# Álgebra I Práctica 6 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I Facultad de Ciencias Exactas y Naturales UBA

## Choose your destiny:

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:
  - 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
  - 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14.
- Ejercicios Extras
- **1**. **2**. **3**. **4**.

#### Notas teóricas:

#### Raíces de un número complejo:

- Sean  $z, w \in \mathbb{C} \{0\}$ ,  $z = re^{\theta i}$  y  $w = se^{\varphi i}$  con  $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$  y  $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ . Entonces  $z = w \iff \begin{cases} r = s \\ \theta = \varphi + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- raíces n-esimas:  $w^n = z \to \begin{cases} s^n = r \\ \varphi \cdot n = \theta + 2k\pi & \to \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \\ n \text{ raíces distintas} \to w_k = se^{\varphi_k i}, \text{ donde } s = \sqrt{r} \text{ y } \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$
- $G_n = \{ w \in \mathbb{C} / w^n = 1 \} = \{ e^{\frac{2k\pi}{n}i} : 0 \le k \le n 1 \}$
- $(G_n, \cdot)$  es un grupo abeliano, o conmutativo.
  - $\forall w, z \in G_n, wz = zw \ y \ zm \in G_n.$
  - $-1 \in G_n, \ w \cdot 1 = 1 \cdot w = w \qquad \forall w \in G_n.$
  - $-w \in G_n \Rightarrow \exists w^{-1} \in G_n, \ w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1$  $* \overline{w} \in G_n, \ w \cdot \overline{w} = |w|^2 = 1 \Rightarrow \overline{w} = w^{-1}$
- Propiedades:  $w \in G_n$ 
  - $-m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \mid m \Rightarrow w^m = 1.$
  - $-m \equiv m'(n) \Rightarrow w^m = w^{m'} \quad (w^m = w^{r_n(m)})$
  - $-n \mid m \iff G_n \subseteq G_m$
  - $-G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
  - Si  $(G,\cdot)$  es un grupo y #G=n decimos que G siempre es cíclico si  $\exists\,w\in G/G=\{1,w,w^2,\ldots,w^{n-1}\}$ 
    - \* Observación:  $G_n$  es un grupo cíclico, ej,  $w_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}} \to (w_1)^k = w_k$  $\to$  las potencias de  $w_1$  generan todo  $G_n = \{1, w_1, w_1^2, \dots, w_1^{n-1}\}$
  - w es raíz n-ésima primitiva de 1 si:  $G_n = \{1, w, w^2, \dots, w^{n-1}\} = \{w^k : 0 \le k \le n-1\}$ Ejemplo: i, -i son primitivas de  $G_4 = \{1, i, -1, -i\} = \{i^k : 0 \le k \le 3\}$ , pero 1 y -1 no son raíces primitivas de  $G_4$ .
- Definición: Sea w una raíz primitiva de orden n (el orden de  $w \in G_n$ , ord $(w) = \min \{k \in \mathbb{N} / w^k = 1\}$ )
  - $-w^m = 1 \iff n \mid m$
  - Observación: Si  $w \in G_n \Rightarrow \operatorname{ord}(w) \mid n$
- La suma de las raíces n-ésimas de 1 da:  $\sum_{k=0}^{n-1} w_1^k = \frac{w_1^n 1}{w_1 1} = 0$  pues  $w_1 \neq 1$
- El producto de las raíces n-ésimas de 1 da:  $\prod_{k=0}^{n-1} w_1^k = w_1^{0+1+\dots+n-1} = w_1^{\frac{n(n-1)}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ -1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$
- Sea  $w \in G_n$  primitiva. Entonces
  - $-w^k$  es primitiva  $\iff k \perp n$
  - $-w_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$  es primitiva  $\iff k \perp n$
  - En particular para n=p primo:  $w_k$  es primitiva para  $1 \le k < p$  o sea si  $w \in G_p$  y  $w \ne 1$ , entonces w es primitiva
- w es raíz primitiva de  $G_n$  y  $k \mid n \Rightarrow w^k$  es primitiva de  $G_{\frac{n}{k}}$

#### Ejercicios de la guía:

### **T** Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \odot$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \bigcirc$ .

### **F**alta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

### \* Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \bigcirc$ .

### Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \odot$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \bigcirc$ .

### **\*** Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \odot$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \bigcirc$ .

#### 6.

- i) Determinar la formar binomial de  $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17}$ .
- ii) Determinar la forma binomial de  $(-1 + \sqrt{3}i)^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) 
$$(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$$

$$(\sqrt{3} - i)^n = 2^n e^{i\frac{11}{12}\pi n} = 2^{n+1} \cdot 2e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$\to \begin{cases} 2^n = 2^n \\ \frac{11}{12}\pi n = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \to 11n = 8 + 8k \xrightarrow{8(k+1)} \boxed{n \equiv 0 \ (8)} \end{cases}$$

ii)  $(-\sqrt{3}+i)^n \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$  es un número real negativo.

Un número real negativo tendrá un 
$$\arg(z) = \pi$$

$$\underbrace{(-\sqrt{3}+i)^{n}}_{2^{n}e^{i\frac{5}{6}\pi n}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}_{e^{\frac{\pi}{3}i}} = 2^{n}e^{i(\frac{5}{6}n + \frac{1}{3})\pi} \to \theta = (\frac{5}{6}n + \frac{1}{3})\pi$$

$$\xrightarrow{\theta = \pi + 2k\pi} \cancel{\pi} \frac{5}{6} n + \frac{\cancel{\pi}}{3} = \cancel{\pi} + 2k\cancel{\pi} \xrightarrow{\text{acomodo}} 5n \equiv 4 \text{ (12)} \xrightarrow{\text{multiplico}} \boxed{n \equiv 8 \text{ (12)}}$$

iii) 
$$\arg((-1+i)^{2n}) = \frac{\pi}{2} y \arg((1-\sqrt{3}i)^{n-1}) = \frac{2}{3}\pi$$

### 😭 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \odot$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \bigcirc$ .

Hallar todos los  $z \in \mathbb{C}$  tales que  $3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0$ 

$$3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3z^5}_{\in \mathbb{C}} = \underbrace{-2|z|^5 - 32}_{\in \mathbb{D}} \iff \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(3z^5) = -2|z|^5 - 32 \\ \operatorname{Im}(3z^5) = 0 \end{array} \right\} \quad \checkmark$$

De la ecuación de la parte imaginaria:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(3z^5) = 3 \cdot \frac{z^5 - \overline{z}^5}{2} = 0 \iff z^5 = \overline{z}^5 \iff |z|^5 e^{5\theta i} = |z|^5 e^{-5\theta i} \iff \begin{cases} 5\theta = -5\theta + \frac{2k\pi}{2} \\ -5\theta k = \frac{1}{5}k\pi \end{cases} \operatorname{con} k \in [0, 4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(3z^{5}) = 3 \cdot \frac{z^{5} + \overline{z}^{5}}{2} = 3 \cdot \frac{|z|^{5} e^{5\theta i} + |z|^{5} e^{-5\theta i}}{2} = 3|z|^{5} \cos(5\theta) = -2|z|^{5} - 32 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |z|^{5} (3\cos(5\theta) + 2) = -2^{5} \xrightarrow{\text{evaluando} \\ \text{en } \theta_{k}} |z|^{5} (3\cos(k\pi) + 2) = -2^{5} \begin{cases} \xrightarrow{k} & 0 < |z|^{5} (3+2) \neq -2^{5} \end{cases} & \\ \Leftrightarrow |z|^{5} (3\cos(5\theta) + 2) = -2^{5} \xrightarrow{\text{evaluando} \\ \text{en } \theta_{k}} |z|^{5} (3\cos(k\pi) + 2) = -2^{5} \begin{cases} \xrightarrow{k} & 0 < |z|^{5} (3+2) \neq -2^{5} \end{cases} & \\ \Rightarrow |z|^{5} (-3+2) = -2^{5} \Leftrightarrow |z| = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_{k} = 2e^{\theta_{k}i} |\cos \theta_{k}| = \frac{1}{5}k\pi |\cos k| \in [0, 4]$$

Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  para los cuales la ecuación  $z^n + i\overline{z}^2 = 0$ , tenga exactamente 6 soluciones y resolver en ese caso.

$$\frac{\text{acomodo la}}{\text{ecuación}} z^n = -i\overline{z}^2 \xrightarrow[\text{en notación exponencial}]{r = |z|, \text{ expreso todo}} \left\{ \begin{array}{l} z^n = r^n e^{n\theta i} \\ \overline{z}^2 = r^2 e^{-2\theta i} \\ -i = e^{\frac{3}{2}\pi} \end{array} \right\} \checkmark$$
 
$$\frac{\text{reescribo ecuación con notación exponencial}}{\text{notación exponencial}} r^n e^{n\theta i} = r^2 e^{(\frac{3}{2}\pi - 2\theta)i} \iff \left\{ \begin{array}{l} n\theta = \frac{3}{2}\pi - 2\theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ r^n = r^2 \to r^2 (r^{n-2} - 1) = 0 \end{array} \right\}$$

La ecuación de r:

r=0 aporta una solución trivial para cualquier  $n\in\mathbb{N}$ .

r=1 es un comodín que me deja usar cualquier n para jugar con la ecuación de  $\theta$ .

n=2 es un valor que daría una solución para cada  $r\in\mathbb{R}_{>0}$ . No sirve porque necesito solo 6 soluciones.

Las 6 soluciones para n =

Las 
$$b$$
 soluciones para  $n = 3$ :
$$z^{n} + i\overline{z}^{2} = 0 \iff \begin{cases} n = 3 \\ z = 0, \text{ cuando } r = 0 \\ 0 \\ z_{k} = e^{\theta_{k}i} \text{ con } \theta_{k} = \frac{3+4k}{10}\pi, \ k \in [0, 4] \end{cases}$$

Voy a estar usando las siguientes propiedades en  $G_n$ :

11. Voy a estar usando las siguientes propiedades en 
$$G_n$$
:
$$\begin{cases}
w^n = 1 \Rightarrow w^k = w^{r_n(k)} \\
\overline{w}^k = w^{r_n(-k)}
\end{cases}$$
Si  $w \in G_n \Rightarrow \begin{cases}
\sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\
m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n, \text{ lo uso para saber con cuales raíces hay que tener cuidado} \\
\text{Si } w \in G_p \text{ con } p \text{ primo } \Rightarrow w \text{ es primitiva} w^k \text{es primitiva} \iff k \perp n
\end{cases}$ 

i) Calcular  $w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$  para cada  $w \in G_7$ .

Raíces de  $G_7$  de interés: 7 es primo e impar  $\Rightarrow w = 1$  se hace a parte.

$$Si \ w = 1$$
:

$$w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = 6$$

 $Si \ w \neq 1$ 

$$w + \underbrace{\overline{w}}_{w^{6}} + (w + w^{2})^{2} - w^{38}(1 - w^{2}) = w + w^{6} + w^{2} + 2w^{3} + w^{4} - \underbrace{(w^{7})^{5}}_{=1} w^{3}(1 - w^{2}) = \underbrace{-1 + \underbrace{1 + w + w^{2} + w^{3} + w^{4} + w^{5} + w^{6}}_{=0}} = -1 \quad \checkmark$$

ii) Calcular  $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$  para cada  $w \in G_3$ .

Raíces de  $G_3$  de interés: 3 es primo e impar  $\Rightarrow w = 1$  se hace a parte.

$$Si \ w = 1$$
:

$$w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8 = 10$$

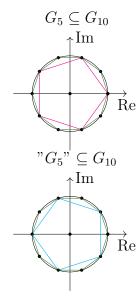
 $Si \ w \neq 1$ :

$$\underbrace{w^{73}}_{w} + \underbrace{\overline{w} \cdot w^{9}}_{w^{2} \cdot 1} + 8 = -1 + \underbrace{1 + w + w^{2}}_{=0} + 8 = 7$$

iii) Calcular  $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$  para cada  $w \in G_{10}$ .

Raíces de  $G_{10}$  de interés:  $2 \mid 10 \land 5 \mid 10$ . 10 es par  $\Rightarrow w = \pm 1$  y raíces de  $G_2$  y de  $G_5$  se hacen a parte.

- $Si \ w = \pm 1$ :  $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 5$
- $Si \ w \in G_{10} \ y \ w \neq \pm 1$ :  $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 1 + w^2 + w^8 + w^4 + w^6 =$   $= \sum_{k=0}^{4} (w^2)^k = \frac{(w^2)^5 - 1}{w^2 - 1} = \underbrace{\frac{w^{10} - 1}{w^2 - 1}}_{} = 0$



- iv) Calcular  $w^{14}+w^{-8}+\overline{w}^4+\overline{w^{-3}}$  para cada  $w\in G_5$
- ¿Errores? Mandanos tu solución, prolija, así lo arreglamos.

$$Si \ w = 1: \\ w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}} = 4$$
 
$$Si \ w \neq 1: \\ w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}} = w^4 + w^2 + w + w^3 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = -1$$

12.

- i) Sea  $w \in G_{36}, w^4 \neq 1$ . Calcular  $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$
- ii) Sea  $w \in G_{11}$ ,  $w \neq 1$ . Calcular Re  $\left(\sum_{k=0}^{60} w^k\right)$ .
- i) Sea  $w \in G_{36}$ ,  $w^4 \neq 1$ . Calcular  $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$

Sé que si 
$$w \in G_{36} \Rightarrow \begin{cases} w^{36} = 1 \\ \sum_{k=0}^{35} w^k = 0 \end{cases}$$

Como  $w^4 \neq 1$  sé que  $w \neq \pm 1$ . Si no tendría que considerar casos particulares para la suma.

Si 
$$\sum_{k=7}^{60} w^{4k} = \underbrace{\sum_{k=7}^{60} w^{4k} + \sum_{k=0}^{6} w^{4k}}_{\sum_{k=0}^{60} w^{4k}} - \sum_{k=0}^{6} w^{4k} = \sum_{k=0}^{60} w^{4k} - \sum_{k=0}^{6} w^{4k} = \frac{(w^4)^{61} - 1}{w^4 - 1} - \frac{(w^4)^7 - 1}{w^4 - 1} = \frac{(w^4)^{61} - (w^4)^7}{w^4 - 1}$$

$$\frac{61 = 9 \cdot 6 + 7}{w^3 6 = 1} \xrightarrow{(w^{36})^6 \cdot (w^4)^7 - (w^4)^7} = \sum_{k=7}^{60} w^{4k} = 0$$

ii) Sea  $w \in G_{11}$ ,  $w \neq 1$ . Calcular Re  $\left(\sum_{k=0}^{60} w^k\right)$ .

Sé que si 
$$w \in G_{11} \Rightarrow \begin{cases} w^{11} = 1 \\ \sum_{k=0}^{10} w^k = 0 \\ 11 \text{ es impar } \Rightarrow -1 \notin G_{11} \end{cases}$$

Como  $w \neq 1$  no calculo caso particular para la suma. Me piden la parte real  $\xrightarrow{\text{uso}} \text{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ .

Probé hacer la suma de Gauss como en el anterior, pero no llegué a nada, abro sumatoria y uso que  $61 = 5 \cdot 11 + 6$ , porque hay 61 sumandos.

$$\sum_{k=0}^{60} w^k = w^0 + \dots + w^{60} = 5 \cdot \underbrace{\left(w^0 + w^1 + \dots + w^9 + w^{10}\right)}_{\text{agrupé usando: } w \in G^{11} \Rightarrow w^k = w^{r_{11}(k)}} + w^{55} + w^{56} + w^{57} + w^{58} + w^{59} + w^{60} = w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^5$$

También voy a usar que si  $w \in G_{11} \Rightarrow \overline{w}^k = w^{r_{11}(-k)}$ 

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{60} w^{k}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{60} w^{k} + \sum_{k=0}^{60} \overline{w}^{k}}{2} \stackrel{\bigstar^{1}}{=} \frac{w^{0} + w^{1} + w^{2} + w^{3} + w^{4} + w^{5} + \overline{w}^{0} + \overline{w}^{1} + \overline{w}^{2} + \overline{w}^{3} + \overline{w}^{4} + \overline{w}^{5}}{2} = \frac{w^{0}}{2} + \underbrace{w^{1} + w^{2} + w^{3} + w^{4} + w^{5} + w^{0} + w^{10} + w^{9} + w^{8} + w^{7} + w^{6}}_{2} = \underbrace{w^{0}}_{2} + \underbrace{w^{1} + w^{2} + w^{3} + w^{4} + w^{5} + w^{0} + w^{10} + w^{9} + w^{8} + w^{7} + w^{6}}_{2} = \underbrace{w^{0}}_{2} + \underbrace{w^{1} + w^{2} + w^{3} + w^{4} + w^{5} + w^{0} + w^{10} + w^{9} + w^{8} + w^{7} + w^{6}}_{2} = \underbrace{w^{0}}_{2} + \underbrace{w^{1} + w^{2} + w^{3} + w^{4} + w^{5} + w^{0} + w^{10} + w^{9} + w^{8} + w^{7} + w^{6}}_{2} = \underbrace{w^{0}}_{2} + \underbrace{w^{0} + w^{1} + w^{2} + w^{10} + w^{10} + w^{9} + w^{8} + w^{7} + w^{6}}_{2} = \underbrace{w^{0}}_{2} + \underbrace{w^{0} + w^{1} + w^{2} + w^{10} + w^$$

Sea  $w=e^{\frac{2\pi}{3}i}$  raíz cúbica de la unidad y sea  $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$  la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = 1 + w$$
 y  $z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  vale que  $z_n = \left\{ \begin{array}{ll} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{array} \right.$ . Concluir que  $z_n \in G_6$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Hay que probar por inducción. Quiero probar: 
$$p(n): z_n = \left\{ \begin{array}{ll} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{array} \right. \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base: 
$$\begin{cases} p(1): z_1 = 1 + e^{\frac{2\pi}{3}i} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i} \\ p(2): z_2 = \overline{1 + z_1^2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = 1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \end{cases} \checkmark$$
Paso inductive:

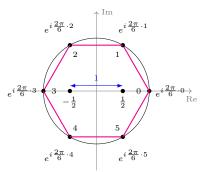
$$\begin{cases} p(2k): z_{2k} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero } \Rightarrow p(2k+2) \text{ ¿Verdadero?} \\ p(2k+1): z_{2k+1} = e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero } \Rightarrow p(2k+3) \text{ ¿Verdadero?} \end{cases}$$

Paso inductivo:  

$$\begin{cases}
p(2k) : z_{2k} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero } \Rightarrow p(2k+2) \text{ ¿Verdadero?} \\
p(2k+1) : z_{2k+1} = e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero } \Rightarrow p(2k+3) \text{ ¿Verdadero?} \\
z_{2k+2} = \overline{1+z_{2k+1}^2} \stackrel{\text{HI}}{\Longleftrightarrow} z_{2k+2} = \overline{1+e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{\frac{\pi}{3}i}} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \checkmark \\
z_{2k+3} = \overline{1+z_{2k+2}^2} \stackrel{\text{HI}}{\Longleftrightarrow} z_{2k+3} = \overline{1+e^{-\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{-\frac{\pi}{3}i}} = e^{\frac{\pi}{3}i} \checkmark
\end{cases}$$

Dado que p(1), p(2), p(2k), p(2k+1), p(2k+2), p(2k+3) resultaron ser verdaderas, entonces por el principio de inducción se concluye que p(n) también lo es  $\forall n \in$ 

Dado que la sucesión  $z_n$  tiene solo 2 imágenes, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  y teniendo en cuenta que  $e^{-i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 5} \in G_6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 



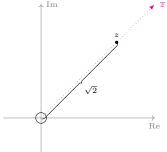
- Se define en  $\mathbb{C} \{0\}$  la relación  $\mathcal{R}$  dada por  $z \mathcal{R} w \iff z\overline{w} \in \mathbb{R}_{>0}$ .
  - i) Probar que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia.
  - ii) Dibujar en le plano complejo la clase de equivalencia de z = 1 + i.
  - i) Dado un  $z = re^{i\theta}$ , tengo que  $z \in \mathbb{R}_{>0} \iff \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 \iff r > 0 \wedge \theta = 2k\pi \operatorname{con} k \in \mathbb{Z}$ 
    - Reflexividad:  $z=re^{i\theta},\ z\ \mathcal{R}\ z=r^2e^{2\theta i}$  por lo tanto  $z\ \mathcal{R}\ z\iff 2\theta=2k\pi\iff \theta=k\pi$

    - Simetria:  $\begin{cases} z \mathcal{R} \ w = rse^{(\theta \varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \quad \checkmark \\ w \mathcal{R} \ z = rse^{(\varphi \theta)i} \iff \theta = -2k_2\pi + \varphi = 2k_3\pi + \varphi \quad \checkmark \end{cases}$  Transitividad:  $\begin{cases} z \mathcal{R} \ w = rse^{(\theta \varphi)i} \iff \theta = -2k_2\pi + \varphi = 2k_3\pi + \varphi \quad \checkmark \\ w \mathcal{R} \ v = rse^{(\theta \varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \\ w \mathcal{R} \ v = rte^{(\varphi \alpha)i} \iff \varphi = 2k_2\pi + \alpha \\ \Rightarrow z \mathcal{R} \ v \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi = 2\pi(k_1 + k_2) + \alpha = 2k_3\pi + \alpha \quad \checkmark \end{cases}$

La relación  $\mathcal{R}$  es de equivalencia.

Tengo que el  $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ . La clase  $\overline{z}$  estará formada por los  $w\in\mathbb{C}$  tal que:  $\boxed{w\ \mathcal{R}\ z\iff \arg(w)=\frac{1}{4}\pi}$ 

ii) que: 
$$w \mathcal{R} z \iff \arg(w) = \frac{1}{4}\pi$$



Se define la siguiente relación  $\mathcal{R}$  en  $G_{20}$ : 15.

$$z \mathcal{R} w \iff zw^9 \in G_2$$
.

- i) Probar que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia.
- ii) Calcular la cantidad de elementos que hay en cada clase de equivalencia.
- i) Reflexividad:

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \Rightarrow z \,\mathcal{R} \,z \iff e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \cdot e^{i\frac{9}{10}\pi k_z} = e^{ik_z\pi} = \begin{cases} 1 & k_z \text{ par} \\ -1 & k_z \text{ impar} \end{cases} \quad \checkmark$$

Simetría:

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z}$$
 y  $w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \in G_{20}$ .

$$\begin{cases} \mathcal{R} & \text{es simétrica si: } z \, \mathcal{R} \, w \iff w \, \mathcal{R} \, z \\ zw^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z + 9k_w)} \in G_2 \Leftrightarrow \frac{1}{10}(k_z + 9k_w) = k \Leftrightarrow k_z + 9k_w = 10k \Leftrightarrow k_z \equiv -9k_w \, (10) \Leftrightarrow k_z \equiv k_w \, (10) \\ \to \left[ z \, \mathcal{R} \, w \iff k_z \equiv k_w \, (10) \right] \\ wz^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w + 9k_z)} = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w + 9(10k + k_w))} = e^{i\frac{\pi}{10}(90k + 10k_w)} = e^{i(9k + k_w)\pi} = e^{ik'\pi} \end{cases}$$

$$\boxed{z \mathcal{R} w \iff w \mathcal{R} z} \ \forall k, k_w \in \mathbb{Z} \ \text{con } k_z \equiv k_w \ (10) \quad \checkmark$$

Transitividad:

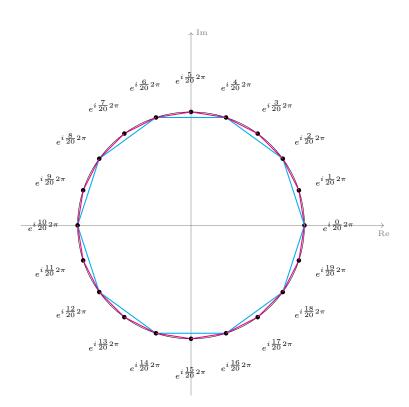
$$\begin{cases}
z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \\
w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \\
y = e^{i\frac{1}{10}\pi k_y}
\end{cases} \in G_{20} \to \mathcal{R} \text{ es transitiva si: } z \mathcal{R} w \text{ y } w \mathcal{R} y \Rightarrow z \mathcal{R} y$$

$$\begin{cases}
z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w (10) \bigstar^1 \\
w \mathcal{R} y \iff k_w \equiv k_y (10) \bigstar^2
\end{cases}$$

$$\Rightarrow zy^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z + 9k_y)} \stackrel{\bigstar}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k + k_w + 9k_y)} \stackrel{\bigstar}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k + 10k' + k_y + 9k_y)} = e^{i(k + k' + k_y)\pi} = e^{ik''\pi}$$

$$\begin{cases}
z \mathcal{R} w \\
w \mathcal{R} z
\end{cases} \Rightarrow z \mathcal{R} y$$

- ii)  $\#e^{i\frac{2\pi}{20}k} = 2$  para algún  $k \in \mathbb{Z}/r_{20}(k) < 20$ . Dada la condición  $k_z \equiv k_w$  (10), solo hay 2 números que tienen misma cifra de unidad entre 0 y 20. En el gráfico se ve que si  $z \mathcal{R} w \Rightarrow w = -z$
- 🌎 ¡Aportá! Correcciones, subiendo ejercicios, 🗡 al repo, críticas, todo sirve.



#### Ejercicios extras:

**1.** Para  $w \in G_6$ , calcular  $S = w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023}$ 

 $Si \ w = 1$ :

$$S = 5$$

 $Si \ w = -1$ :

$$S = -1 + 1 + 5 - 1 - 4 - 1 = -1$$

 $Si \ w \neq \pm 1$ :

$$S = \overline{w^{71}} + \overline{w^{-14}} + 5\overline{w^4} + \overline{w^{39}} - 4\overline{w^{-22}} + \overline{w^{2023}} = \overline{w^5} + \overline{w^4} + 5\overline{w^2} + \overline{w^3} - 4\overline{w^2} + \overline{w^1} = \overline{w^1} + \overline{w^2} + \overline{w^3} + \overline{w^4} + \overline{w^5} = -1$$

Sea  $w \in G_{14}$ . Hallar todos los posibles valores de  $w^7 + \sum_{j=1}^{140} w^{2j}$ 

Voy a usar que:  $\begin{cases} w \in G_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ \text{Si } m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n \end{cases}$ 

Si w = 1:

$$\underbrace{w^7}_{=1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{w^{2j}}_{=1} = 1 + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{=134} = 1 + 134 = 135 \quad \checkmark$$

Si w = -1:

$$\underbrace{w^7}_{=-1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{(w^j)^2}_{=1} = -1 + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{=134} = -1 + 134 = 133 \quad \checkmark$$

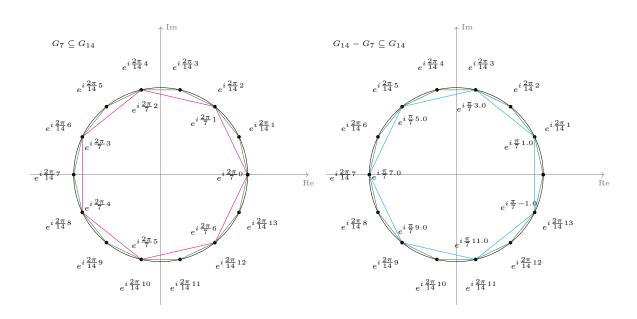
Si  $w \neq \pm 1$ :

$$\overline{w \in G_{14} \Rightarrow w} = e^{i\frac{2k\pi}{14}} \text{ con } k \in \mathbb{Z}_{[0,13]} \Rightarrow w^2 = \left(e^{i\frac{2k\pi}{14}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{7} \cdot k} \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^{6} (w^2)^j = 0$$

$$w^{7} + \sum_{j=7}^{140} w^{2j} = w^{7} + \sum_{j=0}^{140} (w^{2})^{j} - \sum_{j=0}^{6} (w^{2})^{j} = w^{7} + \frac{(w^{2})^{141} - 1}{w^{2} - 1} - 0 = w^{7} + \underbrace{\frac{w^{2}((w^{14})^{20} - 1)}{w^{2} - 1}}_{=1} = w^{7} + 1$$

Si 
$$\begin{cases} w \in G_7 \Rightarrow w^7 = 1\\ w \in G_{14} - G_7 \Rightarrow w^7 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w \in G_7 & \to 1 + 1 = 2 \\ w \in G_{14} - G_7 & \to -1 + 1 = 0 \end{cases} \checkmark$$



- **♦3.** Sea  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2}i$ . Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:
  - $8|3n+|z^3|$
  - $\arg(z^{7n+6}) = \arg(i)$

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ \theta_z = \frac{11}{6}\pi \end{cases} \rightarrow z = |z|e^{\theta_z i} = e^{i\frac{11}{6}\pi} \Rightarrow z^3 = e^{i\frac{11}{2}\pi} = -1 \Leftrightarrow |z^3| = 1 \\ \frac{\text{primera}}{\text{condición}} \otimes |3n + |z^3| = 3n + 1 \Leftrightarrow 3n + 1 = 8k \Leftrightarrow 3n + 1 \equiv 0 \ (8) \Leftrightarrow 3n \equiv 7 \ (8) \Leftrightarrow 9n \equiv 21 \ (8) \Leftrightarrow n \equiv 5 \ (8) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{segunda}}_{\text{condición}} \arg(z^{7n+6}) = \arg(i) \Leftrightarrow \left(e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^{7n+6} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{i\frac{77}{6}\pi + 11\pi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{77}{6}n\pi + 11\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \xrightarrow{\text{despejo}} \xrightarrow{77} + 11 = \frac{1}{2} + 2k \Leftrightarrow 77n = -63 + 12k \Leftrightarrow 77n \equiv -63 \ (12) \Leftrightarrow 5n \equiv -3 \ (12) \Leftrightarrow n \equiv 9 \ (12) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{junto info}}_{\text{T} \text{P}}$$

$$\xrightarrow{\text{T} \text{P}}_{\text{R}}$$

$$\begin{cases} n \equiv 9 \ (12) \\ n \equiv 5 \ (8) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{quiero}}_{\text{divisores coprimos}}$$

$$\begin{cases} n \equiv 1 \ (4) \\ n \equiv 0 \ (3) \\ n \equiv 1 \ (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{me quedo con el}}_{\text{de mayor divisor}}$$

$$\begin{cases} n \equiv 0 \ (3) \text{ } \\ n \equiv 5 \ (8) \text{ } \end{cases}$$

Ahora sí, tengo el sistema con divisores coprimos, por TCHR tengo solución.

$$\xrightarrow{\text{de}} n = 3k \xrightarrow{*}^{3} \checkmark \xrightarrow{\text{reemplazo} \atop \text{en } \bigstar^{2}} 3k \equiv 5 \ (8) \Leftrightarrow k = 8j + 7 \checkmark$$

$$\xrightarrow{\text{reemplazo} \atop k \text{ en } \bigstar^{3}} n = 3(8j + 7) = 24j + 21 \Leftrightarrow \boxed{n \equiv 21 \ (24)} \checkmark$$

**4.** Sea  $w = e^{\frac{\pi}{18}i}$ . Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  que cumplen simultáneamente:

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = 0 \qquad \sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = 0.$$

Expresar la solución como una única ecuación de congruencia.

Como 
$$w = e^{\frac{\pi}{18}i} \neq \pm 1$$
  $\begin{cases} w^3 \neq \pm 1 \\ w^4 \neq \pm 1 \end{cases}$ , puedo usar Gauss para las sumas. 
$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = \sum_{k=0}^{5n+1} (w^3)^k = \frac{(w^3)^{5n+2}-1}{w^3-1} = 0 \Leftrightarrow (w^3)^{5n+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{15n+6}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 5n+2 = 12k \\ \Leftrightarrow 5n \equiv 10 \ (12) \bigstar^1 \\ \sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = \sum_{k=0}^{4n+6} (w^4)^k = \frac{(w^4)^{4n+7}-1}{w^4-1} = 0 \Leftrightarrow (w^4)^{4n+7} = 1 \Leftrightarrow \frac{16n+28}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 4n+7 = 9k \\ \Leftrightarrow 4n = 2 \ (9) \bigstar^2 \end{cases}$$