

# Apunte único: Álgebra I - Práctica 6

Por alumnos de Álgebra I  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

*Choose your destiny:*


*(doubleclick en los ejercicio para saltar)*

- [Notas teóricas](#)

- Ejercicios de la guía:

<a href="#">1.</a>	<a href="#">3.</a>	<a href="#">5.</a>	<a href="#">7.</a>	<a href="#">9.</a>	<a href="#">11.</a>	<a href="#">13.</a>	<a href="#">15.</a>
<a href="#">2.</a>	<a href="#">4.</a>	<a href="#">6.</a>	<a href="#">8.</a>	<a href="#">10.</a>	<a href="#">12.</a>	<a href="#">14.</a>	

- Ejercicios de Parciales

 <a href="#">1.</a>	 <a href="#">2.</a>	 <a href="#">3.</a>	 <a href="#">4.</a>	 <a href="#">5.</a>	 <a href="#">??.</a>
--	--	--	--	--	---

### Disclaimer:

Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

## ¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:

- 📖<sub>1</sub> Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
- 📖<sub>2</sub> Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
- 📖<sub>3</sub> ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
- 📖<sub>4</sub> Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
- 📖<sub>5</sub> Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir '*no me sale*' ≠ +. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

*Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda*, no te van a salir los ejercicios más difíciles: **Sentido común**.

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confianza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada*. Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber*. A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas **de Teresa** que son **buenísimos** 📺.

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra: **Prácticas Pandemia** 📺.

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre **Just Do IT** 🙌🙌🙌!

Eh, loco, fatalista, distópico, **relajá un toque** te vas a quedar (más) pelado... 🐸🐸🐸 *va a salir todo bien!*

El repo en [github](#)  para descargar las guías con los últimos updates.



<https://github.com/nad-garraz/algebraUno>

La Guía 6 se actualizó por última vez: 31/12/24 @ 11:40

### Guía 6



<https://github.com/nad-garraz/algebraUno/blob/main/6-guia/6-sol.pdf>

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por

[Telegram](#) .

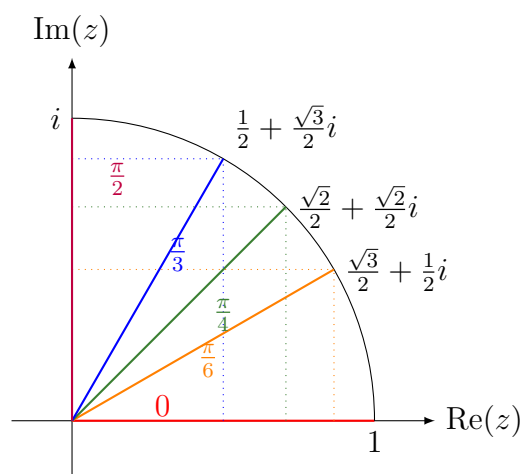


<https://t.me/+1znt2GV1i8cwMTNh>

**Notas teóricas:**Raíces de un número complejo:

- Tablita de ángulos *agradables*:

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



- Sean  $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $z = r_z e^{i\theta_z}$  y  $w = r_w e^{i\theta_w}$  con  $r_z, r_w \in \mathbb{R}_{>0}$  y  $\theta_z, \theta_w \in \mathbb{R}$ .

Entonces  $z = w \iff \begin{cases} r_z = r_w \\ \theta_z = \theta_w + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- raíces  $n$ -ésimas:  $w^n = z \iff \begin{cases} (r_w)^n = r_z \\ \theta_w \cdot n = \theta_z + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

De donde se obtendrán  $n$  raíces distintas:

$$w_k = z^{1/n} e^{i\frac{\theta_z + 2k\pi}{n}}, \text{ donde } r_w = \sqrt[n]{r_z} \text{ y } \theta_{w_k} = \frac{\theta_z}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta_z + 2k\pi}{n}$$

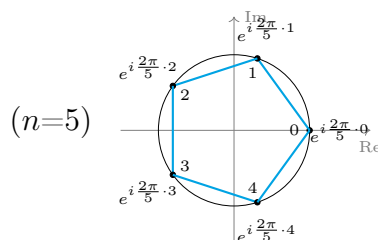
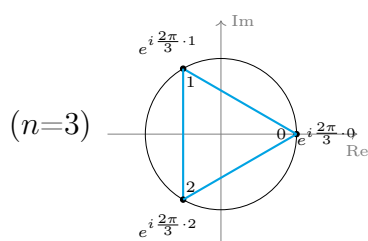
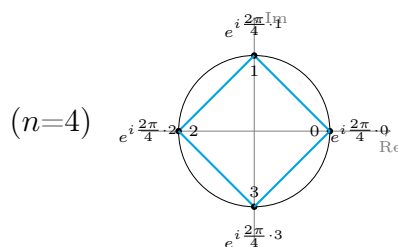
Entender bien como sacar raíces  $n$ -ésimas es importantísimo para toda la guía de complejos y la próxima de polinomios.

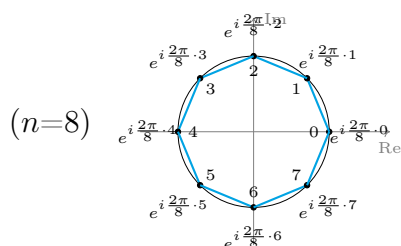
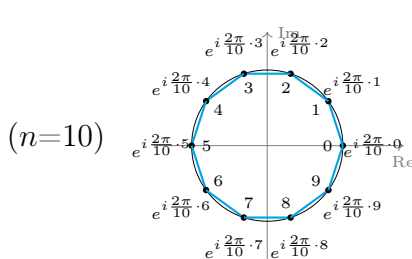
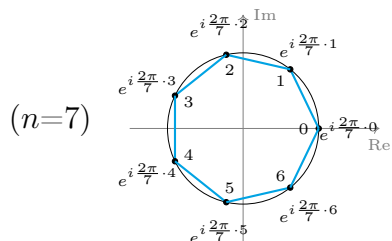
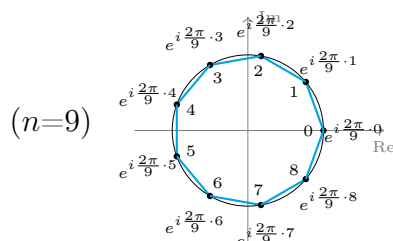
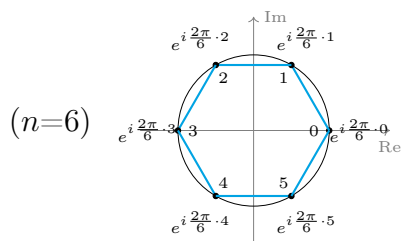
Grupos  $G_n$ :

- $G_n = \{w \in \mathbb{C} / w^n = 1\} = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} : 0 \leq k \leq n-1 \right\}$

( $n=1$ )  $w = 1$

( $n=2$ )  $w = \pm 1$





Notar que:

- Si  $n$  es par el grupo tiene al  $-1$ .
- Toda raíz compleja tiene a su conjugado complejo.
- Para ir de un punto a otro, se lo multiplica por  $e^{i\theta}$  eso *rota* al número en  $\theta$  respecto al origen.

•  $(G_n, \cdot)$  es un grupo abeliano, o conmutativo.

- $\forall w, z \in G_n, wz = zw$  y  $zm \in G_n$ .
- $1 \in G_n, w \cdot 1 = 1 \cdot w = w \quad \forall w \in G_n$ .
- $w \in G_n \Rightarrow \exists w^{-1} \in G_n, w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1$   
 $* \bar{w} \in G_n, w \cdot \bar{w} = |w|^2 = 1 \Rightarrow \bar{w} = w^{-1}$

• *Propiedades:*  $w \in G_n$

- $m \in \mathbb{Z}$  y  $n \mid m \Rightarrow w^m = 1$ .
- $m \equiv m' \pmod{n} \Rightarrow w^m = w^{m'} \quad (w^m = w^{r_n(m)})$
- $n \mid m \iff G_n \subseteq G_m$
- $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
- La suma de una raíz  $w$  de  $G_n$ :  $\sum_{k=0}^{n-1} w^k = \frac{w^n - 1}{w - 1} = 0$  si  $w \neq 1$

## Ejercicios de la guía:

1. Para los siguientes  $z \in \mathbb{C}$ , hallar  $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$ ,  $|z|$ ,  $\operatorname{Re}(z^{-1})$  e  $\operatorname{Im}(i \cdot z)$

i)  $z = 5i(1+i)^4$

iv)  $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{10}$

ii)  $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2(1-3i)$

iii)  $z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1-i)^3$

v)  $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1}$ .

Cosas para tener en cuenta sobre notación y algunos resultados:

En notación binomial:

$$z = a + ib = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z) \xrightarrow{\text{donde}} \begin{cases} a = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R} \\ b = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R} \\ z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ \operatorname{Im}(i \cdot z) = \operatorname{Im}(i \cdot a - b) = a = \operatorname{Re}(z) \end{cases}$$

Y en notación exponencial:

$$z = r \cdot e^{i\theta} \xrightarrow[r > 0]{\text{donde}} \begin{cases} r \cdot \cos(\theta) = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R} \\ r \cdot \sin(\theta) = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R} \\ z^{-1} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\bar{z}}{r} = \frac{\bar{z}}{r^2} \\ r \cdot e^{i\theta} = r \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \end{cases}$$

i) Cuando hay muchos productos, me gusta pasar todo a notación exponencial y jugar desde ahí:

$$z = 5 \cdot i \cdot (1+i)^4 \stackrel{!!}{=} 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot (\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})^4 = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot (4 \cdot e^{i\pi}) = 20 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} \stackrel{i}{=} -20i$$

Por lo tanto si:

$$z \cdot z^{-1} = 1 \xrightarrow{z = -20i} z^{-1} = \frac{1}{20}i$$

Finalmente:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) = -20 \\ |z| = 20 \\ \operatorname{Re}(z^{-1}) = 0 \\ \operatorname{Im}(i \cdot z) = \operatorname{Re}(z) = 0 \end{cases}$$

ii) A ojo, o casi, veo que los valores de los argumentos de los factores son feos. Recordar que hay muy pocos ángulos que tienen resultados agradables, los de la tablita, [tablita de ángulos agradables](#).

Dado que el exponente más alto es 2, se puede distribuir sin morir en el intento:

$$z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2 \cdot (\overline{1-3i}) \stackrel{!}{=} (-1 + 2\sqrt{6}i) \cdot (1 + 3i) \stackrel{!!}{=} -1 - 6\sqrt{6} + i(2\sqrt{6} - 3)$$

Donde en **!!** es distribuir y luego sacar factor común en los términos con  $i$ , nada extraño.

ehm... ¿Qué es esta mierda? 3 opciones, está mal el enunciado, lo estoy haciendo mal o los profesores nos están haciendo *bullying*.

iii) Atento a que  $i^4 \stackrel{\star^1}{=} 1$ :

$$z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1-i)^3 = i \cdot (i^4)^4 + \frac{1}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot (\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{7}{4}\pi})^3 \stackrel{\star^1}{=} i + \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{1}{2} + \frac{21}{4})\pi} = i + \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{23}{4}\pi} \stackrel{!!}{=} i + \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{7}{4}\pi}$$

En **!!** usé la periodicidad de la función exponencial, con el exponente complejo es  $2\pi$ -periódica.

$$z = i + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1$$

Finalmente:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 1 \\ \operatorname{Im}(z) = 0 \\ |z| = 1 \\ \operatorname{Re}(z^{-1}) = 1 \\ \operatorname{Im}(i \cdot z) = \operatorname{Re}(z) = 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = 0, |z| = 1, \operatorname{Re}(z^{-1}) = 1, \operatorname{Im}(i \cdot z) = i$$

iv) Fácil con exponenciales:

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{10} \stackrel{!}{=} (e^{i\frac{\pi}{4}})^{10} = e^{i\frac{5}{2}\pi} \stackrel{!}{=} e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

Finalmente:

$$\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 1, |z| = 1, \operatorname{Re}(z^{-1}) \stackrel{!}{=} \operatorname{Re}(-i) = 0, \operatorname{Im}(i \cdot z) = -1$$

v) Fácil con exponenciales:

$$z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1} \stackrel{!}{=} (e^{i\frac{4}{3}\pi})^{-1} = e^{-i\frac{4}{3}\pi} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Finalmente:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{Im}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ |z| = 1 \\ \operatorname{Re}(z^{-1}) = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{Im}(i \cdot z) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

2. ... hay que hacerlo! 

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

3. Hallar todos los número complejos  $z$  tales que

i)  $z^2 = -36$

ii)  $z^2 = i$

iii)  $z^2 = 7 + 24i$

iv)  $z^2 + 15 - 8i = 0$

i) A ojo se puede ver el resultado:

$$z_1 = 6i \quad \text{y} \quad z_2 = -6i$$

Si no se ve a simple vista:

- Se puede plantear la *ecuación en forma exponencial*, para deducir módulo y argumento.
- Cuando la potencia de  $z$  es 2, como en este caso, se puede atacar separando para parte real y la imaginaria e igualando.

Ahora usamos la segunda de esas técnicas:

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Para que 2 números complejos sean iguales, debe ocurrir que:

▣ Sus partes reales tiene que ser iguales y sus partes imaginarias también.

$$z^2 = -36$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = -36 \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -36 & \text{parte real} \\ 2ab = 0 & \text{parte imaginaria} \end{cases}$$

De ese sistema queda que:

$$a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0,$$

y dado que  $a$  y  $b \in \mathbb{R}$ , para que se cumpla la otra ecuación debe suceder que:

$$a = 0 \quad \text{y} \quad b = \pm 6$$

Por lo tanto se recupera que :

$$z_1 = 0 + 6i = 6i \quad \text{y} \quad z_2 = 0 - 6i = -6i$$

ii) Este no me parece taan obvio. Resuelvo ecuación en forma exponencial:

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \rightarrow z^2 = r^2(e^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta} \\ i &= e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

La idea es separar la ecuación compleja en 2 ecuaciones con números reales. Atento a que  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  y que el argumento  $\theta$  es  $2\pi$  periódico!

Ahora la ecuación queda como:

$$r^2 e^{i2\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \xrightarrow[\text{argumentos por otro}]{\text{módulos por un lado}} \begin{cases} r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

tengo que  $k \in \{0, 1\}$  de forma tal que el argumento  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Los valores que nos pedían:

$$z_{k=0} = e^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \quad \text{y} \quad z_{k=1} = e^{\frac{5}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

*Le comentario:*

Sale más fácil por el método del item i)? Seguramente, pero pintó hacerlo con exponenciales.



iii) Ataco igual que antes:

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \rightarrow z^2 = r^2(e^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta} \\ 7 + 24i &\stackrel{!}{=} 25e^{i \arctan(\frac{24}{7})} \end{aligned}$$

Horrible esos valores, probablemente no salga por acá. Pruebo con el método del item i):

$$z^2 = 7 + 24i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 7 + 24i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 & \text{parte real} \\ 2ab = 24 & \text{parte imaginaria} \end{cases}$$

De ese sistema queda que:

$$a \cdot b = 12,$$

meto en la otra ecuación  $a = \frac{12}{b}$ :

$$\frac{144}{b^2} - b^2 = 7 \xleftrightarrow[b \in \mathbb{R}]{!!} b = \pm 3$$

En !!, bicuadrática.

Con ese resultado los valores quedarían para el sistema:

$$z_1 = -4 - 3i \quad \text{y} \quad z_2 = 4 + 3i$$

iv) Acomodo para que quede para resolver como el anterior:

$$z^2 + 15 - 8i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -15 + 8i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = -15 + 8i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -15 & \text{parte real} \\ 2a \cdot b = 8 & \text{parte imaginaria} \end{cases}$$

De ese sistema queda que:


$$a \cdot b = 4,$$

meto en la otra ecuación  $a = \frac{4}{b}$ :

$$\frac{16}{b^2} - b^2 = -15 \xleftrightarrow[b \in \mathbb{R}]{!!} b = \pm 4$$

Con ese resultado los valores quedarían para el sistema:

$$z_1 = 1 + 4i \quad \text{y} \quad z_2 = -1 - 4i$$

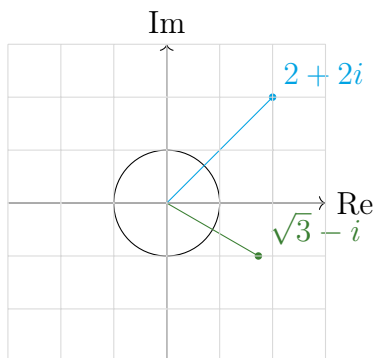
Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

4. Calcular los módulos y los argumentos de los siguiente números complejos Hallar todos los número complejos  $z$  tales que

$$\text{i) } (2 + 2i)(\sqrt{3} - i) \quad \text{ii) } (-1 + \sqrt{3}i)^5 \quad \text{iii) } (-1 + \sqrt{3}i)^{-5} \quad \text{iv) } \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}.$$

- i) A mí me gusta usar propiedades de potencia para calcular la forma final del número:



$$z = (2 + 2i) \cdot (\sqrt{3} - i) \stackrel{!}{=} 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{11}{6}\pi}$$

Y ahora como se están multiplicando las potencias, solo hay que usar propiedades de potencias:

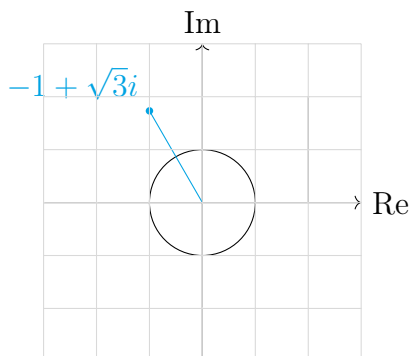
$$z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{25}{12}\pi}$$

Recordar que el argumento por definición está en  $[0, 2\pi)$ , así que si es mayor o menos se le restan o suman  $2k\pi$  respectivamente hasta que caiga en el intervalo.

Por lo que el resultado pedido quedaría en:

$$|z| = 4\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \arg(z) = \frac{1}{12}\pi$$

- ii) Como el anterior pero más fácil:



$$z = (-1 + \sqrt{3}i)^5 \stackrel{!}{=} 2^5 e^{i\frac{2}{3} \cdot 5\pi} = 32e^{i\frac{10}{3}\pi}$$

Nuevamente, corrijo el argumento para que caiga en el intervalo  $[0, 2\pi)$ . Por lo que el resultado pedido quedaría en:

$$|z| = 32 \quad \text{y} \quad \arg(z) = \frac{4}{3}\pi$$

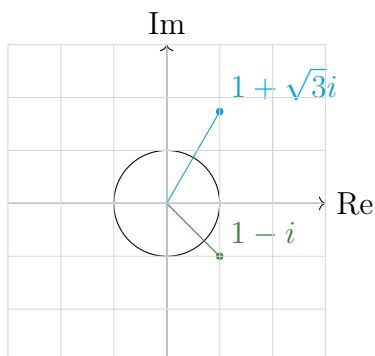
- iii) Parecido al anterior:

$$z = (-1 + \sqrt{3}i)^{-5} \stackrel{!}{=} 2^{-5} e^{i\frac{2}{3} \cdot (-5)\pi} = \frac{1}{32} e^{-i\frac{10}{3}\pi}$$

Nuevamente, corrijo el argumento para que caiga en el intervalo  $[0, 2\pi)$ . Por lo que el resultado pedido quedaría en:

$$|z| = \frac{1}{32} \quad \text{y} \quad \arg(z) = \frac{2}{3}\pi$$

- iv) Parecido a lo anterior:




$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \stackrel{!}{=} \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}} = \sqrt{2}e^{-\frac{17}{12}\pi}$$

Recordar que el argumento por definición está en  $[0, 2\pi)$ , así que si es mayor o menos se le restan o suman  $2k\pi$  respectivamente hasta que caiga en el intervalo.

Por lo que el resultado pedido quedaría en:

$$|z| = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \arg(z) = \frac{7}{12}\pi$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

## 5. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

## 6.

- Determinar la forma binomial de  $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17}$ .
- Determinar la forma binomial de  $(-1 + \sqrt{3}i)^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

- Multiplico y divido por el conjugado complejo para sacar la parte imaginaria del denominador:

$$z \stackrel{\star^1}{=} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17} \stackrel{!}{=} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{(1-i)} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right)^{17} = \left(\frac{(1+\sqrt{3}i) \cdot (1+i)}{2}\right)^{17} =$$

Ahora paso eso a notación exponencial y acomodo usando propiedades de exponentes:

$$\begin{cases} 1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} \\ 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i} \end{cases}$$

$$\left(\frac{(1+\sqrt{3}i) \cdot (1+i)}{2}\right)^{17} = \left(\frac{2 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot \sqrt{2} e^{\frac{1}{4}\pi i}}{2}\right)^{17} = 2^{\frac{17}{2}} \cdot e^{\frac{119}{12}\pi i} \stackrel{!}{=} 2^{\frac{17}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i}$$

$$\star^1 z = 2^{\frac{17}{2}} \cos\left(\frac{1}{12}\pi\right) - i 2^{\frac{17}{2}} \sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)$$

Un espanto. Pero bueh,  $\frac{1}{12}\pi = 15^\circ$

- ... hay que hacerlo! 

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

## 7. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

- $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$
- $(-\sqrt{3} + i)^n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$  es un número real negativo.
- $\arg((-1 + i)^{2n}) = \frac{\pi}{2}$  y  $\arg((1 - \sqrt{3}i)^{n-1}) = \frac{2}{3}\pi$

- i) Para resolver las ecuaciones en números complejos con exponentes, en general, es más fácil resolver en notación exponencial. El miembro izquierdo queda:

$$(\sqrt{3} - i)^n = (2 \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi})^n = 2^n \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi n}$$

El miembro derecho queda:

$$2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i) = 2^{n-1} \cdot (2 \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}) = 2^n \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

Ahora la igualdad de los números se dará cuando sus módulos y argumentos sean iguales:

$$2^n \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi n} = 2^n \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^n = 2^n & \checkmark \\ \frac{11}{6}\pi n = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \Leftrightarrow 11n = 4 + 12k \end{cases} \star^1$$

En  $\star^1$  quedó una ecuación para despejar  $n$  que es un número entero:

$$\star^1 11n = 4 + 12k \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 11n \equiv 4 \pmod{12} \Leftrightarrow -n \equiv 4 \pmod{12} \Leftrightarrow n \equiv -4 \pmod{12} \Leftrightarrow n \equiv 8 \pmod{12}$$

Finalmente los valores de  $n$  buscados para que la ecuación se cumpla son:

$$n \equiv 8 \pmod{12}$$

- ii) Un número real  $z$  negativo tiene un  $\arg(z) = \pi$ . Ataco el ejercicio parecido al anterior en la parte de los exponentes, donde está el argumento:

$$\begin{aligned} (-\sqrt{3} + i)^n &= 2^n \cdot e^{i\frac{5}{6}\pi n} \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

El enunciado queda como:

$$(-\sqrt{3} + i)^n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^n \cdot e^{i(\frac{5}{6}n + \frac{1}{3})\pi}$$

Ahora, *sin olvidar la periodicidad*, tengo que pedir que el argumento de esa expresión sea  $\pi$ :

$$\left(\frac{5}{6}n + \frac{1}{3}\right)\pi = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{5}{6}n + \frac{1}{3} = 1 + 2k \Leftrightarrow 5n = 4 + 12k \star^1$$

En  $\star^1$  quedo una ecuación para resolver para  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\star^1 5n = 4 + 12k \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 5n \equiv 4 \pmod{12} \Leftrightarrow n \equiv 8 \pmod{12}$$

Finalmente los valores de  $n$  buscados para que la expresión sea un número negativo:

$$n \equiv 8 \pmod{12}$$

- iii) Arranco pasando las expresiones del enunciado a notación exponencial:

$$\begin{aligned} (-1 + i)^{2n} &= 2^n \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi n} \star^1 \\ (1 - \sqrt{3}i)^{n-1} &= 2^{n-1} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi(n-1)} \star^2 \end{aligned}$$

De  $\star^1$  igualando a  $\frac{\pi}{2}$ , sin olvidar la *periodicidad* del argumento:

$$\frac{3}{2}\pi n = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow 3n = 1 + 4k \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 3n \equiv 1 \pmod{4} \Leftrightarrow n \equiv 3 \pmod{4} \star^3$$

De  $\star^2$  igualando a  $\frac{2}{3}\pi$ , nuevamente sin olvidar la *periodicidad* del argumento:


$$\frac{5}{3}\pi(n-1) = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \Leftrightarrow 5n-5 = 2+6k \Leftrightarrow 5n = 7+6k \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 5n \equiv 7 \pmod{6} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} n \equiv 5 \pmod{6} \star^4$$

Podemos observar que con los resultados de  $\star^3$  y  $\star^4$  esto se convirtió en un ejercicio del TCHR:

$$\begin{cases} n \equiv 3 \pmod{4} \\ n \equiv 5 \pmod{6} \end{cases} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \begin{cases} n \equiv 3 \pmod{4} \\ n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Resolviendo ese sistema, los valores de  $n$  buscados:

$$n \equiv 11 \pmod{12}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

8. Hallara en cada caso las raíces  $n$ -ésimas de  $z \in \mathbb{C}$ :

i)  $z = 8, n = 6$

iii)  $z = -1 + i, n = 7$

ii)  $z = -4, n = 3$

iv)  $z = (2 - 2i)^{12}, n = 6$

Ejercicio importante. La raíz  $n$ -ésima de  $z$  es el número que multiplicado por sí mismo  $n$  veces me da  $z$ :

$$w^n = z,$$

es decir que quiero encontrar  $w$ . Siempre va a haber tantas soluciones como  $n$ .

i) Dado un número *genérico*  $w = r \cdot e^{\theta i}$ , lo visto con la info del enunciado:

$$w^6 = w = (r \cdot e^{\theta i})^6 = r^6 \cdot e^{6\theta i} \star^1$$

Ahora hago lo mismo con el otro número  $z = 8$ :

$$z = 8 \cdot e^{0i} = 8 \star^2$$

Una vez con todo escrito en forma exponencial, es igualar prestar atención a la periodicidad del argumento y listo:

$$w^6 = z \stackrel{\star^1}{\stackrel{\star^2}{\Leftrightarrow}} r^6 \cdot e^{6\theta i} = 8 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r^6 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} \\ 6\theta \stackrel{!}{=} 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta_k = \frac{1}{3}k\pi \end{cases}$$

Con eso concluimos que las raíces son de la forma:

$$w_k = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{1}{3}k\pi} \text{ con } k \in [0, 5]$$

ii) Mismo procedimiento, te tiro una pista: Los números negativos tienen argumento  $\pi$ , así que en notación exponencial:

$$-4 = 4 \cdot e^{\pi i}$$

iii) En notación exponencial  $z$ , que está en segundo cuadrante:

$$z = -1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

iv) En notación exponencial  $z$  se calcula primero con la base:

$$z = (2 - 2i)^{12} = (2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{7}{4}\pi i})^{12} = 2^{18} \cdot e^{21\pi i} \stackrel{!}{=} 2^{18} \cdot e^{\pi i}$$

9. Hallar todos los  $z \in \mathbb{C}$  tales que  $3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0$

Para que se cumpla la igualdad entre 2 números complejos, *las partes reales y imaginarias* deben ser iguales:

$$3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3z^5}_{\in \mathbb{C}} = \underbrace{-2|z|^5 - 32}_{\in \mathbb{R}} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \operatorname{Re}(3z^5) = -2|z|^5 - 32 \\ \operatorname{Im}(3z^5) = 0 \end{cases}$$

De la ecuación de la parte imaginaria: (Es útil recordar que  $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ )

$$\operatorname{Im}(3z^5) = 3 \cdot \frac{z^5 - \bar{z}^5}{2i} = 0 \iff z^5 = \bar{z}^5 \iff |z|^5 e^{5\theta i} = |z|^5 e^{-5\theta i} \stackrel{!}{\Leftrightarrow \frac{2k\pi}{2k\pi}} \begin{cases} 5\theta = -5\theta + 2k\pi \\ \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \theta_k = \frac{1}{5}k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

De la ecuación de la parte real: (Es útil recordar que si  $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$ , entonces se puede expresar  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ )

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(3z^5) &= 3 \cdot \frac{z^5 + \bar{z}^5}{2} = 3 \cdot \frac{|z|^5 e^{5\theta i} + |z|^5 e^{-5\theta i}}{2} = 3|z|^5 \cos(5\theta) = -2|z|^5 - 32 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |z|^5 (3 \cos(5\theta) + 2) &= -2^5 \xrightarrow[\text{en } \theta_k \star^1]{\text{evaluando}} |z|^5 (3 \cos(k\pi) + 2) = -2^5 \begin{cases} \xrightarrow[k \text{ par}]{k} 0 < |z|^5 (3 + 2) \neq -2^5 \quad \text{💀} \\ \xrightarrow[k \text{ impar}]{k} |z|^5 (-3 + 2) = -2^5 \Leftrightarrow |z| = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalmente teniendo en cuenta que  $k$  tiene que ser impar, y que el  $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ :

$$z_k = 2e^{\theta_k i} \quad \text{con } \theta_k = \frac{1}{5}k\pi \quad \text{y } k \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👋 Nad Garraz 🍀

10. Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  para los cuales la ecuación  $z^n + i\bar{z}^2 = 0$ , tenga exactamente 6 soluciones y resolver en ese caso.

Pasar todo a notación exponencial:

$$z^n + i\bar{z}^2 = 0 \Leftrightarrow z^n = -i\bar{z}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z^n = r^n e^{n\theta i} \\ \bar{z}^2 = r^2 e^{-2\theta i} \\ -i = e^{\frac{3}{2}\pi} \end{cases} \Leftrightarrow r^n e^{n\theta i} = r^2 e^{(\frac{3}{2}\pi - 2\theta)i}$$

Esa ecuación se resuelve como siempre igualando los módulos y los argumentos, *sin olvidar la periodicidad* de éste último:

$$\begin{cases} r^n = r^2 \Leftrightarrow r^2(r^{n-2} - 1) = 0 \star^1 \\ n\theta = \frac{3}{2}\pi - 2\theta + 2k\pi \Leftrightarrow (n+2)\theta = (\frac{3}{2} + 2k)\pi \star^2 \end{cases}$$

La ecuación de  $r \star^1$ :

Analizo para cuales valores de  $r$  y de  $n$  se cumple la ecuación:

- ▣  $r = 0$  Aporta una solución trivial para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  en la ecuación  $z^n + i\bar{z}^2 = 0$ . Pero solo habría una solución  $z = 0$  necesito encontrar otras 5.
- ▣  $r = 1$  serviría. Quiere decir que voy a poder encontrar solución en  $\star^1$  que me deja usar cualquier  $n$  para jugar con la ecuación de  $\theta\star^2$ .
- ▣  $n = 2$  no sirve. Si bien cumple  $\star^1$  es un valor que daría una solución para cada  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Pero tengo que tener solo 6 soluciones.

La ecuación de  $\theta\star^2$ :

Por lo analizado antes, juego con  $r = 1$ , eso no impone de momento ninguna condición sobre  $n$ :


$$(n+2)\theta = \left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi \xleftrightarrow[\forall n \in \mathbb{N}_{\neq 2}]{!!} \theta = \frac{1}{n+2} \left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi$$

Y ahora surge la pregunta: ¿Qué onda esto? Necesitamos 6 soluciones según el enunciado, pero a no olvidar que ya tenemos una solución proporcionada por el  $r = 0$ . Así que ahora laburo el  $\theta$  para que me de 5 soluciones y así tener 6 en total. Pido entonces  $n = 3$ , para partir en 5 y obtener de esta forma 5 valores para  $\theta_k \in [0, 2\pi)$ :

$$\theta_k = \frac{1}{5} \cdot \frac{3+4k}{2} \pi \Leftrightarrow \theta_k = \frac{3+4k}{10} \pi \quad \text{con } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Finalmente para que la ecuación falopa esa tenga únicamente 6 soluciones, necesito que  $n = 3$ :

$$z^n + i\bar{z}^2 = 0 \xleftrightarrow[\text{solo 6 soluciones}]{n=3 \text{ para tener}} \begin{cases} z = 0 & \text{con } r = 0 \\ z_{k=0} = e^{i\frac{3}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \\ z_{k=1} = e^{i\frac{7}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \\ z_{k=2} = e^{i\frac{11}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \\ z_{k=3} = e^{i\frac{15}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \\ z_{k=4} = e^{i\frac{19}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

## 11.

- a) Calcular  $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$  para cada  $w \in G_7$ .
- b) Calcular  $w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8$  para cada  $w \in G_3$ .
- c) Calcular  $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$  para cada  $w \in G_{10}$ .
- d) Calcular  $w^{14} + w^{-8} + \bar{w}^4 + \overline{w^{-3}}$  para cada  $w \in G_5$

Voy a estar usando las siguientes propiedades en  $G_n$ :

$$\text{Si } w \in G_n \Rightarrow \begin{cases} w^n = 1 \Rightarrow w^k = w^{r_n(k)} \\ \bar{w}^k = w^{r_n(-k)} \\ \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n, \text{ lo uso para saber con cuales raíces hay que tener cuidado} \\ \text{Si } w \in G_p \text{ con } p \text{ primo} \end{cases}$$

- a) Calcular  $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$  para cada  $w \in G_7$ .

Raíces de  $G_7$  de interés: 7 es primo e impar  $\Rightarrow w = 1$  se hace a parte.

Si  $w = 1$ :

$$w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = 6$$

Si  $w \neq 1$ :

$$\begin{aligned} w + \underbrace{\bar{w}}_{w^6} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) &= w + w^6 + w^2 + 2w^3 + w^4 - \underbrace{(w^7)^5}_{=1} w^3(1 - w^2) = \\ &= -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6}_{=0} = -1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

- b) Calcular  $w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8$  para cada  $w \in G_3$ .

Raíces de  $G_3$  de interés: 3 es primo e impar  $\Rightarrow w = 1$  se hace a parte.

Si  $w = 1$ :

$$w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8 = 10$$

Si  $w \neq 1$ :

$$\underbrace{w^{73}}_w + \underbrace{\bar{w} \cdot w^9}_{w^2 \cdot 1} + 8 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2}_{=0} + 8 = 7$$

- c) Calcular  $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$  para cada  $w \in G_{10}$ .

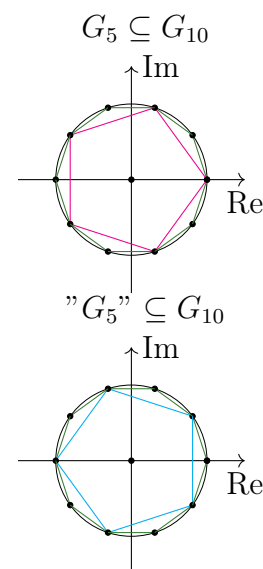
Raíces de  $G_{10}$  de interés:  $2 \mid 10$  y  $5 \mid 10$ . 10 es par  $\Rightarrow w = \pm 1$  y raíces de  $G_2$  y de  $G_5$  se hacen a parte.

– Si  $w = \pm 1$ :

$$1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 5 \quad \checkmark$$

– Si  $w \in G_{10}$  y  $w \neq \pm 1$ :

$$\begin{aligned} 1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} &= 1 + w^2 + w^8 + w^4 + w^6 = \\ &= \sum_{k=0}^4 (w^2)^k = \frac{(w^2)^5 - 1}{w^2 - 1} = \frac{\underbrace{(w^{10})^5}_{=1} - 1}{w^2 - 1} = 0 \end{aligned}$$



- d) Calcular  $w^{14} + w^{-8} + \bar{w}^4 + \overline{w^{-3}}$  para cada  $w \in G_5$

Si  $w = 1$ :

$$w^{14} + w^{-8} + \bar{w}^4 + \overline{w^{-3}} = 4$$

Si  $w \neq 1$ :

$$w^{14} + w^{-8} + \bar{w}^4 + \overline{w^{-3}} = w^4 + w^2 + w + w^3 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = -1$$



12.

a) Sea  $w \in G_{36}$ ,  $w^4 \neq 1$ . Calcular  $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$

b) Sea  $w \in G_{11}$ ,  $w \neq 1$ . Calcular  $\operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^{60} w^k \right)$ .

a) Sea  $w \in G_{36}$ ,  $w^4 \neq 1$ . Calcular  $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$

$$\text{Sé que si } w \in G_{36} \Rightarrow \begin{cases} w^{36} = 1 \\ \sum_{k=0}^{35} w^k = 0 \end{cases}$$

Como  $w^4 \neq 1$  sé que  $w \neq \pm 1$ . Si no tendría que considerar casos particulares para la suma.

$$\begin{aligned} \text{Si } \sum_{k=7}^{60} w^{4k} &= \underbrace{\sum_{k=7}^{60} w^{4k}}_{\sum_{k=0}^{60} w^{4k}} + \sum_{k=0}^6 w^{4k} - \sum_{k=0}^6 w^{4k} = \sum_{k=0}^{60} w^{4k} - \sum_{k=0}^6 w^{4k} = \frac{(w^4)^{61}-1}{w^4-1} - \frac{(w^4)^7-1}{w^4-1} = \frac{(w^4)^{61}-(w^4)^7}{w^4-1} \\ &\xrightarrow[w^3 \cdot 6 = 1]{61 = 9 \cdot 6 + 7} \frac{(w^{36})^9 \cdot (w^4)^7 - (w^4)^7}{w^4-1} \rightarrow \boxed{\sum_{k=7}^{60} w^{4k} = 0} \end{aligned}$$

b) Sea  $w \in G_{11}$ ,  $w \neq 1$ . Calcular  $\operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^{60} w^k \right)$ .

$$\text{Sé que si } w \in G_{11} \Rightarrow \begin{cases} w^{11} = 1 \\ \sum_{k=0}^{10} w^k = 0 \\ 11 \text{ es impar} \Rightarrow -1 \notin G_{11} \end{cases}$$

Como  $w \neq 1$  no calculo caso particular para la suma. Me piden la parte real  $\xrightarrow{\text{uso}} \operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ .

Probé hacer la suma de Gauss como en el anterior, pero no llegué a nada, abro sumatoria y uso que  $61 = 5 \cdot 11 + 6$ , porque hay 61 sumandos.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{60} w^k &= w^0 + \dots + w^{60} = 5 \cdot \overbrace{(w^0 + w^1 + \dots + w^9 + w^{10})}^{=0} + w^{55} + w^{56} + w^{57} + w^{58} + w^{59} + w^{60} = \\ &= w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 \star^1 \end{aligned}$$

agrupé usando:  $w \in G^{11} \Rightarrow w^k = w^{r_{11}(k)}$

También voy a usar que si  $w \in G_{11} \Rightarrow \bar{w}^k = w^{r_{11}(-k)}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^{60} w^k \right) &= \frac{\sum_{k=0}^{60} w^k + \sum_{k=0}^{60} \bar{w}^k}{2} \stackrel{\star^1}{=} \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \bar{w}^0 + \bar{w}^1 + \bar{w}^2 + \bar{w}^3 + \bar{w}^4 + \bar{w}^5}{2} = \\ &= \frac{w^0}{2} + \frac{\overbrace{w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^{10} + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}^{\sum_{k=0}^{10} w^k}}{2} = \frac{\overbrace{w^0}^1}{2} + \frac{\overbrace{\sum_{k=0}^{10} w^k}^{=0}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**13.** Sea  $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$  raíz cúbica de la unidad y sea  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  vale que  $z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$ . Concluir que  $z_n \in G_6$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Hay que probar por inducción. Quiero probar:

$$p(n) : z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

*Caso base:*

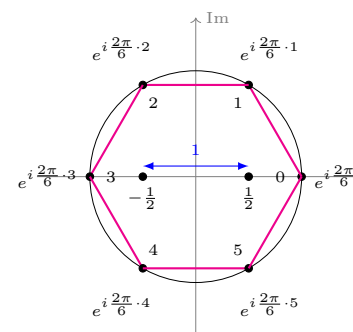
$$\begin{cases} p(1) : z_1 = 1 + e^{\frac{2\pi}{3}i} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ p(2) : z_2 = \overline{1 + z_1^2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i}} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$

*Paso inductivo:*

$$\begin{cases} p(2k) : z_{2k} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero} \Rightarrow p(2k+2) \text{ ¿Verdadero?} \\ p(2k+1) : z_{2k+1} = e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero} \Rightarrow p(2k+3) \text{ ¿Verdadero?} \\ \left\{ \begin{array}{l} z_{2k+2} = \overline{1 + z_{2k+1}^2} \xLeftrightarrow{\text{HI}} z_{2k+2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{\frac{\pi}{3}i}} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ z_{2k+3} = \overline{1 + z_{2k+2}^2} \xLeftrightarrow{\text{HI}} z_{2k+3} = \overline{1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{-\frac{\pi}{3}i}} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{array} \right. \end{cases}$$

Dado que  $p(1), p(2), p(2k), p(2k+1), p(2k+2), p(2k+3)$  resultaron ser verdaderas, entonces por el principio de inducción se concluye que  $p(n)$  también lo es  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Dado que la sucesión  $z_n$  tiene solo 2 imágenes, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  y teniendo en cuenta que  $e^{-i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 5} \in G_6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$



**14.** Se define en  $\mathbb{C} - \{0\}$  la relación  $\mathcal{R}$  dada por  $z \mathcal{R} w \iff z\bar{w} \in \mathbb{R}_{>0}$ .

i) Probar que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia.

ii) Dibujar en el plano complejo la clase de equivalencia de  $z = 1 + i$ .

i) Dado un  $z = re^{i\theta}$ , tengo que  $z \in \mathbb{R}_{>0} \iff \text{Re}(z) > 0 \wedge \text{Im}(z) = 0 \iff r > 0 \wedge \theta = 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$

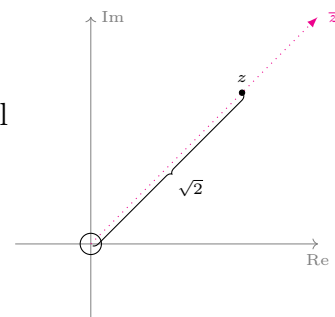
– *Reflexividad:*  $z = re^{i\theta}, z \mathcal{R} z = r^2 e^{2\theta i}$  por lo tanto  $z \mathcal{R} z \iff 2\theta = 2k\pi \iff \theta = k\pi \quad \checkmark$

– *Simetría:*  $\begin{cases} z \mathcal{R} w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \quad \checkmark \\ w \mathcal{R} z = rse^{(\varphi-\theta)i} \iff \theta = -2k_2\pi + \varphi = 2k_3\pi + \varphi \quad \checkmark \end{cases}$

– *Transitividad:*  $\begin{cases} z \mathcal{R} w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \\ w \mathcal{R} v = rte^{(\varphi-\alpha)i} \iff \varphi = 2k_2\pi + \alpha \\ \Rightarrow z \mathcal{R} v \iff \theta = 2k_1\pi + \underbrace{\varphi}_{2k_2\pi + \alpha} = 2\pi(k_1 + k_2) + \alpha = 2k_3\pi + \alpha \quad \checkmark \end{cases}$

La relación  $\mathcal{R}$  es de equivalencia.

- Tengo que el  $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ . La clase  $\bar{z}$  estará formada por los  $w \in \mathbb{C}$  tal
- ii) que:  $w \mathcal{R} z \iff \arg(w) = \frac{1}{4}\pi$



15. Se define la siguiente relación  $\mathcal{R}$  en  $G_{20}$ :

$$z \mathcal{R} w \iff zw^9 \in G_2.$$

- i) Probar que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia.
- ii) Calcular la cantidad de elementos que hay en cada clase de equivalencia.

i) *Reflexividad:*

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \Rightarrow z \mathcal{R} z \iff e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \cdot e^{i\frac{9}{10}\pi k_z} = e^{ik_z\pi} = \begin{cases} 1 & k_z \text{ par} \\ -1 & k_z \text{ impar} \end{cases} \quad \checkmark$$

*Simetría:*

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \text{ y } w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \in G_{20}.$$

$$\mathcal{R} \text{ es simétrica si: } z \mathcal{R} w \iff w \mathcal{R} z$$

$$\begin{cases} zw^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_w)} \in G_2 \iff \frac{1}{10}(k_z+9k_w) = k \iff k_z+9k_w = 10k \iff k_z \equiv -9k_w \pmod{10} \iff k_z \equiv k_w \pmod{10} \\ \rightarrow \boxed{z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w \pmod{10}} \\ wz^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9k_z)} = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9(10k+k_z))} = e^{i\frac{\pi}{10}(90k+10k_w)} = e^{i(9k+k_w)\pi} = e^{ik'\pi} \end{cases}$$

$$\boxed{z \mathcal{R} w \iff w \mathcal{R} z} \quad \forall k, k_w \in \mathbb{Z} \text{ con } k_z \equiv k_w \pmod{10} \quad \checkmark$$

*Transitividad:*

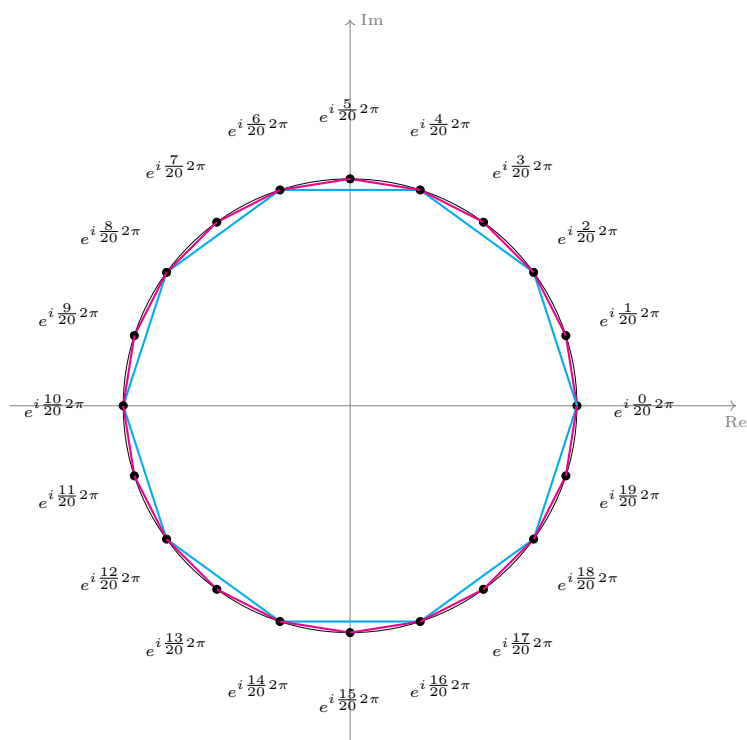
$$\left\{ \begin{array}{l} z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \\ w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \\ y = e^{i\frac{1}{10}\pi k_y} \end{array} \right\} \in G_{20} \rightarrow \mathcal{R} \text{ es transitiva si: } z \mathcal{R} w \text{ y } w \mathcal{R} y \Rightarrow z \mathcal{R} y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w \pmod{10} \star^1 \\ w \mathcal{R} y \iff k_w \equiv k_y \pmod{10} \star^2 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow zy^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_y)} \stackrel{\star^1}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k+k_w+9k_y)} \stackrel{\star^2}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k+10k'+k_y+9k_y)} = e^{i(k+k'+k_y)\pi} = e^{ik''\pi}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} z \mathcal{R} w \\ w \mathcal{R} y \end{array} \right\} \Rightarrow z \mathcal{R} y}$$

- ii)  $\#e^{i\frac{2\pi}{20}k} = 2$  para algún  $k \in \mathbb{Z}/r_{20}(k) < 20$ . Dada la condición  $k_z \equiv k_w \pmod{10}$ , solo hay 2 números que tienen misma cifra de unidad entre 0 y 20. En el gráfico se ve que si  $z \mathcal{R} w \Rightarrow w = -z$



## 🔥 Ejercicios de parciales:

🔥1. Para  $w \in G_6$ , calcular  $S = w^{71} + w^{-14} + 5\bar{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023}$

Si  $w = 1$ :

$$S = 1 + 1 + 5 \cdot 1 + 1 - 4 \cdot 1 + 1 = 5$$

Si  $w \neq 1$ :

$$\begin{aligned} S &= w^{71} + w^{-14} + 5\bar{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023} \\ &\stackrel{!}{=} w^5 + w^4 + 5w^2 + w^3 - 4w^2 + w^1 \\ &\stackrel{!}{=} w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = \underbrace{-1 + 1 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5}_{=0} = -1 \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 Nad Garraz 🔄

👉 Ale Teran 🔄

🔥2. Sea  $w \in G_{14}$ . Hallar todos los posibles valores de  $w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j}$

Voy a usar que:  $\begin{cases} w \in G_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ \text{Si } m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n \end{cases}$

Si  $w = 1$ :

$$\underbrace{w^7}_{=1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{w^{2j}}_{=1} = 1 + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{=134} = 1 + 134 = 135 \quad \checkmark$$

Si  $w = -1$ :

$$\underbrace{w^7}_{=-1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{(w^j)^2}_{=1} = -1 + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{=134} = -1 + 134 = 133 \quad \checkmark$$

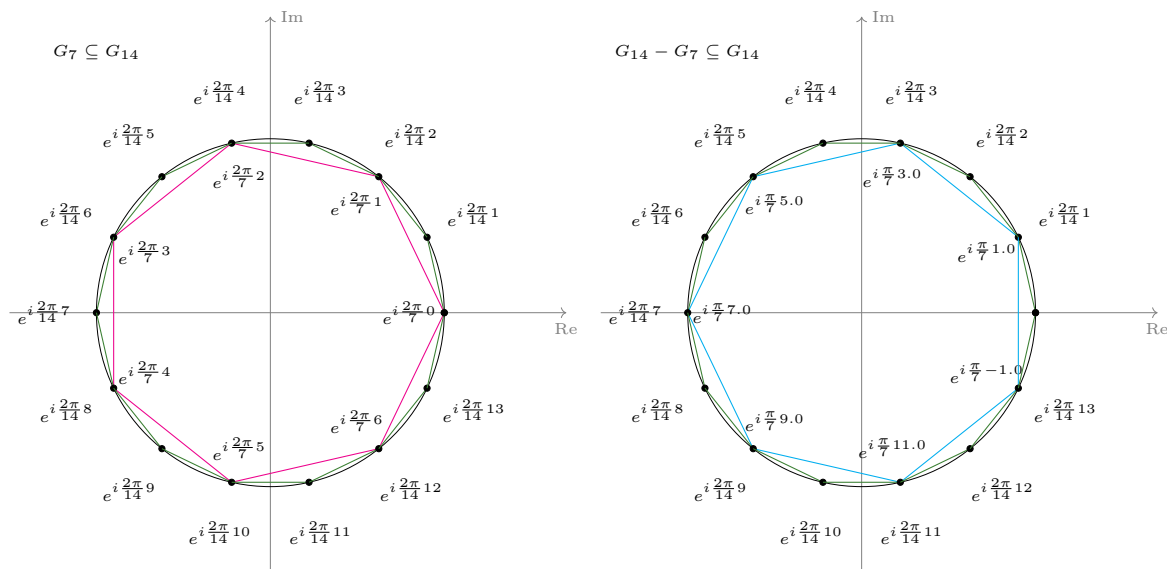
Si  $w \neq \pm 1$ :

$$w \in G_{14} \Rightarrow w = e^{i\frac{2k\pi}{14}} \text{ con } k \in \mathbb{Z}_{[0,13]} \Rightarrow w^2 = \left(e^{i\frac{2k\pi}{14}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{7} \cdot k} \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^6 (w^2)^j = 0$$

$$w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j} = w^7 + \sum_{j=0}^{140} (w^2)^j - \sum_{j=0}^6 (w^2)^j = w^7 + \underbrace{\frac{(w^2)^{141} - 1}{w^2 - 1}}_{=0} - 0 = w^7 + \underbrace{\frac{w^2 \left( \frac{(w^{14})^{20} - 1}{w^{14} - 1} \right)}{w^2 - 1}}_{=1} = w^7 + 1$$

$$\text{Si } \begin{cases} w \in G_7 \Rightarrow w^7 = 1 \\ w \in G_{14} - G_7 \Rightarrow w^7 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w \in G_7 & \rightarrow 1 + 1 = 2 \quad \checkmark \\ w \in G_{14} - G_7 & \rightarrow -1 + 1 = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$



**3.** Sea  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ . Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- $8 \mid 3n + |z^3|$
- $\arg(z^{7n+6}) = \arg(i)$

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ \theta_z = \frac{11}{6}\pi \end{cases} \rightarrow z = |z|e^{\theta_z i} = e^{i\frac{11}{6}\pi} \Rightarrow z^3 = e^{i\frac{11}{2}\pi} = -1 \Leftrightarrow |z^3| = 1$$

Primera condición:

$$8 \mid 3n + |z^3| = 3n + 1 \xLeftrightarrow{\text{def}} 3n + 1 = 8k \xLeftrightarrow{\text{def}} 3n + 1 \equiv 0 \pmod{8} \Leftrightarrow 3n \equiv 7 \pmod{8} \xLeftrightarrow[(\Leftrightarrow)3 \perp 8]{\times 3} 9n \equiv 21 \pmod{8} \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod{8} \quad \checkmark$$

Segunda condición:

$$\begin{aligned} \arg(z^{7n+6}) = \arg(i) &\Leftrightarrow \left(e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^{7n+6} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{i\frac{77}{6}n\pi + 11\pi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{77}{6}n\pi + 11\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \xrightarrow[n]{\text{despejo}} \frac{77}{6}n + 11 &= \frac{1}{2} + 2k \Leftrightarrow 77n = -63 + 12k \xLeftrightarrow{\text{def}} 77n \equiv -63 \pmod{12} \Leftrightarrow 5n \equiv -3 \pmod{12} \xLeftrightarrow[(\Leftrightarrow)5 \perp 12]{\times 5} \\ n &\equiv 9 \pmod{12} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{junto info} \\ \text{TCHR} \end{array} \rightarrow \begin{cases} n \equiv 9 \pmod{12} \\ n \equiv 5 \pmod{8} \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{divisores coprimos}]{\text{quiero}} \begin{cases} n \equiv 1 \pmod{4} \quad \checkmark \\ n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{4} \quad \checkmark \\ n \equiv 1 \pmod{2} \quad \checkmark \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{me quedo con el de mayor divisor}]{\text{me quedo con el}} \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \star^1 \\ n \equiv 5 \pmod{8} \star^2 \end{cases}$$

Ahora sí, tengo el sistema con **divisores coprimos**, por TCHR tengo solución.

$$\begin{aligned} \xrightarrow[\star^1]{\text{de}} n &= 3k \star^3 \quad \checkmark \xrightarrow[\text{en } \star^2]{\text{reemplazo}} 3k \equiv 5 \pmod{8} \xLeftrightarrow[(\Leftrightarrow)3 \perp 8]{\times 3} k \equiv 7 \pmod{8} \Leftrightarrow k = 8j + 7 \quad \checkmark \\ \xrightarrow[k \text{ en } \star^3]{\text{reemplazo}} n &= 3(8j + 7) = 24j + 21 \Leftrightarrow \boxed{n \equiv 21 \pmod{24}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

🔥4. Sea  $w = e^{\frac{\pi}{18}i}$ . Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  que cumplen simultáneamente:

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = 0 \quad \sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = 0.$$

Expresar la solución como una única ecuación de congruencia.

Dado que:

$$w = e^{\frac{1}{18}\pi i} \Leftrightarrow \begin{cases} w^3 = e^{\frac{1}{6}\pi i} \neq 1 \\ w^4 = e^{\frac{2}{9}\pi i} \neq 1 \end{cases},$$

puedo usar la serie geométrica.

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = \sum_{k=0}^{5n+1} (w^3)^k = \frac{(w^3)^{5n+2} - 1}{w^3 - 1} = 0 \Leftrightarrow (w^3)^{5n+2} = 1.$$

Queda una ecuación para encontrar  $w$ :

$$(w^3)^{5n+2} = 1 \xrightarrow[\text{exponente}]{\text{laburo}} \frac{15n+6}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 5n+2 = 12k \xrightarrow{\text{def}} 5n \equiv 10 \pmod{12} \star^1$$

Y tenemos una ecuación. Ahora calculamos la otra sumatoria:

$$\sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = \sum_{k=0}^{4n+6} (w^4)^k = \frac{(w^4)^{4n+7} - 1}{w^4 - 1} = 0 \Leftrightarrow (w^4)^{4n+7} = 1$$

Igual que antes, busco los  $w$  que satisfacen:

$$(w^4)^{4n+7} = 1 \xrightarrow[\text{exponente}]{\text{laburo}} \frac{16n+28}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 4n+7 = 9k \xrightarrow{\text{def}} 4n \equiv 2 \pmod{9} \star^2$$

Con la segunda ecuación armo sistema y TCH:

$$\begin{matrix} \star^1 \\ \star^2 \end{matrix} \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{12} \\ n \equiv 5 \pmod{9} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 2 \pmod{4} \\ n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{4} \\ n \equiv 5 \pmod{9} \end{cases} \xrightarrow[\text{solución por TCR}]{9 \perp 4 \text{ hay}} \boxed{n \equiv 14 \pmod{36}} \quad \checkmark$$

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 Nad Garraz 🔄

👉 Ale Teran 🔄

🔥5. Sea

$$z = (4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^a (8 + 8\sqrt{3}i)^b$$

se pide:

- Sabiendo que  $\arg(z) = \arg(-i)$ , hallar el resto de dividir a  $3a + 4b$  por 24
- Determinar todas las parejas de números enteros  $(a, b)$  tales que cumplen lo anterior, y además

$$2^{10} < |z| < 2^{25}$$

Sugerencia: Use, sin demostrar, que  $2^x < 2^y < 2^z \Leftrightarrow x < y < z$ .

a) Acomodo  $z$ :

$$\begin{aligned} z &= (4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^a (8 + 8\sqrt{3}i)^b \\ &= (4\sqrt{2}(1 + i))^a \cdot (8(1 + \sqrt{3}))^b \\ &= 8^a 16^b e^{a \cdot \frac{\pi}{4}i} \cdot e^{b \cdot \frac{\pi}{3}i} \\ &\stackrel{!}{=} 2^{3a+4b} \cdot e^{i(\frac{a}{4} + \frac{b}{3})\pi} \end{aligned}$$

Entonces si  $\arg(z) = \arg(-i)$ :

$$\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3}\right)\pi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \boxed{3a + 4b = 18 + 24k}$$

Esté resultado es literalmente la expresión de un número dividido por 24 con su resto:

$$r_{24}(3a + 4b) = 18 \quad \text{con} \quad 0 \leq 18 < 24$$

b) Condición sobre el  $|z|$ :

$$|z| = 2^{3a+4b} \quad \wedge \quad 2^{10} < |z| < 2^{25} \Leftrightarrow 10 < 3a + 4b < 25 \star^1$$

Por otro lado tengo:

$$3a + 4b \equiv 18 \pmod{24} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 3a + 4b = 24k + 18 \star^2.$$

Reemplazo  $\star^2$  en  $\star^1$ :

$$10 < 24k + 18 < 25 \Leftrightarrow -8 < 24k < 7 \Leftrightarrow k = 0.$$

Por lo tanto tengo:


$$3a + 4b = 18$$

Para encontrar los pares resuelvo la diofántica (a ojo en este caso, sino usar euclides):

$$(a, b)_{particular} = (2, 3) \quad \text{y} \quad (a, b)_{homogeneo} = (-4, 3)$$

La solución general final con todos los pares queda:

$$\begin{aligned} (a, b)_{general} &= k \cdot (-4, 3) + (2, 3) \\ &= (-4 + 2k, 3 + 3k) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 