

Práctica 7 de álgebra 1

Comunidad algebraica

last update: 28/06/2024

Definiciones y fórmulas útiles

- *Operaciones:*

$$+ : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{i=0}^n b_i X^i$$

$$\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

$$\cdot : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$$

$$\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \in \mathbb{K}[X]$$

- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo $\rightarrow f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h, \forall f, g, h \in \mathbb{K}[X]$
- *Algoritmo de división:* $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos q y $R \in \mathbb{K}[X]$ tal que $f = q \cdot g + R$ con $\text{gr}((R)) < \text{gr}((f))$ o $R = 0$
- α es raíz de $f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$
- *Máximo común divisor:* Polinomio mónico de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.

$$- (f : g) \mid f \text{ y } (f : g) \mid g$$

$$- f = (f : g) \cdot k_f \text{ y } g = (f : g) \cdot k_g \text{ con } k_f \text{ y } k_g \text{ en } \mathbb{K}[X]$$

$$- \text{ Dos polinomios son coprimos si } (f : g) = 1 \iff f \neq g$$

- *Raíces múltiples:*

Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se dice que:

$$- \alpha \text{ es raíz } \underline{\text{múltiple}} \text{ de } f \iff f = (x - \alpha)^2 q \text{ para algún } q \in \mathbb{K}[X]$$

$$- \alpha \text{ es raíz } \underline{\text{simple}} \text{ de } f \iff x - \alpha \mid f \text{ en } \mathbb{K}[X], \text{ pero } (X - \alpha)^2 \nmid f \text{ en } \mathbb{K}[X] \iff f = (X - \alpha)q \text{ para algún } q \in \mathbb{K}[X] \text{ tal que } q(\alpha) \neq 0.$$

$$- \text{ Sea } m \in \mathbb{N}_0. \text{ Se dice que } \alpha \text{ es raíz de multiplicidad (exactamente) } m \text{ de } f, \text{ y se nota } \text{mult}(\alpha; f) = m \iff (X - \alpha)^m \mid f, \text{ pero } (x - \alpha)^{m+1} \nmid f.$$

$$\text{O equivalentemente, } f = (X - \alpha)^m q \text{ con } q \in \mathbb{K}[X], \text{ pero } q(\alpha) \neq 0$$

$$- \text{ Sea } f \in \mathbb{K}[X] \text{ no nulo } \text{mult}(\alpha; f) \leq \text{gr}(f):$$

- Vale que α es raíz múltiple de $f \iff f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) = 0 \iff \alpha$ es raíz de $(f : f'), X - \alpha \mid (f : f')$

$$- \text{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0 \text{ y } \text{mult}((\alpha); f') = m - 1$$

$$- \text{mult}(\alpha; f) = m \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{mult}(\alpha; f) \geq m \\ \text{mult}(\alpha; f) = m \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{array}$$

Ejercicios extras:

1.

- a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} > 0$ tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\frac{3\pi}{2}$

- b) Para cada valor de \mathbf{c} hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

- a) Si la raíz $\alpha = re^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) \Rightarrow f(r(-i)) = 0$

Voy a usar que: $\star^1 \left\{ \begin{array}{l} (-i)^2 = -1 \\ (-i)^3 = i \\ (-i)^4 = 1 \\ (-i)^5 = -i \\ (-i)^6 = -1 \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} f(r(-i)) &= (r(-i))^6 - 4(r(-i))^5 - (r(-i))^4 + 4^3 + 4(r(-i))^2 + 48(r(-i)) + \mathbf{c} = \\ -r^6 + 4r^5i - r^4 - 4r^3i - 4r^2 - 48ri + \mathbf{c} &= 0 \iff \begin{cases} \text{Re} : -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 \\ \text{Im} : r(4r^4 - 4r^2 - 48) = 0 \xrightarrow[r^2 = y \text{ y } r \in \mathbb{R}_{>0}]{\text{bicuadrática}} r^2 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto si $\mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 = (r^2)^3 + (r^2)^2 + 4r^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{c} = 48} \quad \checkmark$
con raíces $\pm\sqrt{3}i$ dado que $f \in \mathbb{R}[X]$

- b) Debe ocurrir que $(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$

$$\begin{array}{r} X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48 \quad | \quad X^2 + 3 \\ - X^6 \quad \quad - 3X^4 \\ \hline - 4X^5 - 4X^4 + 4X^3 \\ \quad 4X^5 \quad \quad + 12X^3 \\ \hline \quad - 4X^4 + 16X^3 + 4X^2 \\ \quad \quad 4X^4 \quad \quad + 12X^2 \\ \hline \quad \quad \quad 16X^3 + 16X^2 + 48X \\ \quad \quad \quad - 16X^3 \quad \quad - 48X \\ \hline \quad \quad \quad \quad 16X^2 \quad \quad + 48 \\ \quad \quad \quad \quad - 16X^2 \quad \quad - 48 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$f = (X^2 + 3) \underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_q$ como f tiene al menos una raíz doble puedo ver las

raíces de la derivada de q :

$$q' = 4X^3 - 12X^2 - 8X + 16 = 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 16) = 0 \xrightarrow[\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16]{\text{Posibles raíces, Gauss :}} q'(-2) = 0, \text{ pero } f(-2) \neq 0$$

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{l} \text{divido para} \\ \text{bajar grado} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} X^3 - 3X^2 - 2X + 16 \\ - X^3 - 2X^2 \\ \hline - 5X^2 - 2X \\ 5X^2 + 10X \\ \hline 8X + 16 \\ - 8X - 16 \\ \hline 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} X + 2 \\ \hline X^2 - 5X + 8 \end{array} \right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{busco raíces} \\ \text{de} \end{array} \rightarrow X^2 - 5X + 8 = 0 \iff \alpha = 5 \pm \dots$$

Algo estoy haciendo mal, esto se hizo eterno 🤖🤖🤖

2. Sea $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- $8 \mid 3n + |z^3|$
- $\arg(z^{7n+6}) = \arg(i)$

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} |z| = 1 \\ \theta_z = \frac{11}{6}\pi \end{array} \right. \rightarrow z = |z|e^{\theta_z i} = e^{i\frac{11}{6}\pi} \Rightarrow z^3 = e^{i\frac{11}{2}\pi} = -1 \Leftrightarrow |z^3| = 1 \\ \xrightarrow[\text{condición}]{\text{primera}} 8 \mid 3n + |z^3| = 3n + 1 \Leftrightarrow 3n + 1 = 8k \Leftrightarrow 3n + 1 \equiv 0 \pmod{8} \Leftrightarrow 3n \equiv 7 \pmod{8} \Leftrightarrow 9n \equiv 21 \pmod{8} \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod{8} \quad \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{condición}]{\text{segunda}} \arg(z^{7n+6}) = \arg(i) \Leftrightarrow \left(e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^{7n+6} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{i\frac{77}{6}\pi + 11\pi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{77}{6}n\pi + 11\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \xrightarrow[n]{\text{despejo}} \frac{77}{6}n + 11 = \frac{1}{2} + 2k \Leftrightarrow 77n = -63 + 12k \Leftrightarrow 77n \equiv -63 \pmod{12} \Leftrightarrow 5n \equiv -3 \pmod{12} \Leftrightarrow n \equiv 9 \pmod{12} \quad \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{junto info} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n \equiv 9 \pmod{12} \\ n \equiv 5 \pmod{8} \end{array} \right. \xrightarrow[\text{coprimos}]{\text{quiero divisores}} \left\{ \begin{array}{l} n \equiv 1 \pmod{4} \quad \checkmark \\ n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{4} \quad \checkmark \\ n \equiv 1 \pmod{2} \quad \checkmark \end{array} \right. \xLeftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n \equiv 0 \pmod{3} \quad \star^1 \\ n \equiv 1 \pmod{8} \quad \star^2 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[\star^1]{\text{de}} n = 3k \quad \star^3 \quad \checkmark \xrightarrow[\text{en } \star^2]{\text{reemplazo}} 3k \equiv 1 \pmod{8} \Leftrightarrow k \equiv 3 \pmod{8} \Leftrightarrow k = 8j + 3 \quad \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[k \text{ en } \star^3]{\text{reemplazo}} n = 3(8j + 3) = 24j + 9 \Leftrightarrow \boxed{n \equiv 9 \pmod{24}} \end{array}$$

Ejercicios de la guía:

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

- i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$,
- ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$,
- iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$,

i) *coeficiente principal:* 4^{77}
grado: $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:* $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$
grado: 28

iii) *coeficiente principal:* $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4}_f + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_g$

Cuando sumo me queda: $\text{cp}(f^4) - \text{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0 \Rightarrow \text{gr}(f^4 + g) < 20$

→ Calculo el $\text{cp}(f^4 + g)$ con $\text{gr}(f^4 + g) = 19$.

Laburo a f :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para usar} \rightarrow (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \\ \text{fórmula de } f \cdot g \\ f^2 \cdot f^2 = \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \star^2 \\ \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \xrightarrow[\text{el término con } k=19]{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \stackrel{\star^1}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_{10} \text{ sale a}}{\text{ojímetro}} b_{10} = (-3)^2 = 9 \\ \frac{a_9 \text{ no tan fácil, volver}}{\text{a usar } \sum f \cdot g \text{ en } k=9} f \cdot f = \sum_{k=0}^{10} \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow{k=9} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \stackrel{\star^3}{=} c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot c_4 \cdot d_5 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{d_5 \text{ sale a}}{\text{ojímetro}} d_5 = -3 \\ \frac{c_4 \text{ sale a}}{\text{ojímetro}} c_4 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a_9 = -6 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{cp}(f^4) = 2 \cdot (-6) \cdot (9) = -108 \\ \text{cp}(g) = 19 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\text{cp}(f^4 + g) = -89} \quad \checkmark \end{array} \right.$$

\star^1 : Sabemos que el $\text{gr}(f^4) = 20 \Rightarrow \text{gr}(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \leq 10$

solo puede ocurrir *cuando los exponentes* $\left\{ \begin{array}{c} i = 10, j = 9 \\ \vee \\ i = 9, j = 10 \end{array} \right\}$

\star^2 : porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

\star^3 : Idem \star^1 para el polinomio f

2. Hacer!

3. Hacer!

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

- i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$ y $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,
 ii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$ y $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,
 iii) $f = X^n - 1$ y $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$
-

$$\begin{array}{r} \text{i) } \begin{array}{r} 5X^4 + 2X^3 \quad - X + 4 \\ - 5X^4 \quad - 10X^2 \\ \hline 2X^3 - 10X^2 \quad - X \\ - 2X^3 \quad - 4X \\ \hline - 10X^2 - 5X + 4 \\ 10X^2 \quad + 20 \\ \hline - 5X + 24 \end{array} \left| \begin{array}{l} X^2 + 2 \\ 5X^2 + 2X - 10 \end{array} \right. \end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

$$\begin{array}{r} \text{ii) } \begin{array}{r} 4X^4 + X^3 \quad - 4 \\ - 4X^4 \quad - 2X^2 \\ \hline X^3 - 2X^2 \\ - X^3 \quad - \frac{1}{2}X \\ \hline - 2X^2 - \frac{1}{2}X - 4 \\ 2X^2 \quad + 1 \\ \hline - \frac{1}{2}X - 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2X^2 + 1 \\ 2X^2 + \frac{1}{2}X - 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

En $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2 + 1) \cdot \underbrace{(2X^2 + 4X + 6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X + 4)}_{r[X]}$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división se asoma la idea de que:

$$X^n - 1 = (X - 1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} X^j}_{q[X]} + \underbrace{0}_{r[X]}$$

Inducción: Quiero probar que $p(n) : X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1) : X^1 - 1 = (X - 1) \underbrace{\sum_{j=0}^{1-1} X^j}_{X^0=1} \Rightarrow p(1) \text{ es Verdadero} \quad \checkmark$

Paso inductivo:

$$p(k) : X^k - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j \text{ es Verdadera} \stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1) : X^{k+1} - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j \text{ es Verdadera}$$

$$(X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j = (X - 1) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} X^j + X^k \right) = (X - 1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI} + (X - 1) \cdot X^k = X^k - 1 + X^{k+1} - X^k =$$

$$X^{k+1} - 1 \quad \checkmark$$

Dado que $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera $p(n) \forall n \in \mathbb{N}$

5. Hacer!

6. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in \mathbb{K}[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in \mathbb{K}[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g \pmod{h}$.

- Probar que $\equiv \pmod{h}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{K}[X]$.
- Probar que si $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$ y $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$.
- Probar que si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Probar que r es el resto de la división de f por h si y solo si $f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ o $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*,

- reflexiva:* Es f congruente a f módulo h ?
 $f \equiv f \pmod{h} \iff h \mid f - f = 0 \iff h \mid 0 \quad \checkmark$
- simétrica:* Si $f \equiv g \pmod{h} \stackrel{?}{\iff} g \equiv f \pmod{h}$
 $f \equiv g \pmod{h} \iff h \mid f - g \iff h \mid -(g - f) \iff h \mid g - f \iff g \equiv f \pmod{h} \quad \checkmark$
- transitiva:* Si $\begin{cases} f \equiv g \pmod{h} \\ g \equiv p \pmod{h} \end{cases} \stackrel{?}{\iff} f \equiv p \pmod{h}$.

$$\begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid g - p \end{cases} \xrightarrow[\rightarrow F_2]{F_1 + F_2} \begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid f - p \end{cases} \rightarrow f \equiv p \pmod{h} \quad \checkmark$$

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en $\mathbb{K}[X]$

ii) Si $\begin{cases} f_1 \equiv g_1 \pmod{h} \\ f_2 \equiv g_2 \pmod{h} \end{cases} \star^1$

$$f_1 \equiv g_1 \pmod{h} \iff h \mid f_1 - g_1 \Rightarrow h \mid f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2 \pmod{h} \stackrel{\star^1}{\iff} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$$

iii) *Inducción:* Quiero probar $p(n)$: Si $f \equiv g(h)$ entonces $f^n \equiv g^n(h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: $p(1)$: $f^1 \equiv g^1(h)$ \star^2 Verdadera \checkmark

Paso inductivo: $p(k)$: $\underbrace{f^k \equiv g^k(h)}_{HI}$ es verdadera $\stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1)$: $f^{k+1} \equiv g^{k+1}(h)$ ¿También lo es?

$$f^k \equiv g^k(h) \iff h \mid f^k - g^k \Rightarrow h \mid f \cdot (f^k - g^k) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^k(h) \stackrel{\star^2}{\iff} f^{k+1} \equiv g^{k+1}(h) \quad \checkmark$$

Finalmente $p(1), p(k), p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) **Hacer!**

7. Hallar el resto de la división de f por g para:

- i) $f = X^{353} - X - 1$ y $g = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$,
- ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$ y $g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$
- iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, y $g = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$,
- iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$, y $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ (Sugerencia ver 4. iii)).

$$i) \quad g \mid g \iff X^{31} - 2 \equiv 0 \quad (X^{31} - 2) \iff X^{31} \equiv 2 \quad (g)$$

$$f = X^{353} - X - 1 = \underbrace{(X^{31})^{11}}_{\equiv 2} X^{12} - X - 1 \stackrel{(g)}{\equiv} 2^{11} X^{12} - X - 1 \rightarrow \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} - 1}$$

$$ii) \quad g \mid g \iff X^6 + 1 \equiv 0 \quad (X^6 + 1) \iff X^6 \equiv -1 \quad (g)$$

$$f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166} X^4 + (X^6)^6 X^4 + (X^6)^3 X^2 + 1 \stackrel{(g)}{\equiv} X^4 + X^4 - X^2 + 1 = 2X^4 - X^2 + 1$$

$$\rightarrow \boxed{r_g(f) = 2X^4 - X^2 + 1}$$

¿Qué onda en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

$$iii) \quad g \mid g \iff X^{100} - X + 1 \equiv 0 \quad (X^{100} - X + 1) \iff X^{100} \equiv X - 1 \quad (g)$$

$$f = X^{200} - 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 - 3X^{100}X + 2 \stackrel{(g)}{\equiv} (X - 1)^2 - 3(X - 1)X + 2$$

$$\rightarrow \boxed{r_g(f) = (X - 1)^2 - 3(X - 1)X + 2}$$

iv) *Usando la sugerencia:* Del ejercicio 4. iii) sale que $X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$

$$\xrightarrow[n=5]{\text{para el } g} X^5 - 1 = (X - 1) \underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_g \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)} \quad (g) \quad \checkmark$$

$$f = (X^5)^{603} X + 2(X^5)^{366} X^3 - (X^5)^{34} X^4 + (X^5)^{27} X^2 + 2X^4 - X^3 + 1$$

$$f \equiv \underbrace{X + 2X^3 - X^4 + X^2 + 2X^4 - X^3 + 1}_{=X^4+X^3+X^2+X+1=g} \quad (g) \iff \boxed{f \equiv 0 \quad (g)}$$

8. Hacer!

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:

- i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$, $g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$,
 ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X^3 + X$,
 iii) $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1$, $g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1$,
-

$$\begin{array}{r|l} \text{i) } & \begin{array}{r} X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 \\ - X^5 + X^4 + X^3 - X \end{array} \\ \hline & \begin{array}{r} X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X + 2 \\ - X^4 + X^3 + X^2 - 1 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{r} 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Euclides}} (f : g) = (g : 3X^3 - 5X^2 + X + 1) \\ \xrightarrow[\text{en función de } g]{\text{escribo a } f} f = (X + 1) \cdot g + 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{r} X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ - X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X \end{array} \\ \hline & \begin{array}{r} \frac{2}{3}X^3 - \frac{4}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + 1 \\ - \frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9} \end{array} \\ \hline & \begin{array}{r} -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{r} 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ - 3X^3 - \frac{15}{2}X^2 + \frac{21}{2}X \end{array} \\ \hline & \begin{array}{r} -\frac{25}{2}X^2 + \frac{23}{2}X + 1 \\ \frac{25}{2}X^2 + \frac{125}{4}X - \frac{175}{4} \end{array} \\ \hline & \begin{array}{r} \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{r} -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\ \frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X \end{array} \\ \hline & \begin{array}{r} -\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} \\ \frac{7}{9}X - \frac{7}{9} \end{array} \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 = (X^4 - X^3 - X^2 + 1) \cdot (X + 1) + (3X^3 - 5X^2 + X + 1)$$

$$X^4 - X^3 - X^2 + 1 = (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \cdot \left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right)$$

$$3X^3 - 5X^2 + X + 1 = \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{27}{2}X + \frac{225}{4}\right) + \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right)$$

$$-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} = \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539}\right) + 0$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\boxed{\rightarrow (f : g) = X - 1}$

$$\text{ii) } X^6 + X^4 + X^2 + 1 = (X^3 + X) \cdot X^3 + (X^2 + 1)$$

$$X^3 + X = (X^2 + 1) \cdot X + 0$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow (f : g) = X^2 + 1$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)$

iii) $\xrightarrow[\text{Euclides}]{\text{Haciendo}}$

$$2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1 = (X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1) \cdot 2X + (X^4 + 2X + 1)$$

$$X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1 = (X^4 + 2X + 1) \cdot (X - 2) + 3$$

$$X^4 + 2X + 1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) + 0$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\rightarrow (f : g) = 1$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \rightarrow 1 = \frac{1}{3}g \cdot (2X^2 - 4X + 1) - \frac{1}{3}f \cdot (X - 2)$

10. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2, f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

Sea $P \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow$ el resto de dividir a P por $X - a$ es $P(a)$.

$f(X) = q(X) \cdot \underbrace{X^3 - 2X^2 - X + 2}_{g(X)} + r(X)$, con $g(X) = (X - 2) \cdot (X - 1) \cdot (X + 1)$ y $r(X) = a^2 + bX + c$, ya

$$\text{que el } \text{gr}(r) < \text{gr}(g) \xrightarrow{\text{evaluar}} \begin{cases} f(1) = -2 = q(1) \cdot \cancel{g(1)}^0 + r(1) = -2 \\ f(2) = 1 = q(2) \cdot \cancel{g(2)}^0 + r(2) = 1 \\ f(-1) = 0 = q(-1) \cdot \cancel{g(-1)}^0 + r(-1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array} \right) \rightarrow \boxed{r(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{7}{3}}$$

11. Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$ en $\mathbb{Q}[X]$.

$$\begin{cases} f(X) = X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1 \\ g(X) = X \cdot (X - 1) \cdot (X + 1) \end{cases} \Rightarrow f = q(X) \cdot g(X) + r(X) \text{ con } \text{gr}(\underbrace{aX^2 + bX + c}_{r(X)}) \leq 2$$

$$\begin{cases} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_{=0} + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_{=0} + r(1) = 3 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_{=0} + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 = \begin{cases} 2 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[\text{ecuaciones de } r(X)]{\text{sistema de}} \begin{cases} r(0) = c = 1 \\ r(1) = a + b + 1 = 3 \rightarrow a + b = 2 \\ r(-1) = a - b + 1 = \begin{cases} 2 \rightarrow a - b = 1 & n \text{ impar} \\ 1 \rightarrow a - b = 0 & n \text{ par} \end{cases} \end{cases} \\ & \begin{cases} \xrightarrow[n]{\text{impar}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \rightarrow \boxed{r_{\text{impar}}(X) = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1} \quad \checkmark \\ \xrightarrow[n]{\text{par}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \boxed{r_{\text{par}}(X) = X^2 + X + 1} \quad \checkmark \end{cases} \end{aligned}$$

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $f(X) = X^6 + X^3 - 2$.

Primera raíz: $f(\alpha_1 = 1) = 0 \rightarrow f(X) = q(X) \cdot (X - 1)$. Busco $q(X)$ con algoritmo de división.

$$\begin{array}{r} X^6 \\ -X^6 + X^5 \\ \hline X^5 \\ -X^5 + X^4 \\ \hline X^4 + X^3 \\ -X^4 + X^3 \\ \hline 2X^3 \\ -2X^3 + 2X^2 \\ \hline 2X^2 \\ -2X^2 + 2X \\ \hline 2X - 2 \\ -2X + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

El cociente $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ se puede factorizar en grupos como $q(X) = (X^2 + X + 1) \cdot (X^3 + 2)$. Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener $f \in \mathbb{C}[X]$ salen de esos dos polinomios.

$$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X^3 + 2 = 0 \xrightarrow[X = re^{i\theta}]{\text{exponencial}} \left\{ \begin{array}{l} r^3 = 2 \rightarrow r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ con } k = 0, 1, 2. \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \alpha_5 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ \alpha_6 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. Probar que $w + w^2 + w^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$

Voy a usar que si $w \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^6 w^j = 0 \quad (w \neq 1)$

Si $f(X) = X^2 + X + 2$ y $w + w^2 + w^4$ es raíz $\Rightarrow f(w + w^2 + w^4) = 0$

$$(w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8}_{=w} + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2 \cdot \sum_{j=0}^6 w^j = 0 \quad \checkmark$$

14.

- i) Probar que si $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces $X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})]$.
- ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
-

i) Voy a usar que si $w \in G_5 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^4 w^j = 0 & (w \neq 1) \text{ ★}^2 \\ w^k = w^{r_5(k)} \text{ ★}^1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} X^2 + X - 1 &= [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})] = X^2 - (w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + \\ &\underbrace{(w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\text{★}^1} = X^2 - X \underbrace{(w^2 + w^{-2} + w + w^{-1})}_{\text{★}^1} + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\text{★}^2} = \\ X^2 - X \underbrace{(w + w^2 + w^3 + w^4)}_{\text{★}^2} + \underbrace{-1 + 1}_{=0} + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} &= X^2 - X \underbrace{(-1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4)}_{=0} - 1 = \\ X^2 + X - 1 &\quad \checkmark \end{aligned}$$

ii) Calculando las raíces a mano de $X^2 + X - 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Pero del resultado del inciso i) tengo que :

$$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow[\text{la factorización es}]{\text{sé que una raíz dada}} w + w^{-1} = w + \bar{w} = 2\text{Re}(w) = 2 \cdot \underbrace{\cos(\frac{2\pi}{5})}_{\cos \theta \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$$

15.

- i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.
- ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz en común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.
-

i) **Hacer!**

ii) Busco el $(f : g)$:

$$\begin{aligned} X^4 + 3X - 2 &= (X^4 + 3X^3 - 3X + 1) \cdot 1 + (-3X^3 + 6X - 3) \\ X^4 + 3X^3 - 3X + 1 &= (-3X^3 + 6X - 3) \cdot (-\frac{1}{3}X - 1) + (2X^2 + 2X - 2) \\ -3X^3 + 6X - 3 &= (2X^2 + 2X - 2) \cdot (-\frac{3}{2}X + \frac{3}{2}) + 0 \\ (f : g) &= X^2 + X - 1 \xrightarrow{\text{raíces}} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ X^4 + 3X - 2 &= (X^2 + X - 1) \cdot (X^2 - X + 2) + 0 \end{aligned}$$

16. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1,$

ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i,$

iii) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1), \quad a = 2,$

iv) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3, \quad a = 2,$

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1,$

Hacer!

ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i,$

$X^6 - 3X^4$	$+ 4 \mid X^2 + 1$	Hacer!
$- X^6 - X^4$	$\mid X^4 - 4X^2 + 4$	
<hr/>		
$- 4X^4$		
$4X^4 + 4X^2$		
<hr/>		
$4X^2 + 4$		
$- 4X^2 - 4$		
<hr/>		
0		

iii) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1), \quad a = 2,$

Hacer!

iv) $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3, \quad a = 2,$

Hacer!

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene solo raíces simples en \mathbb{C} .

18. Hacer!

19. Hacer!

20. Hacer!

21. Hacer!

22. Hacer!

23. Hacer!

24. Hacer!

25. Hacer!

26. Hacer!

27. Hacer!

28. Hacer!

29. Hacer!

30. Hacer!

31. Hacer!

32. Hacer!

33. Hacer!

34. Hacer!

35. Hacer!

36. Hacer!

37. Hacer!

38. Hacer!

39. Hacer!