Práctica 7 de álgebra 1

Comunidad algebraica

last update: 26/06/2024

Definiciones y fórmulas útiles

- *Operaciones:*

  $+:$ Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$

  $\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$

  $\cdot:$ Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$

  $\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j) X^k \in \mathbb{K}[X]$

- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo $\rightarrow f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h,\ \forall f,\ g,\ h \in \mathbb{K}[X]$

- *Algoritmo de división*: $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos q y $R \in \mathbb{K}[X]$ tal que $f = q \cdot g + R$ con $gr(R) < gr(f)$ o $R = 0$

- α es raíz de $f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$

- *Máximo común divisor:* Polinomio mónico de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.

  - $(f : g) \mid f$ y $(f : g) \mid g$
  - $f = (f : g) \cdot k_f$ y $g = (f : g) \cdot k_g$ con k_f y k_g en $\mathbb{K}[X]$
  - Dos polinomios son coprimos si $(f : g) = 1 \iff f \neq g$

- *Raíces múltiples:* $f \in \mathbb{K}[x], \alpha \in \mathbb{K}$ es raíz de f de multiplicidad $m \in \mathbb{N}_0$ si $(X - \alpha)^m \mid f$ y $(X - \alpha)^{m+1} \not\mid f$. O sea, $f = (X - \alpha)^m \cdot \underbrace{q(\alpha)}_{\neq 0}$

  - Una raíz simple de f cumplirá que $(x - \alpha) \mid f$, pero $(x - \alpha)^2 \not\mid f$

- Vale que α es raíz múltiple de $f \iff f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) = 0 \iff \alpha$ es raíz de $(f : f')$, $X - \alpha \mid (f : f')$

  - $\text{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0$ y $\text{mult}(()\alpha; f') = m - 1$
  - $$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff \left\{ \begin{array}{ll} \text{mult}(\alpha; f) \geq m & \left.\right\} \begin{array}{c} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)(\alpha)=0} \end{array} \\ \text{mult}(\alpha; f) = m & \left.\right\} f^{m)(\alpha)\neq 0} \end{array} \right.$$

Ejercicios de clase o parciales:

Ejercicios de la guía:

---

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$,

ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$,

iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$,

---

i) *coeficiente principal:* 4^{77}
grado: $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:* $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$
grado: 28

iii) *coeficiente principal:* $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)}_{f}{}^4 + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_{g}$

Cuando sumo me queda: $\text{cp}(f^4) - \text{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0 \Rightarrow gr(f^4 + g) < 20$
$\to$ Calculo el $\text{cp}(f^4 + g)$ con $\text{gr}(f^4 + g) = 19$.
Laburo a f:

$$\left\{\begin{array}{l}
\xrightarrow[\text{fórmula de } f\cdot g]{\text{para usar}} (-3X^5+X^4-X+5)^4 = (-3X^5+1X^4-X+5)^2\cdot(-3X^5+X^4-X+5)^2 \\
f^2\cdot f^2 = \sum_{k=0}^{20}\left(\sum_{i+j=k} a_i\cdot b_j\right)X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \bigstar^2 \\
\sum_{k=0}^{20}\left(\sum_{i+j=k} a_i\cdot b_j\right)X^k \xrightarrow[\text{el término con } k=19]{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_ib_jX^{19} \overset{\bigstar^1}{=} a_9\cdot b_{10}+a_{10}\cdot b_9 \overset{\bigstar^2}{=} 2\cdot a_9\cdot b_{10} \\
\left\{\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{b_{10}\text{ sale a}} b_{10}=(-3)^2=9 \\ \xrightarrow[\text{a usar }\sum f\cdot g \text{ en } k=9]{a_9\text{ no tan fácil, volver}} f\cdot f = \sum_{k=0}^{10}\left(\sum_{i+j=k} c_i\cdot d_j\right)X^k \xrightarrow{k=9} \sum_{i+j=9} c_i\cdot d_jX^9 \overset{\bigstar^3}{=} c_4\cdot d_5 + c_5\cdot d_4 \overset{\bigstar^2}{=} 2\cdot c_4\cdot d_5 \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{d_5 \text{ sale a}} d_5=-3 \\ \xrightarrow[\text{ojímetro}]{c_4\text{ sale a}} c_4 = 1\end{array}\right\} \to a_9=-6
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{cp}(f^4) = 2\cdot(-6)\cdot(9) = -108 \\ \text{cp}(g) = 19 \end{array}\right\} \to \boxed{\text{cp}(f^4+g) = -89} \quad \checkmark$$

$\bigstar^1$: Sabemos que el $\text{gr}(f^4) = 20 \Rightarrow \text{gr}(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \le 10$ solo puede ocurrir *cuando los exponentes* $\left\{\begin{array}{c} i = 10,\ j = 9 \\ \vee \\ i = 9,\ j = 10 \end{array}\right\}$

$\bigstar^2$: porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

$\bigstar^3$: Idem $\bigstar^1$ para el polinomio f

grado: 19

---

2. Hacer!

---

3. Hacer!

---

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$ y $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$ y $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iii) $f = X^n - 1$ y $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

---

i)
$$\begin{array}{rrrr|l}
5X^4 + 2X^3 & & -X & +4 & X^2+2 \\ \cline{5-5}
-5X^4 \qquad & -10X^2 & & & 5X^2+2X-10 \\ \cline{1-2}
2X^3 & -10X^2 & -X & & \\
-2X^3 & & -4X & & \\ \cline{1-3}
 & -10X^2 & -5X & +4 & \\
 & 10X^2 & & +20 & \\ \cline{2-4}
 & & -5X & +24 &
\end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

ii)
$$\begin{array}{rrrr|l}
4X^4 + X^3 & & & -4 & 2X^2+1 \\ \cline{5-5}
-4X^4 \qquad & -2X^2 & & & 2X^2+\frac{1}{2}X-1 \\ \cline{1-2}
X^3 & -2X^2 & & & \\
-X^3 & & -\frac{1}{2}X & & \\ \cline{1-3}
 & -2X^2 & -\frac{1}{2}X & -4 & \\
 & 2X^2 & & +1 & \\ \cline{2-4}
 & & -\frac{1}{2}X & -3 &
\end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

En $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $\rightarrow 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2+1) \cdot \underbrace{(2X^2 + 4X + 6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X+4)}_{r[X]}$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división se asoma la idea de que:

$$X^n - 1 = (X-1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} X^j}_{q[X]} + \underbrace{0}_{r[X]}$$

Inducción: Quiero probar que $p(n) : X^n - 1 = (X-1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1) : X^1 - 1 = (X-1) \underbrace{\sum_{j=0}^{1-1} X^j}_{X^0=1} \Rightarrow p(1)$ es Verdadero $\checkmark$

Paso inductivo:
$\underbrace{p(k) : X^k - 1 = (X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI}$ es Verdadera $\overset{?}{\Rightarrow} p(k+1) : X^{k+1} - 1 = (X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k} X^j$ es Verdadera

$(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k} X^j = (X-1) \cdot (\sum_{j=0}^{k-1} X^j + X^k) = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI} + (X-1) \cdot X^k = X^k - 1 + X^{k+1} - X^k =$

$X^{k+1} - 1 \quad \checkmark$

Dado que $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera $p(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

---

5. Hacer!

---

6. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in \mathbb{K}[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in \mathbb{K}[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g\ (h)$.

i) Probar que $\equiv\ (h)$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{K}[X]$.

ii) Probar que si $f_1 \equiv g_1\ (h)$ y $f_2 \equiv g_2\ (h)$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2\ (h)$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2\ (h)$.

iii) Probar que si $f \equiv g\ (h)$ entonces $f^n \equiv g^n\ (h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iv) Probar que r es el resto de la división de f por h si y solo si $f \equiv r\ (h)$ y $r = 0$ o $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(h)$.

---

i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*,

- *reflexiva*: Es f congruente a f módulo h?
  $f \equiv f\ (h) \iff h \mid f - f = 0 \iff h \mid 0 \quad \checkmark$
- *simétrica*: Si $f \equiv g\ (h) \overset{?}{\iff} g \equiv f\ (h)$
  $f \equiv g\ (h) \iff h \mid f - g \iff h \mid -(g-f) \iff h \mid g - f \iff g \equiv f\ (h) \quad \checkmark$
- *transitiva*: Si $\begin{cases} f \equiv g\ (h) \\ g \equiv p\ (h) \end{cases} \overset{?}{\iff} f \equiv p\ (h)$.

  $\begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid g - p \end{cases} \xrightarrow[\to F_2]{F_1 + F_2} \begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid f - p \end{cases} \to f \equiv p\ (h) \quad \checkmark$

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en $\mathbb{K}[X]$

ii) Si $\begin{cases} f_1 \equiv g_1\ (h) \\ f_2 \equiv g_2\ (h)\ \star^1 \end{cases}$

$f_1 \equiv g_1\ (h) \iff h \mid f_1 - g_1 \Rightarrow h \mid f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2\ (h) \overset{\star^1}{\iff} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2\ (h)$

iii) *Inducción:* Quiero probar $p(n)$: Si $f \equiv g\ (h)$ entonces $f^n \equiv g^n\ (h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Caso base: $p(1) : f^1 \equiv g^1\ (h) \overset{\star^2}{}$ Verdadera ✓

Paso inductivo: $p(k) : \underbrace{f^k \equiv g^k\ (h)}_{HI}$ es verdadera $\overset{?}{\Rightarrow} p(k+1) : f^{k+1} \equiv g^{k+1}\ (h)$ ¿También lo es?

$$f^k \equiv g^k\ (h) \iff h \mid f^k - g^k \Rightarrow h \mid f \cdot (f^k - g^k) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^k\ (h) \overset{\star^2}{\iff} f^{k+1} \equiv g^{k+1}\ (h) \quad \checkmark$$

Finalmente $p(1), p(k), p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) Hacer!

---

7. Hallar el resto de la división de f por g para:

i) $f = X^{353} - X - 1$ y $g = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$ y $g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, y $g = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$, y $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ (Sugerencia ver **4.** iii))).

---

i) $g \mid g \iff X^{31} - 2 \equiv 0\ (X^{31} - 2) \iff X^{31} \equiv 2\ (g)$

$$f = X^{353} - X - 1 = (\underbrace{X^{31}}_{\overset{(g)}{\equiv} 2})^{11} X^{12} - X - 1 \overset{(g)}{\equiv} 2^{11} X^{12} - X - 1 \to \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} - 1}$$

ii) $g \mid g \iff X^6 + 1 \equiv 0\ (X^6 + 1) \iff X^6 \equiv -1\ (g)$

$$f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166} X^4 + (X^6)^6 X^4 + (X^6)^3 X^2 + 1 \overset{(g)}{\equiv} X^4 + X^4 - X^2 + 1 = 2X^4 - X^2 + 1$$
$\to \boxed{r_g(f) = 2X^4 - X^2 + 1}$
¿Qué onda en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

iii) $g \mid g \iff X^{100} - X + 1 \equiv 0\ (X^{100} - X + 1) \iff X^{100} \equiv X - 1\ (g)$

$$f = X^{200} - 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 - 3X^{100} X + 2 \overset{(g)}{\equiv} (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2$$
$\to \boxed{r_g(f) = (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2}$

iv) *Usando la sugerencia*: Del ejercicio **4.** iii) sale que $X^n - 1 = (X-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$

$$\xrightarrow[\text{para el } g]{n=5} X^5 - 1 = (X-1) \underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_{g} \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)}\ (g) \quad \checkmark$$

$$f = (X^5)^{603} X + 2(X^5)^{366} X^3 - (X^5)^{34} X^4 + (X^5)^{27} X^2 + 2X^4 - X^3 + 1$$
$$f \equiv \underbrace{X + 2X^3 - X^4 + X^2 + 2X^4 - X^3 + 1}_{= X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = g}\ (g) \iff \boxed{f \equiv 0\ (g)}$$

8. Hacer!

---

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$, $g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$,

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X^3 + X$,

iii) $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1$, $g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1$,

---

i)
$$\begin{array}{r|l}
X^5 \qquad + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 & X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-X^5 + X^4 + X^3 \qquad - X & X + 1 \\ \cline{1-1}
X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X + 2 & \\
-X^4 + X^3 + X^2 \qquad - 1 & \\ \cline{1-1}
3X^3 - 5X^2 + X + 1 &
\end{array}$$

$\xrightarrow{\text{Euclides}} (f : g) = (g : 3X^3 - 55X^2 + X + 1)$

$\xrightarrow[\text{en función de } g]{\text{escribo a } f} f = (X+1)\cdot g + 3X^3 - 55X^2 + X + 1$

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - X^3 - X^2 \qquad + 1 & 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ \cline{2-2}
-X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X & \frac{1}{3}X + \frac{2}{9} \\ \cline{1-1}
\frac{2}{3}X^3 - \frac{4}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + 1 & \\
-\frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9} & \\ \cline{1-1}
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3X^3 - 5X^2 + X + 1 & -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\ \cline{2-2}
-3X^3 - \frac{15}{2}X^2 + \frac{21}{2}X & -\frac{27}{2}X + \frac{225}{4} \\ \cline{1-1}
-\frac{25}{2}X^2 + \frac{23}{2}X + 1 & \\
\frac{25}{2}X^2 + \frac{125}{4}X - \frac{175}{4} & \\ \cline{1-1}
\frac{171}{4}X - \frac{171}{4} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \\ \cline{2-2}
\frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X & -\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \\ \cline{1-1}
-\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} & \\
\frac{7}{9}X - \frac{7}{9} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 &= \big(X^4 - X^3 - X^2 + 1\big) \cdot \big(X + 1\big) + \big(3X^3 - 5X^2 + X + 1\big) \\
X^4 - X^3 - X^2 + 1 &= \big(3X^3 - 5X^2 + X + 1\big) \cdot \big(\tfrac{1}{3}X + \tfrac{2}{9}\big) + \big(-\tfrac{2}{9}X^2 - \tfrac{5}{9}X + \tfrac{7}{9}\big) \\
3X^3 - 5X^2 + X + 1 &= \big(-\tfrac{2}{9}X^2 - \tfrac{5}{9}X + \tfrac{7}{9}\big) \cdot \big(-\tfrac{27}{2}X + \tfrac{225}{4}\big) + \big(\tfrac{171}{4}X - \tfrac{171}{4}\big) \\
-\tfrac{2}{9}X^2 - \tfrac{5}{9}X + \tfrac{7}{9} &= \big(\tfrac{171}{4}X - \tfrac{171}{4}\big) \cdot \big(-\tfrac{8}{1539}X - \tfrac{28}{1539}\big) + 0
\end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\boxed{\rightarrow (f : g) = X - 1}$

ii) $X^6+X^4+X^2+1=\left(X^3+X\right)\cdot X^3+\left(X^2+1\right)$
$$X^3+X=\ \left(X^2+1\right)\ \cdot\ X\ +0$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow \boxed{(f:g)=X^2+1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow \boxed{X^2+1=f\cdot 1+g\cdot(-X^3)}$

iii) $\xrightarrow[\text{Euclides}]{\text{Haciendo}}$

$$2X^6-4X^5+X^4+4X^3-6X^2+4X+1=\left(X^5-2X^4+2X^2-3X+1\right)\cdot 2X+\left(X^4+2X+1\right)$$
$$X^5-2X^4+2X^2-3X+1=\quad\left(X^4+2X+1\right)\quad\cdot\quad\left(X-2\right)\quad+3$$
$$X^4+2X+1=\quad 3\quad\cdot\quad\left(\tfrac{1}{3}X^4+\tfrac{2}{3}X+\tfrac{1}{3}\right)\quad+0$$

El MCD será el último resto no nulo y *mónico* $\rightarrow \boxed{(f:g)=1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow \boxed{1=\dfrac{1}{3}g\cdot(2X^2-4X+1)-\dfrac{1}{3}f\cdot(X-2)}$

---

10. Sea $f\in\mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1)=-2, f(2)=1$ y $f(-1)=0$. Hallar el resto de la división de f por X^3-2X^2-X+2.

Sea $P\in\mathbb{K}[X]\Rightarrow$ el resto de dividir a P por $X-a$ es $P(a)$.

$f(X)=q(X)\cdot\underbrace{X^3-2X^2-X+2}_{g(X)}+r(X)$, con $g(X)=(X-2)\cdot(X-1)\cdot(X+1)$ y $r(X)=a^2+bX+c$, ya que el $\text{gr}(r)<\text{gr}(g)$ $\xrightarrow{\text{evaluar}}$ $\begin{cases} f(1)=-2=q(1)\cdot\cancelto{0}{g(1)}+r(1)=-2\\ f(2)=1=q(2)\cdot\cancelto{0}{g(2)}+r(2)=1\\ f(-1)=0=q(-1)\cdot\cancelto{0}{g(-1)}+r(-1)=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases} r(1)=a+b+c=-2\\ r(2)=4a+2b+c=1\\ r(-1)=a-b+c=0\end{cases}\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-2\\4&2&1&1\\1&-1&1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{4}{3}\\0&1&0&-1\\0&0&1&-\frac{7}{3}\end{array}\right)\rightarrow\boxed{r(X)=\frac{4}{3}X^2-X-\frac{7}{3}}$$

---

11. Sea $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n}+3X^{n+1}+3X^n-5X^2+2X+1$ por X^3-X en $\mathbb{Q}[X]$.

$$\begin{cases} f(X)=X^{2n}+3X^{n+1}+3X^n-5X^2+2X+1\\ g(X)=X\cdot(X-1)\cdot(X+1)\end{cases}\Rightarrow f=q(X)\cdot g(X)+r(X)\text{ con gr}(\underbrace{aX^2+bX+c}_{r(X)})\leq 2$$

$$\begin{cases} f(0)=q(0)\cdot\underbrace{g(0)}_{=0}+r(0)=1\\ f(1)=q(1)\cdot\underbrace{g(1)}_{=0}+r(1)=3\\ f(-1)=q(-1)\cdot\underbrace{g(-1)}_{=0}+r(-1)=1+3(-1)^{n+1}+3(-1)^n-5-2+1=\begin{cases}2 & n\text{ impar}\\ 1 & n\text{ par}\end{cases}\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{ecuaciones de } r(X)]{\text{sistema de}} \begin{cases} r(0) = c = 1 \\ r(1) = a + b + 1 = 3 \to a + b = 2 \\ r(-1) = a - b + 1 = \begin{cases} 2 \to a - b = 1 & n \text{ impar} \\ 1 \to a - b = 0 & n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow[\text{impar}]{n} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \boxed{r_{impar}(X) = \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X + 1} \quad \checkmark \\ \xrightarrow[\text{par}]{n} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \boxed{r_{par}(X) = X^2 + X + 1} \quad \checkmark \end{cases}$$

---

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $f(X) = X^6 + X^3 - 2$.

Primera raíz: $f(\alpha_1 = 1) = 0 \to f(X) = q(X) \cdot (X - 1)$. Busco $q(X)$ con algoritmo de división.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} X^6 & & & +X^3 & & & -2 & X - 1 \\ \cline{8-8} -X^6 & +X^5 & & & & & & X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2 \\ \cline{1-2} & X^5 & & & & & & \\ & -X^5 & +X^4 & & & & & \\ \cline{2-3} & & X^4 & +X^3 & & & & \\ & & -X^4 & +X^3 & & & & \\ \cline{3-4} & & & 2X^3 & & & & \\ & & & -2X^3 & +2X^2 & & & \\ \cline{4-5} & & & & 2X^2 & & & \\ & & & & -2X^2 & +2X & & \\ \cline{5-6} & & & & & 2X & -2 & \\ & & & & & -2X & +2 & \\ \cline{6-7} & & & & & & 0 & \end{array}$$

El cociente $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ se puede factorizar en grupos como $q(X) = (X^2 + X + 1) \cdot (X^3 + 2)$. Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener $f \in \mathbb{C}[X]$ salen de esos dos polinomios.

$$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X^3 + 2 = 0 \xrightarrow[X = re^{i\theta}]{\text{exponencial}} \left\{ \begin{array}{l} r^3 = 2 \to r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \to \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ con } k = 0,\ 1,\ 2. \end{array} \right\} \to \begin{cases} \alpha_4 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \alpha_5 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ \alpha_6 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

---

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. Probar que $w + w^2 + w^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$

Voy a usar que si $w \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^{6} w^j = 0 \quad (w \neq 1)$

Si $f(X) = X^2 + X + 2$ y $w + w^2 + w^4$ es raíz $\Rightarrow f(w + w^2 + w^4) = 0$

$$(w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8}_{=w} + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2 \cdot \sum_{j=0}^{6} w^j = 0 \quad \checkmark$$

14.

i) Probar que si $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces $X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})]$.

ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exactor de $\cos(\frac{2\pi}{5})$

15. Hacer!

16. Hacer!

17. Hacer!

18. Hacer!

19. Hacer!

20. Hacer!

21. Hacer!

22. Hacer!

23. Hacer!

24. Hacer!

25. Hacer!

26. Hacer!

27. Hacer!

28. Hacer!

29. Hacer!

---

30. Hacer!

---

31. Hacer!

---

32. Hacer!

---

33. Hacer!

---

34. Hacer!

---

35. Hacer!

---

36. Hacer!

---

37. Hacer!

---

38. Hacer!

---

39. Hacer!