con tablas de restos para ver si lo de arriba es divisible por los divisores en \star^3 , calcularía:

$$r_5(4a^2 - 13a + 8) \quad \text{y} \quad r_{25}(4a^2 - 13a + 8)$$

$$r_5(4a^2 - 13a + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 3 \pmod{5} \\ a \equiv 4 \equiv -1 \pmod{5} \end{cases} \quad \text{y} \quad r_{25}(4a^2 - 13a + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 23 \pmod{25} \\ a \equiv 24 \equiv -1 \pmod{25} \end{cases}$$

Se puede ver también así que el único valor de $a \in \mathbb{Z}$, que cumple \star^1 es $a = -1$

 **10.** Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión dada por recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 30, \\ a_2 = 16, \\ a_{n+2} = 24a_{n+1} + 65a_n + 96n^4 \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Probar que $a_n \equiv 3^n - 5^n \pmod{32}$, $\forall n \geq 1$.

Ejercicio intimidante a primera vista. Acomodemos un poco el enunciado así hacemos inducción.

Estoy buscando el módulo 32, a_{n+2} queda más amigable: $\star^1 a_{n+2} \stackrel{(32)}{\equiv} 24a_{n+1} + a_n \quad \checkmark$

Inducción:

$$p(n) : a_n \equiv 3^n - 5^n \pmod{32} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Casos base:

$$\begin{cases} p(1) : a_1 \equiv 3 - 5 \pmod{32} & \iff a_1 \equiv 30 \pmod{32} & \checkmark & p(1) \text{ resultó verdadera.} \\ p(2) : a_2 \equiv 3^2 - 5^2 \pmod{32} & \iff a_2 \equiv 16 \pmod{32} & \checkmark & p(2) \text{ resultó verdadera.} \end{cases}$$

Pasos inductivos:

Para algún $k \in \mathbb{Z}$:


$$\begin{cases} p(k) : \overbrace{a_k \equiv 3^k - 5^k \pmod{32}}^{\text{hipótesis inductiva}} & \text{Se asume verdadera.} \\ p(k+1) : \overbrace{a_{k+1} \equiv 3^{k+1} - 5^{k+1} \pmod{32}}^{\text{también hipótesis inductiva}} & \text{También se asume verdadera.} \end{cases}$$

Y queremos probar entonces que:

$$p(k+2) : a_{k+2} \equiv 3^{k+2} - 5^{k+2} \pmod{32}$$

Arranco con la definición de la sucesión que se cocinó un poco en \star^1 :

$$a_{k+2} \stackrel{\text{def}}{=} 24a_{k+1} + 65a_k + 96k^4 \stackrel{(32)}{\equiv} 24(\overbrace{3^{k+1} - 5^{k+1}}^{\text{HI}}) + \overbrace{3^k - 5^k}^{\text{!!}} \stackrel{!!}{=} 73 \cdot 3^k - 121 \cdot 5^k \stackrel{(32)}{\equiv} 9 \cdot 3^k - 25 \cdot 5^k = 3^{k+2} - 5^{k+2} \cdot \checkmark$$

Si te quedaste picando en **!!**, seguí mirando ese paso, porque son cuentas que tenés que poder *encontrar* mirando fijo el tiempo que sea necesario. Por mi parte .

Y así fue como comprobamos que el enunciado ladraba pero no mordía.

Como $p(1)$, $p(2)$, $p(k)$, $p(k+1)$ y $p(k+2)$ son verdaderas, por el principio de inducción también lo será $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 **11.** Estudiar los valores para **todos** los $a \in \mathbb{Z}$ de $(a^3 + 31 : a^2 - a + 1)$.

Simplifico la expresión $(a^3 + 31 : a^2 - a + 1)$ con el querido algoritmo de Euclides:

$$\begin{array}{r|l} X^3 & + 31 \\ -X^3 + X^2 - X & \\ \hline X^2 - X + 31 & \\ -X^2 + X & -1 \\ \hline & 30 \end{array}$$

Por lo tanto el mcd $d = (a^3 + 31 : a^2 - a + 1) = (a^2 - a + 1 : 30)$, es decir que:


$$d \mid 30 \Rightarrow d \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

Muchos divisores. Se pueden eliminar unos cuantos notando que $a^2 - a + 1$ es una expresión siempre impar. Una forma de mostrar esto:

$$a^2 - a + 1 \text{ es impar} \Leftrightarrow a^2 - a + 1 \equiv 1 \pmod{2} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} a \cdot (a - 1) \equiv 0 \pmod{2}$$

La última expresión $a \cdot (a - 1)$ es siempre **par**, dado que es un número multiplicado por su consecutivo. Otra forma de mostrar la paridad sería reemplazando por $2k$ y luego por $2k + 1$ y ver que los resultados son siempre impares.

$$\begin{aligned} a = \underbrace{2k}_{\text{par}} &\Rightarrow (2k)^2 - 2k + 1 = \underbrace{2 \cdot \underbrace{(2k^2 - k)}_{\text{par}} + 1}_{\text{impar}} \quad \checkmark \\ a = \underbrace{2k + 1}_{\text{impar}} &\Rightarrow (2k + 1)^2 - 2(k + 1) + 1 = \underbrace{2 \cdot \underbrace{(2k^2 + 3k + 2)}_{\text{par}} + 1}_{\text{impar}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Hacé lo que más te guste 

Dado que esa expresión es impar podemos reducir el conjunto de divisores a:

$$d \mid 30 \quad \text{y} \quad d \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow d \in \{1, 3, 5, 15\}.$$

Tabla de restos: Siempre empezando por el menor valor


$r_3(a)$	0	1	2
$r_3(a^2 - a + 1)$	1	1	0

Obtenemos que 3 *es un potencial mcd* cuando $r_3(a) = 2$ o dicho de otro modo $a \equiv 2 \pmod{3}$.

$r_5(a)$	0	1	2	3	4
$r_5(a^2 - a + 1)$	1	1	3	2	3

Obtenemos que 5 *no es un potencial mcd*, por lo que 15 tampoco será un divisor de la expresión $a^2 - a + 1$. Con la información obtenida se puede concluir que:

$$d = \begin{cases} 3 & \text{si } a \equiv 2 \pmod{3} \\ 1 & \text{si } a \not\equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 Maxi T. 

 ¡Aportá con correcciones, subiendo ejercicios,  al repo, críticas, todo sirve.

[Ir a índice](#) 

🔥12. Determinar para cada par $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $(a : b) = 7$ el valor de

$$(a^2b^4 : 7^5(-a + b)).$$

Coprimizar:

$$d = (a^2b^4 : 7^5(-a + b)) \xleftrightarrow[b=7B]{a=7A} 7^6 \cdot (A^2B^4 : B - A) \Leftrightarrow d = 7^6 \cdot D$$

$$\begin{cases} D \mid A^2B^4 \\ D \mid B - A \xleftrightarrow{\text{def}} B \equiv A(D)^{\star^1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D \mid A^2B^4 \xleftrightarrow{\star^1} \boxed{B^6 \equiv 0(D)} \\ \text{y también} \\ D \mid A^2B^4 \xleftrightarrow{\star^1} \boxed{A^6 \equiv 0(D)} \end{cases}$$

El resultado dice que $D \mid A^6$ y que $D \mid B^6$ lo cual está complicado porque A y B son coprimos, por lo tanto A^6 y B^6 también y $(A^6 : B^6)^{\star^2} = 1 = D$.

★² la factorización en primos lo muestra, mismos factores elevados a la 6, no puede cambiar la coprimisimilitud.

Creo que hay que justificar con algo más, pero no sé, con algo de primos? Bueh, algo así:

Si $D \mid A^6$ entonces la *descomposición en primos* de $D = p_1^{i_d} \cdots p_n^{j_d}$ tiene que tener solo factores de la *descomposición en primos* de $A^6 = p_1^i \cdots p_n^j \cdot p_{n+1}^k \cdots p_m^l$ con los exponentes de los factores de $D (i_d, j_d, \dots)$, menores o iguales a los exponentes de $A^6 (i, j, \dots)$ de manera que al dividir:

$$\frac{A^6}{D} = \frac{p_1^i \cdots p_n^j \cdot p_{n+1}^k \cdots p_m^l}{p_1^{i_d} \cdots p_n^{j_d} \cdot p_{n+1}^{k_d} \cdots p_m^{l_d}} = \frac{p_1^{\overbrace{i - i_d}^{0 \leq}} \cdots p_n^{\overbrace{j - j_d}^{0 \leq}} \cdot p_{n+1}^{\overbrace{k - k_d}^{0 \leq}} \cdots p_m^{\overbrace{l - l_d}^{0 \leq}}}{1},$$

es decir que se cancele todo de manera que quede un **1** en el denominador. Eso es que $D \mid A^6$ ni más ni menos.

Y sí, *muy rico todo*, pero esa cantinela es la misma para $D \mid B^6$, **pero** la *descomposición en primos* de B^6 tiene los p_i **distintos** a los de A^6 , porque $(A^6 : B^6) = 1$ y ahí llegamos al absurdo. D no puede dividir a ambos a la vez, **porque son coprimos** 🟡, a menos que $D = 1$ ✓.

$$D = 1 \Rightarrow \boxed{d = 7^6}, \text{ para cada } (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (a : b) = 7$$

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👋 Nad Garraz 🧡

🔥13. Calcular $(a \cdot b^2 : 3a^2 + 3b^2)$ para cada par de enteros a y b tales que $(a : b) = 3$.

Hay que *coprimizar*, *encontrar posibles divisores*, *interpretar resultado*.

Coprimizar:

$$(a : b) = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{3} : \frac{b}{3}\right) = 1 \xleftrightarrow[b=3B]{a=3A} (A : B) = 1 \Leftrightarrow A \perp B.$$

Reemplazo y acomodo:

$$d = (a \cdot b^2 : 3a^2 + 3b^2) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} d = 27(A \cdot B^2 : A^2 + B^2) \stackrel{d=27D}{\Leftrightarrow} D = (A \cdot B^2 : A^2 + B^2) \text{ con } A \perp B$$

Dado que D es el mcd, tiene que cumplir que:

$$\left\{ \begin{array}{l} D \mid A \cdot B^2 \\ D \mid A^2 + B^2 \end{array} \right. \stackrel{!!}{\rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} D \mid A^3 \\ D \mid B^4 \end{array} \right.$$

Oka, ahí en el **!!** hice lo de siempre: Multiplique una fila por A o B y resté y coso.

Lo que nos queda es algo muy parecido a lo que pasó en el ejercicio [éste](#)(click).

Interpretación:

Tenemos que D por su condición de divisor común debe dividir a dos número *coprimos*, dado que si $A \perp B$ también sucede que $A^3 \perp B^4$, because *primos and shit*, y bueh, ¿Puede ser eso posible?.. Sí! Cuando $D = 1$.

Entonces:

$$D = 1 \Rightarrow d = 27 \text{ para cada par } (a, b) \in \mathbb{Z} / (a : b) = 3$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 **14.** Calcular, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de dividir por 18 a

$$6 \cdot 35^n + 73^{3021} + \sum_{k=1}^n 3^k \cdot k!$$

Simplifiquemos esa expresión espantosa calculando el r_{18} y aplicando las propiedades:

$$\begin{aligned} r_{18}(6 \cdot 35^n + 73^{3021} + \sum_{k=1}^n 3^k \cdot k!) &\stackrel{!}{=} r_{18}(6 \cdot (-1)^n + 1^{3021} + r_{18}(\sum_{k=1}^n 3^k \cdot k!)) \\ &\stackrel{\star 1}{=} \begin{cases} r_{18}(7 + r_{18}(\sum_{k=1}^n 3^k \cdot k!)) & \text{si } n \text{ es par} \\ r_{18}(-5 + r_{18}(\sum_{k=1}^n 3^k \cdot k!)) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

La para está ahora en calcular: $r_{18}(\sum_{k=1}^n 3^k \cdot k!)$

Dado que tiene un 3 ahí dando vueltas y que la $k!$ en algún momento tendrá el factor $6 = 3! = 2 \cdot 3$, es esperable que el término general de la sumatoria sea un múltiplo de 18.

Acomodo la expresión:

$$r_{18}(\sum_{k=1}^n 3^k \cdot k!) = r_{18}(3 + \sum_{k=2}^n 3^k \cdot k!) \stackrel{\star 2}{=} 3 + r_{18}(\sum_{k=2}^n 3^k \cdot k!)$$

A ojo se puede ver que $r_{18}(\sum_{k=2}^n 3^k \cdot k!) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ Pero como no sabemos si el que nos corrige está de mal humor probemos eso por inducción:

Quiero probar que:

$$p(n) : r_{18}(\sum_{k=2}^n 3^k \cdot k!) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

Caso base:

$$p(2) : r_{18}\left(\sum_{k=2}^2 3^k \cdot k!\right) = r_{18}(3^2 \cdot 2) = 0$$

Por lo que el caso $p(2)$ es verdadero.

Paso inductivo: Asumo que para algún $k \geq 2$

$$p(h) : r_{18}\left(\underbrace{\sum_{k=2}^h 3^k \cdot k!}_{\text{hipótesis inductiva}}\right) = 0$$

es verdadero. Y quiero probar que:

$$p(h+1) : r_{18}\left(\sum_{k=2}^{h+1} 3^k \cdot k!\right) = 0$$

también lo sea.

Partiendo de $p(h+1)$

$$\begin{aligned} r_{18}\left(\sum_{k=2}^{h+1} 3^k \cdot k!\right) &= r_{18}\left(\sum_{k=2}^h 3^k \cdot k! + 3^{h+1} \cdot (h+1)!\right) \\ &\stackrel{\text{HI}}{=} r_{18}\left(3^{h+1} \cdot (h+1)!\right) \\ &\stackrel{!}{=} r_{18}\left(3 \cdot 6 \cdot 3^h \cdot \frac{(h+1)!}{3!}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahí en el $!$ me las arreglé para que aparezca el 18 que hace que el resto de 0. Debe haber otras formas de hacerlo, tenés licencia para dibujar.

Como $p(2), p(h)$ y $p(h+1)$ resultaron verdaderas, por criterio de inducción $p(n)$ también lo es para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Volviendo a \star^2 :

$$r_{18}\left(\sum_{k=1}^n 3^k \cdot k!\right) = 3$$


por lo tanto en \star^1 :

$$r_{18}(6 \cdot 35^n + 73^{3021} + \sum_{k=1}^n 3^k \cdot k!) = \begin{cases} r_{18}(6 + 1 + 3) = 10 & \text{si } n \text{ es par} \\ r_{18}(-6 + 1 + 3) \stackrel{!}{=} 16 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 Dani Tadd 

 **15.** Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 1$. Calcular los posibles valores de $(a^2 + 3b^2 : 2a^2 + 11b^2)$ y dar un ejemplo para cada uno de ellos.

Si $d = (a^2 + 3b^2 : 2a^2 + 11b^2)$ entonces deber suceder:

$$\left\{ \begin{array}{c} d \mid a^2 + 3b^2 \\ d \mid 2a^2 + 11b^2 \end{array} \right\} \xleftrightarrow{F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2} \left\{ \begin{array}{c} d \mid a^2 + 3b^2 \\ d \mid 5b^2 \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{c} d \mid a^2 + 3b^2 \\ d \mid 2a^2 + 11b^2 \end{array} \right\} \xleftrightarrow{11F_1 - 3F_2 \rightarrow F_2} \left\{ \begin{array}{c} d \mid a^2 + 3b^2 \\ d \mid 5a^2 \end{array} \right\}$$

De esta forma queda que el MCD:

$$d = (5a^2 : 5b^2) \Leftrightarrow d = 5(a^2 : b^2) \Leftrightarrow d = 5(a : b)^2 \xleftrightarrow{a \perp b} d = 5$$

Si el *máximo común divisor* de $(a^2 + 3b^2 : 2a^2 + 11b^2)$ es 5, los valores que puede *potencialmente* tomar la expresión son:

$$\{1, 5\}$$

División por 1:

El uno está por ejemplo para el par $(a, b) = (1, 2)$ donde $a \perp b$.

División por 5:


$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline r_5(a) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline r_5(a^2) & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \quad y \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline r_5(b) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline r_5(3b^2) & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad y \quad \boxed{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline r_5(a^2 + 3b^2) & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}}$$

Ese resultado dice que para que suceda que $5 \mid a^2 + 3b^2$ se requiere que:

$$a \equiv 0 \pmod{5} \quad y \quad b \equiv 0 \pmod{5}$$

Peeeeero, por enunciado $(a : b) = 1$ así que se concluye que no hay par de (a, b) con $a \perp b$ tal que $5 \mid a^2 + 3b^2$.

Así que el único valor que puede tomar la expresión $(a^2 + 3b^2 : 2a^2 + 11b^2)$ es 1.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 **Ale Teran** 

 **Nad Garraz** 

 **16.** Calcular el resto de dividir

$$\sum_{k=4}^{134} (k! + k^3)$$

por 7.

Nos piden calcular el resto 7 de esa porquería:

$$\sum_{k=4}^{134} (k! + k^3) = \sum_{k=4}^{134} k! + \sum_{k=4}^{134} k^3$$

Arranco por estudiar $\sum_{k=4}^{134} k^3$. Tabla de restos 7 de k^3 :

$r_7(k)$	0	1	2	3	4	5	6
$r_7(k^3)$	0	1	1	6	1	6	6

Pensar que $6 \equiv -1 \pmod{7}$ y eso nos ayuda a anular muchas cosas:

$$\sum_{k=4}^{134} k^3 = \underbrace{4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + \dots + 130^3 + 131^3 + 132^3 + 134^3}_{131 \text{ términos}}$$

Todos esos términos tienen r_7 igual a 0, 1 o -1 . Sumando 7 términos consecutivos se obtiene como resultado 0. Organizo los términos teniendo en cuenta que $131 = 18 \cdot 7 + 5$, es decir que tengo 18 sumas de 7 términos que dan 0 y me sobran los últimos 5 términos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^{134} k^3 &= 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3 + \dots + 126^3 + 124^3 + 125^3 + 126^3 + 127^3 + 128^3 + 129^3 + 130^3 + 131^3 + 132^3 + 133^3 + 134^3 \\ &\equiv \underbrace{1 + (-1) + (-1) + 0 + 1 + 1 + (-1)}_{=0} + \dots + \underbrace{1 + (-1) + (-1) + 0 + 1 + 1 + (-1)}_{=0} + \underbrace{1 + (-1) + (-1) + 0 + 1}_{=0} \pmod{7} \\ &\stackrel{!}{=} 18 \cdot 0 + 0 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

Se concluye que:

$$r_7\left(\sum_{k=4}^{134} k^3\right) = 0 \quad \star^1$$

Ahora quiero ver qué onda con $\sum_{k=4}^{134} k!$.

Noto primero que cuando $k \geq 7$ el número $k!$ es un múltiplo de 7, es decir:

$$k! \equiv 0 \pmod{7} \quad \text{con } k \in \mathbb{N}_{\geq 7}$$

Por lo tanto me quedaría con los primero 3 términos:

$$\sum_{k=4}^{134} k! = 4! + 5! + 6! + \underbrace{0 + \dots + 0}_{131 \text{ términos igual a } 0} \equiv 3 + 1 + 6 \pmod{7} \equiv 3 + 1 + 6 \pmod{7} \equiv 3 \pmod{7} \star^2$$


Por último juntando los resultados de \star^1 y \star^2 :

$$r_7\left(\sum_{k=4}^{134} (k! + k^3)\right) = 3$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 Juan Parajó 

 **17.** Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a + 6 : 7a^2 - a - 3) \neq 1$.

Si el mcd es d :

$$d = (3a + 6 : 7a^2 - a - 3)$$

Puedo usar Euclides para simplificar la expresión del mcd:

$$\begin{array}{r|l} 7a^2 & -a - 3 \\ -7a^2 - 14a & \\ \hline & -15a - 3 \\ & 15a + 30 \\ \hline & 27 \end{array}$$

Por lo tanto d queda:

$$d = (3a + 6 : 7a^2 - a - 3) = (3a + 6 : 27)$$

Por lo tanto como $d \mid 27$:

$$d \in \{1, 3, 9, 27\} = \{1, 3, 3^2, 3^3\}$$

¿Para que valor de a valdrá $d = 1$? Empiezo a ver si es divisible por 3:

Tabla de restos para $d = 3$:

$r_3(a)$	0	1	2
$r_3(3a + 6)$	0	0	0
$r_3(7a^2 - a - 3)$	0	0	2


No son ambas expresiones divisibles por 3 cuando

$$a \equiv 2 \pmod{3}$$

Dado que los otros posibles divisores (9, 27) son potencias de 3, se concluye que:


$$d \neq 1 \iff \begin{cases} a \equiv 0 \pmod{3} \\ \text{o} \\ a \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

Dado que para esos valores de a la expresión $7a^2 - a - 3$ no divisible por ninguna potencia de 3.

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 Dani Tadd 

 **18.** Hallar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que cumplen las siguientes condiciones en simultáneo:

$$27 \nmid a$$

$$(a : b) = 42$$

$$[a : 5b] = 13230$$

A lo largo de este ejercicio mucho de lo que voy a usar son esas frases del secundario:

El máximo común divisor entre 2 números son los factores (de la factorización en primos) comunes elevados al menor exponente.

El mínimo común múltiplo entre 2 números son los factores (de la factorización en primos) comunes y los no comunes elevados al mayor exponente.

Del enunciado se deduce que:

$$3^3 \nmid a,$$

o sea que quizás $3^1, 3^2$ sí divida a a . También tenemos que el máximo común divisor:

$$(a : b) = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Esto nos dice que en la factorización de a y de b hay factores $2^\alpha, 3^\beta$ y 7^γ , donde esos exponentes son ≥ 1 . Por último el dato del mínimo común múltiplo:

$$[a : 5b] = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^2,$$

¿Qué nos dice el 2^1 ?:

Como sabemos de \star^1 que tanto a como b tienen a 2 como un factor y ahora en el mcm tiene exponente 1. Esto *determina* que tanto a como b tienen 2^1 como factor y ninguna potencia de 2 superior en su factorización en primos.

¿Qué nos dice el 3^3 ? \star^2 :

Parecido a lo anterior. \star^1 nos dice que el 3 está en a y b . Acá hay que tener presente que $a \nmid 3^3$. Ahora se *determina* el exponente exacto del factor 3 de b que será 3, y el de a será 1 sino en el máximo común divisor habría un exponente mayor en el factor 3.

¿Qué nos dice el 5^1 ?:

Sale que b no tiene 5 es su factorización, porque de tenerlo, el 5 del mcm tendría un exponente mayor debido al 5 que se enchufó ahí de prepo en el $[a : 5b]$. Y a su vez sale que a tiene que tener un 5^δ con $0 \leq \delta \leq 1$ en su factorización

¿Qué nos dice el 7^2 ?:

Parecido a lo que salió en \star^2 . En este caso \star^1 nos dice que el 7 está en a y b . Ahora tampoco se *determina* el exponente exacto, pero sí sabemos que a y b tienen un factor 7^γ con $1 \leq \gamma \leq 2$ en su factorización en primos, pero por \star^1 no pueden tener ambos 2 a la vez.


Recopilando la información de eso:

$$\begin{aligned}(a, b) &= (2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2, 2^1 \cdot 3^3 \cdot 7^1) = (1470, 378) \\(a, b) &= (2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1, 2^1 \cdot 3^3 \cdot 7^2) = (210, 2646) \\(a, b) &= (2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^2, 2^1 \cdot 3^3 \cdot 7^1) = (294, 378) \\(a, b) &= (2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1, 2^1 \cdot 3^3 \cdot 7^2) = (42, 2646)\end{aligned}$$


Nota que puede ser relevante:

Suponiendo que lo que hice está bien, $a \cdot b = (a : b) \cdot [a : b]$, tiene que valer, pero acordate que en el enunciado metieron un 5 ahí que no está ni en a ni en b , ojo con eso.

Fin de nota que puede ser relevante:

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 **19.** Probar que $6^{2n} - 35n - 1$ es divisible por 245 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Noto que:

$$245 = 5^2 \cdot 7$$

Los que nos piden se puede escribir como:

$$6^{2n} - 35n - 1 \equiv 0 \pmod{245}$$

Inducción:

Quiero probar que:

$$p(n) : 6^{2n} - 35n - 1 \equiv 0 \pmod{245} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$p(1) : 6^{2 \cdot 1} - 35 \cdot 1 - 1 = 0 \equiv 0 \pmod{245}$$

Por lo que $p(1)$ resultó ser verdadera.

Paso inductivo: Asumo que

$$p(k) : \underbrace{6^{2 \cdot k} - 35 \cdot k - 1 \equiv 0 \pmod{245}}_{\text{hipótesis inductiva}}$$

es verdadera para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces quiero probar que:

$$p(k+1) : 6^{2 \cdot (k+1)} - 35 \cdot (k+1) - 1 \equiv 0 \pmod{245}$$

Partiendo de esto último:

$$6^{2 \cdot (k+1)} - 35 \cdot (k+1) - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 35k - 35 - 1 = 36 \cdot (6^{2k} - 1) - 35k \equiv 0 \pmod{245} \star^1$$

Acomodo la hipótesis inductiva:

$$6^{2k} - 35 \cdot k - 1 \equiv 0 \pmod{245} \iff 6^{2k} - 1 \equiv 35k \pmod{245} \star^2$$

Uso \star^2 eso en \star^1


$$36 \cdot (35k) - 35k = 35^2 k = 5^2 \cdot 7^2 = 245 \cdot 7 \equiv 0 \pmod{245} \star^1$$

Es así que $p(k+1)$ también es verdadera.

Dado que $p(1)$, $p(k)$, $p(k+1)$ resultaron verdaderas por principio de inducción $p(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 **20.** Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \equiv 2 \pmod{6}$. Hallar los posibles valores de $(2n^4 + 6n^2 + 10 : n^3 + 2n)$ y dar un ejemplo para cada uno.

Bautizo al MCD:

$$d = (2n^4 + 6n^2 + 10 : n^3 + 2n)$$

Según Euclides:

$$\begin{array}{r|l} 2n^4 + 6n^2 + 10 & n^3 + 2n \\ - 2n^4 - 4n^2 & 2n \\ \hline & 2n^2 + 10 \end{array}$$

Por lo que:

$$d = (2n^4 + 6n^2 + 10 : n^3 + 2n) = (n^3 + 2n : 2n^2 + 10)$$

Limpiando un poco eso:

$$\left\{ \begin{array}{l} d \mid n^3 + 2n \\ d \mid 2n^2 + 10 \end{array} \right\} \xrightarrow{2F_1 - nF_2 \rightarrow F_1} \left\{ \begin{array}{l} d \mid 6n \\ d \mid 2n^2 + 10 \end{array} \right\} \xrightarrow{3F_2 - nF_1 \rightarrow F_2} \left\{ \begin{array}{l} d \mid 6n \\ d \mid 30 \end{array} \right\}$$

Si $d = (6n : 30)$ entonces los *potenciales* posibles valores para el MCD serían:

$$d \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$


Teniendo en cuenta que los valores de n que interesan son:

$$n \equiv 2 \pmod{6} \xLeftrightarrow[\star^1]{\text{def}} n \in \{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : 6k + 2\}$$

Los n son siempre par, descartando así los valores $\{1, 3, 5, 15\}$. Esto porque siempre va a estar el 2 como factor en d , ya que $d \mid 6n$.

Similarmente:


$$6 \mid 6n,$$

por lo tanto el 2 no puede ser MCD, porque el 6 siempre va a ser un divisor común y obviamente $6 > 2$ . Hasta el momento los posibles valores que puede tomar el MCD, d :

$$d \in \{6, 10, 30\}$$

Me parece que $d = 10$ no va a ser un d , ya que si encuentro algún n es divisible por 5, ocurre lo siguiente:

$$n = 5k \Rightarrow d \mid 6 \cdot 5k = 30k,$$

por lo que tengo que eliminar al 10 de los posibles d ! Siempre que sea divisible por 10 va a ser divisible por 30.

Ahora busco ese n multiplo de 5, para probar que 30 es un posible d :


$$\xRightarrow[\star^1]{!} n = \underbrace{6k + 2}_{\star^2} \xrightarrow[\text{es multiplo de 5}]{\text{analizar si } n} 6k + 2 \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow k \equiv 3 \pmod{5} \xrightarrow{k=3} n \stackrel{\star^2}{=} 20$$

Es con $n = 20$ que:

$$n = 20 \Rightarrow d \stackrel{\checkmark}{=} 30$$

Es así que los posibles valores para $d = (2n^4 + 6n^2 + 10 : n^3 + 2n)$ son:

$$d \in \{6, 30\}, \text{ para } n \equiv 2 \pmod{6} \text{ y además } \begin{cases} \text{si } n = 2 & \Rightarrow d = 6 \\ \text{si } n = 20 & \Rightarrow d = 30 \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 