Álgebra I Práctica 6 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I Facultad de Ciencias Exactas y Naturales UBA

Choose your destiny:

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:
 - 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
 - 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14.
- Ejercicios Extras
- **1**. **2**. **3**. **4**.

Notas teóricas:

Raíces de un número complejo:

- Sean $z, w \in \mathbb{C} \{0\}$, $z = re^{\theta i}$ y $w = se^{\varphi i}$ con $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. Entonces $z = w \iff \begin{cases} r = s \\ \theta = \varphi + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- raíces n-esimas: $w^n = z \to \begin{cases} s^n = r \\ \varphi \cdot n = \theta + 2k\pi & \to \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \\ n \text{ raíces distintas} \to w_k = se^{\varphi_k i}, \text{ donde } s = \sqrt{r} \text{ y } \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$
- $G_n = \{ w \in \mathbb{C} / w^n = 1 \} = \{ e^{\frac{2k\pi}{n}i} : 0 \le k \le n 1 \}$
- (G_n, \cdot) es un grupo abeliano, o conmutativo.
 - $\forall w, z \in G_n, wz = zw \ y \ zm \in G_n.$
 - $-1 \in G_n, \ w \cdot 1 = 1 \cdot w = w \qquad \forall w \in G_n.$
 - $-w \in G_n \Rightarrow \exists w^{-1} \in G_n, \ w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1$ $* \overline{w} \in G_n, \ w \cdot \overline{w} = |w|^2 = 1 \Rightarrow \overline{w} = w^{-1}$
- Propiedades: $w \in G_n$
 - $-m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \mid m \Rightarrow w^m = 1.$
 - $-m \equiv m'(n) \Rightarrow w^m = w^{m'} \quad (w^m = w^{r_n(m)})$
 - $-n \mid m \iff G_n \subseteq G_m$
 - $-G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
 - Si (G,\cdot) es un grupo y #G=n decimos que G siempre es cíclico si $\exists\,w\in G/G=\{1,w,w^2,\ldots,w^{n-1}\}$
 - * Observación: G_n es un grupo cíclico, ej, $w_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}} \to (w_1)^k = w_k$ \to las potencias de w_1 generan todo $G_n = \{1, w_1, w_1^2, \dots, w_1^{n-1}\}$
 - w es raíz n-ésima primitiva de 1 si: $G_n = \{1, w, w^2, \dots, w^{n-1}\} = \{w^k : 0 \le k \le n-1\}$ Ejemplo: i, -i son primitivas de $G_4 = \{1, i, -1, -i\} = \{i^k : 0 \le k \le 3\}$, pero 1 y -1 no son raíces primitivas de G_4 .
- Definición: Sea w una raíz primitiva de orden n (el orden de $w \in G_n$, ord $(w) = \min \{k \in \mathbb{N} / w^k = 1\}$)
 - $-w^m = 1 \iff n \mid m$
 - Observación: Si $w \in G_n \Rightarrow \operatorname{ord}(w) \mid n$
- La suma de las raíces n-ésimas de 1 da: $\sum_{k=0}^{n-1} w_1^k = \frac{w_1^n 1}{w_1 1} = 0$ pues $w_1 \neq 1$
- El producto de las raíces n-ésimas de 1 da: $\prod_{k=0}^{n-1} w_1^k = w_1^{0+1+\dots+n-1} = w_1^{\frac{n(n-1)}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ -1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$
- Sea $w \in G_n$ primitiva. Entonces
 - $-w^k$ es primitiva $\iff k \perp n$
 - $-w_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ es primitiva $\iff k \perp n$
 - En particular para n=p primo: w_k es primitiva para $1 \le k < p$ o sea si $w \in G_p$ y $w \ne 1$, entonces w es primitiva
- w es raíz primitiva de G_n y $k \mid n \Rightarrow w^k$ es primitiva de $G_{\frac{n}{k}}$

Ejercicios de la guía:

T Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \odot$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc$.

Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow \bigcirc \bigcirc$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$.

* Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \bigcirc 3$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc 3$.

🚰 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \odot$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc$.

Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \odot$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc$.

6.

- i) Determinar la formar binomial de $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17}$.
- ii) Determinar la forma binomial de $(-1 + \sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i)
$$(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$$

$$(\sqrt{3} - i)^n = 2^n e^{i\frac{11}{12}\pi n} = 2^{n+1} \cdot 2e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$\to \begin{cases} 2^n = 2^n \\ \frac{11}{12}\pi n = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \to 11n = 8 + 8k \xrightarrow{8(k+1)} \boxed{n \equiv 0 \ (8)} \end{cases}$$

ii)
$$(-\sqrt{3}+i)^n \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
 es un número real negativo.

Un número real negativo tendrá un $arg(z) = \pi$

Un número real negativo tendrá un
$$\arg(z) = \pi$$

$$\underbrace{(-\sqrt{3}+i)^n}_{2^n e^{i\frac{5}{6}\pi n}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}_{e^{\frac{\pi}{3}i}} = 2^n e^{i(\frac{5}{6}n + \frac{1}{3})\pi} \to \theta = (\frac{5}{6}n + \frac{1}{3})\pi$$

$$\xrightarrow{\theta = \pi + 2k\pi} \cancel{\pi} \frac{5}{6} n + \frac{\cancel{\pi}}{3} = \cancel{\pi} + 2k\cancel{\pi} \xrightarrow{\text{acomodo}} 5n \equiv 4 \text{ (12)} \xrightarrow{\text{multiplico}} \boxed{n \equiv 8 \text{ (12)}}$$

iii)
$$\arg((-1+i)^{2n}) = \frac{\pi}{2}$$
y $\arg((1-\sqrt{3}i)^{n-1}) = \frac{2}{3}\pi$

😭 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to \odot$, o mejor aún si querés subirlo en $\LaTeX \to \bigcirc$.

🕢 ¿Errores? Mandanos tu solución, prolija, así lo arreglamos.

Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0$

$$3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3z^5}_{\in \mathbb{C}} = \underbrace{-2|z|^5 - 32}_{\in \mathbb{D}} \iff \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(3z^5) = -2|z|^5 - 32 \\ \operatorname{Im}(3z^5) = 0 \end{array} \right\} \quad \checkmark$$

De la ecuación de la parte imaginaria:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(3z^5) = 3 \cdot \frac{z^5 - \overline{z}^5}{2} = 0 \iff z^5 = \overline{z}^5 \iff |z|^5 e^{5\theta i} = |z|^5 e^{-5\theta i} \iff \begin{cases} 5\theta = -5\theta + \frac{2k\pi}{2} \\ -5\theta k = \frac{1}{5}k\pi \end{cases} \operatorname{con} k \in [0, 4] \end{cases}$$

De la ecuación de la parte real:

De la ecuacion de la parte real:
$$\begin{cases}
\operatorname{Re}(3z^{5}) = 3 \cdot \frac{z^{5} + \overline{z}^{5}}{2} = 3 \cdot \frac{|z|^{5}e^{5\theta i} + |z|^{5}e^{-5\theta i}}{2} = 3|z|^{5}\cos(5\theta) = -2|z|^{5} - 32 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow |z|^{5}(3\cos(5\theta) + 2) = -2^{5} \xrightarrow{\text{evaluando}} |z|^{5}(3\cos(k\pi) + 2) = -2^{5} \begin{cases}
\xrightarrow{k} & 0 < |z|^{5}(3+2) \neq -2^{5} \\
\xrightarrow{\text{par}} & |z|^{5}(-3+2) = -2^{5} \Leftrightarrow |z| = 2
\end{cases}$$

$$\Rightarrow z_{k} = 2e^{\theta_{k}i} \operatorname{con} \theta_{k} = \frac{1}{5}k\pi \operatorname{con} k \in [0, 4]$$

Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales la ecuación $z^n + i\overline{z}^2 = 0$, tenga exactamente 6 soluciones y resolver en ese caso.

$$\frac{\text{acomodo la}}{\text{ecuación}} z^n = -i\overline{z}^2 \xrightarrow[\text{en notación exponencial}]{r = |z|, \text{ expreso todo}} \left\{ \begin{array}{l} z^n = r^n e^{n\theta i} \\ \overline{z}^2 = r^2 e^{-2\theta i} \\ -i = e^{\frac{3}{2}\pi} \end{array} \right\} \checkmark$$

$$\frac{\text{reescribo ecuación con}}{\text{notación exponencial}} r^n e^{n\theta i} = r^2 e^{(\frac{3}{2}\pi - 2\theta)i} \iff \left\{ \begin{array}{l} n\theta = \frac{3}{2}\pi - 2\theta + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ r^n = r^2 \to r^2 (r^{n-2} - 1) = 0 \end{array} \right\}$$

La ecuación de r:

r=0 aporta una solución trivial para cualquier $n\in\mathbb{N}$.

r=1 es un comodín que me deja usar cualquier n para jugar con la ecuación de θ .

n=2 es un valor que daría una solución para cada $r \in \mathbb{R}_{>0}$. No sirve porque necesito solo 6 soluciones.

$$\begin{array}{l} \text{La ecuación } de \ \theta \colon \\ \xrightarrow{r=1} n \text{ libre} \ (n+2)\theta = (\frac{3}{2}+2k)\pi \xrightarrow{n+2\neq 0} \theta = \frac{1}{n+2}(\frac{3}{2}+2k)\pi \xrightarrow{n=3\text{C\'omo justificar esto elegantemente?}} \theta = \frac{3+4k}{10}\pi \\ \text{Las } 6 \text{ soluciones para } n=3 \colon \end{array}$$

Las 6 soluciones para n=3

Las 6 soluciones para
$$n = 3$$
:
$$z^{n} + i\overline{z}^{2} = 0 \iff \begin{cases} n = 3 \\ z = 0, \text{ cuando } r = 0 \\ 0 \\ z_{k} = e^{\theta_{k}i} \text{ con } \theta_{k} = \frac{3+4k}{10}\pi, k \in [0, 4] \end{cases}$$

11. Voy a estar usando las siguientes propiedades en
$$G_n$$
:
$$\begin{cases} w^n = 1 \Rightarrow w^k = w^{r_n(k)} \\ \overline{w}^k = w^{r_n(-k)} \end{cases}$$
 Si $w \in G_n \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n, \text{ lo uso para saber con cuales raíces hay que tener cuidado} \\ \text{Si } w \in G_p \text{ con } p \text{ primo } \Rightarrow w \text{ es primitiva} w^k \text{es primitiva} \iff k \perp n \end{cases}$

i) Calcular $w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

Raíces de G_7 de interés: 7 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.

 $Si \ w = 1$:

$$w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = 6$$

$$Si \ w \neq 1$$
:

$$\begin{array}{ll}
Si & w \neq 1: \\
w + \underbrace{\overline{w}}_{w^6} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = w + w^6 + w^2 + 2w^3 + w^4 - \underbrace{(w^7)^5}_{=1} w^3(1 - w^2) = \\
= -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6}_{=0} = -1 \quad \checkmark
\end{array}$$

ii) Calcular $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

Raíces de G_3 de interés: 3 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.

$$Si \ w = 1$$
:

$$w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8 = 10$$

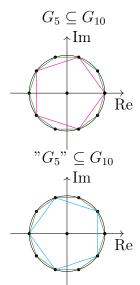
$$Si \ w \neq 1$$
:

$$\underbrace{w^{73}}_{w} + \underbrace{\overline{w} \cdot w^{9}}_{w^{2} \cdot 1} + 8 = -1 + \underbrace{1 + w + w^{2}}_{=0} + 8 = 7$$

iii) Calcular $1+w^2+w^{-2}+w^4+w^{-4}$ para cada $w\in G_{10}.$

Raíces de G_{10} de interés: $2 \mid 10 \land 5 \mid 10$. 10 es par $\Rightarrow w = \pm 1$ y raíces de G_2 y de G_5 se hacen a parte.

- $Si \ w = \pm 1$: $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 5$
- $Si \ w \in G_{10} \ y \ w \neq \pm 1$: $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 1 + w^2 + w^8 + w^4 + w^6 =$ $= \sum_{k=0}^{4} (w^2)^k = \frac{(w^2)^5 - 1}{w^2 - 1} = \underbrace{\frac{1}{w^{10} - 1}}_{w^2 - 1} = 0$



iv) Calcular $w^{14}+w^{-8}+\overline{w}^4+\overline{w^{-3}}$ para cada $w\in G_5$

Si
$$w = 1$$
:
 $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}} = 4$

Si
$$w \neq 1$$
:
 $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}} = w^4 + w^2 + w + w^3 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = -1$

12.

i) Sea
$$w \in G_{36}$$
, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$

Sé que si
$$w \in G_{36} \Rightarrow \begin{cases} w^{36} = 1 \\ \sum_{k=0}^{35} w^k = 0 \end{cases}$$

Como $w^4 \neq 1$ sé que $w \neq \pm 1$. Si no tendría que considerar casos particulares para la suma.

Si
$$\sum_{k=7}^{60} w^{4k} = \underbrace{\sum_{k=7}^{60} w^{4k} + \sum_{k=0}^{6} w^{4k}}_{\sum_{k=0}^{60} w^{4k}} - \sum_{k=0}^{6} w^{4k} = \sum_{k=0}^{60} w^{4k} - \sum_{k=0}^{6} w^{4k} = \frac{(w^4)^{61} - 1}{w^4 - 1} - \frac{(w^4)^7 - 1}{w^4 - 1} = \frac{(w^4)^{61} - (w^4)^7}{w^4 - 1}$$

$$\frac{61 = 9 \cdot 6 + 7}{w^3 6 = 1} \underbrace{(w^{36})^{6} \cdot (w^4)^7 - (w^4)^7}_{==0} \rightarrow \sum_{k=7}^{60} w^{4k} = 0$$

ii) Sea
$$w \in G_{11}$$
, $w \neq 1$. Calcular Re $\left(\sum_{k=0}^{60} w^k\right)$.

Sé que si
$$w \in G_{11} \Rightarrow \begin{cases} w^{11} = 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{10} w^k = 0 \\ 11 \text{ es impar } \Rightarrow -1 \not\in G_{11} \end{cases}$$

Como $w \neq 1$ no calculo caso particular para la suma. Me piden la parte real $\xrightarrow{\text{uso}} \text{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.

Probé hacer la suma de Gauss como en el anterior, pero no llegué a nada, abro sumatoria y uso que $61 = 5 \cdot 11 + 6$, porque hay 61 sumandos.

$$\sum_{k=0}^{60} w^k = w^0 + \dots + w^{60} = 5 \cdot \underbrace{(w^0 + w^1 + \dots + w^9 + w^{10})}_{\text{agrupé usando: } w \in G^{11} \Rightarrow w^k = w^{r_{11}(k)}} + w^{55} + w^{56} + w^{57} + w^{58} + w^{59} + w^{60} = w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5$$

También voy a usar que si
$$w \in G_{11} \Rightarrow \overline{w}^k = w^{r_{11}(-k)}$$
 Re $\sum_{k=0}^{60} w^k = \sum_{k=0}^{60} w^k + \sum_{k=0}^{60} \overline{w}^k \stackrel{\bigstar}{=} \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^0 + \overline{w}^1 + \overline{w}^2 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^5}{2} = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^0 + \overline{w}^1 + \overline{w}^2 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^5}{2} = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^0 + \overline{w}^1 + \overline{w}^2 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^5}{2} = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^0 + \overline{w}^1 + \overline{w}^2 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^5}{2} = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^0 + \overline{w}^1 + \overline{w}^2 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^5}{2} = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^0 + \overline{w}^1 + \overline{w}^2 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^5}{2} = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^0 + \overline{w}^1 + \overline{w}^2 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^5}{2} = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^0 + \overline{w}^1 + \overline{w}^2 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^5}{2} = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^0 + \overline{w}^1 + \overline{w}^2 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^5}{2} = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^0 + \overline{w}^1 + \overline{w}^2 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^5}{2} = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^0 + \overline{w}^1 + \overline{w}^2 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^5}{2} = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^0 + \overline{w}^1 + \overline{w}^2 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^5}{2} = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 + \overline{w}^3 + \overline{w}^4 +$

$$= \frac{w^0}{2} + \underbrace{\frac{10^{10} w^k}{w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^{10} + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}_{k=0}}_{} = \underbrace{\frac{1}{w^0}}_{2} + \underbrace{\frac{10^{10} w^k}{w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^{10} + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}_{2}}_{} = \underbrace{\frac{1}{w^0}}_{2} + \underbrace{\frac{10^{10} w^k}{w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^{10} + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}_{2}}_{} = \underbrace{\frac{1}{w^0}}_{2} + \underbrace{\frac{10^{10} w^k}{w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^{10} + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}_{2}}_{} = \underbrace{\frac{1}{w^0}}_{2} + \underbrace{\frac{10^{10} w^k}{w^1 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^1 + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}_{2}}_{} = \underbrace{\frac{1}{w^0}}_{2} + \underbrace{\frac{10^{10} w^k}{w^1 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^1 + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}_{2}}_{} = \underbrace{\frac{1}{w^0}}_{2} + \underbrace{\frac{10^{10} w^k}{w^1 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^1 + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}_{2}}_{} = \underbrace{\frac{1}{w^0}}_{2} + \underbrace{\frac{10^{10} w^k}{w^1 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^1 + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}_{2}}_{} = \underbrace{\frac{1}{w^0}}_{2} + \underbrace{\frac{10^{10} w^k}{w^1 + w^3 + w^4 + w^5 + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}_{2}}_{} = \underbrace{\frac{1}{w^0}}_{2} + \underbrace{\frac{10^{10} w^k}{w^1 + w^3 + w^4 + w^5 + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}_{2}}_{} = \underbrace{\frac{1}{w^0}}_{2} + \underbrace{\frac{10^{10} w^k}{w^1 + w^3 + w^4 + w^5 + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}_{2}}_{} = \underbrace{\frac{1}{w^0}}_{2} + \underbrace{\frac{10^{10} w^k}{w^1 + w^3 + w^3 + w^7 + w^9 + w^8 + w^7 + w^9 + w^9 + w^8 + w^7 + w^9 + w^9$$

Sea $w=e^{\frac{2\pi}{3}i}$ raíz cúbica de la unidad y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por:

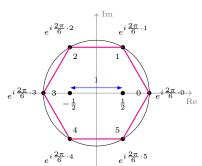
$$z_1 = 1 + w$$
 y $z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$. Concluir que $z_n \in G_6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hay que probar por inducción. Quiero probar:
$$p(n): z_n = \left\{ \begin{array}{ll} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{array} \right. \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:
$$\begin{cases} p(1): z_1 = 1 + e^{\frac{2\pi}{3}i} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i} \\ p(2): z_2 = \overline{1 + z_1^2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = 1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{array}{l} \textit{Paso inductivo:} \\ p(2k): z_{2k} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \; \text{Verdadero} \Rightarrow p(2k+2) \; \text{¿Verdadero?} \\ p(2k+1): z_{2k+1} = e^{\frac{\pi}{3}i} \; \text{Verdadero} \Rightarrow p(2k+3) \; \text{¿Verdadero?} \\ \begin{cases} z_{2k+2} = \overline{1 + z_{2k+1}^2} & \stackrel{\text{HI}}{\Longleftrightarrow} z_{2k+2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{\frac{\pi}{3}i}} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \; \checkmark \\ z_{2k+3} = \overline{1 + z_{2k+2}^2} & \stackrel{\text{HI}}{\Longleftrightarrow} z_{2k+3} = \overline{1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{-\frac{\pi}{3}i}} = e^{\frac{\pi}{3}i} \; \checkmark \end{cases}$$



Dado que p(1), p(2), p(2k), p(2k+1), p(2k+2), p(2k+3) resultaron ser verdaderas, entonces por el principio de inducción se concluye que p(n) también lo es $\forall n \in$

Dado que la sucesión z_n tiene solo 2 imágenes, para cualquier $n\in\mathbb{N}$ y teniendo en cuenta que $e^{-i\frac{2\pi}{6}}=e^{i\frac{2\pi}{6}\cdot 5}\in G_6\quad \forall n\in\mathbb{N}$

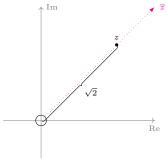
- Se define en $\mathbb{C} \{0\}$ la relación \mathcal{R} dada por $z \mathcal{R} w \iff z\overline{w} \in \mathbb{R}_{>0}$.
 - i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
 - ii) Dibujar en le plano complejo la clase de equivalencia de z=1+i.
 - i) Dado un $z = re^{i\theta}$, tengo que $z \in \mathbb{R}_{>0} \iff \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 \iff r > 0 \wedge \theta = 2k\pi \operatorname{con} k \in \mathbb{Z}$
 - Reflexividad: $z = re^{i\theta}$, $z \mathcal{R} z = r^2 e^{2\theta i}$ por lo tanto $z \mathcal{R} z \iff 2\theta = 2k\pi \iff \theta = k\pi$

 - Reflexividad: $z = re^{-\epsilon}$, $z \not k z = r^{-\epsilon}$ poi lo tanto $z \not k z \longrightarrow 2v 2\kappa n \longrightarrow v \kappa$ Simetría: $\begin{cases} z \mathcal{R} \ w = rse^{(\theta \varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \quad \checkmark \\ w \mathcal{R} \ z = rse^{(\varphi \theta)i} \iff \theta = -2k_2\pi + \varphi = 2k_3\pi + \varphi \quad \checkmark \end{cases}$ Transitividad: $\begin{cases} z \mathcal{R} \ w = rse^{(\theta \varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \\ w \mathcal{R} \ v = rte^{(\varphi \alpha)i} \iff \varphi = 2k_2\pi + \alpha \\ \Rightarrow z \mathcal{R} \ v \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi = 2\pi(k_1 + k_2) + \alpha = 2k_3\pi + \alpha \quad \checkmark \end{cases}$

La relación \mathcal{R} es de equivalencia.

Tengo que el $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. La clase \overline{z} estará formada por los $w \in \mathbb{C}$ tal

que: $w \mathcal{R} z \iff \arg(w) = \frac{1}{4}\pi$



Se define la siguiente relación \mathcal{R} en G_{20} :

$$z \mathcal{R} w \iff zw^9 \in G_2$$
.

- i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- ii) Calcular la cantidad de elementos que hay en cada clase de equivalencia.

i) Reflexividad:

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \Rightarrow z \mathcal{R} z \iff e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \cdot e^{i\frac{9}{10}\pi k_z} = e^{ik_z\pi} = \begin{cases} 1 & k_z \text{ par} \\ -1 & k_z \text{ impar} \end{cases} \checkmark$$

Simetría:

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z}$$
 y $w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \in G_{20}$.

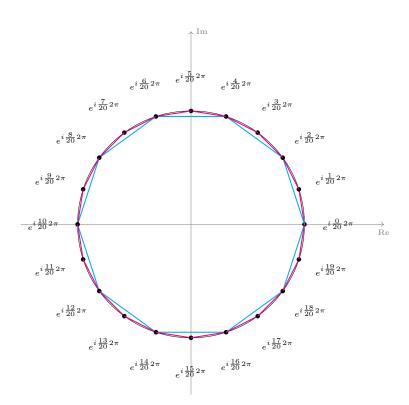
$$\mathcal{R} \text{ es simétrica si: } z \,\mathcal{R} \,w \iff w \,\mathcal{R} \,z \\
zw^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z + 9k_w)} \in G_2 \Leftrightarrow \frac{1}{10}(k_z + 9k_w) = k \Leftrightarrow k_z + 9k_w = 10k \Leftrightarrow k_z \equiv -9k_w \,(10) \Leftrightarrow k_z \equiv k_w \,(10) \\
\to \left[z \,\mathcal{R} \,w \iff k_z \equiv k_w \,(10)\right] \\
wz^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w + 9k_z)} = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w + 9(10k + k_w))} = e^{i\frac{\pi}{10}(90k + 10k_w)} = e^{i(9k + k_w)\pi} = e^{ik'\pi} \\
z \,\mathcal{R} \,w \iff w \,\mathcal{R} \,z \,\forall k, \, k_w \in \mathbb{Z} \,\text{con} \,k_z \equiv k_w \,(10) \quad\checkmark$$

Transitivitian:
$$\begin{cases}
z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \\
w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \\
y = e^{i\frac{1}{10}\pi k_y}
\end{cases} \in G_{20} \to \mathcal{R} \text{ es transitiva si: } z \mathcal{R} w \text{ y } w \mathcal{R} y \Rightarrow z \mathcal{R} y$$

$$\begin{cases}
z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w (10) \bigstar^1 \\
w \mathcal{R} y \iff k_w \equiv k_y (10) \bigstar^2
\end{cases} \\
\to zy^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z + 9k_y)} \stackrel{\bigstar}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k + k_w + 9k_y)} \stackrel{\bigstar}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k + 10k' + k_y + 9k_y)} = e^{i(k + k' + k_y)\pi} = e^{ik''\pi}$$

$$\begin{cases}
z \mathcal{R} w \\
w \mathcal{R} z
\end{cases} \Rightarrow z \mathcal{R} y$$

- ii) $\#\overline{e^{i\frac{2\pi}{20}k}}=2$ para algún $k\in\mathbb{Z}/r_{20}(k)<20$. Dada la condición $k_z\equiv k_w$ (10), solo hay 2 números que tienen misma cifra de unidad entre 0 y 20. En el gráfico se ve que si $z \mathcal{R} w \Rightarrow w = -z$
- 🌎 ¡Aportá! Correcciones, subiendo ejercicios, 🗡 al repo, críticas, todo sirve.



Ejercicios extras:

♦1. Para $w \in G_6$, calcular $S = w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023}$

 $Si \ w = 1$:

$$S = 5$$

$$Si \ w = -1$$
:

$$S = -1 + 1 + 5 - 1 - 4 - 1 = -1$$

 $Si \ w \neq \pm 1$:

$$S = w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023} = w^5 + w^4 + 5w^2 + w^3 - 4w^2 + w^1 = w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = -1 + \underbrace{1 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5}_{=0} = -1$$

Sea $w \in G_{14}$. Hallar todos los posibles valores de $w^7 + \sum_{i=2}^{140} w^{2j}$

Voy a usar que: $\begin{cases} w \in G_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ \text{Si } m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n \end{cases}$

Si w = 1:

$$\underbrace{w^7}_{=1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{w^{2j}}_{=1} = 1 + (\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{=134}) = 1 + 134 = 135 \quad \checkmark$$

Si w = -1:

$$\underbrace{w^7}_{=-1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{(w^j)^2}_{=1} = -1 + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{=134} = -1 + 134 = 133 \quad \checkmark$$

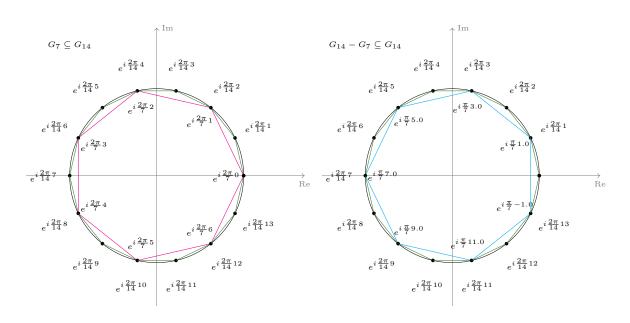
Si $w \neq \pm 1$:

$$w \in G_{14} \Rightarrow w = e^{i\frac{2k\pi}{14}} \text{ con } k \in \mathbb{Z}_{[0,13]} \Rightarrow w^2 = \left(e^{i\frac{2k\pi}{14}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{7} \cdot k} \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^{6} (w^2)^j = 0$$

$$w^{7} + \sum_{j=7}^{140} w^{2j} = w^{7} + \sum_{j=0}^{140} (w^{2})^{j} - \underbrace{\sum_{j=0}^{6} (w^{2})^{j}}_{=0} = w^{7} + \underbrace{\frac{(w^{2})^{141} - 1}{w^{2} - 1}}_{=0} - 0 = w^{7} + \underbrace{\frac{w^{2}((w^{14})^{20} - 1)}{w^{2} - 1}}_{=1} = w^{7} + 1$$

Si
$$\begin{cases} w \in G_7 \Rightarrow w^7 = 1\\ w \in G_{14} - G_7 \Rightarrow w^7 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w \in G_7 & \to 1 + 1 = 2 \\ w \in G_{14} - G_7 & \to -1 + 1 = 0 \end{cases} \checkmark$$



- **3.** Sea $z = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2}i$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:
 - $8|3n+|z^3|$
 - $\arg(z^{7n+6}) = \arg(i)$

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ \theta_z = \frac{11}{6}\pi \end{cases} \rightarrow z = |z|e^{\theta_z i} = e^{i\frac{11}{6}\pi} \Rightarrow z^3 = e^{i\frac{11}{2}\pi} = -1 \Leftrightarrow |z^3| = 1 \\ \frac{\text{primera}}{\text{condición}} \otimes |3n + |z^3| = 3n + 1 \Leftrightarrow 3n + 1 = 8k \Leftrightarrow 3n + 1 \equiv 0 \ (8) \Leftrightarrow 3n \equiv 7 \ (8) \Leftrightarrow 9n \equiv 21 \ (8) \Leftrightarrow n \equiv 5 \ (8) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{segunda} \atop \text{condición}} \arg(z^{7n+6}) = \arg(i) \Leftrightarrow \left(e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^{7n+6} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{i\frac{77}{6}\pi + 11\pi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{77}{6}n\pi + 11\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \xrightarrow{\text{despejo}} \frac{77}{6}n + 11 = \frac{1}{2} + 2k \Leftrightarrow 77n = -63 + 12k \Leftrightarrow 77n \equiv -63 \ (12) \Leftrightarrow 5n \equiv -3 \ (12) \Leftrightarrow n \equiv 9 \ (12) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{junto info}} \begin{cases} n \equiv 9 \ (12) \\ n \equiv 5 \ (8) \end{cases} \xrightarrow{\text{divisores coprimos}} \begin{cases} n \equiv 1 \ (4) \\ n \equiv 1 \ (2) \end{cases} \checkmark \xrightarrow{\text{me quedo con el} \atop \text{de mayor divisor}} \begin{cases} n \equiv 0 \ (3) \\ n \equiv 5 \ (8) \end{cases}$$

Ahora sí, tengo el sistema con divisores coprimos, por TCHR tengo solución.

$$\xrightarrow{\text{de}} n = 3k \xrightarrow{\star^3} \checkmark \xrightarrow{\text{reemplazo} \atop \text{en } \bigstar^2} 3k \equiv 5 \ (8) \Leftrightarrow x \equiv 7 \ (8) \Leftrightarrow k = 8j + 7 \checkmark$$

$$\xrightarrow{\text{reemplazo} \atop k \text{ en } \bigstar^3} n = 3(8j + 7) = 24j + 21 \Leftrightarrow \boxed{n \equiv 21 \ (24)} \checkmark$$

4. Sea $w = e^{\frac{\pi}{18}i}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente:

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = 0 \qquad \sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = 0.$$

Expresar la solución como una única ecuación de congruencia.

Como
$$w = e^{\frac{\pi}{18}i} \neq \pm 1$$
 $\begin{cases} w^3 \neq \pm 1 \\ w^4 \neq \pm 1 \end{cases}$, puedo usar Gauss para las sumas.
$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = \sum_{k=0}^{5n+1} (w^3)^k = \frac{(w^3)^{5n+2}-1}{w^3-1} = 0 \Leftrightarrow (w^3)^{5n+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{15n+6}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 5n+2 = 12k \\ \Leftrightarrow 5n \equiv 10 \ (12) \bigstar^1 \\ \sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = \sum_{k=0}^{4n+6} (w^4)^k = \frac{(w^4)^{4n+7}-1}{w^4-1} = 0 \Leftrightarrow (w^4)^{4n+7} = 1 \Leftrightarrow \frac{16n+28}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 4n+7 = 9k \\ \Leftrightarrow 4n = 2 \ (9) \bigstar^2 \end{cases}$$