Apunte único: Álgebra I - Práctica 6

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

Disclaimer:
Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:

1. Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
2. Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
3. ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
4. Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
5. Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir *'no me sale'* $\nexists+$. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda, no te van a salir los ejercicios más difíciles: Sentido común.

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confiaza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada.* Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber.* A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas de Teresa que son buenísimos.

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra: Prácticas Pandemia.

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre Just Do IT!

Eh, loco, fatalista, distópico, relajá un toque te vas a quedar (más) pelado... *va a salir todo bien!*

El repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

https://github.com/nad-garraz/algebraUno

La Guía 6 se actualizó por última vez: 28/11/24 @ 10:43

Guía 6

https://github.com/nad-garraz/algebraUno/blob/main/6-guia/6-sol.pdf

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram .

https://t.me/+1znt2GV1i8cwMTNh

Notas teóricas:

Raíces de un número complejo:

- Sean $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z = r_z e^{\theta_z i}$ y $w = r_w e^{\theta_w i}$ con r_z, $s_w \in \mathbb{R}_{>0}$ y θ_z, $\theta_w \in \mathbb{R}$.

  Entonces $z = w \overset{!!}{\iff} \begin{cases} r_z = r_w \\ \theta_z = \theta_w + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- raíces n-esimas: $w^n = z \overset{!!}{\iff} \begin{cases} (r_w)^n = r_z \\ \theta_w \cdot n = \theta_z + 2k\pi \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

  De donde se obtendrán n raíces distintas:

$$w_k = z_w e^{\theta_{w_k} i}, \text{ donde } r_w = \sqrt[n]{r_z} \quad \text{y} \quad \theta_{w_k} = \frac{\theta_z}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta_z + 2k\pi}{n}$$

  Entender bien como sacar raíces n-ésimas es importantísimo para toda la guía de complejos y la próxima de polinomios.

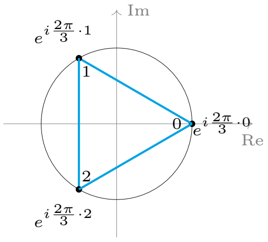
Grupos G_n:

- $G_n = \{w \in \mathbb{C} \,/ w^n = 1\} = \left\{ e^{\frac{2k\pi}{n} i} \;:\; 0 \le k \le n-1 \right\}$

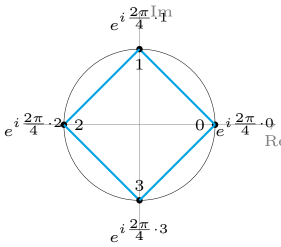
  (n=1) $w = 1$

  (n=2) $w = \pm 1$

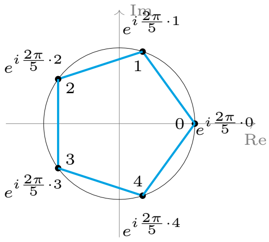
(n=3)



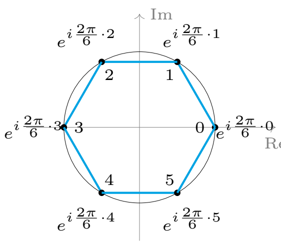
(n=4)



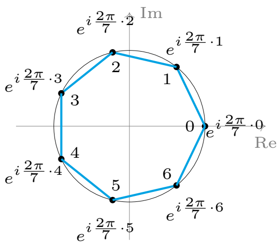
(n=5)



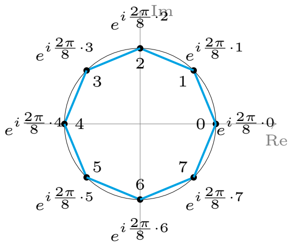
(n=6)



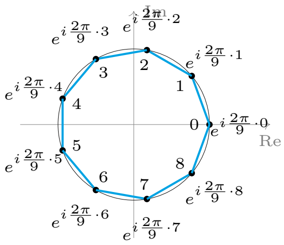
(n=7)



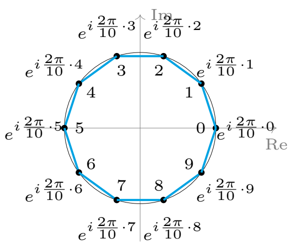
(n=8)



(n=9)



(n=10)



Notar que:

- Si n es par el grupo tiene al -1.
- Toda raíz compleja tiene a su conjugado complejo.
- Para ir de un punto a otro, se lo múltiplica por $e^{i\theta}$ eso *rota* al número en θ respecto al origen.

- $(G_n, \cdot)$ es un grupo abeliano, o conmutativo.
  - $\forall w, z \in G_n, wz = zw$ y $zm \in G_n$.
  - $1 \in G_n,\ w \cdot 1 = 1 \cdot w = w \qquad \forall w \in G_n$.
  - $w \in G_n \Rightarrow \exists\, w^{-1} \in G_n,\ w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1$
    - $\overline{w} \in G_n,\ w \cdot \overline{w} = |w|^2 = 1 \Rightarrow \overline{w} = w^{-1}$

- *Propiedades:* $w \in G_n$
  - $m \in \mathbb{Z}$ y $n \,\big|\, m \Rightarrow w^m = 1$.
  - $m \equiv m'\ (n) \Rightarrow w^m = w^{m'} \quad (w^m = w^{r_n(m)})$
  - $n \,\big|\, m \iff G_n \subseteq G_m$
  - $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
  - La suma de una raíz w de G_n: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} w^k = \frac{w^n - 1}{w - 1} = 0$ si $w \neq 1$

Ejercicios de la guía:

---

1. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

2. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

3. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

4. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

5. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

6.

a) Determinar la formar binomial de $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17}$.

b) Determinar la forma binomial de $(-1+\sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

---

a) Multiplico y divido por el conjugado complejo para sacar la parte imaginaria del denominador:

$$z \overset{\star^1}{=} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17} \overset{!}{=} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{(1-i)} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right)^{17} = \left(\frac{(1+\sqrt{3}i)\cdot(1+i)}{2}\right)^{17} =$$

Ahora paso eso a notación exponencial y acomodo usando propiedades de exponentes:

$$\begin{cases} 1+\sqrt{3}i = 2\cdot e^{\frac{\pi}{3}i} \\ 1+i = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{1}{4}\pi i} \end{cases}$$

$$\left(\frac{(1+\sqrt{3}i)\cdot(1+i)}{2}\right)^{17} = \left(\frac{2\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{2}\right)^{17} = 2^{\frac{17}{2}}\cdot e^{\frac{119}{12}\pi i} \overset{!}{=} 2^{\frac{17}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i}$$

$$\star^1\ z = 2^{\frac{17}{2}}\cos(\tfrac{1}{12}\pi) - i2^{\frac{17}{2}}\sin(\tfrac{1}{12}\pi)$$

Un espanto. Pero bueh, $\frac{1}{12}\pi = 15°$

b) ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

7. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^{n-1}(-1+\sqrt{3}i)$

ii) $(-\sqrt{3}+i)^n \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ es un número real negativo.

iii) $\arg((-1+i)^{2n}) = \frac{\pi}{2}$ y $\arg((1-\sqrt{3}i)^{n-1}) = \frac{2}{3}\pi$

---

i) Para resolver las ecuaciones en números complejos con exponentes, en general, es más fácil resolver en notación exponencial. El miembro izquierdo queda:

$$(\sqrt{3}-i)^n = \left(2 \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^n = 2^n \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi n}$$

El miembro derecho queda:

$$2^{n-1}(-1+\sqrt{3}i) = 2^{n-1} \cdot (2 \cdot e^{\frac{2}{3}}) = 2^n \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

Ahora la igualdad de los números se dará cuando sus módulos y argumentos sean iguales:

$$2^n \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi n} = 2^n \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^n = 2^n \quad \checkmark \\ \frac{11}{6}\pi n = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \Leftrightarrow 11n = 4 + 12k \bigstar^1 \end{cases}$$

En $\bigstar^1$ quedó una ecuación para despejar n que es un número entero:

$$\bigstar^1 \, 11n = 4 + 12k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 11n \equiv 4\ (12) \Leftrightarrow -n \equiv 4\ (12) \Leftrightarrow n \equiv -4\ (12) \Leftrightarrow n \equiv 8\ (12)$$

Finalmente los valores de n buscados para que la ecuación se cumpla son:

$$n \equiv 8\ (12)$$

ii) Un número real z negativo tiene un $\arg(z) = \pi$. Ataco el ejercicio parecido al anterior en la parte de los exponentes, donde está el argumento:

$$\begin{array}{rcl} (-\sqrt{3}+i)^n & = & 2^n \cdot e^{i\frac{5}{6}\pi n} \\ (\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) & = & e^{\frac{\pi}{3}i} \end{array}$$

El enunciado queda como:

$$(-\sqrt{3}+i)^n \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^n \cdot e^{i(\frac{5}{6}n+\frac{1}{3})\pi}$$

Ahora, *sin olvidar la periodicidad*, tengo que pedir que el argumento de esa expresión sea π:

$$(\frac{5}{6}n+\frac{1}{3})\pi = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{5}{6}n+\frac{1}{3} = 1+2k \Leftrightarrow 5n = 4+12k \bigstar^1$$

En $\bigstar^1$ quedo una ecuación para resolver para $n \in \mathbb{Z}$:

$$\bigstar^1 \, 5n = 4 + 12k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 5n \equiv 4\ (12) \Leftrightarrow n \equiv 8\ (12)$$

Finalmente los valores de n buscados para que la expresión sea un número negativo:

$$n \equiv 8\ (12)$$

iii) Arranco pasando las expresiones del enunciado a notación exponencial:

$$\begin{array}{rcl} (-1+i)^{2n} & = & 2^n \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi n} \bigstar^1 \\ (1-\sqrt{3}i)^{n-1} & = & 2^{n-1} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi(n-1)} \bigstar^2 \end{array}$$

De $\bigstar^1$ igualando a $\frac{\pi}{2}$, sin olvidar la *periodicidad* del argumento:

$$\frac{3}{2}\pi n = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow 3n = 1 + 4k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 3n \equiv 1\ (4) \Leftrightarrow n \equiv 3\ (4) \bigstar^3$$

De $\bigstar^2$ igualando a $\frac{2}{3}\pi$, nuevamente sin olvidar la *periodicidad* del argumento:

$$\frac{5}{3}\pi(n-1) = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \Leftrightarrow 5n - 5 = 2 + 6k \Leftrightarrow 5n = 7 + 6k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 5n \equiv 7\ (6) \overset{!}{\Leftrightarrow} n \equiv 5\ (6) \bigstar^4$$

Podemos observar que con los resultados de $\bigstar^3$ y $\bigstar^4$ esto se convirtió en un ejercicio del TCHR:

$$\left\{ \begin{array}{l} n \equiv 3\ (4) \\ n \equiv 5\ (6) \end{array} \right. \overset{!}{\leadsto} \left\{ \begin{array}{l} n \equiv 3\ (4) \\ n \equiv 2\ (3) \end{array} \right.$$

Resolviendo ese sistema, los valores de n buscados:

$$n \equiv 11\ (12)$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

---

8. Hallara en cada caso las raíces n-ésimas de $z \in \mathbb{C}$:

i) $z = 8,\ n = 6$

ii) $z = -4,\ n = 3$

iii) $z = -1 + i,\ n = 7$

iv) $z = (2 - 2i)^{12},\ n = 6$

Ejercicio importante. La raíz n-ésima de z es el número que multiplicado por sí mismo n veces me da z:

$$w^n = z,$$

es decir que quiero encontrar w. Siempre va a haber tantas soluciones como n.

i) Dado un número *genérico* $w = r \cdot e^{\theta i}$, lo visto con la info del enunciado:

$$w^6 = w = \left(r \cdot e^{\theta i}\right)^6 = r^6 \cdot e^{6\theta i} \bigstar^1$$

Ahora hago lo mismo con el otro número $z = 8$:

$$z = 8 \cdot e^{0i} = 8 \bigstar^2$$

Una vez con todo escrito en forma exponencial, es igualar prestar atención a la periodicidad del argumento y listo:

$$w^6 = z \underset{\bigstar^2}{\overset{\bigstar^1}{\Longleftrightarrow}} r^6 \cdot e^{6\theta i} = 8 \overset{!}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} r^6 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} \\ 6\theta \overset{!}{=} 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta_k = \frac{1}{3}k\pi \end{array} \right.$$

Con eso concluímos que las raíces son de la forma:

$$w_k = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{1}{3}k\pi} \text{ con } k \in [0, 5]$$

ii) Mismo procedimiento, te tiro una pista: Los números negativos tienen argumento π, así que en notación exponencial:
$$-4 = 4 \cdot e^{\pi i}$$

iii) En notación exponencial z, que está en segundo cuadrante:
$$z = -1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

iv) En notación exponencial z se calcula primero con la base:
$$z = (2-2i)^{12} = \left(2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{7}{4}\pi i}\right)^{12} = 2^{18} \cdot e^{21\pi i} \overset{!}{=} 2^{18} \cdot e^{\pi i}$$

---

9. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0$

Para que se cumpla la igualdad entre 2 números complejos, *las partes reales y imaginarias* deben ser iguales:
$$3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3z^5}_{\in\mathbb{C}} = \underbrace{-2|z|^5 - 32}_{\in\mathbb{R}} \overset{!}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \text{Re}(3z^5) = -2|z|^5 - 32 \\ \text{Im}(3z^5) = 0 \end{array} \right\}$$

De la ecuación de la parte imaginaria: (Es útil recordar que $z = \text{Re}(z) + i\,\text{Im}(z) \Rightarrow \text{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$)

$$\text{Im}(3z^5) = 3 \cdot \frac{z^5 - \bar{z}^5}{2i} = 0 \iff z^5 = \bar{z}^5 \iff |z|^5 e^{5\theta i} = |z|^5 e^{-5\theta i} \underset{2k\pi}{\overset{!}{\iff}} \left\{ \begin{array}{l} 5\theta = -5\theta + 2k\pi \\ \overset{!}{\underset{\star^1}{\iff}} \theta_k = \frac{1}{5}k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

De la ecuación de la parte real: (Es útil recordar que si $z = \text{Re}(z) + i\,\text{Im}(z)$, entonces se puede expresar $\text{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$)

$$\text{Re}(3z^5) = 3 \cdot \tfrac{z^5+\bar{z}^5}{2} = 3 \cdot \tfrac{|z|^5 e^{5\theta i} + |z|^5 e^{-5\theta i}}{2} = 3|z|^5 \cos(5\theta) = -2|z|^5 - 32 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z|^5(3\cos(5\theta) + 2) = -2^5 \xrightarrow[\text{en } \theta_k \star^1]{\text{evaluando}} |z|^5(3\cos(k\pi) + 2) = -2^5 \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{par}]{k} \quad 0 < |z|^5(3+2) \neq -2^5 \quad ☠ \\ \xrightarrow[\text{impar}]{k} \quad |z|^5(-3+2) = -2^5 \Leftrightarrow |z| = 2 \end{array} \right.$$

Finalmente teniendo en cuenta que k tiene que ser impar, y que el $\arg(z) \in [0, 2\pi)$:
$$z_k = 2e^{\theta_k i} \quad \text{con } \theta_k = \frac{1}{5}k\pi \quad \text{y} \quad k \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

---

10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales la ecuación $z^n + i\bar{z}^2 = 0$, tenga exactamente 6 soluciones y resolver en ese caso.

Pasar todo a notación exponencial:
$$z^n + i\bar{z}^2 = 0 \Leftrightarrow z^n = -i\bar{z}^2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z^n = r^n e^{n\theta i} \\ \bar{z}^2 = r^2 e^{-2\theta i} \\ -i = e^{\frac{3}{2}\pi} \end{array} \right\} \Leftrightarrow r^n e^{n\theta i} = r^2 e^{(\frac{3}{2}\pi - 2\theta)i}$$

Esa ecuación se resuelve como siempre igualando los módulos y los argumentos, *sin olvidar la periodicidad* de éste último:

$$\begin{cases} r^n &= r^2 \Leftrightarrow r^2(r^{n-2}-1) = 0 \bigstar^1 \\ n\theta &= \frac{3}{2}\pi - 2\theta + 2k\pi \Leftrightarrow (n+2)\theta = (\frac{3}{2}+2k)\pi \bigstar^2 \end{cases}$$

La ecuación de $r \bigstar^1$*:*

Analizo para cuales valores de r y de n se cumple la ecuación:

- $r = 0$ Aporta una solución trivial para cualquier $n \in \mathbb{N}$ en la ecuación $z^n + i\overline{z}^2 = 0$. Pero solo habría una solución $z = 0$ necesito encontrar otras 5.
- $r = 1$ serviría. Quiere decir que voy a poder encontrar solución en $\bigstar^1$ que me deja usar cualquier n para jugar con la ecuación de $\theta \bigstar^2$.
- $n = 2$ no sirve. Si bien cumple $\bigstar^1$ es un valor que daría una solución para cada $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Pero tengo que tener solo 6 soluciones.

La ecuación de $\theta \bigstar^2$*:*

Por lo analizado antes, juego con $r = 1$, eso no impone de momento ninguna condición sobre n:

$$(n+2)\theta = (\frac{3}{2}+2k)\pi \overset{!!}{\underset{\forall n \in \mathbb{N}_{\neq 2}}{\Longleftrightarrow}} \theta = \frac{1}{n+2}(\frac{3}{2}+2k)\pi$$

Y ahora surge la pregunta: ¿Qué onda esto? Necesitamos 6 soluciones según el enunciado, pero a no olvidar que ya tenemos una solución proporcionada por el $r = 0$. Así que ahora laburo el θ para que me de 5 soluciones y así tener 6 en total. Pido entonces $n = 3$, para partir en 5 y obtener de esta forma 5 valores para $\theta_k \in [0, 2\pi)$:

$$\theta_k = \frac{1}{5} \cdot \frac{3+4k}{2}\pi \Leftrightarrow \theta_k = \frac{3+4k}{10}\pi \quad \text{con } k \in \{0,1,2,3,4\}$$

Finalmente para que la ecuación falopa esa tenga únicamente 6 soluciones, necesito que $n = 3$:

$$z^n + i\overline{z}^2 = 0 \overset{n=3 \text{ para tener}}{\underset{\text{solo 6 soluciones}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} z = 0 & \text{con } r = 0 \\ z_{k=0} = e^{i\frac{3}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \\ z_{k=1} = e^{i\frac{7}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \\ z_{k=2} = e^{i\frac{11}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \\ z_{k=3} = e^{i\frac{15}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \\ z_{k=4} = e^{i\frac{19}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \end{cases}$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

11.

a) Calcular $w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

b) Calcular $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

c) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

d) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$

Voy a estar usando las siguientes propiedades en G_n:

$$\text{Si } w \in G_n \Rightarrow \begin{cases} w^n = 1 \Rightarrow w^k = w^{r_n(k)} \\ \overline{w}^k = w^{r_n(-k)} \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n, \text{ lo uso para saber con cuales raíces hay que tener cuidado} \\ \text{Si } w \in G_p \text{ con } p \text{ primo} \end{cases}$$

a) Calcular $w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

Raíces de G_7 de interés: 7 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.

Si $w = 1$:

$w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = 6$

Si $w \neq 1$:

$w + \underbrace{\overline{w}}_{w^6} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = w + w^6 + w^2 + 2w^3 + w^4 - \underbrace{(w^7)^5}_{=1} w^3(1 - w^2) =$

$= {\color{magenta}-1} + \underbrace{{\color{magenta}1} + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6}_{=0} = -1 \quad \checkmark$

b) Calcular $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

Raíces de G_3 de interés: 3 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.

Si $w = 1$:

$w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8 = 10$

Si $w \neq 1$:

$\underbrace{w^{73}}_{w} + \underbrace{\overline{w} \cdot w^9}_{w^2 \cdot 1} + 8 = {\color{magenta}-1} + \underbrace{{\color{magenta}1} + w + w^2}_{=0} + 8 = 7$

c) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

Raíces de G_{10} de interés: $2 \mid 10$ y $5 \mid 10$. 10 es par $\Rightarrow w = \pm 1$ y raíces de G_2 y de G_5 se hacen a parte.

- *Si* $w = \pm 1$:

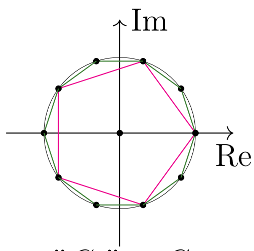
  $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 5 \quad \checkmark$

- *Si* $w \in G_{10}$ y $w \neq \pm 1$:

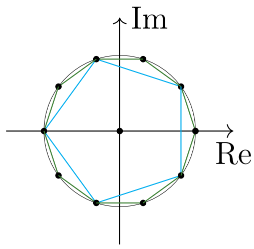
  $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 1 + w^2 + w^8 + w^4 + w^6 =$

  $= \sum\limits_{k=0}^{4} (w^2)^k = \frac{(w^2)^5 - 1}{w^2 - 1} = \frac{\overbrace{w^{10}}^{=1} - 1}{w^2 - 1} = 0$

$G_5 \subseteq G_{10}$



$''G_5'' \subseteq G_{10}$



d) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$

Si $w = 1$:

$w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}} = 4$

Si $w \neq 1$:

$w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}} = w^4 + w^2 + w + w^3 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = -1$

12.

a) Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum\limits_{k=7}^{60} w^{4k}$

b) Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\text{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{60} w^k\right)$.

---

a) Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum\limits_{k=7}^{60} w^{4k}$

Sé que si $w \in G_{36} \Rightarrow \begin{cases} w^{36} = 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{35} w^k = 0 \end{cases}$

Como $w^4 \neq 1$ sé que $w \neq \pm 1$. Si no tendría que considerar casos particulares para la suma.

Si $\sum\limits_{k=7}^{60} w^{4k} = \underbrace{\sum\limits_{k=7}^{60} w^{4k} + \sum\limits_{k=0}^{6} w^{4k}}_{\sum\limits_{k=0}^{60} w^{4k}} - \sum\limits_{k=0}^{6} w^{4k} = \sum\limits_{k=0}^{60} w^{4k} - \sum\limits_{k=0}^{6} w^{4k} = \frac{(w^4)^{61}-1}{w^4-1} - \frac{(w^4)^7-1}{w^4-1} = \frac{(w^4)^{61}-(w^4)^7}{w^4-1}$

$$\xrightarrow[w^36 = 1]{61 = 9 \cdot 6 + 7} \frac{(\overbrace{w^{36}}^{=1})^6 \cdot (w^4)^7 - (w^4)^7}{w^4-1} \longrightarrow \boxed{\sum_{k=7}^{60} w^{4k} = 0}$$

b) Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\text{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{60} w^k\right)$.

Sé que si $w \in G_{11} \Rightarrow \begin{cases} w^{11} = 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{10} w^k = 0 \\ \text{11 es impar} \Rightarrow -1 \notin G_{11} \end{cases}$

Como $w \neq 1$ no calculo caso particular para la suma. Me piden la parte real $\xrightarrow{\text{uso}} \text{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$. Probé hacer la suma de Gauss como en el anterior, pero no llegué a nada, abro sumatoria y uso que $61 = 5 \cdot 11 + 6$, porque hay 61 sumandos.

$$\sum_{k=0}^{60} w^k = w^0 + \cdots + w^{60} = 5 \cdot \underbrace{\overbrace{(w^0 + w^1 + \cdots + w^9 + w^{10})}^{=0}}_{\text{agrupé usando: } w \in G^{11} \Rightarrow w^k = w^{r_{11}(k)}} + w^{55} + w^{56} + w^{57} + w^{58} + w^{59} + w^{60} =$$

$$= w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 \bigstar^{1}$$

También voy a usar que si $w \in G_{11} \Rightarrow \overline{w}^k = w^{r_{11}(-k)}$

$$\text{Re}\left(\sum_{k=0}^{60} w^k\right) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{60} w^k + \sum\limits_{k=0}^{60} \overline{w}^k}{2} \overset{\bigstar^1}{=} \frac{w^0+w^1+w^2+w^3+w^4+w^5+\overline{w}^0+\overline{w}^1+\overline{w}^2+\overline{w}^3+\overline{w}^4+\overline{w}^5}{2} =$$

$$= \frac{w^0}{2} + \frac{\overbrace{w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^{10} + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}^{\sum\limits_{k=0}^{10} w^k}}{2} = \frac{\overbrace{w^0}^{1}}{2} + \frac{\overbrace{\sum\limits_{k=0}^{10} w^k}^{=0}}{2} = \frac{1}{2}$$

---

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ raíz cúbica de la unidad y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$. Concluir que $z_n \in G_6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hay que probar por inducción. Quiero probar:

$$p(n) : z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

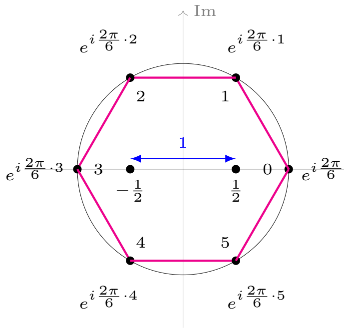
Caso base:

$$\begin{cases} p(1) : z_1 = 1 + e^{\frac{2\pi}{3}i} = \underline{1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ p(2) : z_2 = \overline{1 + z_1^2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = 1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$

Paso inductivo:

$$\begin{cases} p(2k) : z_{2k} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero } \Rightarrow p(2k+2) \text{ ¿Verdadero?} \\ p(2k+1) : z_{2k+1} = e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero } \Rightarrow p(2k+3) \text{ ¿Verdadero?} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{2k+2} = \overline{1 + z_{2k+1}^2} \overset{\text{HI}}{\iff} z_{2k+2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{\frac{\pi}{3}i}} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ z_{2k+3} = \overline{1 + z_{2k+2}^2} \overset{\text{HI}}{\iff} z_{2k+3} = \overline{1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{-\frac{\pi}{3}i}} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$



Dado que $p(1), p(2), p(2k), p(2k+1), p(2k+2), p(2k+3)$ resultaron ser verdaderas, entonces por el principio de inducción se concluye que $p(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado que la sucesión z_n tiene solo 2 imágenes, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y teniendo en cuenta que $e^{-i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{6}\cdot 5} \in G_6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

---

14. Se define en $\mathbb{C} - \{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por $z \,\mathcal{R}\, w \iff z\overline{w} \in \mathbb{R}_{>0}$.

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Dibujar en le plano complejo la clase de equivalencia de $z = 1 + i$.

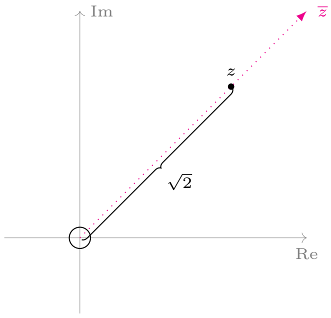
---

i) Dado un $z = re^{i\theta}$, tengo que $z \in \mathbb{R}_{>0} \iff \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 \iff r > 0 \wedge \theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

- *Reflexividad:* $z = re^{i\theta}$, $z \,\mathcal{R}\, z = r^2 e^{2\theta i}$ por lo tanto $z \,\mathcal{R}\, z \iff 2\theta = 2k\pi \iff \theta = k\pi$ $\checkmark$
- *Simetría:* $\begin{cases} z \,\mathcal{R}\, w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \quad \checkmark \\ w \,\mathcal{R}\, z = rse^{(\varphi-\theta)i} \iff \theta = -2k_2\pi + \varphi = 2k_3\pi + \varphi \quad \checkmark \end{cases}$
- *Transitividad:* $\begin{cases} z \,\mathcal{R}\, w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \\ w \,\mathcal{R}\, v = rte^{(\varphi-\alpha)i} \iff \varphi = 2k_2\pi + \alpha \\ \Rightarrow z \,\mathcal{R}\, v \iff \theta = 2k_1\pi + \underbrace{\varphi}_{2k_2\pi+\alpha} = 2\pi(k_1 + k_2) + \alpha = 2k_3\pi + \alpha \quad \checkmark \end{cases}$

  La relación $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

ii) Tengo que el $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. La clase $\overline{z}$ estará formada por los $w \in \mathbb{C}$ tal que: $\boxed{w \mathcal{R} z \iff \arg(w) = \frac{1}{4}\pi}$



---

15. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en G_{20}:

$$z \mathcal{R} w \iff zw^9 \in G_2.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Calcular la cantidad de elementos que hay en cada clase de equivalencia.

---

i) *Reflexividad:*

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \Rightarrow z \mathcal{R} z \iff e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \cdot e^{i\frac{9}{10}\pi k_z} = e^{ik_z\pi} = \begin{cases} 1 & k_z \text{ par} \\ -1 & k_z \text{ impar} \end{cases} \quad \checkmark$$

Simetría:

$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z}$ y $w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \in G_{20}$.

$\mathcal{R}$ es simétrica si: $z \mathcal{R} w \iff w \mathcal{R} z$

$$\begin{cases} zw^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_w)} \in G_2 \Leftrightarrow \frac{1}{10}(k_z+9k_w) = k \Leftrightarrow k_z + 9k_w = 10k \Leftrightarrow k_z \equiv -9k_w\ (10) \Leftrightarrow k_z \equiv k_w\ (10 \\ \to \boxed{z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w\ (10)} \\ wz^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9k_z)} = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9(10k+k_w))} = e^{i\frac{\pi}{10}(90k+10k_w)} = e^{i(9k+k_w)\pi} = e^{ik'\pi} \end{cases}$$

$\boxed{z \mathcal{R} w \iff w \mathcal{R} z}$ $\forall k,\ k_w \in \mathbb{Z}$ con $k_z \equiv k_w\ (10)$ $\checkmark$

Transitividad:

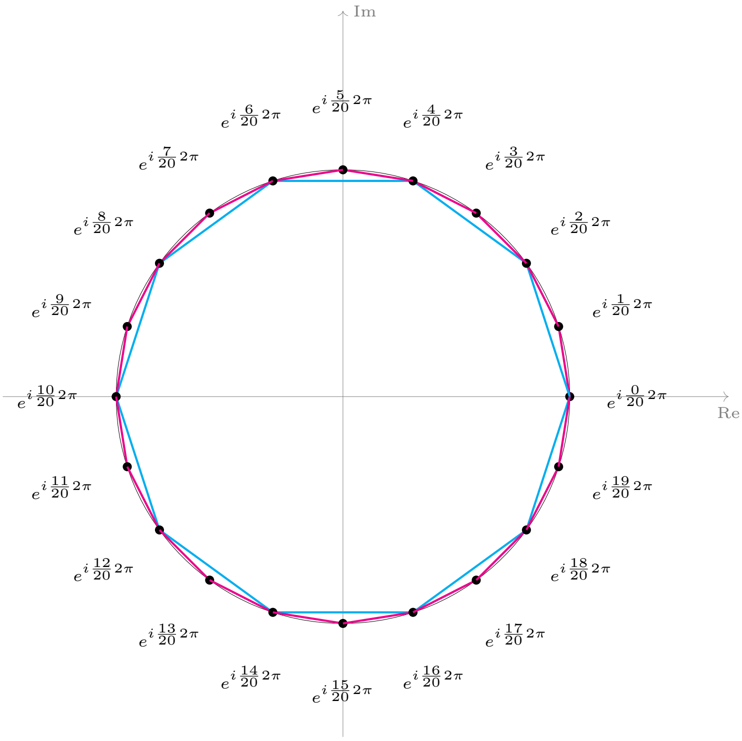
$$\left.\begin{cases} z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \\ w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \\ y = e^{i\frac{1}{10}\pi k_y} \end{cases}\right\} \in G_{20} \to \mathcal{R} \text{ es transitiva si: } z \mathcal{R} w \text{ y } w \mathcal{R} y \Rightarrow z \mathcal{R} y$$

$$\left\{\begin{array}{l} z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w\ (10)\bigstar^1 \\ w \mathcal{R} y \iff k_w \equiv k_y\ (10)\bigstar^2 \end{array}\right\}$$

$$\to zy^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_y)} \overset{\bigstar^1}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k+k_w+9k_y)} \overset{\bigstar^1}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k+10k'+k_y+9k_y)} = e^{i(k+k'+k_y)\pi} = e^{ik''\pi}$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} z \mathcal{R} w \\ w \mathcal{R} z \end{array}\right\} \Rightarrow z \mathcal{R} y}$$

ii) $\#\overline{e^{i\frac{2\pi}{20}k}} = 2$ para algún $k \in \mathbb{Z} / r_{20}(k) < 20$. Dada la condición $k_z \equiv k_w\ (10)$, solo hay 2 números que tienen misma cifra de unidad entre 0 y 20. En el gráfico se ve que si $z \mathcal{R} w \Rightarrow w = -z$


Im
Re
$e^{i\,\frac{0}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{1}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{2}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{3}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{4}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{5}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{6}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{7}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{8}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{9}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{10}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{11}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{12}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{13}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{14}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{15}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{16}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{17}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{18}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{19}{20}\,2\pi}$

Ejercicios de parciales:

---

1. Para $w \in G_6$, calcular $S = w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023}$

Si $w = 1$:

$$S = 1 + 1 + 5 \cdot 1 + 1 - 4 \cdot 1 + 1 = 5$$

Si $w \neq 1$:

$$\begin{array}{rcl} S & = & w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023} \\ & \overset{!}{=} & w^5 + w^4 + 5w^2 + w^3 - 4w^2 + w^1 \\ & \overset{!}{=} & w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = -1 + \underbrace{1 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5}_{=0} = -1 \end{array}$$

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Nad Garraz   Ale Teran

---

2. Sea $w \in G_{14}$. Hallar todos los posibles valores de $w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j}$

Voy a usar que: $\begin{cases} w \in G_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ \text{Si } m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n \end{cases}$

Si $w = 1$:

$$\underbrace{w^7}_{=1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{w^{2j}}_{=1} = 1 + (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{=134}) = 1 + 134 = 135 \quad \checkmark$$

Si $w = -1$:

$$\underbrace{w^7}_{=-1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{(w^j)^2}_{=1} = -1 + (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{=134}) = -1 + 134 = 133 \quad \checkmark$$

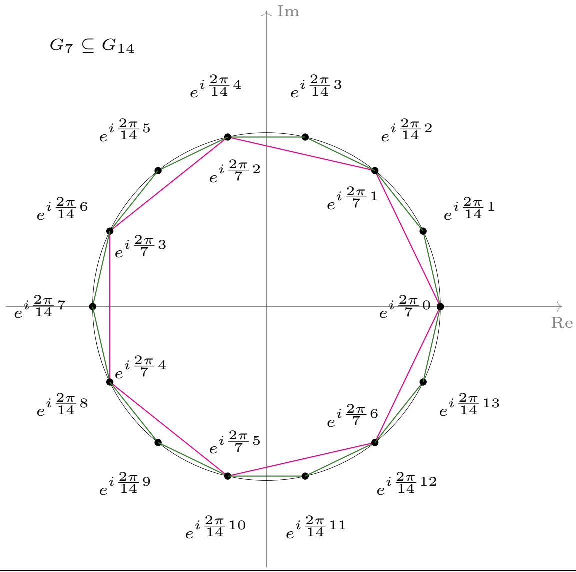
Si $w \neq \pm 1$:

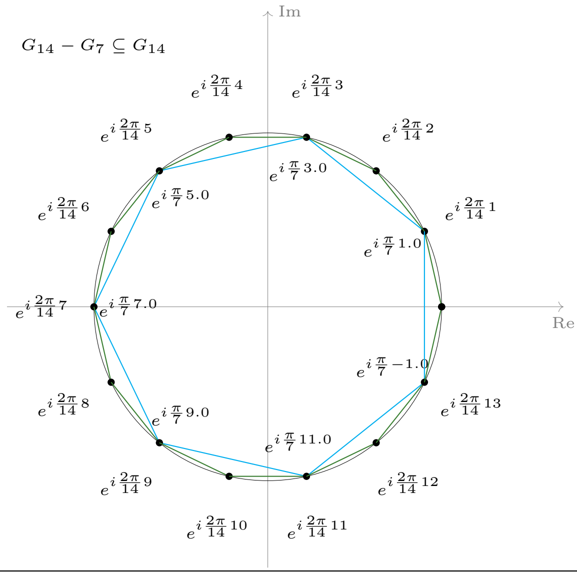
$w \in G_{14} \Rightarrow w = e^{i\frac{2k\pi}{14}}$ con $k \in \mathbb{Z}_{[0,13]} \Rightarrow w^2 = \left(e^{i\frac{2k\pi}{14}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{7} \cdot k} \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^{6} (w^2)^j = 0$

$$w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j} = w^7 + \sum_{j=0}^{140} (w^2)^j - \underbrace{\sum_{j=0}^{6} (w^2)^j}_{=0} = w^7 + \frac{(w^2)^{141} - 1}{w^2 - 1} - 0 = w^7 + \underbrace{\frac{w^2((\overbrace{w^{14}}^{=1})^{20} - 1}{w^2 - 1}}_{=1} = w^7 + 1$$

Si $\begin{cases} w \in G_7 & \Rightarrow w^7 = 1 \\ w \in G_{14} - G_7 & \Rightarrow w^7 = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} w \in G_7 & \to \quad 1+1=2 \quad \checkmark \\ w \in G_{14}-G_7 & \to \quad -1+1=0 \quad \checkmark \end{cases}$$





---

3. Sea $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- $8 \mid 3n + |z^3|$
- $\arg(z^{7n+6}) = \arg(i)$

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ \theta_z = \frac{11}{6}\pi \end{cases} \to z = |z|e^{\theta_z i} = e^{i\frac{11}{6}\pi} \Rightarrow z^3 = e^{i\frac{11}{2}\pi} = -1 \Leftrightarrow |z^3| = 1$$

Primera condición:

$$8 \mid 3n + |z^3| = 3n+1 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 3n+1 = 8k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 3n+1 \equiv 0\ (8) \Leftrightarrow 3n \equiv 7\ (8) \xLeftrightarrow[(\Leftarrow) 3\ \perp\ 8]{\times 3} 9n \equiv 21\ (8) \Leftrightarrow n \equiv 5\ (8) \quad \checkmark$$

Segunda condición:

$$\arg(z^{7n+6}) = \arg(i) \Leftrightarrow \left(e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^{7n+6} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{i\frac{77}{6}\pi + 11\pi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{77}{6}n\pi + 11\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\xrightarrow[n]{\text{despejo}} \frac{77}{6}n + 11 = \frac{1}{2} + 2k \Leftrightarrow 77n = -63 + 12k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 77n \equiv -63\ (12) \Leftrightarrow 5n \equiv -3\ (12) \xLeftrightarrow[(\Leftarrow) 5\ \perp\ 12]{!\quad \times 5} n \equiv 9\ (12) \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{TCR}]{\text{junto info}} \begin{cases} n \equiv 9\ (12) \\ n \equiv 5\ (8) \end{cases} \xLeftrightarrow[\textit{divisores coprimos}]{\text{quiero}} \begin{cases} n \equiv 1\ (4) & \checkmark \\ n \equiv 0\ (3) & \\ n \equiv 1\ (4) & \checkmark \quad \checkmark \\ n \equiv 1\ (2) & \checkmark \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{de mayor divisor}]{\text{me quedo con el}} \begin{cases} n \equiv 0\ (3) \bigstar^1 \\ n \equiv 5\ (8) \bigstar^2 \end{cases}$$

Ahora sí, tengo el sistema con *divisores coprimos*, por TCHR tengo solución.

$$\xrightarrow[\bigstar^1]{\text{de}} n = 3k \bigstar^3 \quad \checkmark \xrightarrow[\text{en } \bigstar^2]{\text{reemplazo}} 3k \equiv 5\ (8) \xLeftrightarrow[(\Leftarrow) 3\ \perp\ 5]{\times 3} k \equiv 7\ (8) \Leftrightarrow k = 8j + 7 \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow[k \text{ en } \bigstar^3]{\text{reemplazo}} n = 3(8j+7) = 24j + 21 \Leftrightarrow \boxed{n \equiv 21\ (24)} \quad \checkmark$$

---

4. Sea $w = e^{\frac{\pi}{18}i}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente:

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = 0 \qquad \sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = 0.$$

Expresar la solución como una única ecuación de congruencia.

Dado que:

$$w = e^{\frac{1}{18}\pi i} \Leftrightarrow \begin{cases} w^3 = e^{\frac{1}{6}\pi i} \neq 1 \\ w^4 = e^{\frac{2}{9}\pi i} \neq 1 \end{cases},$$

puedo usar la serie geométrica.

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = \sum_{k=0}^{5n+1} (w^3)^k = \frac{(w^3)^{5n+2} - 1}{w^3 - 1} = 0 \Leftrightarrow (w^3)^{5n+2} = 1.$$

Queda una ecuación para encontrar w:

$$(w^3)^{5n+2} = 1 \underset{\text{exponente}}{\overset{\text{laburo}}{\Longleftrightarrow}} \tfrac{15n+6}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 5n + 2 = 12k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 5n \equiv 10\ (12)\bigstar^1$$

Y tenemos una ecuación. Ahora calculamos la otra sumatoria:

$$\sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = \sum_{k=0}^{4n+6} (w^4)^k = \frac{(w^4)^{4n+7} - 1}{w^4 - 1} = 0 \Leftrightarrow (w^4)^{4n+7} = 1$$

Igual que antes, busco los w que satisfacen:

$$(w^4)^{4n+7} = 1 \underset{\text{exponente}}{\overset{\text{laburo}}{\Longleftrightarrow}} \tfrac{16n+28}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 4n + 7 = 9k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 4n \equiv 2\ (9)\bigstar^2$$

Con la segunda ecuación armo sistema y TCH:

$$\begin{matrix}\bigstar^1 \\ \bigstar^2\end{matrix} \begin{cases} n \equiv 2\ (12) \\ n \equiv 5\ (9) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} n \equiv 2\ (3) \\ n \equiv 2\ (4) \\ n \equiv 2\ (3) \end{cases} \overset{!}{\rightsquigarrow} \begin{cases} n \equiv 2\ (4) \\ n \equiv 5\ (9) \end{cases} \xrightarrow[\text{solución por TCR}]{9\ \perp\ 4\ \text{hay}} \boxed{n \equiv 14\ (36)} \quad \checkmark$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz` `Ale Teran`

---

5. Sea

$$z = \left(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i\right)^a \left(8 + 8\sqrt{3}i\right)^b$$

se pide:

a) Sabiendo que $\arg(z) = \arg(-i)$, hallar el resto de dividir a $3a + 4b$ por 24

b) Determinar todas las parejas de números enteros (a, b) tales que cumplen lo anterior, y además

$$2^{10} < |z| < 2^{25}$$

Sugerencia: Use, sin demostrar, que $2^x < 2^y < 2^z \Leftrightarrow x < y < z$.

---

a) Acomodo z:

$$\begin{array}{rcl} z & = & \left(4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i\right)^a\left(8+8\sqrt{3}i\right)^b \\ & = & (4\sqrt{2}(1+i))^a\cdot(8(1+\sqrt{3}))^b \\ & = & 8^a16^be^{a\cdot\frac{\pi}{4}i}\cdot e^{b\cdot\frac{\pi}{3}i} \\ & \overset{!}{=} & 2^{3a+4b}\cdot e^{i(\frac{a}{4}+\frac{b}{3})\pi} \end{array}$$

Entonces si $\arg(z)=\arg(-i)$:

$$(\frac{a}{4}+\frac{b}{3})\pi=\frac{3}{2}\pi+2k\pi \overset{!}{\Leftrightarrow} \boxed{3a+4b=18+24k}$$

Esté resultado es literalmente la expresión de un número dividido por 24 con su resto:

$$r_{24}(3a+4b)=18 \quad \text{con} \quad 0\leq 18<24$$

b) Condición sobre el $|z|$:

$$|z|=2^{3a+4b} \quad \wedge \quad 2^{10}<|z|<2^{25}\Leftrightarrow 10<3a+4b<25\bigstar^{1}$$

Por otro lado tengo:

$$3a+4b\equiv 18\ (24)\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} 3a+4b=24k+18\bigstar^{2}.$$

Reemplazo $\bigstar^{2}$ en $\bigstar^{1}$:

$$10<24k+18<25\Leftrightarrow -8<24k<7\Leftrightarrow k=0.$$

Por lo tanto tengo:

$$3a+4b=18$$

Para encontrar los pares resuelvo la diofántica (a ojo en este caso, sino usar euclides):

$$(a,b)_{particular}=(2,3) \quad \text{y} \quad (a,b)_{homogeneo}=(-4,3)$$

La solución general final con todos los pares queda:

$$\begin{array}{rcl} (a,b)_{general} & = & k\cdot(-4,3)+(2,3) \\ & = & (-4+2k,3+3k)\ \ \forall k\in\mathbb{Z} \end{array}$$

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

Nad Garraz