Notas teóricas

Voy a estar usando:

(a) $A \cup B = B \cup A \to$ Conmuta

(b) $A \cap B = B \cap A \to$ Conmuta

(c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \to$ De Morgan 1

(d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \to$ De Morgan 2

(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \to$ Distributiva 1

(f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \to$ Distributiva 2

(g) $A - B = A \cap B^c$

(h) $A \triangle B = \begin{cases} (A - B) \cup (B - A) \\ (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \end{cases}$

(i) $A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$

(j)

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A^c$	$x \in A \cap B$	$x \in A \cup B$	$x \in \begin{array}{c} A \subseteq B \\ \hline A^c \cup B \end{array}$	$x \in A \triangle B$	$A - B$
V	V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F	F

(k) Cuando para probar $p \Rightarrow q$ se prueba en su lugar $\sim q \Rightarrow \sim p$ se dice que es una demostración por contrarrecíproco, mientras que cuando se prueba en su lugar que suponer que vale $p \wedge \sim q$ lleva a una contradicción, se dice que es una demostración por reducción al absurdo.

Ejercicios sueltos que me parecen relevantes

Distributiva

Probar la propiedad distributiva: $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Tengo que hacer una doble inclusión: $\to \begin{cases} 1) \quad X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\ 2) \quad (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z) \end{cases}$

1) $x \in X \cap (Y \cup Z)$ quiere decir que $x \in X$ y $\left\{ \begin{array}{c} x \in Y \\ \vee \\ x \in Z \end{array} \right\}$. Por lo tanto $\to \left\{ \begin{array}{c} x \in X \cap Y \\ \vee \\ x \in X \cap Z \end{array} \right\}$, lo que equivale a $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad \checkmark$.

2) Ahora hay que probar la vuelta. Uso razonamiento análogo. $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$, por lo que

$$x \in X \text{ y } \left\{ \begin{array}{c} x \in X \cap Y \xrightarrow[Y \subseteq Y \cup Z]{\text{dado que}} x \in X \cap (Y \cup Z) \\ \vee \\ x \in X \cap Z \xrightarrow[Z \subseteq Y \cup Z]{\text{dado que}} x \in X \cap (Y \cup Z) \end{array} \right\}.$$ Lo que quiere decir que $x \in X \cap (Y \cup Z)$ ✓

¿Estoy suponiendo cosas que debería demostrar, me estoy salteando pasos?

Para que la solución quede más creíble usé que $S \subseteq S \cup T$ fue el dealbreaker.

De Morgan

Probar la propiedad $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Tengo que hacer una doble inclusión $\rightarrow \begin{cases} 1) \quad (A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c \\ 2) \quad A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c \end{cases}$

1) Prueba directa: Si $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$

Por hipótesis $x \in (A \cap B)^c \overset{\text{def}}{\iff} x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$

A	B	$A^c \cup B^c$	$(A \cap B)^c$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

Uso la tabla para ver la definición $x \in (A \cap B)^c \overset{\text{def}}{\iff} x \notin A \vee x \notin B$

2) Pruebo por absurdo. Si $\forall x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$

Supongo que $x \notin (A \cap B)^c \overset{\text{def}}{\iff} x \in (A \cap B) \xrightarrow[\text{hipótesis}]{\text{por}} x \in A^c \cup B^c \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \notin A \\ \vee \\ x \notin B \end{array} \right\}$, por lo que $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \cap B$ contradiciendo el supuesto, absurdo. Debe ocurrir que $x \in (A \cap B)^c$

A	B	$A \cap B$	$(A \cup B)$	$(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Ejercicios de la guía

---

1. $A = \{1, 2, 3\}$

(i) $1 \in A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$

(ii) $\{1\} \subseteq A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$

(iii) $\{2, 1\} \subseteq A \xrightarrow{\text{respuesta}} \text{V}$

(iv) $\{1, 3\} \in A \xrightarrow{\text{respuesta}} \text{F}$

(v) $\{2\} \in A \xrightarrow{\text{respuesta}} \text{F}$

---

2. $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$

(i) $3 \in A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{F}$

(ii) $\{3\} \subseteq A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{F}$

(iii) $\{3\} \in A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$

(iv) $\{\{3\}\} \in A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$

(v) $\{1, 2\} \in A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$

(vi) $\{1, 2\} \subseteq A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$

(vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$

(viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{F}$

(ix) $\varnothing \in A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{F}$

(x) $\varnothing \subseteq A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$

(xi) $A \in A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{F}$

(xii) $A \subseteq A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$

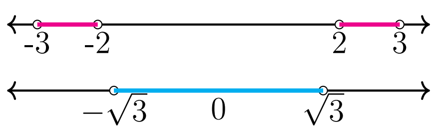
---

3. Inclusión : $\begin{cases} \text{Definición} & A \subseteq B \text{ si } \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \\ \text{Contrarecíproco} & A \not\subseteq B \text{ si } \exists x, x \in A \Rightarrow x \notin B \end{cases}$

(i) $\begin{cases} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{5, 4, 3, 2, 1\} \end{cases} \xrightarrow{\text{respueta}} A \overset{\checkmark}{\subseteq} B$

(ii) $\begin{cases} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{1, 2, \{3\}, -3\} \end{cases} \xrightarrow{\text{respueta}} A \not\subseteq B \xrightarrow[\text{que}]{\text{dado}} \{3\} \notin B$

(iii) $\begin{cases} A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < |x| < 3\} \\ B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\} \end{cases}$



$\xrightarrow{\text{respueta}} A \not\subseteq B \xrightarrow[\text{que}]{\text{dado}} 2.5 \in A$ y $2.5 \notin B$

(iv) $\begin{cases} A = \{\varnothing\} \\ B = \varnothing \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{respueta}} A \not\subseteq B \xrightarrow[\text{que}]{\text{dado}} B$ no tiene ningún elemento, sin embargo A tiene un elemento: $\varnothing$.

---

4. Subconjuntos: $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$, $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$,
Conjunto referencial: $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$, hallar:

(i) $A \cap (B \triangle C)$

(ii) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$

(iii) $A^c \cap B^c \cap C^c$

---

5. Describir $\begin{cases} i) & (A \cup B \cup C)^c \quad \text{en términos de intersecciones y complementos} \\ ii) & (A \cap B \cap C)^c \quad \text{en términos de uniones y complementos} \end{cases}$

i) $(A \cup B \cup C)^c \overset{(c)}{=} (A \cup B)^c \cap C^c \overset{(c)}{=} A^c \cap B^c \cap C^c$

ii) $(A \cap B \cap C)^c \overset{(d)}{=} (A \cap B)^c \cup C^c \overset{(d)}{=} A^c \cup B^c \cup C^c$

Solo eso? Falta demostrar algo de alguna manera más rigurosa?

No, con eso sería suficiente ✓

---

6. Hacer!

---

7. $\xrightarrow[\text{gráfico}]{\text{del}} (C \cap B) - A) \cup (A - B) =$

$\xrightarrow[A - B = A \cap B^c]{\text{uso que}} = (C \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \overset{*}{=}$

$\xrightarrow{\text{distributiva}} C \cup (A \cap B^c) \cap B \cup (A \cap B^c) \cap A^c \cup (A \cap B^c) =$

$= (C \cup A) \cap (C \cup B^c) \cap (B \cup A) \cap (B \cup B^c) \cap (A^c \cup A) \cap (A^c \cup B^c) =$

$= (C \cup A) \cap (C \cup B^c) \cap (B \cup A) \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{U} \cap (A^c \cup B^c) =$

$= (C \cup A) \cap (C \cup B^c) \cap (B \cup A) \cap (A^c \cup B^c) =$

$= C \cap C \cup C \cap B^c \cup A \cap C \cup A \cap B^c ...$

$= C \cup C \cap B^c \cup A \cap C \cup A \cap B^c ... estonopuedeseras$

$efectivamente, nohayqueenloquecer, cortoen*$ ✓

---

8. Hallar $\mathcal{P}(A)$, el conjunto partes formado por todos los subconjuntos de A.

$\mathcal{P}(A) \to \begin{cases} B \in \mathcal{P}(A) \iff B \subseteq A \\ \mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\} \end{cases}$

(i) $A = \{1\} \to \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A\}$ controlar

(ii) $A = \{a, b\} \to \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\}$

(iii) $A = \{1, \{1,2\}, 3\} \to \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{1,2\}\}, \{3\}, \{1, \{1,2\}\}, \{1,3\}, \{\{1,2\}, 3\}, A\}$

---

9. Sean A y B conjuntos, Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$

$\Rightarrow$) Pruebo por absurdo. Supongo que $A \not\subseteq B \Rightarrow \exists x \in A \mid x \notin B$.

Si $x \in A \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A) \xrightarrow[\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)]{\text{hipótesis}} \{x\} \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow x \in B$. Absurdo.

$\to \boxed{\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B}$ ✓controlar Consultado, está bien. ✓

$\Leftarrow$) quiero ver que $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$,

$\forall S \in \mathcal{P}(A) \iff S \subseteq A \overset{\text{hip}}{\subseteq} B \Rightarrow S \in \mathcal{P}(B)$.

$\to \boxed{A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)}$ ✓controlar Consultado, está bien. ✓

10.

i) Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

ii)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

11. Hallar contraejemplos para mostrar que las siguientes proposiciones son falsas:

i) $\forall a \in \mathbb{N}$, $\frac{a-1}{a}$ no es un número entero.
La proposición es falsa, dado que si $a = 1 \Rightarrow \frac{1-1}{1} = 0 \in \mathbb{Z}$

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con x, y positivos, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
La proposición es falsa, dado que si.

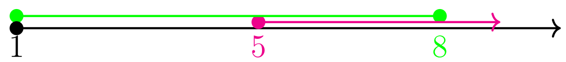
$$\left\{ \begin{array}{c} x = 4. \\ y = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \overset{?}{\leftrightarrow} \sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.
La proposición es falsa, dado que si $x = -3$, queda $9 > 4 \Rightarrow -3 > 2$, lo cual es falso,

12.

i) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando debidamente:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5 \vee n \leq 8$.
La proposición es verdadera. El conjunto descrito por $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 8 \vee n \geq 5\} = \mathbb{N}$



¿Se puede justificar con un gráfico?

(b) $\exists n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5 \wedge n \leq 8$.
La proposición es verdadera, en este caso es cuestión de encontrar solo un valor que cumpla, $n = 6$

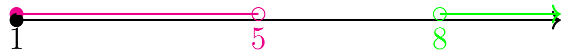
(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N} \mid m > n$.
La proposición es verdadera, si se elige por ejemplo a $m = n + 1$

(d) $\exists n \in \mathbb{N} \mid \ \forall m \in \mathbb{N}, m > n$.
La proposición es falsa, el único $n \in \mathbb{N}$ que no tiene un número menor estricto es el 1. Pero la condición dice que $\forall m \in \mathbb{N}$ se debe cumplir y si m $1 \not< 1$

(e) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 3 \Rightarrow x^2 > 4.$
La proposición es verdadera. Si $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9 \xrightarrow[\text{particular}]{\text{en}} x^2 > 9 > 4 \Rightarrow x^2 > 4$

(f) Si z es un número real, entonces $z \in \mathbb{C}$.
Están proponiendo que dado $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z \in \mathbb{C}$. Dado que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = \{a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \mid a + ib\}$, con $i^2 = -1$ Por lo tanto para $b = 0$, podría generar todo $\mathbb{R}$.

ii) (a) $\exists n \in \mathbb{N},\ n < 5 \wedge n > 8.$
$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5 \wedge n > 8\} = \varnothing \Rightarrow \nexists n$ que cumpla lo pedido.



¿Se puede justificar con un gráfico?

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \mid n < 5 \vee n > 8.$
La proposición es falsa, $n = 6$ no cumple estar en ese conjunto.

(c) $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N} \mid m \leq n.$
La proposición es falsa, porque el conjunto $\mathbb{N}$ no tiene un máximo. $n = m + 1$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N} \mid\ \exists m \in \mathbb{N}, m \leq n.$
La proposición es verdadera, el único $m \in \mathbb{N}$ que cumple eso es el $m = 1$.

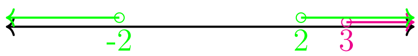
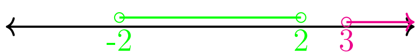
(e) $\exists x \in \mathbb{R},\ x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 4.$
La proposición es falsa. Dado dos conjunto:

$$\left\{ \begin{array}{c} A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\} \\ B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\} \end{array} \right\} \rightarrow$$

Si lo pienso como conjuntos, entiendo que $A \nsubseteq B$ entonces es falso. Pero si leo el enunciado, me confunde el $\exists$, porque 3 sería un contraejemplo y no se usaban para los $\forall$?

(f) Si z no es un número real, entonces $z \notin \mathbb{C}$.
La proposición es falsa. Están proponiendo que dado $z \notin \mathbb{R} \Rightarrow z \notin \mathbb{C}$. Si $z = i$, se prueba lo contrario. Dado que $i \notin \mathbb{R}$, pero $i \in \mathbb{C}$

iii) Reescribir las proposiciones (e), (f) usando las equivalencias del ejercicio 10 i)

$p \Rightarrow q$	$\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 4$		$A \overset{?}{\subseteq} B \rightarrow \quad \checkmark$
$\sim q \Rightarrow \sim p$	$x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 3$		$A \overset{?}{\subseteq} B \rightarrow \quad \checkmark$
$\sim p \vee q$	$x \leq 3 \vee x^2 > 4$		$A \cup B \overset{?}{=} \mathcal{U} \rightarrow \quad \checkmark$
$\sim (p \vee \sim q)$	$\sim (x > 3 \wedge x^2 \leq 4)$		$(A \cap B)^c \overset{?}{=} \varnothing^c = \mathcal{U} \rightarrow \quad \checkmark$

---

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial $\mathcal{U}$ y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$. Es verdadera. Pruebo con tabla de verdad.

A	B	C	C^c	$A-C$	$B-C$	$A\triangle B$	$(A\triangle B)-C$	$(A-C)\triangle(B-C)$
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F	F

Hay distribución entre la resta y una diferencias simétrica.

ii) $(A \cap B)\triangle C = (A\triangle C) \cap (B\triangle C)$

iii) $C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A\triangle B)^c$

iv) $A\triangle B = \varnothing \iff A = B$

---

14. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Probar que:

i) $A \cap (B\triangle C) = (A \cap B)\triangle(A \cap C)$

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
$(A - B) \cup (A \cap C) = A \cap [(A \cap B^c) \cup C] = A \cap [(A \cup C) \cap (B^c \cup C)] =$
$A \cap (B^c \cup C) = A \cup (B - C)^c = A - (B - C)$

iii) $A\triangle B \subseteq (A\triangle C) \cup (B\triangle C)$ Hacer!

iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

v) $A \subseteq B \Rightarrow A\triangle B = B \cap A^c$

vi) $A \subseteq C \iff B^c \subseteq A^c$

vii) $A \cap C = \varnothing \Rightarrow A \cap (B\triangle C) = A \cap B$

---

15. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A, A \times B, (A \cap B) \times (A \cup B)$.

- $A \times A = \begin{cases} \{a \in A, b \in A \mid (a, b) \in A \times A\} \to \text{Comprensión} \\ \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \to \text{Extensión} \end{cases}$

- $A \times B = \cdots$

- $(A \cap B) \times (A \cup B) =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{1,3\} \times \{1,2,3,5,7\} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \times & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 1 & (1,1) & \cdots & \cdots & \cdots & (1,7) \\ \hline 3 & (3,1) & \cdots & \cdots & \cdots & (3,7) \\ \hline \end{array} \\ (A \cap B) \times (A \cup B) = \{s \in (A \cap B), t \in (A \cup B) \mid (s,t) \in (A \cap B) \times (A \cup B)\} \end{array} \right.$$

16. Sean A, B y C conjuntos. Probar que:

i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

iv) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

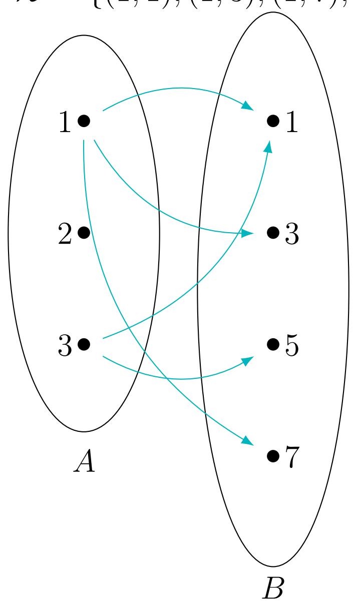
Relaciones
Defnción de Relación, $\mathcal{R}$:

> Sean A y B conjuntos. Una *relación* $\mathcal{R}$ *de* A *en* B es un subconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$. Es decir $\mathcal{R}$ de A en B si $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$.

---

17. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Verificar las siguientes relaciones de A y B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

i) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 5)\}$



ii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 2), (3, 5)\}$
$\to 3 \mathcal{R} 2 \notin \mathcal{P}(A \times B)$

iii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 7), (3, 7)\}$ *Hacer*!

iv) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 7)\}$ *Hacer*!

---

18. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Describir por extensión cada una de las siguientes relaciones de A en B:

i) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b =$
$\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$

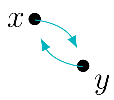
ii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a > b = \{(2, 1), (3, 1)\}$

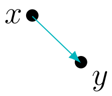
iii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7)\}$

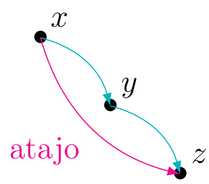
iv) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6 = \{(1, 7), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7)\}$

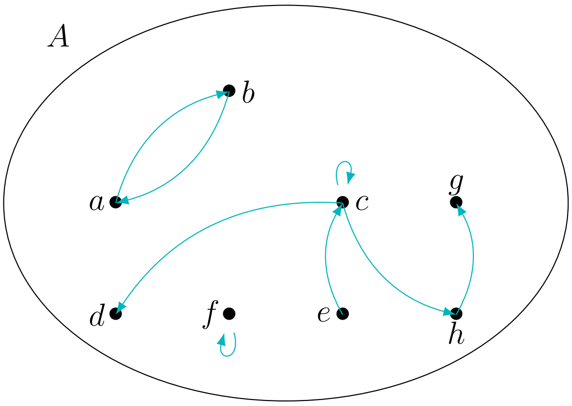
19. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describit por extensión la relación en A que representa y determinar si es *reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.*

1. *Reflexiva*: $(x, x) \in \mathcal{R}\ \forall x \in A$ o $x \mathcal{R} x.\ \forall x \in A$. Gráficamente, cada elemento tiene que tener un bucle. 

2. *Simétrica*: $(x, y) \in \mathcal{R}$, entonces el par $(y, x) \in \mathcal{R}$, también si $\forall x, y \in A, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$. Gráficamente tiene que haber un ida y vuelta en cada elemento de la relación. 

3. *Antisimétrica*: $(x, y) \in \mathcal{R}$, con $x \neq y$ entonces el par $(y, x) \notin \mathcal{R}$, también se puede pensar como $\forall x, y \in A, x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$. Gráficamente **no** tiene que haber ningún ida y vuelta en el gráfico. Solo en una dirección. 

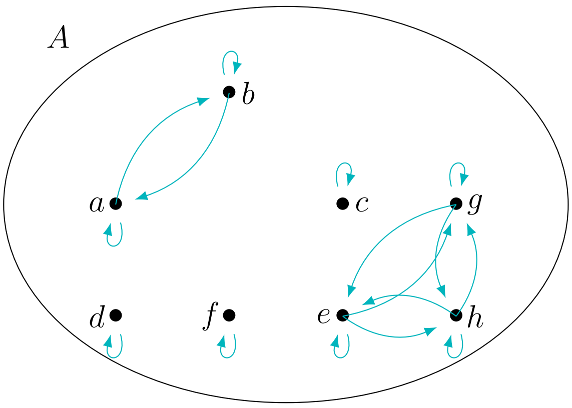
4. *Transitiva*: Para toda terna $x, y, z \in A$ tales que $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, se tiene que $(x, z) \in \mathcal{R}$. Otra manera sería si $\forall x, y, z \in A,\ x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$. Gráficamente tiene que haber flecha directa entre las puntas de cualquier camino que vaya por más de dos nodos. 

i) 

- No es reflexiva, porque no hay bucles en todos los vértices, en particular $a \not\mathcal{R} a$.
- No es simétrica, porque $d \not\mathcal{R} c$.
- No es antisimétrica, porque $a \mathcal{R} b$ y $b \mathcal{R} a$ con $a \neq b$.
- No es transitiva, porque $c \mathcal{R} h$ y $h \mathcal{R} g$, pero $c \not\mathcal{R} h$.

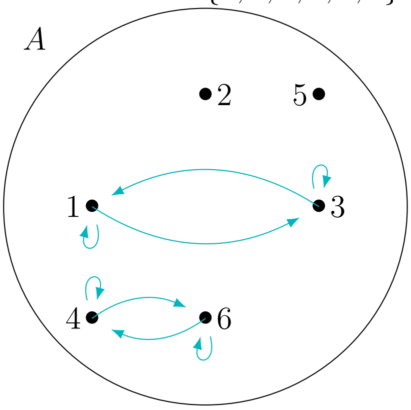
ii) Hacer!

iii) Hacer!

iv) 

- Reflexiva, porque hay bucles en todos los elementos de A.
- Es simétrica, porque hay ida y vuelta en todos los pares de vértices.
- No es antisimétrica, porque $a \mathcal{R} b$ y $b \mathcal{R} a$ con $a \neq b$.
- Es transitiva, porque hay *atajos* en todas las relaciones de ternas.

20. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Graficar la relación, $\mathcal{R} = (1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(6,4),(4,6),(4,4),(6,6)$



- No es reflexiva porque no hay bucles ni en 2 ni en 5.
- Es simétrica, porque hay ida y vuelta en todos los pares de vértices.
- No es antisimétrica, porque $1\,\mathcal{R}\,3$ y $3\,\mathcal{R}\,1$ con $1 \neq 3$.
- Es transitiva.
  Chequear. Caso particula donde no hay ternas de x, y, z distintos.
  Sí, el que 2 esté ahí solo ni cumple la hipótesis de transitividad.

---

21. Hacer!

---

22. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

1. *Relación de equivalencia*: La relación debe ser reflexiva, simétrica y transitiva.
2. *Relación de orden*: La relación debe ser reflexiva, antisimétrica y transitiva.

i) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{R} = (1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(2,5),(1,5)$

R: Es reflexiva, porque hay bucles en todos los elementos de A.

S: No es simétrica, dado que existe $(1,5)$, pero no $(5,1)$

AS: Es antisimétrica. No hay ningún par que tenga la vuelta, excepto los casos $x\,\mathcal{R}\,x$.

T: Es transitiva. La terna 1, 2, 5 es transitiva.

La relación es R, AS y T, por lo tanto es una *relación de orden.*

ii) Hacer!

iii) Hacer!

iv) Hacer!

v) Hacer!

vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 30\})$, $\mathcal{R}$ definida por $X\,\mathcal{R}\,Y \iff 2 \notin X \cap Y^c$

$2 \in X$	$2 \in Y$	$2 \in Y^c$	$2 \in X^c$	$2 \notin X \cap Y^c$	$2 \notin Y \cap X^c$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V

.

R: La relación es reflexiva ya que para que un elemento X esté relacionado con sí mismo debe ocurrir que $X\,\mathcal{R}\,X \iff 2 \notin X \cap X^c$, es decir $2 \notin \varnothing$, lo cual es siempre cierto.

S: La relación no es simétrica. Se puede ver con la segunda y tercera fila de la tabla con un contraejemplo. $X = \{1\}$ y $Y = \{2\}$, $X, Y \subseteq A$, $X \mathcal{R} Y$, pero $Y \not\mathcal{R} X$,

AS: La relación no es antisimétrica. Se puede ver con la primera o cuarta fila tabla con un contraejempl con un contraejemplo. Si $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{2, 3\} \Rightarrow X \mathcal{R} Y$ y además $Y \mathcal{R} X$ con $X \neq Y$.

T: Es transitiva. Si bien no es lo más fácil de explicar, se puede ver en la tabla que para tener 2 relaciones en una terna X, Y, Z no se puede llegar nunca al caso de la segunda fila de la tabla, donde se lograría que $X \not\mathcal{R} Z$

vii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $(a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff bc$ es múltiplo de ad.

R: $(a, b) \mathcal{R} (a, b) \iff ba = k \cdot ab$ con $k = 1$, se concluye que sí es reflexiva.

S: $\begin{cases} (a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff bc \overset{\star^1}{=} k \cdot ad \\ (c, d) \mathcal{R} (a, b) \iff ad = h \cdot bc \overset{\star^1}{=} h \cdot k \cdot ad = k'ad \end{cases}$.
con $k' = 1$ se cumple la igualdad. La relación es simétrica.

AS: Si tomo $(a, b) = (4, 2)$ y $(c, d) = (16, 4)$, tengo que $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$ con $(a, b) \neq (c, d)$. Por lo tanto la relación no es antisimétrica.

T: $\begin{cases} (a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff bc \overset{\star^1}{=} k \cdot ad \\ (c, d) \mathcal{R} (e, f) \iff de \overset{\star^1}{=} h \cdot cf \\ \text{quiero ver que } (a, b) \mathcal{R} (e, f) \iff be = k' \cdot af \\ \xrightarrow[\text{M.A.M.}]{\text{multiplico}} \begin{Bmatrix} bc \overset{\star^1}{=} k \cdot ad \\ de \overset{\star^1}{=} h \cdot cf \end{Bmatrix} \xrightarrow[\text{acomodo}]{\text{y}} be \cdot \cancel{cd} = k \cdot h \cdot af \cdot \cancel{cd} \to be \overset{\checkmark}{=} k' \cdot af. \end{cases}$
Se concluye que la relación es transitiva.

Con esos resultados se puede decir que $\mathcal{R}$ en A es de *equivalencia*.

---

23. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

i) simétricas y antisimétricas
elementos en bucles sueltos?

ii) de equivalencia y de orden
Idem anterior

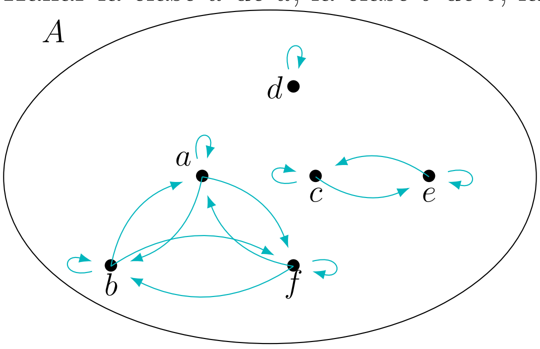
¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica? 22 (vi)?

---

24. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A:

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, f), (f, a), (b, f), (f, b), (c, e), (e, c)\}$$

Hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathcal{R}$



$$\to \begin{cases} \overline{a} = \{a, b, f\} = \overline{b} = \overline{f} \\ \overline{c} = \{c, e\} = \overline{e} \\ \overline{d} = \{d\} \end{cases}$$

La partición asociada a $\mathcal{R}$: $\{\{d\}, \{c, e\}, \{a, b, f\}\} = \{\overline{d}, \overline{b}, \overline{a}\}$.

25. Hacer!Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

---

26. Hacer!Sean $P = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\})$ el conjunto de partes de $\{1, \dots, 10\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en P definida por:

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff (A \triangle B) \iff \cap\,\{1, 2, 3\} = \varnothing$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y decidir si es antisimétrica (*Sugerencia:* usar adecuadamente el ejercicio **14iii**)).

ii) Hallar la clase de equivalencia de $A = \{1, 2, 3\}$.

---

27. Sean $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 92\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en A definida por $x\,\mathcal{R}\,y \iff x^2 - y^2 = 93x - 93y$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es antisimétrica?

ii) Hallar la clase de equivalencia de cada $x \in A$. Deducir cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación $\mathcal{R}$

---

i) Primero acomodo la condición de la relación:

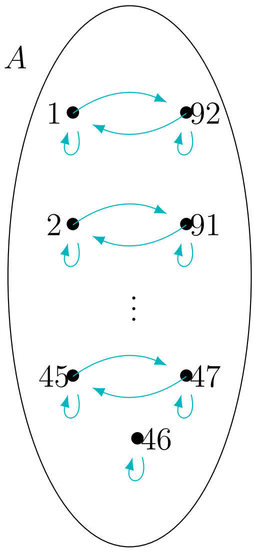
$$x^2 - y^2 = 93x - 93y \xrightarrow{\text{acomodo}} \begin{cases} *^1 & x = y \\ & \vee \\ *^2 & x + y = 93 \end{cases}$$

Para ser relación de equivalencia es necesario que:

$$\mathcal{R} \to \left\{ \begin{array}{lll} R: & \text{Reflexiva} \to x\,\mathcal{R}\,x \iff x \overset{\star^1}{=} x \quad \checkmark & \\ S: & \text{Simétrica} \to & \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y \iff x + y \overset{\star^1}{\ } I = 93 \\ y\,\mathcal{R}\,x \iff y + x \overset{\star^1}{\ } I = 93 \quad \checkmark \end{cases} \\ T: & \text{Transitiva} \to & \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y \iff x \overset{\star^1}{\ } I = 93 - y \\ y\,\mathcal{R}\,z \iff y \overset{\star^1}{\ } I = 93 - z \\ \xrightarrow[\text{m.a.m}]{\text{resto}} x - y = -y + z \to x \overset{\star^1}{=} z \iff x\,\mathcal{R}\,z \end{cases} \end{array} \right\}$$

La $\mathcal{R}$ no es antisimétrica, como contraejemplo se ve que $1\,\mathcal{R}\,92$ y $92\,\mathcal{R}\,1$ con $1 \neq 92$

ii)



A priori no sé como encontrar las clases de equivalencia, pero solo buscando la relación del 1 con algún número (excepto el mismo) veo que únicamente se puede relacionar con el 92 por la condición de la relación. De ahí se pueden inferir que todas las clases van a ser así chiquitas.Las clases de equivalencia :

$$\begin{cases} \overline{1} & = & \overline{92} & = & \{1,92\} \\ \overline{2} & = & \overline{91} & = & \{2,91\} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \overline{45} & = & \overline{47} & = & \{45,47\} \\ \overline{46} & = & \{46\} \end{cases}$$

Hay entonces 46 clases. $A = \left\{\overline{1},\, \overline{2},\, \ldots,\, \overline{45},\, \overline{46}\right\}$

28.

i) Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Consideremos en $\mathcal{P}(A)$ la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): Dos subconjuntos de A están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante par acada clase.

$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \cdots, \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$, el conjunto $\mathcal{P}(A)$ tiene un total de $2^{10} = 1024$ elementos. La relación determina 11 *clases de equivalencia* distintas.

$$\begin{cases} \text{Conjuntos con 0 elementos:} & \overline{0} & \varnothing \\ \text{Conjuntos con 1 elemento:} & \overline{1} & \{3\} \\ \text{Conjuntos con 2 elementos:} & \overline{2} & \{5,2\} \\ \text{Conjuntos con 3 elementos:} & \overline{3} & \{1,6,3\} \\ \text{Conjuntos con 4 elementos:} & \overline{4} & \{1,8,10,4\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Conjuntos con 10 elementos:} & \overline{10} & \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = A \end{cases}$$

ii) En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, consideremos nuevamente la relación de equivalencia dada por el cardinal: Dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante para cada clase.

Es parecido al inciso anterior, donde ahora $A = \{1,2,3,\cdots,N-1,N\}$, donde $\mathcal{P}(\mathbb{N}_N)$ tiene 2^N elementos.
La relación determina $N+1$ *clases de equivalencia* distintas.

$$\begin{cases} \text{Conjuntos con 0 elementos:} & \overline{0} & \varnothing \\ \text{Conjuntos con 1 elemento:} & \overline{1} & \{3\} \\ \text{Conjuntos con 2 elementos:} & \overline{2} & \{5,2\} \\ \text{Conjuntos con 3 elementos:} & \overline{3} & \{1,6,3\} \\ \text{Conjuntos con 4 elementos:} & \overline{4} & \{1,8,10,4\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Conjuntos con 10 elementos:} & \overline{N} & \{1,2,3,4,\cdots,N-1,N\}\, \mathbb{N}_N \end{cases}$$

Funciones

Sean A y B conjuntos, y sea $\mathcal{R}$ de A en B. Se dice que $\mathcal{R}$ es una *función* cuando todo elemento $x \in A$ está relacionado con algún $y \in B$, y este elemento y es único. Es decir:

$$\begin{cases} \forall x \in A,\ \exists ! y \in B \mid x\,\mathcal{R}\,y \\ \forall x \in A,\ \exists y \in B \mid x\,\mathcal{R}\,y, \\ \text{si } y, z \in B \text{ son tales que } x\,\mathcal{R}\,y \text{ y } x\,\mathcal{R}\,z \Rightarrow y = z. \end{cases}$$

- Dada $f : A\,(\textit{dominio}) \to B\,(\textit{codominio})$ el conjunto *imagen* es: $\mathrm{Im}(f) = \{y \in B : \exists x \in A \mid f(x) = y\}$
-
  - *inyectiva:* si $\forall x, x' \in A$ tales que $f(x) = f(x')$ se tiene que $x = x'$
  - *sobreyectiva:* si $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$. f es sobreyectiva si $\mathrm{Im}(f) = B$
  - *biyectiva:* Cuando es inyectiva y sobreyectiva.
- A, B, C conjuntos y $f : A \to B \to C$, $g : B \to C$ funciones. Entonces la *composición* de f con g, que se nota:
  $g \circ f = g\,(f(x))\,,\ \ \forall x \in A$, resulta ser una función de A en C.
- f es biyectiva cuando: $f^{-1} : B \to A$ es la función que satisface que:
  $\forall y \in B : f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$

---

29. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

i) $A = \{1,2,3,4,5\}\,,\ B = \{a,b,c,d\}\,,\ \mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,b),(5,c),(3,d)\}$
No es función, dado que $3\,\mathcal{R}\,a$, $3\,\mathcal{R}\,d$ y $a \neq d$

ii) $A = \{1,2,3,4,5\}\,,\ B = \{a,b,c,d\}\,,\ \mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,b)\}$
No es función, dado que todo elemnto de A tiene que estar relacionado a algún elemento de B, $5 \not\mathcal{R}\, y$ para ninún $y \in B$

iii) $A = \{1,2,3,4,5\}\,,\ B = \{a,b,c,d\}\,,\ \mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,b),(5,c)\}$
Es función.

iv) $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{R},\ \mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \mid a = 2b - 3\}$
Es función.

v) $A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{N},\ \mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mid a = 2b - 3\}$
No es función, $\sqrt{2} \not\mathcal{R}\, b$ para ningún $b \in \mathbb{N}$

vi) $A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{Z},\ \mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a + b \text{ es divisible por } 5\}$
No es función, porque $0\,\mathcal{R}\,5$ y $0\,\mathcal{R}\,10$ y necesito que $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists !\, y \in \mathbb{Z}$

30. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para la que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$
No es *inyectiva*, $f(-1) = f(1)$.
No es *sobreyectiva*, $\mathrm{Im}(f) = [-5, +\infty)$.

ii) Hacer!

iii) Hacer!

iv) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
Es *inyectiva* y *sobreyectiva*. $\forall m, m' \in \mathbb{N}, \begin{cases} f(2m) = \frac{2m}{2} = m \\ f(2m'-1) = 2m' - 1 + 1 = 2m' \end{cases} \to$ Si bien $f(8) = f(3)$ la función es *sobreyectiva* porque genera todo $\mathbb{N}$ tan solo con la parte par de la función.
$f^{-1}(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ es par} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
Qué onda?

Notas random

- Cardinal: cantidad de elementos de un conjunto.
- El conjunto $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n el cardinal del conjunto A.
- Una relación $\mathcal{R}$ es un subconjunto de un producto cartesiano.
- Leyes de absorción, obvias pero no tan. $\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$
- probar identidades de conjuntos:
  - $A = B \to \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$
  - lógica proposicional
  - tabla de verdad
-