Álgebra I
Práctica 2 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1. **2.** **3.** **4.** **5.** **6.** **7.** **8.** **9.** **10.** **11.** **12.** **13.** **14.** **15.** **16.** **17.** **18.** **19.** **20.**

- Ejercicios Extras

1. **2.**

Notas teóricas:

1. Propiedades de la sumatoria y productoria:

   - $(\sum_{k=1}^{n} a_k) + (\sum_{k=1}^{n} b_k) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$
   - Sea c un número dado: $\sum_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$
   - $(\prod_{k=1}^{n} a_k) \cdot (\prod_{k=1}^{n} b_k) = \prod_{k=1}^{n} (a_k b_k)$
   - Sea c un número dado: $\prod_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = (\prod_{k=1}^{n} c) \cdot (\prod_{k=1}^{n} a_k) = c^n \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k$

2. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$

4. Inducción: Sea $H \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que H es un conjunto *inductivo* si se cumplen las dos condiciones siguiente:

   - $1 \in H$
   - $\forall x, x \in H \Rightarrow x + 1 \in H$

5. Principio de inducción: Sea $p(n), n \in \mathbb{N}$, una afirmación sobre los números naturales. Si p satisface

   - (Caso Base) $p(1)$ es Verdadera.
   - (Paso inductivo) $\forall h \in \mathbb{N}$, $p(h)$ *Verdadera* $\Rightarrow p(h+1)$ *Verdadera, entonces* $p(n)$ *es Verdadera* $\forall n \in \mathbb{N}$.

6. Principio de inducción *corrido*: Sea $n_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $p(n)$, $n \geq n_0$, una afirmación sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si p satisface:

   - (Caso Base) $p(n_0)$ es Verdadera.
   - (Paso inductivo) $\forall h \geq n_0$, $p(h)$ *Verdadera* $\Rightarrow p(h+1)$ *Verdadera, entonces* $p(n)$ *es Verdadera* $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. explicación de las torres de Hanoi.

   1) $a_1 = 1$
   2) $a_3 = 7$
   3) $a_4 = 15$
   4) $a_9 = a_9 + 1 + a_9 = 2a_9 + 1$

   $\rightarrow \boxed{a_n + 1 = 2a_n + 1}$

2. Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como las torres de Hanoi $a_1 = 1 \wedge a_{n+1} = 2a_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es una sucesión definida por recurrencia.

3. El patrón de las torres de Hanoi parece ser $\underbrace{a_n = 2^n - 1}_{\text{término general}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto puedo probarse por inducción.

$$\begin{cases} \text{Proposición:} p(n) : a_n = 2^n - 1 \\ \text{Caso Base: } p(1) \text{ es verdadero?} a_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } p(h) \text{ es verdadero} \Rightarrow p(h+1) V? \\ \begin{cases} \text{HI} : a_h = 2^h - 1 \\ \text{QPQ} : a_{h+1} = 2^{h+1} \end{cases} \rightarrow \text{cuentas y queda que } \boxed{p(n) \text{ es } V, \forall n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

4. $\sum$ es una def por recurrencia $\rightarrow \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 \wedge \sum_{k=1}^{n+1} a_k = ...facil$

Principio de inducción III: Sea $p(n)$ una proposición sobre $\mathbb{N}$. Si se cumple:

1. $p(1) \wedge p(2)$ V
2. $\forall h \in \mathbb{N}$, $p(h) \wedge p(h+1)$, $V \Rightarrow p(h+2)$ V (paso inductivo), entonces $p(n)$ es verdadera.

$p(n) : a_n = 3^n$

$$\begin{cases} \text{caso base: } a_1 = 3, a_2 = 9 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo: } \forall h \in \mathbb{N}, p(h) \wedge p(h+1) \ V \Rightarrow p(h+2) \ V \\ \begin{cases} \text{HI: } a_h = 3^h \wedge a_{h+1} = 3^{h+1} \\ \text{Quiero probar que: } a_{h+2} = 3^{h+2} \\ \text{Usando la fórmula de recurrencia sale enseguida} \end{cases} \end{cases}$$

Principio de inducción IV Sea $p(n)$ una proposición sobre $\mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Si se cumple:

1. $p(n_0) \wedge p(n_0+1)$ V
2. $\forall h \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$, $p(h+1) \wedge p(h+2)$ $V \Rightarrow p(h+2)$ V (paso inductivo), entonces $p(n)$ es verdadera. $\forall n \geq n_0$

Sucesión de Fibonacci: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \ \forall n \geq 0$
Truco para sacar fórmulas a partir de Fibo.

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 = \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \tilde{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \Phi^2 = \Phi + 1 \wedge \tilde{\Phi}^2 = \tilde{\Phi} + 1$$

- defino sucesiones Φ^n que satisfacen la recurrencia de la sucesión de Fibonacci pero no sus condiciones iniciales.
- puedo formar una combineta lineal talque: $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (a\Phi^n + b\tilde{\Phi}^n)$ es la sucesión que satisface: $\begin{cases} c_o = a + b \\ c_1 = a\Phi + b\tilde{\Phi} \end{cases}$ y la recurrencia de Fibonacci.
  Resuelvo todo y llego a $\square$

Sucesione de Lucas: Generalizaciones de Fibonacci.$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$a_0 = \alpha, a_1 = \beta \wedge a_{n+2} = \gamma a_{n+1} + \delta a_n, \ \forall n \geq 0$, $con \alpha, \beta, \gamma, \delta$ dados.
Esto lo meto en la ecuación característica: $x^2 - \gamma x - \delta = 0$, necesito raíces distintas. Notar que $r^2 = \gamma r^1 + \delta$, y lo mismo es para $\tilde{r}$. Las sucesiones (r^n) y $(\tilde{r}^n)$ satisfacen la recurrencia de Lucas, pero no las condiciones iniciales α y β. $c_n = (ar^n + b\tilde{r}^n)$, satisface Lucas, pero las condiciones iniciales son c_0 y c_1 o $\begin{cases} a + b = \alpha \\ ra + \tilde{b} = \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ra + rb = r\alpha \\ ra + \tilde{r}b = \beta \end{cases}$ luego hago lo mismo con $\tilde{r}$ Como resultado: $a = \frac{\beta - \tilde{r}\alpha}{r - \tilde{r}}$

Ejercicios de la guía:

1.

i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

¿Cómo resolver este ejercicio?
Lo que queremos hacer es compactar la suma para evitar el uso de puntos suspensivos, la notación ideal para esos casos es el símbolo de sumatoria. El primer paso es fijarse en el comportamiento de cada término de nuesta suma. Por ejemplo, en el punto b) notamos que cada término comienza a duplicarse.

a) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$
Respuesta: $\sum_{i=1}^{100} i$

b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$
Respuesta: $\sum_{i=0}^{10} 2^i$

c) $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \cdots + (-144)$
Respuesta: $\sum_{i=1}^{12} i^2(-1)^{n+1}$

d) $1 + 9 + 25 + 49 + \cdots + 441$

Respuesta: $\sum_{i=0}^{10} (1 + 2i)^2$

e) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1)$
Respuesta: $\sum_{i=0}^{n} 2i + 1$

f) $n + 2n + 3n + \cdots + n^2$
Respuesta: $\sum_{i=1}^{n} in$

ii) a) $5 \cdot 6 \cdots 99 \cdot 100$
Respuesta: $\prod_{i=5}^{100} i = \frac{100!}{4!}$

b) $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdots 1024$
Respuesta: $\prod_{i=0}^{10} 2^i$

c) $n \cdot 2n \cdot 3n \cdots n^2$
Respuesta: $\prod_{i=1}^{n} in = n^n \cdot n!$

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes

Llamo t_1, t_2 a los primeros términos y t_{m-1}, t_m a los últimos

i) $\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$

$t_1 = 2(6-5) = 2 \quad t_2 = 2(7-5) = 4$

$t_{m-1} = 2((n-1)-5) = 2n-12 \quad t_m = 2(n-5) = 2n-10$

ii) $\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$

$t_1 = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} \quad t_2 = \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} = \frac{1}{n^2+3n+1}$

$t_{m-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n-1+1)} = \frac{1}{4n^2-2n} \quad t_m = \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{4n^2+2n}$

iii) $\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$

$t_1 = \frac{n+1}{2} \quad t_2 = \frac{n+2}{4}$

$t_{m-1} = \frac{n+(n-1)}{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2n-2} \quad t_m = \frac{n+n}{2n} = \frac{2n}{2n} = 1$

iv) $\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$

$t_1 = n \quad t_2 = \frac{n}{2}$

$t_{m-1} = \frac{n}{n^2-1} \quad t_m = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

v) $\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$

$t_1 = \frac{n+1}{2-3} = -n-1 \quad t_2 = \frac{n+2}{4-3} = n+2$

$t_{m-1} = \frac{n+(n-1)}{2(n-1)-3} = \frac{2n-1}{2n-5} \quad t_m = \frac{n+n}{2n-3} = \frac{2n}{2n-3}$

3. Calcular

i) $\sum_{i=1}^{n}(4i+1)$ ii) $\sum_{i=6}^{n}2(i-5)$

Para resolver estos ejercicios haremos uso de 1 y 2.

i) $\sum_{i=1}^{n}(4i+1) = (\sum_{i=1}^{n}4i) + (\sum_{i=1}^{n}1) = (4\cdot\sum_{i=1}^{n}i) + n = 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n = \boxed{2n^2+3n}$

ii) $\sum_{i=6}^{n}2(i-5) = 2\cdot\sum_{i=6}^{n}(i-5) = 2\cdot[(\sum_{i=6}^{n}i) - (\sum_{i=6}^{n}5)] = 2\cdot[(\sum_{i=0}^{n}i) - (\sum_{i=0}^{5}i) - 5(n-5)]$
$= 2\cdot(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{5(5+1)}{2} - 5n + 25) = 2\cdot(\frac{n(n+1)}{2} - 5n + 10) = n(n+1) - 10n + 20 = \boxed{n^2-9n+20}$

---

4. Calcular

i) $\sum_{i=0}^{n}2^i$
$\sum_{i=0}^{n}2^i \overset{q\neq 1}{=} \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$

ii) $\sum_{i=1}^{n}q^i$
$\sum_{i=1}^{n}q^i = -1+1+\sum_{i=1}^{n}q^i = -1+\sum_{i=0}^{n}q^i = \begin{cases} n+1-1 = n & \text{si } q=1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1}-1 = \frac{q^{n+1}-q}{q-1} & \text{si } q\neq 1 \end{cases}$

iii) ☢ Falta hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → ,
o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

iv) ☢ Falta hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → ,
o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

5.

i) ☢ Falta hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → ,
o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

ii) $\underbrace{S = \frac{N(N+1)}{2} = \sum_{1}^{N}i}_{Gauss} \to \sum_{1}^{n}2i-1 = 2\sum_{1}^{n}i - \sum_{1}^{n}1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2+n-n = n^2$ ✓

iii) $$\left\{\begin{array}{l} \text{Primer caso } n=1 \to \sum_{1}^{1} 2i-1 = 1 = 1^2 \quad \checkmark \\ \text{Paso inductivo } n=h \to \sum_{1}^{k} 2i-1 = k^2 \quad \checkmark \Rightarrow \sum_{1}^{k+1} 2i-1 \overset{?}{=} (k+1)^2 \\ \sum_{1}^{k+1} 2i-1 = \underbrace{\sum_{1}^{k} 2i-1}_{\text{HI}} + \underbrace{2(k+1)-1}_{k+1\text{-ésimo}} = k^2+2k+1 = (k+1)^2 \quad \checkmark \end{array}\right\} \to \boxed{\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2}$$

---

6. *(Suma de cuadrados y de cubos)* Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$P(n)$: "$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$" $\forall n \in \mathbb{N}$

Caso Base:

$P(1)$Verdadero $\iff \sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} \iff 1 = \frac{2\cdot 3}{6} \iff 1 = 1$ ✓

Paso Inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongo $\underbrace{P(k)}_{\text{HI}}$ Verdadero, quiero ver que $P(k+1)$ Verdadero.

$$\begin{aligned} P(k+1)\text{Verdadero} &\iff \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \\ &\iff (\sum_{i=1}^{k} i^2) + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &\underset{\text{HI}}{\iff} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &\iff k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2 = (k+1)(k+2)(2k+3) \\ &\iff k(2k+1) + 6(k+1) = (k+2)(2k+3) \\ &\iff 2k^2+7k+6 = 2k^2+7k+6 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Como se cumple tanto el caso base como el paso inductivo, por el principio de inducción $P(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$P(n)$: "$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$" $\forall n \in \mathbb{N}$

Caso Base:

$P(1) : \sum_{i=1}^{1} i^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \iff 1 = \frac{4}{4} \iff 1 = 1$ ✓

Paso Inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongo $\underbrace{P(k)}_{\text{HI}}$ Verdadero, quiero ver que $P(k+1)$ Verdadero.

$$\begin{aligned}
P(k+1)\text{Verdadero} &\iff \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} \\
&\iff (\sum_{i=1}^{k} i^3) + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&\underset{\text{HI}}{\iff} \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&\iff k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3 = (k+1)^2(k+2)^2 \\
&\iff k^2 + 4(k+1) = (k+2)^2 \\
&\iff k^2 + 4k + 4 = k^2 + 4k + 4 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Como se cumple tanto el caso base como el paso inductivo, por el principio de inducción $P(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

7.

i)
- Primer caso $n = 1 \to \sum_{1}^{1}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^2 \cdot 1 = 1 \quad \checkmark$
- Paso inductivo
  - $n = k \to \sum_{1}^{k}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2}$
  - $\Rightarrow$
  - $n = k+1 \to \sum_{1}^{k+1}(-1)^{i+1}i^2 \overset{?}{=} (-1)^{(k+1)+1}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
  - $\to \sum_{1}^{k+1}(-1)^{i+1}i^2 = \underbrace{\sum_{1}^{k}(-1)^{i+1}i^2}_{\text{HI}} + \underbrace{(-1)^{k+2}(k+1)^2}_{k+1\text{-ésimo}} =$
  - $(-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(-1)^2(k+1)^2 \xrightarrow[\text{fáctor común}]{\text{acomodar}} (-1)^k(k+1)\left[-\frac{k}{2} + (k+1)\right] =$
  - $(-1)^k(k+1)\frac{(k+2)}{2} \quad \checkmark$

$\to \boxed{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}}$

ii) Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

iii) Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

iv) $\prod_{i=1}^{n}\left(1 + a^{2^{i-1}}\right) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$

- Primer caso $n=1 \to \prod_{i=1}^{1}(1+a^{2^{i-1}}) = 1+a^{2^0} = 1+a = \frac{1-a^{2^1}}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1+a$ ✓
- Paso inductivo $n=k \to \prod_{i=1}^{k}(1+a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^k}}{1-a} \Rightarrow n=k+1 \to \prod_{i=1}^{k+1}(1+a^{2^{i-1}}) \stackrel{?}{=} \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a}$
  - $\prod_{i=1}^{k+1}(1+a^{2^{i-1}}) = \underbrace{\prod_{i=1}^{k}(1+a^{2^k})}_{\text{HI}} \cdot \underbrace{1+a^{2^{i-1}}}_{k+1\text{-ésimo}} = \frac{1-a^{2^k}}{1-a} \cdot 1 + a^{2^k} \xrightarrow[\text{de cuadrados}]{\text{diferencia}} \frac{1-(a^{2^k})^2}{1-a} =$
  - $\frac{1-a^{2\cdot 2^k}}{1-a} = \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a}$ ✓

v) $\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

En este ejercicio conviene abrir la productoria y acomodar los factores. Por inducción:

- $p(n): \prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$
- *Caso Base:* $p(1)$ V? $\to \prod_{i=1}^{1} \frac{1+i}{2i-3} = \frac{1+1}{2\cdot 1-3} = 2^1(1-2\cdot 1) = -2$
- *Paso inductivo: Supongo* $p(k)$ Verdadero $\xrightarrow[\text{que}]{\text{quiero ver}}$ $p(k+1)$ Verdadero para algún $k \in \mathbb{N}$.
- *Hipótesis inductiva: Supongo* $\prod_{i=1}^{k} \frac{k+i}{2i-3} = 2^k(1-2k)$, quiero ver que $\prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = 2^{k+1}(1-2(k+1))$
  - $\prod_{i=1}^{k} \frac{k+i}{2i-3} = \frac{k+1}{2\cdot 1-3} \cdot \frac{k+2}{2\cdot 2-3} \cdot \frac{k+3}{2\cdot 3-3} \cdots \frac{2k}{2\cdot k-3} = 2^k(1-2k)$
  - $\prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = \frac{k+2}{2\cdot 1-3} \cdot \frac{k+3}{2\cdot 2-3} \cdots \frac{k+1+(k-1)}{2(k-1)-3} \cdot \frac{k+1+k}{2k-3} \cdot \frac{k+1+(k+1)}{2(k+1)-3}$
  - $\xrightarrow[\text{corro los denominadores una fracción hacia} \leftarrow]{\text{Masajear: multiplico por } 1=\frac{k+1}{k+1}} \frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{1}{2\cdot 1-3} \cdot \frac{k+2}{2\cdot 2-3} \cdot \frac{k+3}{2\cdot 3-3} \cdots \frac{2k}{2k-3} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \frac{2k+2}{1} =$
  - $\xrightarrow[\text{aparezca la HI}]{\text{acomodo para que}} \underbrace{\frac{k+1}{2\cdot 1-3} \cdot \frac{k+2}{2\cdot 2-3} \cdot \frac{k+3}{2\cdot 3-3} \cdots \frac{2k}{2k-3} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3}}_{\text{HI}} \cdot \frac{2k+2}{k+1} =$
  - $= 2^k(1-2k) \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)-3} \cdot \frac{2k+2}{k+1} = 2^k\cancel{(1-2k)} \cdot \frac{2k+1}{(-1)\cancel{(1-2k)}} \cdot \frac{\cancel{2(k+1)}}{\cancel{k+1}} = 2^{k+1}(-1)(2k+1) =$
  - $= 2^{k+1}\left(1-2(k+1)\right)$ ✓

Como $p(1)$ es verdadero y $p(k)$ es verdadero y $p(k+1)$ también lo es, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

---

8. Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}b^{n-i}$. Deducir la fórmula de la serie geométrica: para todo $a \neq 1$, $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

- Primer paso: $n = 1 (a-b)\sum_{1}^{1} a^{i-1}\cdot b^{1-1} = a - b = a^1 - b^1$ ✓
- Paso inductivo: $n = k\ a^k - b^k = (a-b)\sum_{i=1}^{k} a^{i-1}\cdot b^{k-i} \Rightarrow a^{k+1} - b^{k+1} \overset{?}{=} (a-b)\sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1}\cdot b^{k+1-i}$
  - $(a-b)\sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1}\cdot b^{k+1-i} = (a-b)\sum_{i=1}^{k} a^{i-1}\cdot \underbrace{b^{k+1-i}}_{b\cdot b^{k-i}} + \underbrace{(a-b)a^k\cdot b^{k+1-(k+1)}}_{k+1\text{-ésimo}} =$
  - $b\cdot \underbrace{(a-b)\sum_{i=1}^{k} a^{i-1}\cdot b^{k-i}}_{\text{HI}} + (a-b)a^k \overset{\text{HI}}{=} b\cdot a^k - b^k + (a-b)a^k = a^{k+1} - b^{k+1}$ ✓

Para deducir la fórmula de la serie geométrica $b = 1 \to (a-1)\sum_{i=1}^{n} a^{i-1} = a^n - 1 \to$

- $(a-1)\sum_{1}^{n} a^{i-1} = (a-1)\cdot(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) = a^n - 1 \xrightarrow[\text{divido por } (a-1) \text{ M.A.M.}]{\text{multiplico por } a \text{ y}}$
- $\sum_{1}^{n} a^i = a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-a}{a-1} \xrightarrow[\text{M.A.M.}]{\text{sumo un 1}} \sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^n-a}{a-1} + 1 \to$
- $\boxed{\frac{a^n+1}{a-1} = \sum_{i=0}^{n} a^i}$

9.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$.

ii) Calcular $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$).

iii) Calcular $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}$).

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Sea $n \in \mathbb{N}$ y

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$$

1) Caso base, $n = 1$:

$$P(1) : \sum_{i=1}^{1}(a_{i+1} - a_i) = a_{1+1} - a_1$$
$$P(1) : a_2 - a_1 = a_2 - a_1$$
$$P(1) : V$$

2) Paso inductivo. Sea $n \in \mathbb{N}$:

HI. $P(n) : V$

TI. $P(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+2} - a_1$

Desarrollo la TI:

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1}-a_i) = a_{n+2}-a_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) \overset{\text{HI}}{=} a_{n+2}-a_{n+1}+a_{n+1}-a_1$$

$$P(n+1): \sum_{i=1}^{n+1}(a_{i+1}-a_i) = a_{n+2}-a_1$$

$$P(n+1): V$$

Tenemos que

$$P(1): V$$
$$P(n): V \implies P(n+1): V$$

y esto implica que $P(n): V \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}) = -\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}) \overset{\text{Aux}}{=} -(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{1})$

$= -(\frac{1-(n+1)}{n+1}) = -(\frac{-n}{n+1}) = \frac{n}{n+1}$

Auxiliar

Sea $a_n = \frac{1}{n}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Queremos calcular $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right)$.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) \overset{9.i)}{=} a_{n+1}-a_1 = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{1}$$

iii) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \overset{Aux.1}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1-2+2})$

$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+2-2+1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2(i+1)-2+1})$

$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2(i+1)-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}-(\frac{1}{2(i+1)-1}-\frac{1}{2i-1})$

$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2(i+1)-1}-\frac{1}{2i-1}) \overset{Aux.2}{=} -\frac{1}{2}(\frac{1}{2(n+1)-1}-\frac{1}{2\cdot 1-1})$

$= -\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1}-1) = -\frac{1}{2}(\frac{1-(2n+1)}{2n+1}) = -\frac{1}{2}(\frac{-2n}{2n+1})$

$= \frac{n}{2n+1}$

Auxiliar 1

Calculamos la sugerencia dada

$$\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1} = \frac{2i+1-(2i-1)}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{2i+1-2i+1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{2}{(2i-1)(2i+1)}$$

$$\frac{2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}$$

$$\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right)$$

Auxiliar 2

Sea $a_n = \frac{1}{2n-1}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Queremos calcular $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2(i+1)-1} - \frac{1}{2i-1} \right)$.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2(i+1)-1} - \frac{1}{2i-1} \right) = \sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) \overset{9i)}{=} a_{n+1} - a_1 = \frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2 \cdot 1 - 1}$$

---

10. Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

11. Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

12. Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

13. Hallar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que $n^2 + 1 < 2^n$.

Pruebo algunos valores de n:

- $n = 1 \to 1^2 + 1 = 2 \not< 2$
- $n = 2 \to 2^2 + 1 = 5 \not< 4$
- $n = 3 \to 3^2 + 1 = 10 \not< 8$
- $n = 4 \to 4^2 + 1 = 17 \not< 16$
- $n = 5 \to 5^2 + 1 = 26 < 32$ ✓

Parece ser que se cumple para los $n \geq 5$. Lo pruebo por inducción corrida.

$P(n)$: "$n^2 + 1 < 2^n$" $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$

Caso Base:

$P(5)$Verdadero $\iff 5^2+1<2^5 \iff 26<32$ ✓

Paso Inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}_{\geq 5}$. Supongo $\underbrace{P(k)}_{\text{HI}}$ Verdadero, quiero ver que $P(k+1)$ Verdadero.

$$\begin{aligned} P(k+1)\text{Verdadero} &\iff (k+1)^2+1<2^{k+1} \\ &\iff (k+1)^2+1<2^k\cdot 2 \end{aligned}$$

y como $(k^2+1)\cdot 2<2^k\cdot 2$ por HI, si $(k+1)^2+1\leq(k^2+1)\cdot 2 \Rightarrow (k+1)^2+1<2^k\cdot 2$ como se quiere ver.

$$\begin{aligned} (k+1)^2+1\leq(k^2+1)\cdot 2 &\iff k^2+2k+2\leq 2k^2+2 \\ &\iff 2k\leq k^2 \\ &\underset{k>0}{\iff} 2\leq k \quad \checkmark(\text{Pues } k\geq 5 \text{ por HI}) \end{aligned}$$

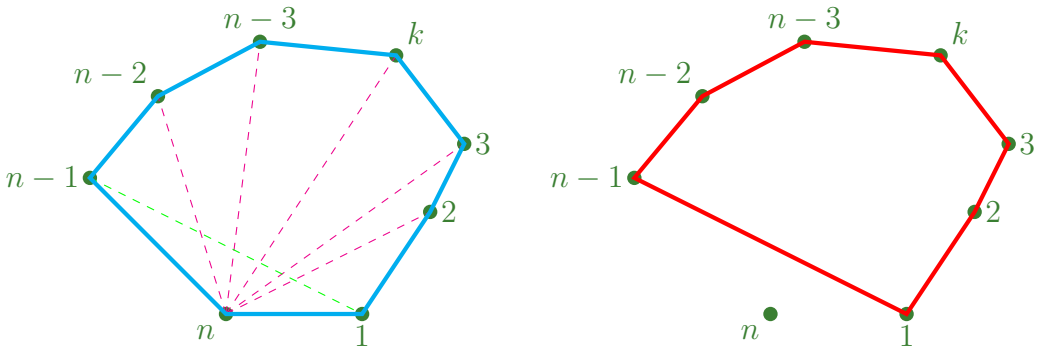
Así, $(k+1)^2+1<2^k\cdot 2$ y $\therefore P(k+1)$ Verdadero.

Como se cumple tanto el caso base como el paso inductivo, por el principio de inducción $P(n)$ es verdadero $\forall n\in\mathbb{N}$.

---

14. Probar que para todo $n\geq 3$ vale que:

i) La cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.
Ejercicio donde hay que encontrar una fórmula a partir de algún método *creativo* para luego probar por inducción.

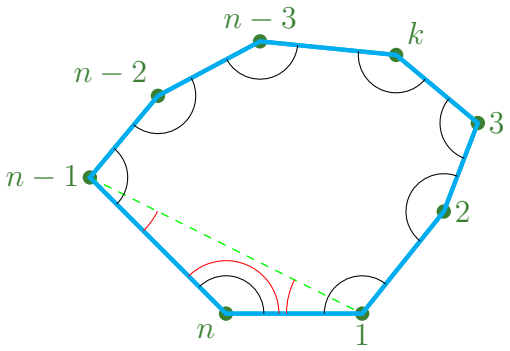


Se desprende del gráfico el siguiente razonamiento: En el polígono cyan de n lados voy a tener una cantidad de diagonales dada por la sucesión d_n. El polígono rojo me genera polígono que tiene un lado menos y un lado menos, cantidad que viene determinada por d_{n-1}. Las líneas punteadas son las diagonales de d_n que no estarán en d_{n-1}. Ahora voy a encontrar una relación entre ambas sucesiones. Al sacan un lado pierdo las diagonales desde 2 hasta $n-2$ que serían $n-3$ en total y además pierdo la diagonal que conectan el vértice 1 con el $n-1$: $d_n = d_{n-1}+1+n-2 = d_{n-1}+n-1$
$\rightarrow d_n = d_{n-1}+n-1$
Ahora inducción:
$p(n): d_n = \frac{n(n-3)}{2}\ \forall n\geq 3$

$$\begin{cases} \textit{Caso Base: } p(3) \text{ verdadera ? } \to \frac{3(3-3)}{2} = 0, \text{ lo cual es verdad para el triángulo.} \quad \checkmark \\ \textit{Paso inductivo: } p(k) \text{ es verdadero para algún } k \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera ?} \\ \textit{Hipótesis Inductiva: } d_k = \frac{k(k-3)}{2} \Rightarrow d_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} \\ d = k+1 \overset{\text{def}}{=} d_k + k - 1 \overset{\text{HI}}{=} \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k-2)(k+1)}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

Como $p(3)$ y $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$.



En este caso estoy generando la suma de los ángulos internos de 2 polígonos, uno con α_n de n lados y otro con $n-1, \alpha_{n-1}$ Es más claro en este caso que al sacarle un lado, estoy robádo un triángulo que tiene como suma de sus ángulos internos π, entonces afirmo $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \pi$. Ahora pruebo por inducción lo pedido. $p(n) : \alpha_n = \pi(n-2)\ \forall n \geq 3$

$$\begin{cases} \textit{Caso Base: } p(3) \text{ verdadera ? } \to \pi(3-2) = \pi, \text{ lo cual es verdad para el triángulo.} \quad \checkmark \\ \textit{Paso inductivo: } p(k) \text{ es verdadero para algún } k \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera ?} \\ \textit{Hipótesis Inductiva: } \alpha_k = \pi(k-2) \Rightarrow \alpha_{k+1} = \pi(k-1) \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \overset{\text{def}}{=} \alpha_{k+1} - \pi \\ \alpha_k \overset{\text{HI}}{=} \pi(k-2) \end{array} \right\} \to \alpha_{k+1} = \pi(k-2) + \pi = \pi(k-1) \quad \checkmark \end{cases}$$

Como $p(3) \wedge p(k) \wedge p(k+1)$ resultaron verdaderas, por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

Recurrencia

15.

i) Sea $(a_n)_{n\ en\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:
$a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 2na_n + 2^{n+1}n!, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Probar que $a_n = 2^n n!$.
Hecho en cuaderno, pasar

ii) Sea $(a_n)_{n\ en\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:
$a_1 = 0$ y $a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \ \forall n \in \mathbb{N}$
Probar que $a_n = n^2(n-1)$.
Hecho en cuaderno, pasar

---

16. Hallar la fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

☢ Falta hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → ,
o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

---

17. ☢ Falta hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → ,
o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

---

18. ☢ Falta hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → ,
o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

---

19. ☢ Falta hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → ,
o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

---

20. ☢ Falta hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → ,
o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

Ejercicios extras:

---

1. Probar para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq (n+1)!$$

Se prueba usando el principio de inducción $\in \mathbb{N}$.

Proposición:

$$p(n) : \frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq (n+1)!$$

Caso base: Evalúo en $n = 1$.

$$p(1) : \frac{(2 \cdot 1)!}{1!^2} = 2 \leq (1+1)! \quad \checkmark$$

Se concluye que $p(1)$ es verdadera.
Paso inductivo:

$$p(k) : \underbrace{\frac{(2k)!}{(k!)^2} \leq (k+1)!}_{\text{HI}}$$

la supongo verdadera.
Quiero probar que:

$$p(k+1) : \frac{(2(k+1))!}{(k+1)!^2} \leq (k+1+1)!$$

también lo es.

$$\begin{cases} \frac{(2k+2)!}{(k+1)!^2} \leq (k+2)! \\ \quad \Longleftrightarrow \text{ abrir factorial} \\ \frac{(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot(2k)!}{(k+1)^2\cdot(k!)^2} \overset{\text{HI}}{\leq} \frac{\overbrace{(2k+2)\cdot(2k+1)}^{4\cdot(k+1)(k+\frac{1}{2})}}{(k+1)^2}(k+1)! = \frac{\overbrace{4\cdot(k+\frac{1}{2})}^{\frac{4(k+\frac{1}{2})}{k+1} \overset{\bigstar^1}{\leq} k+2}}{(k+1)}(k+1)! \leq (k+2)(k+1)! = (k+2)! \\ \boxed{\frac{(2(k+1))!}{(k+1)!^2} \leq (k+2)!} \end{cases}$$

$\bigstar^1$ se prueba fácil en 2 cuentas, queda como ejercicio para vos. Es así que $p(1)p(k)yp(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ también lo será $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{n+k} \leq \frac{5}{2}.$$

Inducción: $p(n) : \sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{n+k} \leq \frac{5}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1)$*:*

$\sum_{k=1}^{1+1} \frac{3}{1+k} = \frac{3}{2} + \frac{3}{3} = \frac{5}{2} \overset{\checkmark}{\leq} \frac{5}{2} \to p(1)$ Verdadera ✓

Paso inductivo:

$p(j) : \sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} \leq \frac{5}{2}$ Verdadera $\Rightarrow$ quiero probar que $p(j+1) : \sum_{k=1}^{j+1+1} \frac{3}{j+1+k} \leq \frac{5}{2}$ Verdadera

En los ejercicios donde la n aparece adentro de la sumatoria, conviene abrirla para encontrar la *hipótesis inductiva:* $\sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} \leq \frac{5}{2}$

$\sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} = \frac{3}{j+1} + \frac{3}{j+2} + \frac{3}{j+3} + \frac{3}{j+4} + \cdots + \frac{3}{2j} + \frac{3}{2j+1}$ ✓

$$\sum_{k=1}^{j+1+1} \frac{3}{j+1+k} = \sum_{k=1}^{j+2} \frac{3}{j+1+k} = \frac{3}{j+1+1} + \frac{3}{j+1+2} + \frac{3}{j+1+3} + \cdots + \frac{3}{j+1+j-1} + \frac{3}{j+1+j} + \frac{3}{j+1+j+1} + \frac{3}{j+1+j+2} =$$

$$= \frac{3}{j+2} + \frac{3}{j+3} + \frac{3}{j+4} + \cdots + \frac{3}{2j} + \frac{3}{2j+1} + \frac{3}{2j+2} + \frac{3}{2j+3} = -\frac{3}{j+1} + \underbrace{\frac{3}{j+1} + \frac{3}{j+2} + \frac{3}{j+3} + \frac{3}{j+4} + \cdots + \frac{3}{2j} + \frac{3}{2j+1}}_{\sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k}} + \frac{3}{2j+2} + \frac{3}{2j+3}$$

$$= \sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} - \frac{3}{j+1} + \frac{3}{2j+2} + \frac{3}{2j+3} = \sum_{k=1}^{j+1} \frac{3}{j+k} \underbrace{- \frac{3}{2k+2} + \frac{3}{2j+3}}_{\leq 0} \overset{HI}{\leq} \frac{5}{2} \underbrace{- \frac{3}{(2k+2)(2k+3)}}_{\geq 0} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{j+2} \frac{3}{j+1+k} \overset{\checkmark}{\leq} \frac{5}{2} \text{ Verdadera} \quad \checkmark$$

Dado que $p(1)$, $p(j), p(j+1)$ resultaron verdaderas por principio de inducción también lo es $p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.