Práctica 6 de álgebra 1

Comunidad algebraica

última compilacion: 01/07/2024

Un poco de teoría

<u>*Raíces de un número complejo:*</u>

- Sean $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z = re^{\theta i}$ y $w = se^{\varphi i}$ con r, $s \in \mathbb{R}_{>0}$ y θ, $\varphi \in \mathbb{R}$.
  Entonces $z = w \iff \begin{cases} r = s \\ \theta = \varphi + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- raíces n-esimas: $w^n = z \to \begin{cases} s^n = r \\ \varphi \cdot n = \theta + 2k\pi \quad \to \text{para algún } k \in \mathbb{Z} \\ n \text{ raíces distintas} \to w_k = se^{\varphi_k i}, \text{ donde } s = \sqrt{r} \text{ y } \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$

- $G_n = \{w \in \mathbb{C} / w^n = 1\} = \left\{e^{\frac{2k\pi}{n} i} \;:\; 0 \leq k \leq n-1\right\}$

- $(G_n, \cdot)$ es un grupo abeliano, o conmutativo.
  - $\forall w, z \in G_n, wz = zw$ y $zm \in G_n$.
  - $1 \in G_n,\ w \cdot 1 = 1 \cdot w = w \qquad \forall w \in G_n$.
  - $w \in G_n \Rightarrow \exists\, w^{-1} \in G_n,\ w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1$
    - $\overline{w} \in G_n,\ w \cdot \overline{w} = |w|^2 = 1 \Rightarrow \overline{w} = w^{-1}$

- *Propiedades:* $w \in G_n$
  - $m \in \mathbb{Z}$ y $n \,|\, m \Rightarrow w^m = 1$.
  - $m \equiv m' \ (n) \Rightarrow w^m = w^{m'} \quad (w^m = w^{r_n(m)})$
  - $n \,|\, m \iff G_n \subseteq G_m$
  - $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
  - Si $(G, \cdot)$ es un grupo y $\#G = n$ decimos que G siempre es cíclico si $\exists\, w \in G / G = \{1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}\}$
    - *Observación:* G_n es un grupo cíclico, ej, $w_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}} \to (w_1)^k = w_k$
      $\to$ las potencias de w_1 generan todo $G_n = \left\{1, w_1, w_1^2, \ldots, w_1^{n-1}\right\}$
  - w es raíz $n-$ésima primitiva de 1 si: $G_n = \{1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}\} = \left\{w^k \;:\; 0 \leq k \leq n-1\right\}$
    Ejemplo: $i, -i$ son primitivas de $G_4 = \{1, i, -1, -i\} = \left\{i^k \;:\; 0 \leq k \leq 3\right\}$, pero 1 y -1 no son raíces primitivas de G_4.

- *Definición:* Sea w una raíz primitiva de orden n (el orden de $w \in G_n$, $\operatorname{ord}(w) = \min\left\{k \in \mathbb{N} / w^k = 1\right\}$)
  - $w^m = 1 \iff n \,|\, m$
  - *Observación:* Si $w \in G_n \Rightarrow \operatorname{ord}(w) \,|\, n$

- La suma de las raíces n-ésimas de 1 da: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} w_1^k = \frac{w_1^n - 1}{w_1 - 1} = 0$ pues $w_1 \neq 1$
- El producto de las raíces n-ésimas de 1 da: $\prod\limits_{k=0}^{n-1} w_1^k = w_1^{0+1+\cdots+n-1} = w_1^{\frac{n(n-1)}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ -1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$
- Sea $w \in G_n$ primitiva. Entonces
  - w^k es primitiva $\iff k \perp n$
  - $w_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i}$ es primitiva $\iff k \perp n$
  - En particular para $n = p$ primo: w_k es primitiva para $1 \leq k < p$ o sea si $w \in G_p$ y $w \neq 1$, entonces w es primitiva
- w es raíz primitiva de G_n y $k \,|\, n \Rightarrow w^k$ es primitiva de $G_{\frac{n}{k}}$

Ejercicios extras:

---

1. Para $w \in G_6$, calcular $S = w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023}$

Si $w = 1$*:*
$S = 5$

Si $w = -1$*:*
$S = -1 + 1 + 5 - 1 - 4 - 1 = -1$

Si $w \neq \pm 1$*:*
$S = w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023} = w^5 + w^4 + 5w^2 + w^3 - 4w^2 + w^1 =$
$w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = -1 + \underbrace{1 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5}_{=0} = -1$

---

2. Sea $w \in G_{14}$. Hallar todos los posibles valores de $w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j}$

Voy a usar que: $\begin{cases} w \in G_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ \text{Si } m \,|\, n \Rightarrow G_m \subseteq G_n \end{cases}$

<u>Si $w = 1$:</u>

$$\underbrace{w^7}_{=1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{w^{2j}}_{=1} = 1 + (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{=134}) = 1 + 134 = 135 \quad \checkmark$$

<u>Si $w = -1$:</u>

$$\underbrace{w^7}_{=-1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{(w^j)^2}_{=1} = -1 + (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{=134}) = -1 + 134 = 133 \quad \checkmark$$

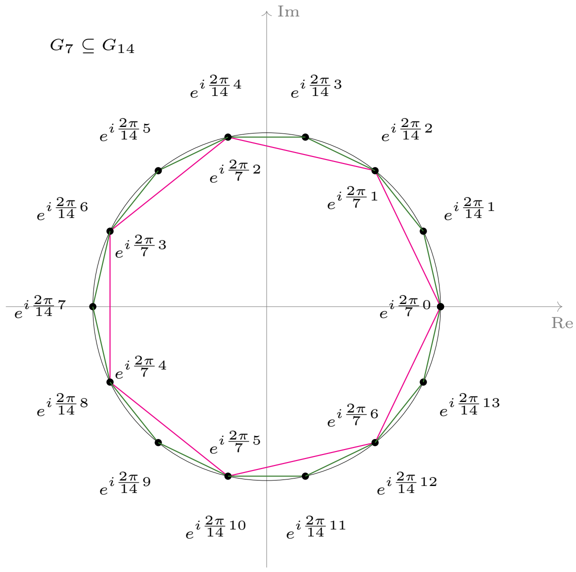
<u>Si $w \neq \pm 1$:</u>

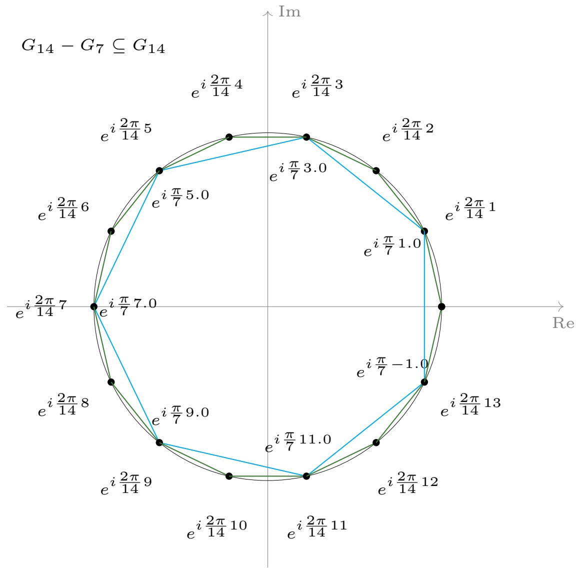
$w \in G_{14} \Rightarrow w = e^{i\frac{2k\pi}{14}}$ con $k \in \mathbb{Z}_{[0,13]} \Rightarrow w^2 = \left(e^{i\frac{2k\pi}{14}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{7}\cdot k} \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^{6} (w^2)^j = 0$

$$w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j} = w^7 + \sum_{j=0}^{140} (w^2)^j - \underbrace{\sum_{j=0}^{6} (w^2)^j}_{=0} = w^7 + \frac{(w^2)^{141} - 1}{w^2 - 1} - 0 = w^7 + \underbrace{\frac{w^2((\overbrace{w^{14}}^{=1})^{20} - 1}{w^2 - 1}}_{=1} = w^7 + 1$$

Si $\begin{cases} w \in G_7 & \Rightarrow w^7 = 1 \\ w \in G_{14} - G_7 & \Rightarrow w^7 = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} w \in G_7 & \rightarrow \ 1 + 1 = 2 \quad \checkmark \\ w \in G_{14} - G_7 & \rightarrow \ -1 + 1 = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$





---

3. Sea $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- $8 \mid 3n + |z^3|$
- $\arg(z^{7n+6}) = \arg(i)$

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ \theta_z = \frac{11}{6}\pi \end{cases} \to z = |z|e^{\theta_z i} = e^{i\frac{11}{6}\pi} \Rightarrow z^3 = e^{i\frac{11}{2}\pi} = -1 \Leftrightarrow |z^3| = 1$$

$$\xrightarrow[\text{condición}]{\text{primera}} 8 \mid 3n+|z^3| = 3n+1 \Leftrightarrow 3n+1 = 8k \Leftrightarrow 3n+1 \equiv 0\ (8) \Leftrightarrow 3n \equiv 7\ (8) \Leftrightarrow 9n \equiv 21\ (8) \Leftrightarrow n \equiv 5\ (8) \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{condición}]{\text{segunda}} \arg(z^{7n+6}) = \arg(i) \Leftrightarrow \left(e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^{7n+6} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{i\frac{77}{6}\pi+11\pi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{77}{6}n\pi + 11\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\xrightarrow[n]{\text{despejo}} \frac{77}{6}n + 11 = \frac{1}{2} + 2k \Leftrightarrow 77n = -63 + 12k \Leftrightarrow 77n \equiv -63\ (12) \Leftrightarrow 5n \equiv -3\ (12) \Leftrightarrow n \equiv 9\ (12) \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{TCR}]{\text{junto info}} \begin{cases} n \equiv 9\ (12) \\ n \equiv 5\ (8) \end{cases} \xrightarrow[\text{coprimos}]{\text{quiero divisores}} \begin{cases} n \equiv 1\ (4) & \checkmark \\ n \equiv 0\ (3) & \\ n \equiv 1\ (4) & \checkmark \quad \checkmark \\ n \equiv 1\ (2) & \checkmark \end{cases} \overset{:)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} n \equiv 0\ (3) \\ n \equiv 1\ (4) \\ n \equiv 1\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 0\ (3) \ \star^1 \\ n \equiv 1\ (8) \ \star^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\star^1]{\text{de}} n = 3k \ \star^3 \quad \checkmark \quad \xrightarrow[\text{en } \star^2]{\text{reemplazo}} 3k \equiv 1\ (8) \Leftrightarrow k \equiv 3\ (8) \Leftrightarrow k = 8j + 3 \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow[k \text{ en } \star^3]{\text{reemplazo}} n = 3(8j+3) = 24j + 9 \Leftrightarrow \boxed{n \equiv 9\ (24)} \quad \checkmark$$

---

4. Sea $w = e^{\frac{\pi}{18}i}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente:

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = 0 \qquad \sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = 0.$$

Expresar la solución como una única ecuación de congruencia.

Como $w = e^{\frac{\pi}{18}i} \neq \pm 1 \begin{cases} w^3 \neq \pm 1 \\ w^4 \neq \pm 1 \end{cases}$, puedo usar Gauss para las sumas.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = \sum_{k=0}^{5n+1} (w^3)^k = \frac{(w^3)^{5n+2}-1}{w^3-1} = 0 \Leftrightarrow (w^3)^{5n+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{15n+6}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 5n+2 = 12k \\ \Leftrightarrow 5n \equiv 10\ (12) \ \bigstar^{1} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = \sum_{k=0}^{4n+6} (w^4)^k = \frac{(w^4)^{4n+7}-1}{w^4-1} = 0 \Leftrightarrow (w^4)^{4n+7} = 1 \Leftrightarrow \frac{16n+28}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 4n+7 = 9k \\ \Leftrightarrow 4n \equiv 2\ (9) \ \bigstar^{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \bigstar^{1} \\ \bigstar^{2} \end{array} \begin{cases} n \equiv 2\ (12) \\ n \equiv 5\ (9) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n \equiv 2\ (3) \\ n \equiv 2\ (4) \\ n \equiv 2\ (3) \end{cases} \xrightarrow[\text{me quedo con } n \equiv 5\ (9)]{\text{Sistema compatible}} \begin{cases} n \equiv 2\ (4) \\ n \equiv 5\ (9) \end{cases} \xrightarrow[\text{hay solución por TCR}]{9\ \perp\ 4} \boxed{n \equiv 14\ (36)} \quad \checkmark$$

Ejercicios de la guía:

---

1. Hacer!

---

2. Hacer!

---

3. Hacer!

---

4. Hacer!

---

5. Hacer!

---

6. Hacer!

---

7. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$

$$(\sqrt{3} - i)^n = 2^n e^{i\frac{11}{12}\pi n} = 2^{n+1} \cdot 2e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$\to \begin{cases} 2^n = 2^n \\ \frac{11}{12}\pi n = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \to 11n = 8 + 8k \xrightarrow{8(k+1)} \boxed{n \equiv 0\ (8)} \end{cases}$$

ii) $(-\sqrt{3} + i)^n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ es un número real negativo.

Un número real negativo tendrá un $\arg(z) = \pi$

$$\underbrace{(-\sqrt{3} + i)^n}_{2^n e^{i\frac{5}{6}\pi n}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}_{e^{\frac{\pi}{3}i}} = 2^n e^{i(\frac{5}{6}n + \frac{1}{3})\pi} \to \theta = (\tfrac{5}{6}n + \tfrac{1}{3})\pi$$

$$\xrightarrow{\theta = \pi + 2k\pi} \cancel{\pi}\frac{5}{6}n + \frac{\cancel{\pi}}{3} = \cancel{\pi} + 2k\cancel{\pi} \xrightarrow[\text{congruencia}]{\text{acomodo}} 5n \equiv 4\ (12) \xrightarrow[\text{por 5}]{\text{multiplico}} \boxed{n \equiv 8\ (12)}$$

iii) $\arg((-1 + i)^{2n}) = \frac{\pi}{2}$ y $\arg((1 - \sqrt{3}i)^{n-1}) = \frac{2}{3}\pi$

---

8. Hacer!

9. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0$

$$3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0 \rightarrow \underbrace{3z^5}_{\in\mathbb{C}} = \underbrace{-2|z|^5 - 32}_{\in\mathbb{R}} \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}(3z^5) = -2|z|^5 - 32 \\ \mathrm{Im}(3z^5) = 0 \end{array} \right\} \quad \checkmark$$

De la ecuación de la parte imaginaria:

$$\left\{ \mathrm{Im}(3z^5) = 3 \cdot \tfrac{z^5 - \bar{z}^5}{2} = 0 \iff z^5 = \bar{z}^5 \iff |z|^5 e^{5\theta i} = |z|^5 e^{-5\theta i} \iff \right. \left\{ \begin{array}{l} 5\theta = -5\theta + 2k\pi \\ \rightarrow \boxed{\theta_k = \dfrac{1}{5}k\pi} \text{ con } k \in [0,4] \end{array} \right.$$

De la ecuación de la parte real:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}(3z^5) = 3 \cdot \frac{z^5 + \bar{z}^5}{2} = 3 \cdot \frac{|z|^5 e^{5\theta i} + |z|^5 e^{-5\theta i}}{2} = 3|z|^5 \cos(5\theta) = -2|z|^5 - 32 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |z|^5(3\cos(5\theta) + 2) = -2^5 \xrightarrow[\text{en } \theta_k]{\text{evaluando}} |z|^5(3\cos(k\pi) + 2) = -2^5 \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{par}]{k} \quad 0 < |z|^5(3+2) \neq -2^5 \quad ☠ \\ \xrightarrow[\text{impar}]{k} \quad |z|^5(-3+2) = -2^5 \Leftrightarrow |z| = 2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\rightarrow \boxed{z_k = 2e^{\theta_k i}}$ con $\theta_k = \frac{1}{5}k\pi$ con $k \in [0,4]$

---

10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales la ecuación $z^n + i\bar{z}^2 = 0$, tenga exactamente 6 soluciones y resolver en ese caso.

$$\xrightarrow[\text{ecuación}]{\text{acomodo la}} z^n = -i\bar{z}^2 \xrightarrow[\text{en notación exponencial}]{r = |z|, \text{ expreso todo}} \left\{ \begin{array}{l} z^n = r^n e^{n\theta i} \\ \bar{z}^2 = r^2 e^{-2\theta i} \\ -i = e^{\frac{3}{2}\pi} \end{array} \right\} \checkmark$$

$$\xrightarrow[\text{notación exponencial}]{\text{reescribo ecuación con}} r^n e^{n\theta i} = r^2 e^{(\frac{3}{2}\pi - 2\theta)i} \iff \left\{ \begin{array}{l} n\theta = \frac{3}{2}\pi - 2\theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ r^n = r^2 \rightarrow r^2(r^{n-2} - 1) = 0 \end{array} \right\}$$

La ecuación de r:

$r = 0$ aporta una solución trivial para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

$r = 1$ es un comodín que me deja usar cualquier n para jugar con la ecuación de θ.

$n = 2$ es un valor que daría una solución para cada $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. <u>No sirve</u> porque necesito solo 6 soluciones.

La ecuación de θ:

$$\xrightarrow[n \text{ libre}]{r=1} (n+2)\theta = (\tfrac{3}{2} + 2k)\pi \xrightarrow[\forall n \in \mathbb{N}]{n+2 \neq 0} \theta = \tfrac{1}{n+2}(\tfrac{3}{2} + 2k)\pi \xrightarrow[\text{5 porciones de } 2k\pi]{n = 3 \text{Cómo justificar esto elegantemente?}} \theta = \tfrac{3+4k}{10}\pi$$

Las 6 soluciones para $n = 3$:

$$z^n + i\bar{z}^2 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} n = 3 \\ z = 0, \text{ cuando } r = 0 \\ \text{o} \\ z_k = e^{\theta_k i} \text{ con } \theta_k = \frac{3+4k}{10}\pi,\ k \in [0,4] \end{array} \right.$$

---

11. *Voy a estar usando las siguientes propiedades en G_n:*

$$\text{Si } w \in G_n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w^n = 1 \Rightarrow w^k = w^{r_n(k)} \\ \overline{w}^k = w^{r_n(-k)} \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n, \text{ lo uso para saber con cuales raíces hay que tener cuidado} \\ \text{Si } w \in G_p \text{ con } p \text{ primo } \Rightarrow w \text{ es primitiva} w^k \text{es primitiva } \iff k \perp n \end{array} \right.$$

i) Calcular $w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

Raíces de G_7 de interés: 7 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.
Si $w = 1$:
$w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = 6$

Si $w \neq 1$:
$w + \underbrace{\overline{w}}_{w^6} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = w + w^6 + w^2 + 2w^3 + w^4 - \underbrace{(w^7)^5}_{=1} w^3(1 - w^2) =$
$= -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6}_{=0} = -1 \quad \checkmark$

ii) Calcular $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

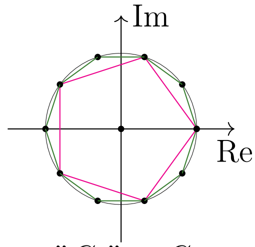
Raíces de G_3 de interés: 3 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.
Si $w = 1$:
$w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8 = 10$

Si $w \neq 1$:
$\underbrace{w^{73}}_{w} + \underbrace{\overline{w} \cdot w^9}_{w^2 \cdot 1} + 8 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2}_{=0} + 8 = 7$

iii) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

Raíces de G_{10} de interés: $2 \,|\, 10 \wedge 5 \,|\, 10$. 10 es par $\Rightarrow w = \pm 1$ y raíces de G_2 y de G_5 se hacen a parte.

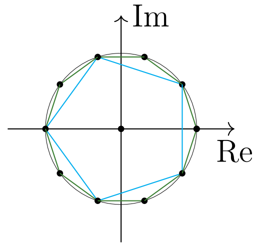
$G_5 \subseteq G_{10}$



- *Si* $w = \pm 1$:
  $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 5 \quad \checkmark$

- *Si* $w \in G_{10}$ y $w \neq \pm 1$:
  $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 1 + w^2 + w^8 + w^4 + w^6 =$
  $= \sum_{k=0}^{4} (w^2)^k = \frac{(w^2)^5 - 1}{w^2 - 1} = \frac{\overbrace{w^{10}}^{=1} - 1}{w^2 - 1} = 0$

"G_5" $\subseteq G_{10}$



iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$

Si $w = 1$:
$w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}} = 4$

Si $w \neq 1$:
$w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}} = w^4 + w^2 + w + w^3 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = -1$

12.

i) Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum\limits_{k=7}^{60} w^{4k}$

Sé que si $w \in G_{36} \Rightarrow \begin{cases} w^{36} = 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{35} w^k = 0 \end{cases}$

Como $w^4 \neq 1$ sé que $w \neq \pm 1$. Si no tendría que considerar casos particulares para la suma.

$$\text{Si } \sum_{k=7}^{60} w^{4k} = \underbrace{\sum_{k=7}^{60} w^{4k} + \sum_{k=0}^{6} w^{4k}}_{\sum\limits_{k=0}^{60} w^{4k}} - \sum_{k=0}^{6} w^{4k} = \sum_{k=0}^{60} w^{4k} - \sum_{k=0}^{6} w^{4k} = \frac{(w^4)^{61}-1}{w^4-1} - \frac{(w^4)^7-1}{w^4-1} = \frac{(w^4)^{61}-(w^4)^7}{w^4-1}$$

$$\xrightarrow[w^36 = 1]{61 = 9 \cdot 6 + 7} \frac{((\overbrace{w^{36}}^{=1})^6 \cdot (w^4)^7 - (w^4)^7}{w^4-1} \to \boxed{\sum_{k=7}^{60} w^{4k} = 0}$$

ii) Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\text{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{60} w^k\right)$.

Sé que si $w \in G_{11} \Rightarrow \begin{cases} w^{11} = 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{10} w^k = 0 \\ 11 \text{ es impar} \Rightarrow -1 \notin G_{11} \end{cases}$

Como $w \neq 1$ no calculo caso particular para la suma. Me piden la parte real $\xrightarrow{\text{uso}} \text{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.

Probé hacer la suma de Gauss como en el anterior, pero no llegué a nada, abro sumatoria y uso que $61 = 5 \cdot 11 + 6$, porque hay 61 sumandos.

$$\sum_{k=0}^{60} w^k = w^0 + \cdots + w^{60} = 5 \cdot \underbrace{\overbrace{(w^0 + w^1 + \cdots + w^9 + w^{10})}^{=0}}_{\text{agrupé usando: } w \in G^{11} \Rightarrow w^k = w^{r_{11}(k)}} + w^{55} + w^{56} + w^{57} + w^{58} + w^{59} + w^{60} =$$

$$= w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 \;\star^1$$

También voy a usar que si $w \in G_{11} \Rightarrow \overline{w}^k = w^{r_{11}(-k)}$

$$\text{Re} \sum_{k=0}^{60} w^k = \frac{\sum\limits_{k=0}^{60} w^k + \sum\limits_{k=0}^{60} \overline{w}^k}{2} \overset{\star^1}{=} \frac{w^0+w^1+w^2+w^3+w^4+w^5+\overline{w}^0+\overline{w}^1+\overline{w}^2+\overline{w}^3+\overline{w}^4+\overline{w}^5}{2} =$$

$$= \frac{w^0}{2} + \frac{\overbrace{w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^{10} + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}^{\sum\limits_{k=0}^{10} w^k}}{2} = \frac{\overbrace{w^0}^{1}}{2} + \frac{\overbrace{\sum\limits_{k=0}^{10} w^k}^{=0}}{2} = \frac{1}{2}$$

---

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ raíz cúbica de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

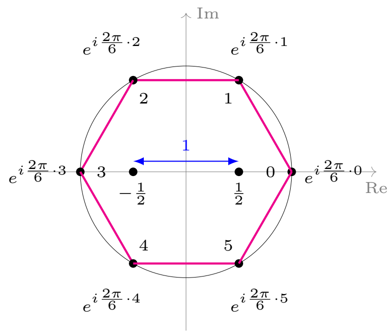
Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$. Concluir que $z_n \in G_6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hay que probar por inducción. Quiero probar:

$$p(n) : z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$\begin{cases} p(1) : z_1 = 1 + e^{\frac{2\pi}{3}i} = \overline{1 - \frac{1}{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ p(2) : z_2 = \overline{1 + z_1^2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = 1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$



Paso inductivo:

$$\begin{cases} p(2k) : z_{2k} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero} \Rightarrow p(2k+2) \text{ ¿Verdadero?} \\ p(2k+1) : z_{2k+1} = e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero} \Rightarrow p(2k+3) \text{ ¿Verdadero?} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{2k+2} = \overline{1 + z_{2k+1}^2} \overset{HI}{\iff} z_{2k+2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{\frac{\pi}{3}i}} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ z_{2k+3} = \overline{1 + z_{2k+2}^2} \overset{HI}{\iff} z_{2k+3} = \overline{1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{-\frac{\pi}{3}i}} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$

Dado que $p(1), p(2), p(2k), p(2k+1), p(2k+2), p(2k+3)$ resultaron ser verdaderas, entonces por el principio de inducción se concluye que $p(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado que la sucesión z_n tiene solo 2 imágenes, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y teniendo en cuenta que $e^{-i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{6}\cdot 5} \in G_6 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

---

14. Se define en $\mathbb{C} - \{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por $z \,\mathcal{R}\, w \iff z\overline{w} \in \mathbb{R}_{>0}$.

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Dibujar en le plano complejo la clase de equivalencia de $z = 1 + i$.

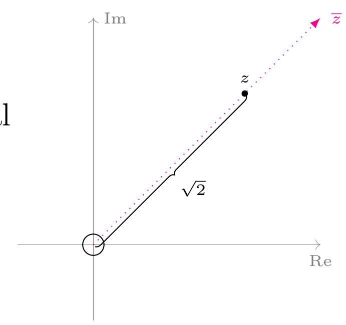
---

i) Dado un $z = re^{i\theta}$, tengo que $z \in \mathbb{R}_{>0} \iff \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 \iff r > 0 \wedge \theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

- *Reflexividad:* $z = re^{i\theta}$, $z \,\mathcal{R}\, z = r^2 e^{2\theta i}$ por lo tanto $z \,\mathcal{R}\, z \iff 2\theta = 2k\pi \iff \theta = k\pi \quad \checkmark$
- *Simetría:* $\begin{cases} z \,\mathcal{R}\, w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \quad \checkmark \\ w \,\mathcal{R}\, z = rse^{(\varphi-\theta)i} \iff \theta = -2k_2\pi + \varphi = 2k_3\pi + \varphi \quad \checkmark \end{cases}$
- *Transitividad:* $\begin{cases} z \,\mathcal{R}\, w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \\ w \,\mathcal{R}\, v = rte^{(\varphi-\alpha)i} \iff \varphi = 2k_2\pi + \alpha \\ \Rightarrow z \,\mathcal{R}\, v \iff \theta = 2k_1\pi + \underbrace{\varphi}_{2k_2\pi+\alpha} = 2\pi(k_1 + k_2) + \alpha = 2k_3\pi + \alpha \quad \checkmark \end{cases}$

  La relación $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

ii) Tengo que el $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. La clase $\overline{z}$ estará formada por los $w \in \mathbb{C}$ tal que: $\boxed{w \,\mathcal{R}\, z \iff \arg(w) = \frac{1}{4}\pi}$



15. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en G_{20}:

$$z\,\mathcal{R}\,w \iff zw^9 \in G_2.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Calcular la cantidad de elementos que hay en cada clase de equivalencia.

---

i) *Reflexividad:*

$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \Rightarrow z\,\mathcal{R}\,z \iff e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \cdot e^{i\frac{9}{10}\pi k_z} = e^{ik_z\pi} = \begin{cases} 1 & k_z \text{ par} \\ -1 & k_z \text{ impar} \end{cases}$ ✓

Simetría:

$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z}$ y $w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \in G_{20}$.

$\mathcal{R}$ es simétrica si: $z\,\mathcal{R}\,w \iff w\,\mathcal{R}\,z$

$$\begin{cases} zw^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_w)} \in G_2 \Leftrightarrow \frac{1}{10}(k_z+9k_w) = k \Leftrightarrow k_z + 9k_w = 10k \Leftrightarrow k_z \equiv -9k_w \ (10) \Leftrightarrow k_z \equiv k_w \ (10) \\ \rightarrow \boxed{z\,\mathcal{R}\,w \iff k_z \equiv k_w \ (10)} \\ wz^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9k_z)} = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9(10k+k_w))} = e^{i\frac{\pi}{10}(90k+10k_w)} = e^{i(9k+k_w)\pi} = e^{ik'\pi} \end{cases}$$

$\boxed{z\,\mathcal{R}\,w \iff w\,\mathcal{R}\,z}$ $\forall k,\ k_w \in \mathbb{Z}$ con $k_z \equiv k_w \ (10)$ ✓

Transitividad:

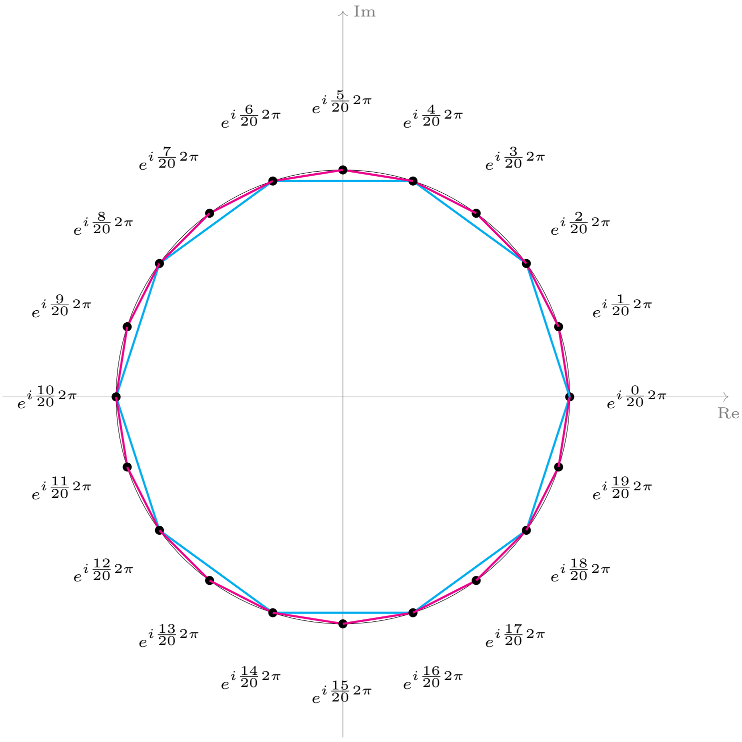
$$\left.\begin{cases} z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \\ w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \\ y = e^{i\frac{1}{10}\pi k_y} \end{cases}\right\} \in G_{20} \rightarrow \mathcal{R} \text{ es transitiva si: } z\,\mathcal{R}\,w \text{ y } w\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow z\,\mathcal{R}\,y$$

$$\left.\begin{cases} z\,\mathcal{R}\,w \iff k_z \equiv k_w \ (10) \ \star^1 \\ w\,\mathcal{R}\,y \iff k_w \equiv k_y \ (10) \ \star^2 \end{cases}\right\}$$

$$\rightarrow zy^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_y)} \overset{\star^1}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k+k_w+9k_y)} \overset{\star^1}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k+10k'+k_y+9k_y)} = e^{i(k+k'+k_y)\pi} = e^{ik''\pi}$$

$$\boxed{\left.\begin{cases} z\,\mathcal{R}\,w \\ w\,\mathcal{R}\,z \end{cases}\right\} \Rightarrow z\,\mathcal{R}\,y}$$

ii) $\#\overline{e^{i\frac{2\pi}{20}k}} = 2$ para algún $k \in \mathbb{Z}/r_{20}(k) < 20$. Dada la condición $k_z \equiv k_w \ (10)$, solo hay 2 números que tienen misma cifra de unidad entre 0 y 20. En el gráfico se ve que si $z\,\mathcal{R}\,w \Rightarrow w = -z$


Im
Re
$e^{i\,\frac{0}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{1}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{2}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{3}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{4}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{5}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{6}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{7}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{8}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{9}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{10}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{11}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{12}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{13}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{14}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{15}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{16}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{17}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{18}{20}\,2\pi}$
$e^{i\,\frac{19}{20}\,2\pi}$