Álgebra I Práctica 7 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I Facultad de Ciencias Exactas y Naturales UBA

Choose your destiny:

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1.	6.	11.	16.	21.	26.	31.	36.
2.	7.	12.	17.	22.	27.	32.	37.
3.	8.	13.	18.	23.	28.	33.	38.
4.	9.	14.	19.	24.	29.	34.	39.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	

• Ejercicios Extras

1. **2**. **3**. **4**. **5**. **6**.

Notas teóricas:

• Operaciones:

+: Sean
$$f, g \in \mathbb{K}[X]$$
 con $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$

$$\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

$$\therefore \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \text{ y } g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$$

$$\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j) X^k \in \mathbb{K}[X]$$

- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo $\to f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h, \ \forall f, g, h \in \mathbb{K}[X]$
- Algoritmo de división: $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos $q y R \in \mathbb{K}[X]$ tal que $f = q \cdot g + R$ con gr(R) < gr(f) o R = 0
- α es raíz de $f \iff X \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X \alpha)$
- *Máximo común divisor:* Polinomio mónico de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.
 - -(f:g) | f y (f:g) | g
 - $-f = (f:g) \cdot k_f$ y $g = (f:g) \cdot k_g$ con k_f y k_g en $\mathbb{K}[X]$
 - Dos polinomios son coprimos si $(f:g)=1 \iff f \neq g$
- Raíces múltiples:

Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se dice que:

- $-\alpha$ es raíz múltiple de $f \Leftrightarrow f = (x-\alpha)^2 q$ para algún $q \in \mathbb{K}[X]$
- $-\alpha$ es raíz simple de $f \Leftrightarrow x \alpha \mid f$ en $\mathbb{K}[X]$, pero $(X \alpha)^2 \not\mid f$ en $\mathbb{K}[X] \Leftrightarrow f = (X \alpha)q$ para algún $q \in \overline{\mathbb{K}[X]}$ tal que $q(\alpha) \neq 0$.
- Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Se dice que α es raíz de multiplicidad (exactamente) m de f, y se nota mult $(\alpha; f) = m \iff (X \alpha)^m \mid f$, pero $(x \alpha)^{m+1} \not\mid f$.

O equivalentemente, $f = (X - \alpha)^m q \text{ con } q \in \mathbb{K}[X]$, pero $q(\alpha) \neq 0$

- Sea $f ∈ \mathbb{K}[X]$ no nulo mult(α; f) ≤ gr(f):
- Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no ambos nulos, y $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow f(\alpha) = f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (f : g)(\alpha) = 0$
- Vale que α es raíz múltiple de $f\iff f(\alpha)=0$ y $f'(\alpha)=0\iff \alpha$ es raíz de $(f:f'),\ X-\alpha\,|\,(f:f')$
 - $\text{ mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0 \text{ y mult}(\alpha; f') = m 1$

$$- \operatorname{mult}(\alpha; f) = m \iff \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{mult}(\alpha; f) \geq m \\ \operatorname{mult}(\alpha; f) \geq m \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ \operatorname{mult}(\alpha; f) = m \end{array} \right\}$$

Cantidad de raíces:

_

Ejercicios de la guía:

- Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:
 - i) $(4X^6 2X^5 + 3X^2 2X + 7)^{77}$
 - ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 X + 5)^4 (6X^4 + 2X^3 + X 2)^7$
 - iii) $(-3X^5 + X^4 X + 5)^4 81X^{20} + 19X^{19}$.
 - i) coeficiente principal: 4⁷⁷ $grado: 6 \cdot 77$
 - ii) coeficiente principal: $(-3)^4 6^7 = -279.855$ grado: 28
 - iii) coeficiente principal: $\underbrace{(-3X^5+X^4-X+5)^4}_f + \underbrace{-81X^{20}+19X^{19}}_g$ Cuando sumo me queda: cp f^4 cp $g=(-3)^4$ $81=0 \Rightarrow gr(f^4+g) < 20 \rightarrow$ Calculo el cp f^4+g con gr $(f^4+g)=19$.

$$\begin{array}{l} \rightarrow \text{Calculo el cp } f^4 + g \text{ con } \text{gr}(f^4 + g) = 19. \\ Laburo \ a \ f: \\ \hline \begin{cases} \frac{\text{para usar}}{\text{formula de } f \cdot g} & (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = (-3X^5 + 1X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \\ f^2 \cdot f^2 = \sum\limits_{k=0}^{20} \left(\sum\limits_{i+j=k} a_i \cdot b_j\right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \bigstar^2 \\ \sum\limits_{k=0}^{20} \left(\sum\limits_{i+j=k} a_i \cdot b_j\right) X^k \xrightarrow{\text{me interesa solo}} \sum\limits_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \stackrel{\bigstar}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \stackrel{\bigstar}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} \\ \left\{ \begin{array}{c} \frac{b_{10} \text{ sale a}}{o \text{ jimetro}} b_{10} = (-3)^2 = 9 \\ \frac{a_9 \text{ no tan fácil, volver}}{a \text{ usar } \sum f \cdot g \text{ en } k = 9} f \cdot f = \sum\limits_{k=0}^{10} \left(\sum\limits_{i+j=k} c_i \cdot d_j\right) X^k \stackrel{\bigstar}{=} \sum\limits_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \stackrel{\bigstar}{=} c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4 \stackrel{\bigstar}{=} 2 \cdot c_4 \cdot d_5 \\ \left\{ \begin{array}{c} \frac{d_5 \text{ sale a}}{o \text{ jimetro}} d_5 = -3 \\ o \text{ jimetro} \end{array} \right\} \rightarrow a_9 = -6 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{cp } f^4 = 2 \cdot (-6) \cdot (9) = -108 \\ \text{cp } g = 19 \end{array} \right\} \rightarrow \overline{\text{cp } f^4 + g = -89} \end{cases} \checkmark$$

★¹: Sabemos que el $gr(f^4) = 20 \Rightarrow gr(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \leq 10$

solo puede ocurrir cuando los exponentes $\left\{\begin{array}{l} i=10,\,j=9\\ \lor\\ i=9,\,j=10 \end{array}\right\}$

 \star^2 : porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos visualmente más genérico.

★³: Idem ★¹ para el polinomio f

grado: 19

2. ** Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX

3. ** Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por q en los casos

i)
$$f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$$
 y $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii)
$$f = 4X^4 + X^3 - 4$$
 y $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iii)
$$f=X^n-1$$
 y $g=X-1$ en $\mathbb{Q}[X],\,\mathbb{R}[X],\,\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

ii)
$$\begin{array}{c|c}
4X^4 + X^3 & -4 & 2X^2 + 1 \\
-4X^4 & -2X^2 & 2X^2 + \frac{1}{2}X - 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
X^3 - 2X^2 & -\frac{1}{2}X \\
-X^3 & -\frac{1}{2}X \\
-2X^2 - \frac{1}{2}X - 4 \\
2X^2 & +1 \\
-\frac{1}{2}X - 3
\end{array}$$

Resultado válido para
$$\mathbb{Q}[X]$$
, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$
En $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2 + 1) \cdot \underbrace{(2X^2 + 4X + 6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X + 4)}_{r[X]}$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división asoma la idea de que:

$$X^n-1=(X-1)\cdot\sum_{j=0}^{n-1}X^j+\underbrace{0}_{r[X]},$$
 (que es la geométrica con $X\neq 1$)

Inducción: Quiero probar que $p(n): X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base:
$$p(1): X^1 - 1 = (X - 1) \sum_{j=0}^{1-1} X^j \Rightarrow p(1)$$
 es Verdadero \checkmark

Paso inductivo:

Paso inductivo:
$$p(k): \underbrace{X^k - 1 = (X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI} \text{ es Verdadera} \stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1): X^{k+1} - 1 = (X-1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j \text{ es Verdadera}$$

$$(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k} X^{j} = (X-1) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} X^{j} + X^{k}\right) = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + (X-1) \cdot X^{k} = X^{k} - 1 + X^{k+1} - X^{k} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{$$

$$X^{k+1}-1$$
 \checkmark

Dado que p(1), p(k) y p(k+1) resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera $p(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

- Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que
 - i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$,
 - ii) $X^4 aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$,
 - iii) El resto de la división de $X^5 3x^3 x^2 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea -8X + 4.
 - i) Haciendo la division de $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^{3} + 2X^{2} + 2X + 1 = (X - a + 2)(X^{2} + aX + 1) + \underbrace{(a^{2} - 2a + 1)X + a - 1}_{\text{resto}}$$

Así, para que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$ tiene que ocurrir que el resto sea 0. O sea,

$$X^{2} + aX + 1 | X^{3} + 2X^{2} + 2X + 1 \iff (a^{2} - 2a + 1)X + a - 1 = 0$$
$$\iff \begin{cases} a^{2} - 2a + 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a-1=0 \iff a=1$
- $a^2 2a + 1 = 0 \xrightarrow{a=1} 1^2 2.1 + 1 = 1 2 + 1 = 0$

Luego, el valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ es divisible por $X^2 + aX + 1$ es a = 1

ii) ***** Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$ o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

iii) Haciendo la division de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^{5} - 3X^{3} - X^{2} - 2X + 1 = q(X^{2} + aX + 1) + \underbrace{r}_{\text{resto}}$$

con $q = (X^3 - aX^2 + (a^2 - 4)X - a^3 + 5a - 1)$ y $r = (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2$. Así,

$$r = -8X + 4$$

$$\iff (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2 = -8X + 4$$

$$\iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0 \\ a^3 - 5a - 2 = 0 \end{cases}$$

Analizo las ecuaciones:

• $a^3 - 5a - 2 = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5) - 2 = 0$ Veo que a = -2 es solución, por lo que divido $a^3 - 5a - 2$ por a + 2 con Ruffini:

Por lo que $a^3 - 5a - 2 = (a+2)(a^2 - 2a - 1)$

Busco las raíces de $a^2 - 2a - 1$ con la fórmula resolvente:

$$a_{+,-} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$
$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

Por lo que
$$a^3 - 5a - 2 = (a+2)(a-1+\sqrt{2})(a-1-\sqrt{2}) = 0 \iff \begin{cases} a = -2 \\ a = 1+\sqrt{2} \\ a = 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

• $a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0$

Me fijo que valores de a obtenidos antes verifican:

- Si
$$a = -2 \Rightarrow (-2)^4 - 6(-2)^2 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0$$
 ✓

- Si
$$a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^4 - 6(1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 10 = 10 + \sqrt{2} \neq 0$$

- Si
$$a = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow (1 - \sqrt{2})^4 - 6(1 - \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2} + 10 = 10 - \sqrt{2} \neq 0$$

Luego, el único valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que el resto de dividir a $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea -8X + 4 es a = -2

- **6.** <u>Definición</u>: Sea K un cuerpo y sea $h \in \mathbb{K}[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in \mathbb{K}[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f g$. En tal caso se escribe $f \equiv g(h)$.
 - i) Probar que $\equiv (h)$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{K}[X]$.
 - ii) Probar que si $f_1 \equiv g_1$ (h) y $f_2 \equiv g_2$ (h) entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2$ (h) $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2$ (h).
 - iii) Probar que si $f \equiv g(h)$ entonces $f^n \equiv g^n(h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - iv) Probar que r es el resto de la división de f por h si y solo si $f \equiv r$ (h) y r = 0 o gr(r) < gr(h).
 - i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea reflexiva, simétrica y transitiva,
 - reflexiva: Es f congruente a f módulo h? $f \equiv f(h) \iff h \mid f f = 0 \iff h \mid 0$
 - sim'etrica: Si $f \equiv g$ (h) $\iff g \equiv f$ (h) $f \equiv g$ (h) $\iff h \mid f g \iff h \mid -(g f) \iff h \mid g f \iff g \equiv f$ (h) \checkmark
 - transitiva: Si $\begin{cases} f \equiv g(h) \\ g \equiv p(h) \end{cases} \stackrel{?}{\iff} f \equiv p(h).$

$$\begin{cases} h \mid f - g & \xrightarrow{F_1 + F_2} \\ h \mid g - p & \xrightarrow{F_2} \end{cases} \begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid f - p \end{cases} \rightarrow f \equiv p (h) \quad \checkmark$$

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en $\mathbb{K}[X]$

ii) Si
$$\begin{cases} f_1 \equiv g_1 (h) \\ f_2 \equiv g_2 (h) \bigstar^1 \end{cases}$$

$$f_1 \equiv g_1(h) \iff h \mid f_1 - g_1 \Rightarrow h \mid f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2(h) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2(h)$$

iii) Inducción: Quiero probar p(n): Si $f \equiv g(h)$ entonces $f^n \equiv g^n(h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso base: $p(1): f^1 \equiv g^1(h) \bigstar^2$ Verdadera \checkmark

 $\textit{Paso inductivo: } p(k): \underbrace{f^k \equiv g^k \; (h)}_{HI} \; \text{es verdadera} \stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1): f^{k+1} \equiv g^{k+1} \; (h) \; \text{¿También lo es?}$

$$f^{k} \equiv g^{k} (h) \iff h \mid f^{k} - g^{k} \Rightarrow h \mid f \cdot (f^{k} - g^{k}) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^{k} (h) \iff f^{k+1} \equiv g^{k+1} (h) \quad \checkmark$$

Finalmente p(1), p(k), p(k+1) resultaron verdaderas y por el principio de inducción p(n) es verdaderas $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) * Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX

7. Hallar el resto de la división de f por g para:

i)
$$f = X^{353} - X - 1$$
 y $g = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii)
$$f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$$
 y $g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

iii)
$$f = X^{200} - 3X^{101} + 2$$
, y $g = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

- iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} X^{174} + X^{137} + 2X^4 X^3 + 1$, y $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ (Sugerencia ver **4.** iii))).
 - i) $g \mid g \iff X^{31} 2 \equiv 0 \ (X^{31} 2) \iff X^{31} \equiv 2 \ (g)$ $f = X^{353} X 1 = (\underbrace{X^{31}}_{g_2})^{11} X^{12} X 1 \stackrel{(g)}{\equiv} 2^{11} X^{12} X 1 \rightarrow \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} 1}$
- iii) $g \mid g \iff X^{100} X + 1 \equiv 0 \ (X^{100} X + 1) \iff X^{100} \equiv X 1 \ (g)$ $f = X^{200} - 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 - 3X^{100}X + 2 \stackrel{(g)}{\equiv} (X - 1)^2 - 3(X - 1)X + 2$ $\rightarrow r_g(f) = (X - 1)^2 - 3(X - 1)X + 2$

iv) Usando la sugerencia: Del ejercicio 4. iii) sale que $X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$

$$\xrightarrow[\text{para el } g]{n=5} X^5 - 1 = (X-1)\underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_g \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)}(g) \quad \checkmark$$

$$f = (X^{5})^{603}X + 2(X^{5})^{366}X^{3} - (X^{5})^{34}X^{4} + (X^{5})^{27}X^{2} + 2X^{4} - X^{3} + 1$$

$$f = \underbrace{X + 2X^{3} - X^{4} + X^{2} + 2X^{4} - X^{3} + 1}_{=X^{4} + X^{3} + X^{2} + X + 1 = g}(g) \iff \boxed{f \equiv 0 \ (g)}$$

8. Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:

i)
$$f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$$
, $q = X^4 - X^3 - X^2 + 1$,

ii)
$$f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$$
, $q = X^3 + X$.

iii)
$$f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1$$
, $q = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1$,

$$\begin{array}{c|c}
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \\
\underline{\frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X} & -\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \\
-\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} \\
\underline{\frac{7}{9}X - \frac{7}{9}} \\
0
\end{array}$$

$$X^{5} + X^{3} - 6X^{2} + 2X + 2 = \left(X^{4} - X^{3} - X^{2} + 1\right) \cdot \left(X + 1\right) + \left(3X^{3} - 5X^{2} + X + 1\right)$$

$$X^{4} - X^{3} - X^{2} + 1 = \left(3X^{3} - 5X^{2} + X + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}X^{2} - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right)$$

$$3X^{3} - 5X^{2} + X + 1 = \left(-\frac{2}{9}X^{2} - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{27}{2}X + \frac{225}{4}\right) + \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right)$$

$$-\frac{2}{9}X^{2} - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} = \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539}\right) + 0$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow (f:g) = X-1$

ii)
$$X^6 + X^4 + X^2 + 1 = (X^3 + X) \cdot X^3 + (X^2 + 1)$$

 $X^3 + X = (X^2 + 1) \cdot X + 0$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow \boxed{(f:g) = X^2 + 1}$ El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow \boxed{X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)}$

iii)

$$2X^{6} - 4X^{5} + X^{4} + 4X^{3} - 6X^{2} + 4X + 1 = (X^{5} - 2X^{4} + 2X^{2} - 3X + 1) \cdot 2X + (X^{4} + 2X + 1)$$

$$X^{5} - 2X^{4} + 2X^{2} - 3X + 1 = (X^{4} + 2X + 1) \cdot (X - 2) + 3$$

$$X^{4} + 2X + 1 = 3 \cdot (\frac{1}{3}X^{4} + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}) + 0$$

 $X^4 + 2X + 1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) + 0$ El MCD será el último resto no nulo y $m\'onico \rightarrow \boxed{(f:g)=1}$ El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow \boxed{1 = \frac{1}{3}g \cdot (2X^2 - 4X + 1) - \frac{1}{3}f \cdot (X - 2)}$

10. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que f(1) = -2, f(2) = 1 y f(-1) = 0. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

Sea $P \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow el \ resto \ de \ dividir \ a \ P \ por \ X - a \ es \ P(a)$.

 $f(X) = q(X) \cdot \underbrace{X^3 - 2X^2 - X + 2}_{g(X)} + r(X)$, con $g(X) = (X - 2) \cdot (X - 1) \cdot (X + 1)$ y $r(X) = a^2 + bX + c$, ya

$$que el gr(r) < gr(g) \xrightarrow{\text{evaluar}} \begin{cases}
f(1) = -2 = q(1) \cdot g(2) \xrightarrow{\bullet} r(1) = -2 \\
f(2) = 1 = q(2) \cdot g(2) \xrightarrow{\bullet} r(2) = 1 \\
f(-1) = 0 = q(-1) \cdot g(-1) \xrightarrow{\bullet} r(-1) = 0
\end{cases}$$

$$\uparrow \begin{cases}
f(1) = -2 = q(1) \cdot g(2) \xrightarrow{\bullet} r(1) = -2 \\
f(2) = 1 = q(2) \cdot g(2) \xrightarrow{\bullet} r(2) = 1 \\
f(-1) = 0 = q(-1) \cdot g(-1) \xrightarrow{\bullet} r(-1) = 0
\end{cases}$$

$$\uparrow \begin{cases}
f(1) = -2 = q(1) \cdot g(2) \xrightarrow{\bullet} r(1) = -2 \\
f(2) = 1 = q(2) \cdot g(2) \xrightarrow{\bullet} r(2) = 1 \\
f(-1) = 0 = q(-1) \cdot g(-1) \xrightarrow{\bullet} r(-1) = 0
\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & | & -2 \\
4 & 2 & 1 & | & 1 \\
1 & -1 & 1 & | & 0
\end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & | & \frac{4}{3} \\
0 & 1 & 0 & | & -1 \\
0 & 0 & 1 & | & -\frac{7}{3}
\end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
r(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{7}{3}
\end{bmatrix}$$

11. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$ en $\mathbb{Q}[X]$.

$$\begin{cases} f(X) = X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1 \\ g(X) = X \cdot (X - 1) \cdot (X + 1) \end{cases} \Rightarrow f = q(X) \cdot g(X) + r(X) \text{ con } \operatorname{gr}(\underbrace{aX^2 + bX + c}) \leq 2$$

$$\begin{cases} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_{=0} + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_{=0} + r(1) = 3 \\ \end{cases}$$

$$f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_{=0} + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 = \begin{cases} 2 & n \text{ impar } \\ 1 & n \text{ par } \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{sistema de ecuaciones de } r(X)} \begin{cases} r(0) = c = 1 \\ r(1) = a + b + 1 = 3 \rightarrow a + b = 2 \\ r(-1) = a - b + 1 = \begin{cases} 2 \rightarrow a - b = 1 & n \text{ impar } \\ 1 \rightarrow a - b = 0 & n \text{ par } \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{n}{\text{impar}} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & | 2 \\ 1 & -1 & | 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & | \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \overbrace{r_{impar}(X) = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1} \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} \frac{n}{\text{par}} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & | 2 \\ 1 & -1 & | 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | 1 \\ 0 & 1 & | 1 \end{pmatrix} \rightarrow \overbrace{r_{par}(X) = X^2 + X + 1} \end{cases} \checkmark$$

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $f(X) = X^6 + X^3 - 2$.

Primera raíz: $f(\alpha_1=1)=0 \to f(X)=q(X)\cdot (X-1)$. Busco q(X) con algoritmo de división. $X^6 + X^3 - 2 \left| \begin{array}{c|c} X-1 \\ \hline X^5 \\ \hline X^5 \\ \hline -X^5 + X^4 \\ \hline & X^4 + X^3 \\ \hline & -X^4 + X^3 \\ \hline & 2X^3 \\ \hline & -2X^3 + 2X^2 \\ \hline & 2X^2 \\ \hline & -2X^2 + 2X \\ \hline & 2X - 2 \\ \hline & -2X + 2 \\ \hline \end{array} \right.$

El cociente $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ se puede factorizar en grupos como $q(X) = (X^2 + X + 1) \cdot (X^3 + 2)$. Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener

 $f \in \mathbb{C}[X]$ salen de esos dos polinomios.

$$X^{2} + X + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X^{3} + 2 = 0 \xrightarrow{\text{exponencial}} \begin{cases} r^{3} = 2 \rightarrow r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ con } k = 0, 1, 2. \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_{4} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \alpha_{5} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \alpha_{6} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

13. Sea $w=e^{\frac{2\pi}{7}i}$. Probar que $w+w^2+w^4$ es raíz del polinomio X^2+X+2

Voy a usar que si
$$w \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^6 w^j = 0 \quad (w \neq 1)$$

Si $f(X) = X^2 + X + 2$ y $w + w^2 + w^4$ es raíz $\Rightarrow f(w + w^2 + w^4) = 0$
 $(w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8}_{=w} + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2 \cdot \sum_{j=0}^6 w^j = 0 \quad \checkmark$

14.

- i) Probar que si $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces $X^2 + X 1 = [X (w + w^{-1})] \cdot [X (w^2 + w^{-2})]$.
- ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

i) Voy a usar que si
$$w \in G_5 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^4 w^j = 0 & (w \neq 1)^{\frac{1}{2}} \\ w^k = w^{r_5(k)} \frac{1}{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})] = \\ X^2 - (w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + \underbrace{(w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\stackrel{1}{=}} = \\ = X^2 - X\underbrace{(w^2 + w^{-2} + w + w^{-1})}_{\stackrel{1}{=}} + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\stackrel{1}{=}} = \\ = X^2 - X\underbrace{(w + w^2 + w^3 + w^4)}_{\stackrel{1}{=}} + \underbrace{-1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{\stackrel{1}{=}} = X^2 - X\underbrace{(-1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{\stackrel{1}{=}})}_{=0} - 1 = \\ = X^2 + X - 1 \quad \checkmark$$

ii) Calculando las raíces a mano de $X^2+X-1 \to \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$

Pero del resultado del inciso i) tengo que:

Pero del resultado del inciso i) tengo que :
$$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow{\text{sé que una raíz dada}} w + w^{-1} = w + \overline{w} = 2 \operatorname{Re}(w) = 2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\cos \theta \ge 0, \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\rightarrow \left| \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \right| \quad \checkmark$$

15.

- i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y g si y sólo sí a es raíz de (f : g).
- ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X 2$ sabiendo que tiene una raíz en común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.
- i) Hacer!
- ii) Busco el (f:g): $X^{4} + 3X - 2 = (X^{4} + 3X^{3} - 3X + 1) \cdot 1 + (-3X^{3} + 6X - 3)$ $X^4 + 3X^3 - 3X + 1 = \left(-3X^3 + 6X - 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - 1\right) + \left(2X^2 + 2X - 2\right)$ $-3X^3 + 6X - 3 = \left(2X^2 + 2X - 2\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}X + \frac{3}{2}\right) + 0$ $(f:g) = X^2 + X - 1 \xrightarrow{\text{raices}} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ $X^4 + 3X - 2 = (X^2 + X - 1) \cdot (X^2 - X + 2) + 0$
- **16.** Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i)
$$f = X^5 - 2X^3 + X$$
, $a = 1$,

ii)
$$f = X^6 - 3X^4 + 4$$
, $a = i$,

iii)
$$f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2,$$

iv)
$$f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3$$
, $a = 2$.

- i) $f = X^5 2X^3 + X$, a = 1, Todos casos de factoreo: $\underline{f} = X^5 - 2X^3 + X = X(X^4 - 2X^2 + 1) = X(X^2 - 1)^2 = X(X - 1)^2(X + 1)^2(X + 1)^2 = X(X - 1)^2(X + 1)^2(X + 1)^2 = X(X - 1)^2(X + 1)$ La multiplicidad de a=1 como raíz es 2.
- **3** Errores? Mandanos tu solución, *prolija*, así lo arreglamos.

ii)
$$f = X^6 - 3X^4 + 4$$
, $a = i$,

Si a = i es raíz, entonces -i también lo es en un polinomio $\mathbb{R}[X]$

$$f = (X^2 + 1)(X^4 - 4X^2 + 4) = (X^2 + 1)(X^2 - 2)^2 = (X^2 + 1)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 = (X - i)^1(X + i)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 = (X - i)^1(X + i)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 = (X - i)^1(X - i)(X - i)(X$$

La multiplicidad de a = i como raíz de f es 1.

iii)
$$f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a=2,$$

 $f = (X-2)^3((X+2) + (X+1)) = (X-2)^3(2X+3)$
La multiplicidad de $a=2$ como raíz de f es 3.

iv)
$$f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3$$
, $a = 2$, $f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3 = (X-2)^2(X-2)(X+2) - 4(X-2)^3 = (X-2)^3(X+2-4) = (X-2)^4$ La multiplicidad de $a = 2$ como raíz de f es 4.

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene solo raíces simples en \mathbb{C} .

$$f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$$

$$\xrightarrow{\text{derivo}} f' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} \iff f' = n(n+1)X^{n-1}(X-1)$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n > 1 \Rightarrow f'(\alpha = 1) = 0 \text{ y } f'(\alpha = 0) = 0 \\ n = 1 \Rightarrow f'(\alpha = 1) = 0 \end{cases}$$

Para que las raíces α , de f no sean simples, es necesario que $f'(\alpha) = 0$. Por lo tanto, estudio solo los valores de raíces encontrados para la derivada. Si f ha de tener raíces dobles, estás deberían ser $\alpha = 1$ o $\alpha = 0$. Entonces:

$$\begin{cases} f(\alpha = 1) = a - 1 \Rightarrow f(1) \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \neq 1 \\ f(\alpha = 0) = a \Rightarrow f(0) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$$

Si $a = 0 \land n = 1 \Rightarrow f$ tiene solo una raíz simple en 0.

Si $a \neq 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $a \neq 0 \land n > 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples.

seguramente hay una mejor forma de expresar la respuesta.

18. Controlar y Pasar

19. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en \mathbb{C} . Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

Si f tiene raíces múltiples $\alpha_k \Leftrightarrow f(\alpha_k) = f'(\alpha_k) = 0$, por lo tanto tanto comienzo buscando las raíces de f' para sacarme ese a de en medio.

$$f' = 20X^{19} + 80X^{9} = 20X^{9}(X^{10} + 4) \Rightarrow f' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X^{10} = -4 \Leftrightarrow X = \sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi} \ k \in \mathbb{Z}_{[0,9]} \end{cases}$$

Hay de momento 11 raíces de f'. Me interesa saber si son raíces de f:

$$f(0) = 2a \Rightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$f = (X^{10})^2 + 8X^{10} + 2a \Rightarrow f(\alpha = X^{10}) = -4 = (-4)^2 + 8(-4) + 2a = -16 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 8$$

Entonces:

Si
$$a = 0 \Rightarrow f = X^{10}(X^{10} + 8)$$

$$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ o } X^{10} = -8, \text{ donde } \left[\mu(0; f) = 10\right] \text{y } \left[\mu(\sqrt[10]{8}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}); f\right) = 1 \text{ } k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}\right].$$

11 raíces distintas.

Si
$$a = 8 \Rightarrow f = X^{20} + 8X^{10} + 16 = (X^{10} + 4)^2$$

 $\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X^{10} = -4$, donde $\mu(\sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}); f) = 2 \ k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}$.

10 raíces distintas.

20. ** Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow \bigcirc ,

o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX

21.

- i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.
- ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.

i)
$$(X-1)^2 \mid f \ \forall a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow 1 \text{ es } por \ lo \ menos \ ra\'{} ra\'{}$$

Calculando f(1) y f'(1) se comprueba. \checkmark

ii)
$$(X-1)^3 \mid f \Leftrightarrow f''(1) = 0$$

 $\Rightarrow f'' = 30X^4 - 40X^3 + 12(1+a)X^2 - 12aX + 2(1+a) \xrightarrow{\text{evalúo}} f''(1) = 2a$
 $\Rightarrow f''(1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$$(X-1)^3 \mid f \iff a=0 \qquad \checkmark$$

Observar que si $a \neq 0$, 1 es una raíz doble de f de otra forma es una raíz por lo menos triple.

22. 😭 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \emptyset$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \P$.

23. 🚼 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \mathbf{2}$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \mathbf{7}$.

24. ** Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX

25. 😭 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX

26. 🚼 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc$.

27. 🚼 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en LATEX $\rightarrow \bigcirc$.

28. 🚼 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX

29. ** Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \emptyset$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \P$.

30. * Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX

31. 🚼 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc$.

32. 😭 Falta hacerlo!

¿Errores? Mandanos tu solución, prolija, así lo arreglamos.

Ir a índice ↑

actualizado: 15/07/2024

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX

33. Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc$.

34. ** Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \emptyset$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \P$.

35. 😭 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \emptyset$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \P$.

36. Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to ②$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc$.

37. 🚼 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to 2$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to 7$.

38. 😭 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \mathbf{Q}$, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX $\to \mathbf{Q}$.



Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en \LaTeX .

actualizado: 15/07/2024



Ejercicios extras:

1.

a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} > 0$ tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\frac{3\pi}{2}$

- b) Para cada valor de **c** hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

$$f(r(-i)) = (r(-i))^{6} - 4(r(-i))^{5} - (r(-i))^{4} + 4^{3} + 4(r(-i))^{2} + 48(r(-i)) + \mathbf{c} = \begin{cases} \operatorname{Re} : -r^{6} - r^{4} - 4r^{2} + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = r^{6} + r^{4} + 4r^{2} \\ \operatorname{Im} : r(4r^{4} - 4r^{2} - 48) = 0 \xrightarrow{\text{bicuadrática}} r^{2} = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto si $\mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 = (r^2)^3 + (r^2)^2 + 4r^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{c} = 48}$ con raíces $\pm \sqrt{3}i$ dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$

b) Debe ocurrir que $(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$ $X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48 \mid X^2 + 3$ $-X^6 - 3X^4$ $-4X^5 - 4X^4 + 4X^3$ $\begin{array}{r}
311. \\
-4X^5 - 1 \\
\hline
-3X^4 \\
\hline
-4X^5 - 4X^4 + 4X^3 \\
4X^5 + 12X^3 \\
\hline
-4X^4 + 16X^3 + 4X^2 \\
4X^4 + 12X^2 \\
\hline
-16X^3 + 16X^2 + 48X \\
-16X^3 - 48X \\
\hline
-16X^2 + 48 \\
-16X^2 - 48 \\
\hline
0$

 $f = (X^2 + 3)\underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_q$ como f tiene al menos una raíz doble puedo ver las

raíces de la derivada de q:

$$q' = (4X^3 - 12X^2 - 8X + 16)' = 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 4) = 0 \xrightarrow{\text{Posibles raices, Gauss : } \atop +1, +2, +4} q'(1) = 0, \text{ pero } g(1) \neq 0$$

$$0 \Rightarrow f(1) \neq 0 \xrightarrow{\text{divido para} \atop \text{bajar grado}} X^3 - 3X^2 - 2X + 4 \left| \frac{X - 1}{X^2 - 2X - 4} \right| = \frac{-X^3 + X^2}{-2X^2 - 2X} \xrightarrow{-2X^2 - 2X^2 - 2X} \xrightarrow{-2X^2 - 2X^2 - 2X^2 - 2X^2} \xrightarrow{-2X^2 - 2X^2 - 2X^2 - 2X^2 - 2X^2} \xrightarrow{-2X^2 - 2X^2 - 2X^2 - 2X^2} \xrightarrow{-2X^2 - 2X^2} \xrightarrow{-2X^2 - 2X^2 - 2X^2} \xrightarrow{-2X^2 - 2X^2 - 2X^2} \xrightarrow{-2X^2 - 2X^2} \xrightarrow{-2X^2 - 2X^2 - 2X^2} \xrightarrow{-2X^2 - 2X^2}$$

 $h^2 = (X^2 - 2X - 4)^2 \rightarrow \text{no la vi venir}$

factorizaciones:

$$\begin{bmatrix}
\mathbb{Q}[X] & \to & f = (X^2 + 3)(X^2 + 3)(X^2 - 2X - 4)^2 \\
\mathbb{R}[X] & \to & f = (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))(X^2 - 2X - 4)^2 \\
\mathbb{C}[X] & \to & f = (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))(X - 3i)^2(X + 3i)^2
\end{bmatrix}$$

2. Factorizar el polinomio $P = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49$ como producto de irreducibles en $\mathbb{C}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ sabiendo que $\sqrt{7}$ es una raíz múltiple.

Un polinomio con coeficientes racionales, y una raíz irracional $\alpha=\sqrt{7}$, tendrá también al conjugado irracional $\alpha=\sqrt{7}$, $\overline{\alpha}=-\sqrt{7}$

Si agregamos la información de que $\sqrt{7}$ es por lo menos raíz doble, obtenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow (X^2-7) \,|\, f \\ \sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow (X^2-7)^2 = X^4-14X^2+49 \,|\, f \quad \checkmark \end{array} \right.$$

¹Estoy usando la misma notación para conjugado racional y conjugado complejo. ¿Está bien? No sé, no me importa mientras se entienda.

$$f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X^2 - X + 1) \xrightarrow{\text{resolvente}} \begin{cases} \alpha_{+,-} = \frac{1 \pm u}{2} \\ w^2 = -3 \end{cases}$$

$$\to f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$$

$$\begin{cases} \mathbb{Q}[X] \to f = (X^2 + 7)^2 (X^2 - X + 1) \\ \mathbb{R}[X] \to f = (X + \sqrt{7})^2 (X - \sqrt{7})^2 (X^2 - X + 1) \\ \mathbb{C}[X] \to f = (X + \sqrt{7})^2 (X - \sqrt{7})^2 (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{cases}$$

- **3**. Hallar todos los polinomios mónicos $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:
 - i) $1-\sqrt{2}$ es raíz de f;
 - ii) $X(X-2)^2 \mid (f:f');$
 - iii) $(f: X^3 1) \neq 1$;
 - iv) f(-1) = 27;
 - i) Como $f \in \mathbb{Q}[X]$ si $\alpha_1 = 1 \sqrt{2}$ es raíz entonces $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$ para que no haya coeficientes irracionales en el polinomio.

$$(X - (1 - \sqrt{2})) \cdot (X - (1 + \sqrt{2})) = X^2 - 2X - 1$$

Por lo tanto $X^2 - 2X - 1$ será un factor de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

- ii) Si $X(X-2)^2 \mid (f:f') \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \text{ raı́z simple de } f' \Rightarrow \text{ raı́z doble de } f \\ \alpha_4 = 2 \text{ raı́z simple de } f' \Rightarrow \text{ raı́z doble de } f \end{cases}$ Por lo tanto $X^2(X-2)^3$ serán factores de f.
- iii) Si $(f: X^3 1) \neq 1$ quiere decir que por lo menos alguna de las 3 raíces de: $X^3-1=(X-1)\cdot (X-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}))\cdot (X-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}))$ tiene que aparecer en la factorización de f. Pero parecido al item i) si tengo una raíz compleja, también necesito el conjugado complejo, para que no me queden coeficientes de f en complejos,

 $X^3 - 1 = (X - 1) \cdot (X^2 + X + 1)$, me quedaría con el factor de menor grado si eso no rompe otras condiciones.

Por lo tanto (X-1) o (X^2+X+1) aparecerá en la factorización de f.

iv) f(-1) = 27. Hasta el momento:

$$\begin{cases} f_1 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X^2 + X + 1) \to f_1(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot 1 = -54 \\ f_2 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \to f_2(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot (-2) = 108 \end{cases}$$

, ninguno cumple la condición iv).

Para encontrar un polinomio que cumpla lo pedido tomaría el f_2 que tiene menor grado de los dos y lo multiplicaría por $(X-\frac{3}{4})$ de manera que $f=(X^2-2X-1)\cdot X^2\cdot (X-2)^3\cdot (X-1)\cdot (X-\frac{3}{4}) \to \boxed{f(-1)=27}$ así cumpliendo todas las condiciones.

ullet4. Factorizar como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ al polinomio

$$f = X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15$$

sabiendo $(f: X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15) \neq 1$

$$X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 = \left(X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5\right) \cdot \left(X + 3\right) + \left(-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30\right)$$

$$X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5 = \left(-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}X + \frac{3}{10}\right) + \left(14X^2 - 14X + 14\right)$$

$$-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30 = \left(14X^2 - 14X + 14\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}X - \frac{15}{7}\right) + 0$$

* Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc$,

o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

♦5. Sea $(f_n)_{(n\geq 1)}$ la sucesión de poliniomios en $\mathbb{R}[X]$ definida como: $f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20$ y $f_{n+1} = (X+2)^2 f'_n + 3f_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que -2 es raíz doble de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por inducción en n:

q(n) = "-2 es raíz doble de f_n ", $\forall n \in \mathbb{N}$

Caso base i,q(1) es V?

$$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20$$

$$f_1' = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 22X$$

$$f_1'' = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 22$$

$$f_1(-2) = 0$$

$$f_1'(-2) = 0$$

$$f_1''(-2) = -54 \neq 0$$

 $\therefore mult(-2, f_1) = 2 \Rightarrow -2$ es raíz doble de $f_1 \Rightarrow q(1)$ es V

Paso inductivo $\xi q(n) \Rightarrow q(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$?

HI: -2 es raíz doble de f_n

QPQ -2 es raíz doble de $f_{n+1} = (X+2)^2 f'_n + 3f_n$

-2 es raíz doble de $f_{n+1} \Leftrightarrow f_{n+1}(-2) = 0 \land f'_{n+1}(-2) = 0 \land f''_{n+1}(-2) \neq 0$

② ¿Errores? Mandanos tu solución, prolija, así lo arreglamos.

Ir a índice ↑

$$f_{n+1}(-2) = (-2+2)^2 f'_n(-2) + 3f_n = \underbrace{0f'n(-2)}_{=0} + 3f_n(-2) = 0$$

Por HI, se que $f_n(-2) = 0$ pues -2 es raíz múltiple de $f_n \Rightarrow f_{n+1}(-2) = 3f_n(-2) = 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$

$$f'_{n+1} = \underbrace{2(X+2)}_{=2X+4} f'_n + (X+2)^2 f''_n + f'_n$$

 $f'_{n+1}(-2) = 2\underbrace{\left(-2+2\right)}_{=0} f'_n + \underbrace{\left(-2+2\right)}_{=0} f''_n + f'_n = f'_n \underbrace{=0}_{HI} 0 \text{ pues se que -2 es raı́z doble de } f_n \Rightarrow -2 \text{ es raı́z de}$

$$f'_n \Rightarrow mult(-2, f_{n+1}) \ge 2$$

$$f_{n+1}'' = 2f_n' + (2x+4)f_n'' + 2(x+2)f_n'' + (x+2)^2 f_n''' + f_n''$$

$$f_{n+1}''(-2) = 2f_n'(-2) + \underbrace{(-4+4)}_{=0} f_n''(-2) + 2\underbrace{(-2+2)}_{=0} f_n''(-2) + \underbrace{(-2+2)^2}_{=0} f'''n(-2) + f''n(-2) = 2f_n'(-2) + \underbrace{(-2+2)^2}_{=0} f'''n(-2) + \underbrace{(-2+2)^$$

$$f_n''(-2)$$

Por HI, $f_n'(-2)=0$ y $f_n''(-2)\neq 0$ \therefore $f_{n+1}''(-2)\neq 0 \Rightarrow mult(-2,f_{n+1})=2 \Rightarrow -2$ es raíz doble de $f_{n+1}\Rightarrow (q(n)\Rightarrow q(n+1),\ \forall n\in\mathbb{N})$

Luego, queda probado que -2 es raíz doble de $f \ \forall n \in \mathbb{N}$.



a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ (positivo) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

- b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$
 - a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ (positivo) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

Solución:

Limpiando los denominadores de f se obtiene el polinomio g con las mismas raíces:

$$g = 3X^5 + nX^4 - 8X^3 + 11X^2 - 3X = X(\underbrace{3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3}_{h})$$

Por enunciado ignoramos la raiz nula y utilizando el Lema de Gauss buscamos las raices racionales de

$$h = 3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3$$

Aquí, $a_0 = -3 \text{ y } a_n = 3$

$$Div(a_0) = Div(a_n) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

Como busco raíces enteras, las busco en el conjunto:

$$\{\pm 1, \pm 3\}$$

Chequeo:

$$h(-1) = 0 \iff n = -19 \notin \mathbb{N}$$

 $h(1) = 0 \iff n = -3 \notin \mathbb{N}$
 $h(-3) = 0 \iff \boxed{n=5} \in \mathbb{N}$
 $h(3) = 0 \iff n = \frac{67}{9} \notin \mathbb{N}$

Rta: n=5 es el único valor de $n\in\mathbb{N}$ para los cuales el polinomio f tiene una raíz entera no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

Solución:

Primero factorizo la raiz nula de de f

$$f = X^5 + \frac{5}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X = X(X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1)$$

Se, por el item (a), que -3 es una de las raices racionales de f. Busco otras posibles raices racionales en el polinomio h (con n = 5) obtenido en el item (a) en el conjunto $\{\pm \frac{1}{3}\}$

$$h(-\frac{1}{3}) = -\frac{208}{27}$$

 $h(\frac{1}{3}) = 0 \implies \frac{1}{3}$ es una raiz racional de f.

Factorizo el polinomio f diviendolo por el producto de las dos raíces encontradas $(X+3) \cdot (X-\frac{1}{3}) = X^2 + \frac{8}{3} - 1$

Factorizo el polinomio cuadratico $X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$$x_{+} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \text{ y } x_{-} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$$

Rta:

 $f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)) \in \mathbb{C}$ con todos sus factores de multiplicidad 1 y por lo tanto irreducibles.

∴ $f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2-X+1) \in \mathbb{R}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raices complejas y por lo tanto irreducibles en \mathbb{R} .

 $f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2-X+1) \in \mathbb{Q}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raices complejas y por lo tanto irreducibles en \mathbb{Q} .