Apunte único: Álgebra I - Práctica 1

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

<u>Disclaimer:</u>
Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:

1. Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
2. Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
3. ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
4. Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
5. Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir *'no me sale'* $\nexists +$. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda, no te van a salir los ejercicios más difíciles: Sentido común.

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confiaza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada*. Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber*. A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas de Teresa que son buenísimos.

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra: Prácticas Pandemia.

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre Just Do IT!

Eh, loco, fatalista, distópico, relajá un toque te vas a quedar (más) pelado... *va a salir todo bien!*

El repo en github para descargar las guías con los últimos updates.

https://github.com/nad-garraz/algebraUno

La Guía 1 se actualizó por última vez: 24/11/24 @ 15:48

Guía 1

https://github.com/nad-garraz/algebraUno/blob/main/1-guia/1-sol.pdf

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram.

https://t.me/+1znt2GV1i8cwMTNh

Notas teóricas:

Básicos sobre conjuntos y coso:

- *Conjunto de Partes* $\mathcal{P}$:

  Sea A un conjunto. El *conjunto de partes* de A, que se nota $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, o sea el conjunto cuyos *elementos* son los subconjuntos de A. Es decir

  $$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\} \text{ o también } B \in \mathcal{P}\, A \iff B \subseteq A.$$

  Por ejemplo: Si $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

- *Las uniones* ($\cup$) *e intersecciones* ($\cap$)*:*

  - $A \cup B = \{x \in U : x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}$
  - $A \cap B = \{x \in U : x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}$

- *Las uniones e intersecciones de conjuntos conmutan:*

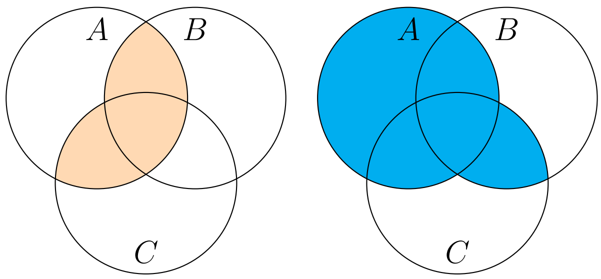
  $$A \cup B = B \cup A$$
  $$A \cap B = B \cap A$$

- *De Morgan Law's:*

  $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \to \text{De Morgan 1}$$
  $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \to \text{De Morgan 2}$$

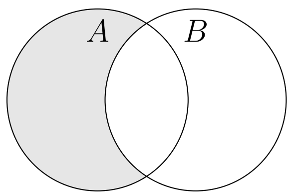
- *Distribución de la intersección en una unión y alverre:*

  $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
  $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



- *Diferencias en sus varios colores, sabores y notaciones:*

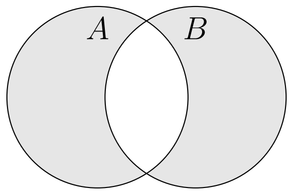
  $$A - B \overset{\text{idem}}{\underset{\text{notación}}{\Longleftrightarrow}} A \setminus B \overset{\text{idem}}{\underset{\text{notación}}{\Longleftrightarrow}} A \cap B^c$$



- *Diferencia simétrica:*

$$A \triangle B = \begin{cases} (A - B) & \cup & (B - A) \\ (A \cup B) & \cap & (A \cap B)^c \\ (A \cup B) & \setminus & (A \cap B) \to \text{mi favorita} \\ (A \cap B^c) & \cup & (B \cap A^c) \end{cases}$$

😐



- *Complemento:*

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} \ / \ x \notin A\}$$

- *Tablas de verdad:*

En las tablas de verdad que un elemento esté en un conjunto, $x \in A$ es equivalente a decir que la proposición A es verdadera. En mi cabeza es más fácil recordar las tablas en conjuntos que en ... lo otro.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A^c$	$x \in A \cap B$	$x \in A \cup B$	$x \in \begin{array}{c} A \subseteq B \\ \hline A^c \cup B \end{array}$	$x \in A \triangle B$	$A - B$
V	V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F	F

Probar por contrarrecíproco: Cuando para probar $p \Rightarrow q$ se prueba en su lugar $\sim q \Rightarrow \sim p$ se dice que es una *demostración por contrarrecíproco.*

Probar por absurdo: Cuando para probar $p \Rightarrow q$ se prueba en su lugar $p \wedge \sim q$ para llegar así a una contradicción, se dice que es una demostración por reducción al absurdo.

- *Producto cartesiano*:

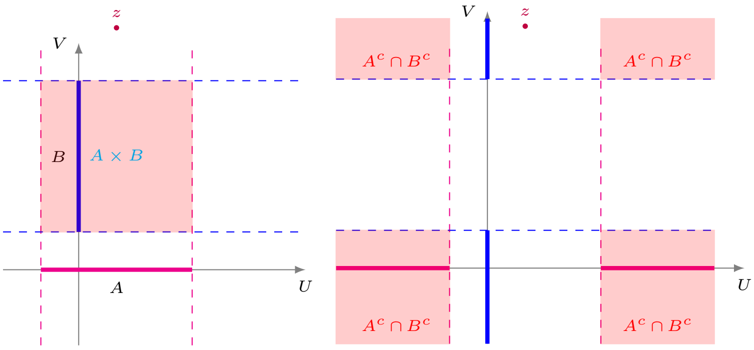
$$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

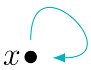
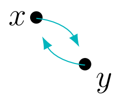
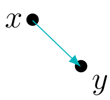
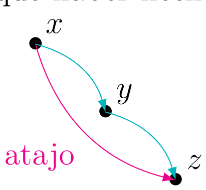
Si tenés n conjuntos:

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2 \cdots, x_n \in A_n\}.$$

Parece interesante nota que un punto $z \notin A \times B$ no implica que esté en $A^c \times B^c$:

$$(A \times B)^c \text{ no es lo mismo que } (A^c \times B^c)$$



- *Relaciones $\mathcal{R}$:*
  - *Definición de relación:*
    Sean A y B conjuntos. Una relación $\mathcal{R}$ de A en B es un suconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$. Es decir $\mathcal{R}$ es una relación de A en B si $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$.
  - *Definición de relación en un conjunto:*
    Sea A un conjunto. Se dice que $\mathcal{R}$ en A cuando $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.
- *Propiedades destacables de una $\mathcal{R}$:*
  - *Reflexiva*: $(x, x) \in \mathcal{R} \;\; \forall x \in A$ o $x \,\mathcal{R}\, x.\;\; \forall x \in A$. Gráficamente, cada elemento tiene que tener un bucle. 
  - *Simétrica*: $(x, y) \in \mathcal{R}$, entonces el par $(y, x) \in \mathcal{R}$, también si $\forall x, y \in A, x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow y \,\mathcal{R}\, x$. Gráficamente tiene que haber un ida y vuelta en cada elemento de la relación. 
  - *Antisimétrica*: $(x, y) \in \mathcal{R}$, con $x \neq y$ entonces el par $(y, x) \notin \mathcal{R}$, también se puede pensar como $\forall x, y \in A, x \,\mathcal{R}\, y$ e $y \,\mathcal{R}\, x \Rightarrow x = y$. Gráficamente **no** tiene que haber ningún ida y vuelta en el gráfico. Solo en una dirección. 
  - *Transitiva*: Para toda terna $x, y, z \in A$ tales que $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, se tiene que $(x, z) \in \mathcal{R}$. Otra manera sería si $\forall x, y, z \in A,\; x \,\mathcal{R}\, y$ e $y \,\mathcal{R}\, z \Rightarrow x \,\mathcal{R}\, z$. Gráficamente tiene que haber flecha directa entre las puntas de cualquier camino que vaya por más de dos nodos.
    

- - *Relación de equivalencia*: La relación debe ser reflexiva, simétrica y transitiva.
  - *Relación de orden*: La relación debe ser reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- *Funciones f :*
  - Sean A y B conjuntos, y sea $\mathcal{R}$ de A en B. Se dice que $\mathcal{R}$ es una *función* cuando todo elemento $x \in A$ está relacionado con algún $y \in B$, y este elemento y es único. Es decir:

$$\forall x \in A,\; \exists!\, y \in B \;/\; x \,\mathcal{R}\, y$$
$$\forall x \in A,\; \exists\; y \in B \;/\; x \,\mathcal{R}\, y,$$

si $y, z \in B$ son tales que $x \mathcal{R} y \quad \text{y} \quad x \mathcal{R} z \Rightarrow y = z$.

- Dada una función $f : A\,(\textit{dominio}) \to B\,(\textit{codominio})$ el conjunto *imagen* es:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B : \exists\, x \in A \;/\; f(x) = y\}$$

- *Propiedades destacables de una f:*
  - *inyectiva:* si $\forall x, x' \in A$ tales que $f(x) = f(x')$ se tiene que $x = x'$
  - *sobreyectiva:* si $\forall y \in B$, $\exists\, x \in A$ tal que $f(x) = y$. f es sobreyectiva si $\mathrm{Im}(f) = B$
  - *biyectiva:* Cuando es *inyectiva* y *sobreyectiva.*
- *Composición de funciones:*
  A, B, C conjuntos y $f : A \to B \to C$, $g : B \to C$ funciones. Entonces la *composición* de f con g, que se nota:

$$g \circ f = g(f(x)), \quad \forall x \in A,$$

  resulta ser una función $g \circ f$ de A en C.
- f es biyectiva cuando $f^{-1} : B \to A$ es la función que satisface que:

$$\forall y \in B : f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

Ejercicios de la guía:

---

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

(i) $1 \in A$ (ii) $\{1\} \subseteq A$ (iii) $\{2, 1\} \subseteq A$ (iv) $\{1, 3\} \in A$ (v) $\{2\} \in A$

$A = \{1, 2, 3\}$

(i) $1 \in A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$ (iii) $\{2, 1\} \subseteq A \xrightarrow{\text{respuesta}} \text{V}$ (v) $\{2\} \in A \xrightarrow{\text{respuesta}} \text{F}$

(ii) $\{1\} \subseteq A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$ (iv) $\{1, 3\} \in A \xrightarrow{\text{respuesta}} \text{F}$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

---

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(i) $3 \in A$ (iv) $\{\{3\}\} \in A$ (vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$ (x) $\varnothing \subseteq A$

(ii) $\{3\} \subseteq A$ (v) $\{1, 2\} \in A$ (viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$ (xi) $A \in A$

(iii) $\{3\} \in A$ (vi) $\{1, 2\} \subseteq A$ (ix) $\varnothing \in A$ (xii) $A \subseteq A$

(i) $3 \in A \to F$ (v) $\{1, 2\} \in A \to V$ (ix) $\varnothing \in A \to F$

(ii) $\{3\} \subseteq A \to F$ (vi) $\{1, 2\} \subseteq A \to V$ (x) $\varnothing \subseteq A \to V$

(iii) $\{3\} \in A \to V$ (vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A \to V$ (xi) $A \in A \to F$

(iv) $\{\{3\}\} \in A \to V$ (viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A \to F$ (xii) $A \subseteq A \to V$

---

3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$

ii) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < |x| < 3\}, B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 < 3\}$

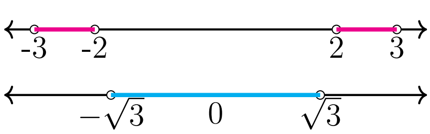
iv) $A = \{\varnothing\}, B = \varnothing$

$$\text{Inclusión} : \begin{cases} \text{Definición} & A \subseteq B \text{ si } \ \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \\ \text{Contrarecíproco} & A \nsubseteq B \text{ si } \exists x, x \in A \Rightarrow x \notin B \end{cases}$$

$$\text{(i)} \begin{cases} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{5, 4, 3, 2, 1\} \end{cases} \xrightarrow{\text{respueta}} \quad A \overset{\checkmark}{\subseteq} B$$

(ii) $\begin{cases} A = \{1,2,3\} \\ B = \{1,2,\{3\},-3\} \end{cases} \xrightarrow{\text{respueta}} A \not\subseteq B \xrightarrow[\text{que}]{\text{dado}} 3 \in A$ pero $3 \notin B$

(iii) $\begin{cases} A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < |x| < 3\} \\ B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 < 3\} \end{cases}$



$\xrightarrow{\text{respueta}} A \not\subseteq B \xrightarrow[\text{que}]{\text{dado}} 2.5 \in A$ y $2.5 \notin B$

(iv) $\begin{cases} A = \{\varnothing\} \\ B = \varnothing \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{respueta}} A \not\subseteq B \xrightarrow[\text{que}]{\text{dado}} B$ no tiene ningún elemento, sin embargo A tiene un elemento: $\varnothing$.

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

Nad Garraz   Mateo Z

---

4. Dados los subconjuntos: $A = \{1,-2,7,3\}$, $B = \{1,\{3\},10\}$ y $C = \{-2,\{1,2,3\},3\}$ del conjunto referencial: $V = \{1,\{3\},-2,7,10,\{1,2,3\},3\}$, hallar

(a) $A \cap (B \triangle C)$ (b) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (c) $A^c \cap B^c \cap C^c$

---

a) $B \triangle C = \{-2,1,3,10,\{1,2,3\},\{3\}\}$

$$A \cap (B \triangle C) = \{-2,1,3\}$$

b) $A \cap B = \{1\}$ y $(A \cap C) = \{-2,3\}$

$$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{-2,1,3\}$$

c) $A^c = \{10,\{1,2,3\},\{3\}\}$, $B^c = \{-2,7,3,\{1,2,3\}\}$ y $C^c = \{1,\{3\},7,10\}$

$$A^c \cap B^c \cap C^c = \varnothing$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

Nad Garraz   Francisco Sureda   Juan Parajó

---

5. Dados los subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos

---

i) $(A \cup B \cup C)^c \overset{(c)}{=} (A \cup B)^c \cap C^c \overset{(c)}{=} A^c \cap B^c \cap C^c$ ✓

ii) $(A \cap B \cap C)^c \overset{(d)}{=} (A \cap B)^c \cup C^c \overset{(d)}{=} A^c \cup B^c \cup C^c$ ✓

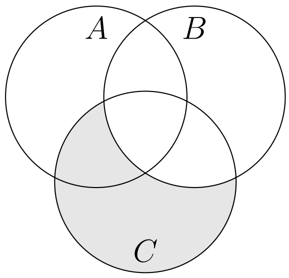
---

6. Sean A,B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

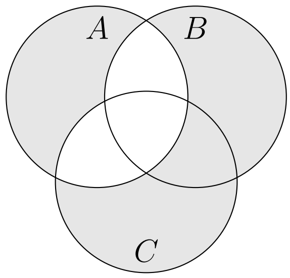
i) $(A \cup B^c) \cap C$

ii) $A \triangle (B \cup C)$

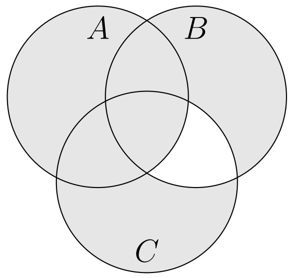
iii) $A \cup (B \triangle C)$



i)



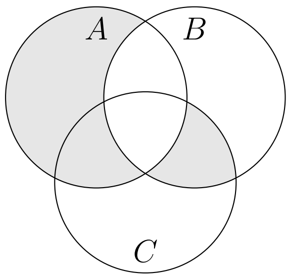
ii)



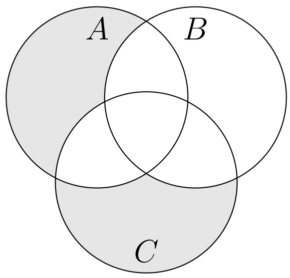
iii)

---

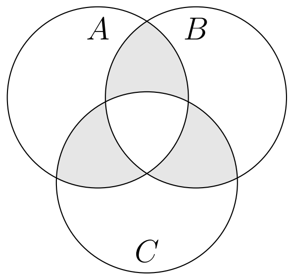
7. Encontrar fórmulas que describen las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.



(a)



(b)



(c)

(a) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B \cap C)$

(b) $(A \triangle C) \cap B^c \overset{!}{=} (A \cup C) \cap (A \cap C)^c \cap B^c$

(c) $((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)) \cap (A \cap B \cap C)^c$

---

8. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos.

i) $A = \{1\}$

ii) $A = \{a, b\}$

iii) $A = \{1, \{1,2\}, 3\}$

Recordando que:

$$\mathcal{P}(A) \to \begin{cases} B \in \mathcal{P}(A) \iff B \subseteq A \\ \mathcal{P}(A) = \{B \ / \ B \subseteq A\} \end{cases}$$

(i) $A = \{1\} \to \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A\}$ ✓

(ii) $A = \{a, b\} \to \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\}$ ✓

(iii) $A = \{1, \{1,2\}, 3\} \to \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{1,2\}\}, \{3\}, \{1, \{1,2\}\}, \{1,3\}, \{\{1,2\}, 3\}, A\}$ ✓

9. Sean A y B conjuntos, Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$

Prueba que la hago por absurdo, mirá la lógica en en apunte.

$\Rightarrow$) Quiero probar que:

$$\underbrace{\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)}_{\text{hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{A \subseteq B}_{\text{tesis}}$$

Pruebo por absurdo. Niego la tesis, la hipótesis sigue valiendo.

Supongo que:

$$A \not\subseteq B \overset{\text{def}}{\underset{!}{\iff}} \exists x \in A \text{ tal que } x \overset{\star^1}{\notin} B.$$

Y lo que intento es llegar a una contradicción, es decir me gustaría que pase algo que contradiga la hipótesis.

Según mi supuesto:

$$x \in A \xRightarrow[\text{partes}]{\text{def de}} \{x\} \in \mathcal{P}(A).$$

Peeeeeero!! por hipótesis:

$$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

Entonces el conjunto $\{x\}$ también tiene que estar en $\mathcal{P}(B)$.

Nota que puede ser útil:

¿Cuál es el absurdo? Terminá lo que falta de esta parte de la demostración sin ver como sigue y después comparás. Ya está casi terminado, pero juntar los cables con esta info te obliga a entender lo que se está intentando hacer.

Fin nota que puede ser útil:

Si el conjunto $\{x\}$ está en $\mathcal{P}(B)$ entonces por la definición del conjunto de partes el elemento x tiene que estar en B.

Esto es un absurdo, porque arranqué diciendo en $\star^1$ que $x \notin B$ y ahora que $x \in B$. Absurdo.

Como mi supuesto resulto falso, debido a la lógica que está en las notas teóricas sobre mostrar por absurdo concluyo que:

$$\boxed{\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B} \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$) Quiero probar que:

$$\underbrace{A \subseteq B}_{\text{hipótesis}} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

Le pongo nombre S a los elementos de $\mathcal{P}(A)$. Todo elemento $S \overset{\star^2}{\in} \mathcal{P}(A)$ es un conjunto que cumple que $S \subseteq A$ por la definición del conjunto $\mathcal{P}(A)$. Si todo elemento S cumple que $S \subseteq A$ por hipótesis también tiene que estar en B.

Nota que puede ser útil:

Terminá lo que falta de esta parte de la demostración sin ver como sigue y después comparás .

Fin nota que puede ser útil:

$$S \in B \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} S \in \mathcal{P}(B).$$

Entonces en ★[2] dije que los S forman al conjunto $\mathcal{P}(A)$, y si todos los S están en $\mathcal{P}(B)$ entonces:

$$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

Queda demostrado que:

$$\boxed{A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)} \quad \checkmark$$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz`

---

10. Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes:

i) $p \Rightarrow q, \qquad \sim q \Rightarrow \sim p, \qquad \sim p \vee q \qquad$ y $\qquad \sim (p \wedge \sim q)$.

Esto nos dice que podemos demostrar una afirmación de la forma $p \Rightarrow q$ probando en su lugar $\sim q \Rightarrow \sim p$ (es decir *demostrando el contrarrecíproco*), o probando $\sim (p \wedge \sim q)$ (esto es una *demostración por reducción al absurdo*).

ii) $\sim (p \Rightarrow q) \qquad$ y $\qquad \sim q$.

---

i) Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

ii)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

---

11. Hallar contraejemplos para mostrar que las siguientes proposiciones son falsas:

---

i) $\forall a \in \mathbb{N}$, $\frac{a-1}{a}$ no es un número entero.

La proposición es falsa, dado que si $a = 1 \Rightarrow \frac{1-1}{1} = \frac{0}{1} = 0 \in \mathbb{Z}$

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con x, y positivos, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

La proposición es falsa, dado que si.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2. \\ y = 2 \end{array} \right\} \to \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \neq \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

La proposición es falsa, dado que si $x = -3$, queda $9 > 4 \Rightarrow -3 > 2$, lo cual es falso.

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Nad Garraz

12.

i) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando debidamente:

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \vee n \leq 8$.

b) $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ n \geq 5 \wedge n \leq 8$.

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N}\ /\ m > n$.

d) $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ \ \forall m \in \mathbb{N}, m > n$.

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 3 \Rightarrow x^2 > 4$.

f) Si n es un natural terminado en 4, entonces n es par.

g) Si z es un número real, entonces $z \in \mathbb{C}$.

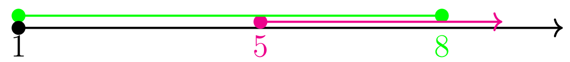
ii) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

iii) Reescribir las proposiciones e) y f) del item i) utilizando las equivalencias del ejercicio 10i)

---

i) (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \vee n \leq 8$.

La proposición es verdadera. El conjunto descrito por $\{n \in \mathbb{N}\ /\ n \leq 8 \vee n \geq 5\} = \mathbb{N}$



¿Se puede justificar con un gráfico?

(b) $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ n \geq 5 \wedge n \leq 8$.

La proposición es verdadera, en este caso es cuestión de encontrar solo un valor que cumpla, $n = 6$

(c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N}\ /\ m > n$.

La proposición es verdadera, si se elige por ejemplo a $m = n + 1$

(d) $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ \ \forall m \in \mathbb{N}, m > n$.

La proposición es falsa, el único $n \in \mathbb{N}$ que no tiene un número menor estricto es el 1. Pero la condición dice que $\forall m \in \mathbb{N}$ se debe cumplir y si m $1 \not< 1$

(e) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 3 \Rightarrow x^2 > 4$.

La proposición es verdadera. Si $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9 \xrightarrow[\text{particular}]{\text{en}} x^2 > 9 > 4 \Rightarrow x^2 > 4$

(f) $n \in \mathbb{N}$, cuyo último dígito es 4. Entonces hay un $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ con su último dígito 0 tal que

$$n = m + 4.$$

Si un número tiene 0 como último dígito, debe ser múltiplo de 10, es decir $m = 10 \cdot m'$ con $m' \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Por lo que se puede escribir a n como:

$$n = 10 \cdot m' + 4 = 2 \cdot 5 \cdot m' + 2 \cdot 2 = 2 \cdot (5m' + 2) = 2 \cdot m'',$$

con $m'' \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

$$n = 2m''.$$

Si un natural termina con 4, es par. La proposición es verdadera.

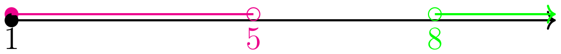
(g) Si z es un número real, entonces $z \in \mathbb{C}$.

Están proponiendo que dado $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z \in \mathbb{C}$. Dado que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = \{a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R} \ / \ a + ib\}$, con $i^2 = -1$ Por lo tanto para $b = 0$, podría generar todo $\mathbb{R}$.

---

ii) (a) $\exists n \in \mathbb{N},\, n < 5 \wedge n > 8$.

$A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n < 5 \wedge n > 8\} = \varnothing \Rightarrow \nexists n$ que cumpla lo pedido.



(b) $\forall n \in \mathbb{N} \ / \ n < 5 \vee n > 8$.

La proposición es falsa, $n = 6$ no cumple estar en ese conjunto.

(c) $\exists n \in \mathbb{N}, \ \forall m \in \mathbb{N} \ / \ m \leq n$.

La proposición es falsa, porque el conjunto $\mathbb{N}$ no tiene un máximo. $n = m + 1$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N} \ / \ \exists m \in \mathbb{N}, m \leq n$.

La proposición es verdadera, el único $m \in \mathbb{N}$ que cumple eso es el $m = 1$.

(e) $\exists x \in \mathbb{R},\, x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 4$.

La proposición es falsa. Dado dos conjunto:

$\left\{ \ A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 3\} B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 \leq 2\} \ \right\} \to$ 

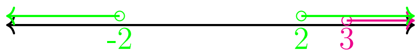
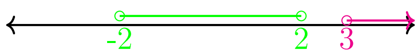
(f) *Si n es un natural que no termina en 4 entonces no es par.*

Un contraejemplo bastaría para probar que esto es falso: El número 12. No termina con el número cuatro y es par, ya que $12 = 2 \cdot 6$.

(g) Si z no es un número real, entonces $z \notin \mathbb{C}$.

La proposición es falsa. Están proponiendo que dado $z \notin \mathbb{R} \Rightarrow z \notin \mathbb{C}$. Si $z = i$, se prueba lo contrario. Dado que $i \notin \mathbb{R}$, pero $i \in \mathbb{C}$

iii)

$p \Rightarrow q$	$\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 4$		$A \overset{?}{\subseteq} B$ ✓
$\sim q \Rightarrow \sim p$	$x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 3$		$A \overset{?}{\subseteq} B$ ✓
$\sim p \vee q$	$x \leq 3 \vee x^2 > 4$		$A \cup B \overset{?}{=} \mathcal{U}$ ✓
$\sim (p \vee \sim q)$	$\sim (x > 3 \wedge x^2 \leq 4)$		$(A \cap B)^c \overset{?}{=} \varnothing^c = \mathcal{U}$ ✓

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Nad Garraz Juan Parajó

---

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial $\mathcal{U}$ y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A\triangle B) - C = (A - C)\triangle(B - C)$.

ii) $(A\cap B)\triangle C = (A\triangle C)\cap(B\triangle C)$

iii) $C \subseteq A \Rightarrow B\cap C \subseteq (A\triangle B)^c$

iv) $A\triangle B = \varnothing \iff A = B$

---

i) $(A\triangle B) - C = (A - C)\triangle(B - C)$. Es verdadera. Pruebo con tabla de verdad.

A	B	C	C^c	$A-C$	$B-C$	$A\triangle B$	$(A\triangle B)-C$	$(A-C)\triangle(B-C)$
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F	F

Hay distribución entre la resta y una diferencias simétrica.

ii) Es falsa, lo demuestro por contraejemplo. Sean $A = C = \{1\}, B = \emptyset$, luego
$(A\cap B)\triangle C = \emptyset\triangle A = A$ pero
$(A\triangle C)\cap(B\triangle C) = (A\triangle A)\cap(B\triangle A) = \emptyset\cap A = \emptyset \neq A$
$\therefore (A\cap B)\triangle C \neq (A\triangle C)\cap(B\triangle C)$

iii) Es verdadera. Supongo que $C \subseteq A$, Q.P.Q $B\cap C \subseteq (A\triangle B)^c$
$(A\triangle B)^c = ((A\cup B)\cap(A\cap B)^c)^c = (A^c\cap B^c)\cup(A\cap B)$
$B\cap C \overset{C\subseteq A}{\subseteq} B\cap A = A\cap B \subseteq (A\cap B)\cup(A^c\cap B^c) = (A\triangle B)^c$

iv) $\Rightarrow) A\triangle B = \emptyset \Rightarrow (A - B)\cup(B - A) = \emptyset \Rightarrow A - B = \emptyset \wedge B - A = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$
$\Leftarrow) A = B \Rightarrow A\triangle B = A\triangle A = \emptyset$

---

14. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Probar que:

i) $A\cap(B\triangle C) = (A\cap B)\triangle(A\cap C)$

ii) $A - (B - C) = (A - B)\cup(A\cap C)$

iii) $A\triangle B \subseteq (A\triangle C)\cup(B\triangle C)$

iv) $(A\cap C) - B = (A - B)\cap C$

v) $A \subseteq B \Rightarrow A\triangle B = B\cap A^c$

vi) $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$

vii) $A\cap C = \varnothing \Rightarrow A\cap(B\triangle C) = A\cap B$

---

i) Voy a usar tablas con los resultados que hay en las tablas de verdad acá.

A	B	C	$B\triangle C$	$A\cap B$	$A\cap C$	$A\cap(B\triangle C)$	$(A\cap B)\triangle(A\cap C)$
V	V	V	F	V	V	F	F
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

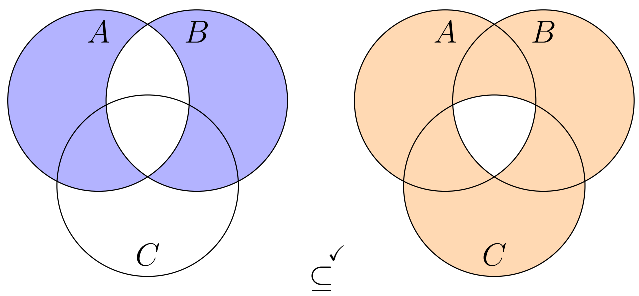
ii) Este sale sin tablas: Tratá de hacerlo con estas propiedades, (notas teóricas acá):

1) Notación de diferencia
2) Distributivas
3) DeMorgan

$$(A-B)\cup(A\cap C)\overset{!}{=}[(A\cap B^c)\cup A]\cap[(A\cap B^c)\cup C]\overset{!!}{=}A\cap(A\cup C)\cap(B^c\cup C)\overset{!!!}{=}A\cap(B\cap C^c)^c=A\cap(B-C)^c\overset{!}{=}A-(B-C) \quad \checkmark$$

iii) Opción 1, con diagramas de Venn:

$$A\triangle B\subseteq(A\triangle C)\cup(B\triangle C):$$



Opción 2, para probar que un conjunto es subconjunto de otro me alcanza con probar que para cualquier elemento de $\mathcal{U}$, si pertenece al primero entonces pertenece al segundo.
Luego, Q.P.Q. $x\in A\triangle B\Rightarrow x\in(A\triangle C)\cup(B\triangle C),\ \ \forall x\in\mathcal{U}$

$$x\in A\triangle B\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\underbrace{(x\in A\wedge x\notin B)}_{I}\vee\underbrace{(x\notin A\wedge x\in B)}_{II}$$

$$x\in(A\triangle C)\cup(B\triangle C)\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}((x\in A\wedge x\notin C)\vee(x\notin A\wedge x\in C))\vee((x\in B\wedge x\notin C)\vee(x\notin B\wedge x\in C))$$
$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin C)\vee(x\notin A\wedge x\in C)\vee(x\in B\wedge x\notin C)\vee(x\notin B\wedge x\in C)$$

Se que $x\in A\triangle B\Rightarrow I\vee II$. Separo en casos,

$$\begin{cases}\text{Si } I \text{ es Verdadero, } I\overset{*}{\Rightarrow}(x\in A\wedge x\notin C)\vee(x\notin B\wedge x\in C)\Rightarrow x\in(A\triangle C)\cup(B\triangle C)\\ \text{Si } II \text{ es Verdadero, } II\overset{*}{\Rightarrow}(x\notin A\wedge x\in C)\vee(x\in B\wedge x\notin C)\Rightarrow x\in(A\triangle C)\cup(B\triangle C)\\ \text{Si } I\wedge II \text{ es Verdadero, } I\wedge II\Rightarrow I\overset{\text{idem}}{\Rightarrow}x\in(A\triangle C)\cup(B\triangle C)\end{cases}$$

$\therefore x\in A\triangle B\Rightarrow x\in(A\triangle C)\cup(B\triangle C)$, como quería probar.
* Observo que (Verdadero $\wedge\, p$) $\vee$ (Verdadero $\wedge \sim p$) es una tautología.

iv) $(A\cap C)-B=(A\cap C)\cap B^c=(A\cap B^c)\cap C=(A-B)\cap C$

v) $\Rightarrow$) Sup que $A \subseteq B$

$A \triangle B = \overbrace{A - B}^{=\emptyset \text{ pues } A\subseteq B} \cup B - A = B - A = B \cap A^c$

$\Leftarrow$)$A \triangle B = B \cap A^c \Leftrightarrow A \triangle B = B - A \Leftrightarrow A - B \cup B - A = B - A$

$\Leftrightarrow A - B \subseteq B - A$, pero $A - B$ y $B - A$ son disjuntos $\Rightarrow A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$

vi) $\Rightarrow$) Sup que $A \subseteq B$. Si $x \in A \Rightarrow x \in B$ y por contrarecíproco, si $x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

$\Leftarrow$) Es análogo.

vii) Mirando el item i) sale solo. Dado que $X \triangle \varnothing \overset{!}{=} X$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

Nad Garraz · Mateo Z

---

15. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

- $A \times A = \begin{cases} \{a \in A, b \in A \ / \ (a, b) \in A \times A\} \to \text{Comprensión} \\ \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\} \to \text{Extensión} \end{cases}$
- $A \times B = \cdots$
- $(A \cap B) \times (A \cup B) =$

$$\begin{cases} \{1,3\} \times \{1,2,3,5,7\} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \times & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 1 & (1,1) & \cdots & \cdots & \cdots & (1,7) \\ \hline 3 & (3,1) & \cdots & \cdots & \cdots & (3,7) \end{array} \\ (A \cap B) \times (A \cup B) = \{s \in (A \cap B), t \in (A \cup B) \ / \ (s,t) \in (A \cap B) \times (A \cup B)\} \end{cases}$$

---

16. Sean A, B y C conjuntos. Probar que:

i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

iv) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

---

i) Para demostrar igualdad de conjuntos habría que probar la doble inclusión, es decir:

$$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C)$$
$$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C$$

O bien si podemos conectar los pasos con " $\Longleftrightarrow$ ". En este caso se usa el de los " $\Longleftrightarrow$ " y mucho de las definiciones que podés ver acá en las notas teóricas:

Sea el par (x, y)

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C) \underset{\text{Cartesiano}}{\overset{\text{def prod.}}{\Longleftrightarrow}} x \in (A \cup B) \quad \text{y} \quad y \in C \underset{\cup}{\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}} (x \in A \quad \text{o} \quad x \in B) \quad \text{y} \quad x \in C$$

Si está en A o en B y seguro está en C, entonces x tiene que estar en $A \cap C$ o bien en $B \cap C$, que no es otra cosa que distribuir el "y" con el "o":

$$\overset{\text{distribución}}{\Longleftrightarrow} (x \in A \quad \text{y} \quad x \in C) \quad \text{o} \quad (x \in B \quad \text{y} \quad x \in C) \overset{!}{\Leftrightarrow} (x, y) \in (A \times C) \quad \text{o} \quad (x, y) \in (B \times C)$$

Ese paso del ! es la definición de producto cartesiano como al principio y se concluye que:

$$(A \cup B) \times C \overset{\checkmark}{=} (A \times C) \cup (B \times C)$$

ii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iv) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

`Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`

`Nad Garraz` `Marcos Zea`

Relaciones Definición de Relación, $\mathcal{R}$:

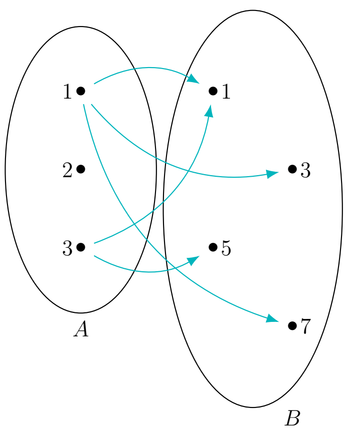
> Sean A y B conjuntos. Una *relación* $\mathcal{R}$ *de* A *en* B es un subconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$. Es decir $\mathcal{R}$ de A en B si $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$.

---

17. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Verificar las siguientes relaciones de A y B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

---

i) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (3, 1), (3, 5)\}$



ii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 2), (3, 5)\} \to 3 \mathcal{R} 2 \notin \mathcal{P}(A \times B)$

iii) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 7), (3, 7)\}$ Hacer!

iv) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 7)\}$ Hacer!

---

18. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Describir por extensión cada una de las siguientes relaciones de A en B:

i) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$

ii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a > b$

iii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par

iv) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$

---

i) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b \to (a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$

ii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a > b \to (a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \{(2, 1), (3, 1)\}$

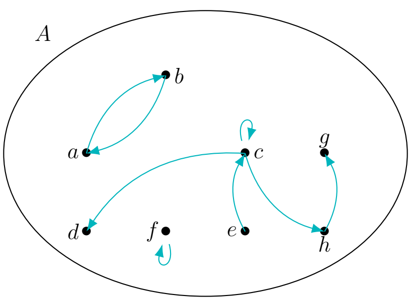
iii) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b \to (a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7)\}$

iv) $(a, b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6 \to (a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \{(1, 7), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7)\}$

---

19. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es *reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.*

---

i) 

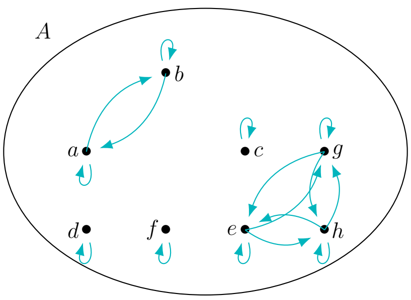
- No es reflexiva, porque no hay bucles en todos los vértices, en particular $a \not\mathcal{R}\, a$.
- No es simétrica, porque $d \not\mathcal{R}\, c$.
- No es antisimétrica, porque $a \mathcal{R} b$ y $b \mathcal{R} a$ con $a \neq b$.
- No es transitiva, porque $c \mathcal{R} h$ y $h \mathcal{R} g$, pero $c \not\mathcal{R}\, h$.

ii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

iii) ... hay que hacerlo!

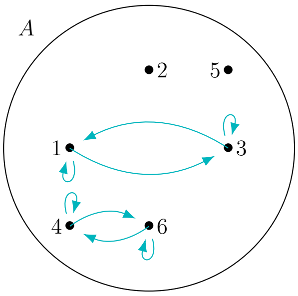
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

iv) 

- Reflexiva, porque hay bucles en todos los elementos de A.
- Es simétrica, porque hay ida y vuelta en todos los pares de vértices.
- No es antisimétrica, porque $a \mathcal{R} b$ y $b \mathcal{R} a$ con $a \neq b$.
- Es transitiva, porque hay *atajos* en todas las relaciones de ternas.

---

20. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación, $\mathcal{R} = (1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6)$



- No es reflexiva porque no hay bucles ni en 2 ni en 5.
- Es simétrica, porque hay ida y vuelta en todos los pares de vértices.
- No es antisimétrica, porque $1 \mathcal{R} 3$ y $3 \mathcal{R} 1$ con $1 \neq 3$.
- Es transitiva.
  Chequear. Caso particula donde no hay ternas de x, y, z distintos.
  Sí, el que 2 esté ahí solo ni cumple la hipótesis de transitividad.

---

21. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

22. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(2,5),(1,5)\}$

ii) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \big\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, a + b \text{ es par}\big\}$.

iii) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \big\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, |a| \leq |b|\big\}$.

iv) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}$ definida por $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow b$ es múltiplo de a.

v) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cap \{1,2,3\} \subseteq Y \cap \{1,2,3\}$.

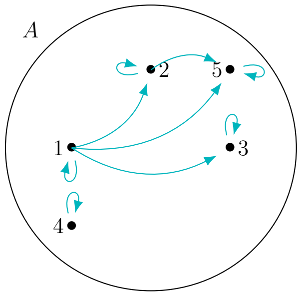
vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N} \;/\; n \leq 30\})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \mathcal{R} Y \iff 2 \notin X \cap Y^c$

vii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $(a,b) \mathcal{R} (c,d) \iff bc$ es múltiplo de ad.

Voy a estar usando cosas del resumen teórico de relaciones.

i) Haciendo un gráfico en estos ejercicios de pocos elementos sale fácil.

Reflexiva:
Es reflexiva, porque hay bucles en todos los elementos de A.
Simétrica:
No es simétrica, dado que existe $(1,5)$, pero no $(5,1)$
Anti-Simétrica:
Es antisimétrica. No hay ningún par que tenga la vuelta, excepto los casos $x \mathcal{R} x$.
Transitiva:
Es transitiva. La terna 1, 2, 5 es transitiva. La relación es R, AS y T, por lo tanto es una *relación de orden*.



ii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iv) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

v) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram $\to$, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX$\to$.

vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N} \ / \ n \leq 30\})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \ \mathcal{R} \ Y \iff 2 \notin X \cap Y^c$

$2 \in X$	$2 \in Y$	$2 \in Y^c$	$2 \in X^c$	$2 \notin X \cap Y^c$	$2 \notin Y \cap X^c$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V

.

Reflexiva:

La relación es reflexiva ya que para que un elemento X esté relacionado con sí mismo debe ocurrir que $X \ \mathcal{R} \ X \iff 2 \notin X \cap X^c$, es decir $2 \notin \varnothing$, lo cual es siempre cierto.

Simétrica:

La relación no es simétrica. Se puede ver con la segunda y tercera fila de la tabla con un contraejemplo. $X = \{1\}$ y $Y = \{2\}$, $X, Y \subseteq A$, $X \ \mathcal{R} \ Y$, pero $Y \not\mathcal{R} \ X$,

Anti-Simétrica:

La relación no es antisimétrica. Se puede ver con la primera o cuarta fila tabla con un contraejempl con un contraejemplo. Si $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{2, 3\} \Rightarrow X \ \mathcal{R} \ Y$ y además $Y \ \mathcal{R} \ X$ con $X \neq Y$.

Transitiva:

Es transitiva. Si bien no es lo más fácil de explicar, se puede ver en la tabla que para tener 2 relaciones en una terna X, Y, Z no se puede llegar nunca al caso de la segunda fila de la tabla, donde se lograría que $X \not\mathcal{R} \ Z$

vii) *Reflexiva:*

$(a, b) \ \mathcal{R} \ (a, b) \iff ba = k \cdot ab$ con $k = 1$, se concluye que sí es reflexiva.

Simétrica:

$$\begin{cases} (a, b) \ \mathcal{R} \ (c, d) \iff bc \overset{\star^1}{=} k \cdot ad \\ (c, d) \ \mathcal{R} \ (a, b) \iff ad = h \cdot bc \overset{\star^1}{=} h \cdot k \cdot ad = k' ad, \end{cases}$$

con $k' = 1$ se cumple la igualdad. La relación es simétrica. *Anti-Simétrica:*

Si tomo $(a, b) = (4, 2)$ y $(c, d) = (16, 4)$, tengo que $(a, b) \ \mathcal{R} \ (c, d)$ con $(a, b) \neq (c, d)$. Por lo tanto la relación no es antisimétrica.

Transitiva:

$$\begin{cases} (a, b) \ \mathcal{R} \ (c, d) \iff bc \overset{\star^1}{=} k \cdot ad \\ (c, d) \ \mathcal{R} \ (e, f) \iff de \overset{\star^1}{=} h \cdot cf \\ \text{quiero ver que } (a, b) \ \mathcal{R} \ (e, f) \iff be = k' \cdot af \\ \xrightarrow[\text{M.A.M.}]{\text{multiplico}} \begin{Bmatrix} bc \overset{\star^1}{=} k \cdot ad \\ de \overset{\star^1}{=} h \cdot cf \end{Bmatrix} \xrightarrow[\text{acomodo}]{\text{y}} be \cdot \cancel{cd} = k \cdot h \cdot af \cdot \cancel{cd} \to be \overset{\checkmark}{=} k' \cdot af. \end{cases}$$

Se concluye que la relación es transitiva. Con esos resultados se puede decir que $\mathcal{R}$ en A es de *equivalencia*.

---

23. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

i) simétricas y antisimétricas
elementos en bucles sueltos?

ii) de equivalencia y de orden
Idem anterior

---

i) simétricas y antisimétricas
elementos en bucles sueltos?

ii) de equivalencia y de orden
Idem anterior

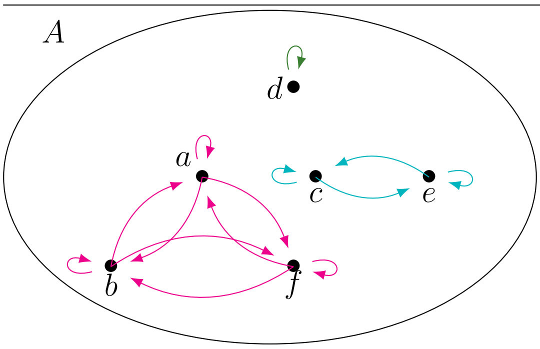
¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica? 22 (vi)?

---

24. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A:

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(a,f),(f,a),(b,f),(f,b),(c,e),(e,c)\}$$

Hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathcal{R}$



$$\to \begin{cases} \overline{a} = \{a,b,f\} = \overline{b} = \overline{f} \\ \overline{c} = \{c,e\} = \overline{e} \\ \overline{d} = \{d\} \end{cases}$$

La partición asociada a $\mathcal{R}$: $\{\{d\},\{c,e\},\{a,b,f\}\} = \{\overline{d},\overline{b},\overline{a}\}$.

---

25. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1,3\},\{2,6,7\},\{4,8,9,10\},\{5\}\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

26. Sean $P = \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\})$ el conjunto de partes de $\{1,\dots,10\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en P definida por:

$$A \,\mathcal{R}\, B \iff (A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \varnothing$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y decidir si es antisimétrica (*Sugerencia:* usar adecuadamente el ejercicio **14iii)**)).

ii) Hallar la clase de equivalencia de $A = \{1,2,3\}$.

---

i) Para probar que es una relación de equivalencias hay que probar que sea *reflexiva, simétrica y transitiva*. La sugerencia que nos dan es:

$$A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$$

Reflexiva: ¿$A \mathcal{R} A$?

$$A \mathcal{R} A \iff (A \triangle A) = \varnothing \cap \{1,2,3\} = \varnothing \quad \checkmark$$

Por lo tanto la realción $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Simétrica: ¿$A \mathcal{R} B \Rightarrow B \mathcal{R} A$?

$$A \mathcal{R} B \iff \underbrace{(A \triangle B)}_{=B \triangle A} \cap \{1,2,3\} = \varnothing$$

Como la diferencia simétrica es conmutativa, $A \triangle B = B \triangle A$ se tiene que la relación $\mathcal{R}$ es simétrica también.

Transitiva: ¿$A \mathcal{R} B \quad y \quad B \mathcal{R} C \Rightarrow A \mathcal{R} C$?

$$\begin{cases} A \mathcal{R} B \iff (A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \varnothing \quad \checkmark \\ B \mathcal{R} C \iff (B \triangle C) \cap \{1,2,3\} = \varnothing \quad \checkmark \end{cases}$$

Acá uso la sugerencia.

Si el conjunto $\{1,2,3\}$ no está ni en $A \triangle B$ ni en $B \triangle C$, en particular tampoco está en $(A \triangle B) \cup (B \triangle C)$.

Sabemos que $(A \triangle C) \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$, es decir que $(A \triangle C)$ es un subconjunto de un conjunto que no tiene al conjunto $\{1,2,3\}$. Se concluye que

$$(A \triangle C) \cap \{1,2,3\} = \varnothing\,.$$

La relación $\mathcal{R}$ es transitiva.

Como la relación es *reflexiva, simétrica y transitiva* es de equivalencia $\checkmark$.

Antisimétrica: $\forall A, B \in P si A \mathcal{R} B y B \mathcal{R} A \Rightarrow A = B$

Se podría encontrar un contraejemplo: Ya dijimos que $A \triangle B = B \triangle A$. No debería ser muy complicado encontrar un A y un B distintos que cumplan

$$A \mathcal{R} B \quad \text{y} \quad B \mathcal{R} A$$

ii) La clase de equivalencia de $A = \{1,2,3\}$ va a estar formada por A y por todos los conjuntos $X \in P$ que cumplan

$$(\{1,2,3\} \triangle X) \cap \{1,2,3\} = \varnothing$$

Resulta que cerca de la sugerencia dada del **14.**iii), está el ejercicio **14.**i), donde se muestra que la intersección ($\cap$) es distributiva con la diferencia simétrica ($\triangle$). Con eso puedo reescribir la condición de más arriba como:

$$(\{1,2,3\} \triangle X) \cap \{1,2,3\} \overset{!}{=} \{1,2,3\} \triangle (X \cap \{1,2,3\}).$$

Si te perdiste en el !, *escribilo y miralo fuerte*. La condición para que $X \mathcal{R} \{1,2,3\}$ queda:

$$\{1,2,3\} \triangle (X \cap \{1,2,3\}) = \varnothing,$$

que, en mi opinión, está más fácil de leer. Para que una diferencia simétrica entre 2 conjuntos resulte en vacío, necesito que los conjuntos sean iguales. Por lo tanto quiero los conjuntos X tales que:

$$X \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3\}\,.$$

La clase $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \left\{X \in P / \{1,2,3\} \subseteq X\right\} \text{ o también } \overline{A} = \{\{1,2,3\} \cup X \text{ con } X \in \mathcal{P}\{4,5,6,7,8,9,10\}\} \quad \checkmark$$

`Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`
`Nad Garraz` `Gus Viana`

27. Sean $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \leq 92\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en A definida por $x \ \mathcal{R} \ y \iff x^2 - y^2 = 93x - 93y$

a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es antisimétrica?

b) Hallar la clase de equivalencia de cada $x \in A$. Deducir cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación $\mathcal{R}$.

---

a) Primero acomodo la condición de la relación:

$$x^2 - y^2 = 93x - 93y \overset{!!!}{\iff} \begin{cases} x \overset{\bigstar^1}{=} y \\ \text{o bien} \\ x + y \overset{\bigstar^2}{=} 93 \end{cases}$$

Hacer este ejercicio sin avivarse de lo que pasa en !!! es horrible.

Para ser relación de equivalencia es necesario que sea *reflexiva, simétrica* y *transitiva*:

Reflexiva:

$$x \ \mathcal{R} \ x \iff x \overset{\bigstar^1}{=} x \quad \checkmark$$

Simétrica:

$$\begin{cases} x \ \mathcal{R} \ y \iff x + y \overset{\bigstar^2}{=} 93 \\ y \ \mathcal{R} \ x \iff y + x \overset{\bigstar^2}{=} 93 \end{cases} \quad \checkmark$$

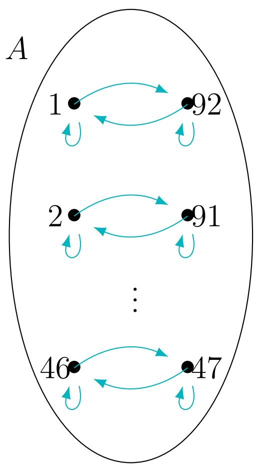
Transitiva:

$$\begin{cases} x \ \mathcal{R} \ y \iff x \overset{\bigstar^2}{=} 93 - y \\ y \ \mathcal{R} \ z \iff y \overset{\bigstar^2}{=} 93 - z \end{cases} \xRightarrow[\text{M.A.M}]{\text{resto}} x - y = -y + z \to x \overset{\bigstar^1}{=} z \iff x \ \mathcal{R} \ z \quad \checkmark$$

Antisimétrica:

La $\mathcal{R}$ no es antisimétrica, como contraejemplo se ve que $1 \ \mathcal{R} \ 92$ y $92 \ \mathcal{R} \ 1$ con $1 \neq 92$.

b) A priori no sé como encontrar las clases de equivalencia, pero solo buscando la relación del 1 con algún número (excepto el mismo) veo que únicamente se puede relacionar con el 92 por la condición $\bigstar^2$, dado que $1 + 92 \overset{\bigstar^2}{=} 93$. De ahí se pueden inferir que todas las clases van a ser conjuntos *chiquitos*, con los números que sumen 93.



Las clases de equivalencia :

$$\begin{cases} \overline{1} = \overline{92} = \{1, 92\} \\ \overline{2} = \overline{91} = \{2, 91\} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \overline{46} = \overline{47} = \{46, 47\} \end{cases}$$

Hay entonces 46 clases. $A = \{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{45}, \overline{46}\}$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Nad Garraz

28.

i) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Consideremos en $\mathcal{P}(A)$ la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): Dos subconjuntos de A están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante par acada clase.

ii) En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, consideremos nuevamente la relación de equivalencia dada por el cardinal: Dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante para cada clase.

---

i) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \cdots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\}$, el conjunto $\mathcal{P}(A)$ tiene un total de $2^{10} = 1024$ elementos. La relación determina 11 *clases de equivalencia* distintas.

$$\begin{cases} \text{Conjuntos con 0 elementos:} & \overline{0} & \varnothing \\ \text{Conjuntos con 1 elemento:} & \overline{1} & \{3\} \\ \text{Conjuntos con 2 elementos:} & \overline{2} & \{5, 2\} \\ \text{Conjuntos con 3 elementos:} & \overline{3} & \{1, 6, 3\} \\ \text{Conjuntos con 4 elementos:} & \overline{4} & \{1, 8, 10, 4\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Conjuntos con 10 elementos:} & \overline{10} & \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = A \end{cases}$$

ii) Es parecido al inciso anterior, donde ahora $A = \{1, 2, 3, \cdots, N-1, N\}$, donde $\mathcal{P}(\mathbb{N}_N)$ tiene 2^N elementos.

La relación determina $N + 1$ *clases de equivalencia* distintas.

$$\begin{cases} \text{Conjuntos con 0 elementos:} & \overline{0} & \varnothing \\ \text{Conjuntos con 1 elemento:} & \overline{1} & \{3\} \\ \text{Conjuntos con 2 elementos:} & \overline{2} & \{5, 2\} \\ \text{Conjuntos con 3 elementos:} & \overline{3} & \{1, 6, 3\} \\ \text{Conjuntos con 4 elementos:} & \overline{4} & \{1, 8, 10, 4\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Conjuntos con 10 elementos:} & \overline{N} & \{1, 2, 3, 4, \cdots, N-1, N\}\, \mathbb{N}_N \end{cases}$$

Funciones

---

29. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

---

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$

No es función, dado que $3 \mathrel{\mathcal{R}} a$, $3 \mathrel{\mathcal{R}} d$ y $a \neq d$

ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$

No es función, dado que todo elemnto de A tiene que estar relacionado a algún elemento de B, $5 \not\mathrel{\mathcal{R}} y$ para ninún $y \in B$

iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b), (5, c)\}$

Es función.

iv) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \ / \ a = 2b - 3\}$

Es función.

v) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \ / \ a = 2b - 3\}$

No es función, $\sqrt{2} \not\mathcal{R}\ b$ para ningún $b \in \mathbb{N}$

vi) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ / \ a + b$ es divisible por $5\}$

No es función, porque $0 \ \mathcal{R}\ 5$ y $0 \ \mathcal{R}\ 10$ y necesito que $\forall x \in \mathbb{Z}, \ \exists!\, y \in \mathbb{Z}$

---

30. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para la que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

---

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$

No es *inyectiva*, $f(-1) = f(1)$.

No es *sobreyectiva*, $\mathrm{Im}(f) = [-5, +\infty)$.

ii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iv) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Es *inyectiva* y *sobreyectiva*. $\forall m, m' \in \mathbb{N}, \begin{cases} f(2m) = \frac{2m}{2} = m \\ f(2m' - 1) = 2m' - 1 + 1 = 2m' \end{cases} \to$ Si bien $f(8) = f(3)$ la función es *sobreyectiva* porque genera todo $\mathbb{N}$ tan solo con la parte par de la función.

$f^{-1}(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ es par} \\ n - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Qué onda?

---

31. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

32. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

33. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

34. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

35. Sea $\mathcal{F} = \{f : \{1, \dots, 10\} \to \{1, \dots .10\} \,/\, f$ es una función **biyectiva**$\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{F}$ definida por

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff \exists\, n \in \{1, \dots, 10\} \,/\, f(n) = 1 \quad \mathbf{y} \quad g(n) = 1.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es antisimétrica?

ii) Sea $Id : \{1, \dots, 10\} \to \{1, \dots, 10\}$ la función identidad, o sea, $Id(n) = n, \ \forall n \in \{1, \dots, 10\}$. Dar tres elementos **distintos** de la clase de equivalencia de Id.

Importante: Al exhibir una función es indispensable definirla en **todos** lso elementos de su dominio.

---

i) Las funciones biyectivas agarran todos los elementos del conjunto de partida y lo mandan esos elementos a un elemento del conjudo de salida uno a uno. Son inyectivas y sobreyectivas.

Reflexiva:

Quiero ver que $f \,\mathcal{R}\, f$. Como f es biyectiva y $n \in \underbrace{\{1, \dots, 10\}}_{\subseteq \mathrm{Dom}(f)}$, por lo que para algún n tiene que cumplir $f(n) = 1$. $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Simétrica:

Quiero ver que si $f \,\mathcal{R}\, g \Rightarrow g \,\mathcal{R}\, f$. Es trivial en este caso, porque la conjunción, el "**y**", de la relación es conmutativo, por lo tanto:

$$f \,\mathcal{R}\, g \Rightarrow g \,\mathcal{R}\, f$$

$\mathcal{R}$ es simétrica.

Transitiva:

Quiero ver que si $f \,\mathcal{R}\, g \ \text{ y } \ g \,\mathcal{R}\, h \Rightarrow f \,\mathcal{R}\, h$. Es similar al caso anterior. Por hipótesis, las relaciones $f \,\mathcal{R}\, g$ y $g \,\mathcal{R}\, h$ dicen que existen $n_1, n_2, n_3 \in \{1, \dots, 10\}$ tales que $f(n_1) = g(n_2) = h(n_3) = 1$. Así que $f \,\mathcal{R}\, h$ $\mathcal{R}$ es transitiva.

Como la relación es *reflexiva*, *simétrica*, *transitiva* es una relación de equivalencia.

Antisimétrica:

Quiero ver que si $f \,\mathcal{R}\, g$ con $f \neq g$ entonces $g \not\mathcal{R} f$. Acá es donde donde el **Importante** del enunciado cobra relevancia, porque si vamos a *mostrar una función de contraejemplo* , tiene que estar definida de forma correcta, en este caso tenemos que mandar todos los elementos de $\{1, \dots, 10\}$ a todos los valores de $\{1, \dots, 10\}$ uno a uno.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
f(1) & = & g(1) & = & 1 & \qquad & f(6) & = & g(6) & = & 6 \\
f(2) & = & g(2) & = & 2 & & f(7) & = & g(7) & = & 7 \\
f(3) & = & g(3) & = & 3 & & f(8) & = & g(8) & = & 8 \\
f(4) & = & g(4) & = & 4 & & f(9) & = & g(10) & = & 9 \\
f(5) & = & g(5) & = & 5 & & f(10) & = & g(9) & = & 10
\end{array}$$

Las funciones son distintas $f \neq g$ y $f \mathcal{R} g$, pero $g \mathcal{R} f$, por lo cual no se cumple al condición de la antisimetría.

$\mathcal{R}$ no es antisimétrica.

ii) Los elementos de $\mathcal{F}$ que se relacionan entre sí, forman un conjunto denominado: *clase*. Esta clase se puede llamar clase de "*cualquiera de los elementos*", por ejemplo si $f_1, f_2, f_3, \dots, Id$ están relacionadas se puede decir que:

$$\overline{f_1} = \{f_1, f_2, f_3, \dots, Id\} \quad \text{o} \quad \overline{f_2} = \{f_1, f_2, f_3, \dots, Id\} \quad \text{o} \quad \overline{Id} = \{f_1, f_2, f_3, \dots, Id\}$$

Así que hay que definir 3 funciones que estén relacionadas con la función Id. Hay que hacerlo para todos los elementos como en el inciso de antisimetría...

$$\begin{array}{rcl} f_1(1) & = & 1 \\ f_1(2) & = & 2 \\ f_1(3) & = & 3 \\ f_1(4) & = & 4 \\ f_1(5) & = & 5 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} f_1(6) & = & 6 \\ f_1(7) & = & 7 \\ f_1(8) & = & 8 \\ f_1(9) & = & 10 \\ f_1(10) & = & 9 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} f_2(1) & = & 1 \\ f_2(2) & = & 2 \\ f_2(3) & = & 3 \\ f_2(4) & = & 4 \\ f_2(5) & = & 5 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} f_2(6) & = & 6 \\ f_2(7) & = & 7 \\ f_2(8) & = & 10 \\ f_2(9) & = & 9 \\ f_2(10) & = & 8 \end{array}$$

Y la f_3 te la dejo a vos. Las funciones son **distintas** y están relacionadas con la Id porque usan el mismo n (en este caso $n = 1$) para cumplir $f_1(1) = f_2(1) = f_2(1) = Id(1) = 1$ ✓

Nada que ver, pero ¿Cuántos elementos tiene la clase de equivalencia de Id? $\to \#\overline{Id} \stackrel{?}{=} 9!$

`Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:`

`Nad Garraz`

---

36. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Ejercicios de parciales:

1. Probar la propiedad distributiva: $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Tengo que hacer una doble inclusión:

1) $X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

2) $X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$

1) $x \in X \cap (Y \cup Z)$ quiere decir que $x \in X$ y $\left\{\begin{array}{c} x \in Y \\ \text{o bien} \\ x \in Z \end{array}\right\}$. Por lo tanto $\to \left\{\begin{array}{c} x \in X \cap Y \\ \text{o bien} \\ x \in X \cap Z \end{array}\right\}$, lo que equivale a $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad \checkmark$.

2) Ahora hay que probar la vuelta. Uso razonamiento análogo:

$$x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \Rightarrow x \in X \quad y \quad \left\{\begin{array}{c} x \in X \cap Y \\ \text{o} \\ x \in X \cap Z \end{array}\right.$$

Pero teniendo en cuenta que:

$$\left\{\begin{array}{c} Y \subseteq Y \cup Z \\ \text{y que} \\ Z \subseteq Z \cup Y, \end{array}\right. \overset{!!}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{c} x \in X \cap (Y \cup Z) \\ \text{o bien} \\ x \in X \cap (Z \cup Y) \end{array}\right. \Rightarrow x \in X \cap (Y \cup Z)$$

En !! uso algo "obvio" pero que me sirve para seguir bien donde está x: Resalto que si un elemento está en Y seguro va a estar en la unión de Y con lo que sea.

Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Nad Garraz

2. Probar la propiedad $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Tengo que hacer una doble inclusión $\to \begin{cases} 1) & (A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c \\ 2) & A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c \end{cases}$

1) Prueba directa: Si $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$
Por hipótesis $x \in (A \cap B)^c \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$

A	B	$A^c \cup B^c$	$(A \cap B)^c$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

Uso la tabla para ver la definición $x \in (A \cap B)^c \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \notin A \vee x \notin B$

2) Pruebo por absurdo. Si $\forall x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$

Supongo que $x \notin (A \cap B)^c \overset{\text{def}}{\iff} x \in (A \cap B) \xrightarrow[\text{hipótesis}]{\text{por}} x \in A^c \cup B^c \to \left\{ \begin{array}{c} x \notin A \\ \vee \\ x \notin B \end{array} \right\}$, por lo que $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \cap B$ contradiciendo el supuesto, absurdo. Debe ocurrir que $x \in (A \cap B)^c$

A	B	$A \cap B$	$(A \cup B)$	$(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

---

3. Sea
$$\mathcal{F} = \{h : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,\dots,50\} \ / \ h \text{ es inyectiva}\}.$$
Definimos en $\mathcal{F}$ la relación $\mathcal{R}$ como
$$f \,\mathcal{R}\, g \quad \text{si y sólo si} \quad \#(\text{Im}(f) \ \setminus \ \text{Im}(g)) = 0 \quad \text{o} \quad 4.$$

a) Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

b) Sea $f \in \mathcal{F}$ definida como $f(x) = x$ para $1 \leq x \leq 4$. Calcular cuántas funciones $g \in \mathcal{F}$ satisfacen $f \,\mathcal{R}\, g$

Observar que $f \in \mathcal{F}$ es una función que tiene un dominio con solo 4 elementos, es decir
$$\#\,\text{Dom}(f) = 4 \ \forall f \in \mathcal{F},$$
y dado que f es inyectiva, todos los elementos de la imagen deben ser distintos, por lo tanto
$$\#\,\text{Im}(f) = 4 \ \forall f \in \mathcal{F}$$

a) *Reflexiva:* Quiero ver que si $f \,\mathcal{R}\, f$.

Esto debe ser cierto, ya que $A = \{\text{Im}(f) \ \setminus \ \text{Im}(f)\} = \varnothing$ y $\#\varnothing \overset{!}{=} 0 \ \ \forall f \in \mathcal{F}$. $\mathcal{R}$ es reflexiva ✓

Simétrica: Quiero ver que si $f \,\mathcal{R}\, g \Rightarrow g \,\mathcal{R}\, f$.

Si tengo que $f \,\mathcal{R}\, g$, sé algo sobre sus conjuntos Im ya que,
$$\left\{ \begin{array}{lcc} \#\{\text{Im}(f) \ \setminus \ \text{Im}(g)\} = 0 & \iff & \text{Im}(f) \overset{\star^1}{=} \text{Im}(g) \\ & \text{o} & \\ \#\{\text{Im}(f) \ \setminus \ \text{Im}(g)\} = 4 & \iff & \text{Im}(f) \overset{\star^2}{\cap} \text{Im}(g) = \varnothing \end{array} \right.$$

Entonces los conjuntos $\text{Im}(f)$ y $\text{Im}(g)$ están relacionados por un "=" y un "∩", dos operadores simétricos por lo tanto $\mathcal{R}$ es simétrica. ✓

Antisimétrica: Quiero ver que si $f \,\mathcal{R}\, g \Rightarrow g \,\not\mathcal{R}\, f$, o también a veces está bueno pensarla la antisimetría como si $f \,\mathcal{R}\, g$ y $g \,\mathcal{R}\, f \Rightarrow f = g$. Bajo la sospecha de que la función no es antisimétrica la segunda forma de pensarlo me ayuda a encontrar un *contra*ejemplo.

$$f \to \left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 3 \\ f(4) = 4 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad g \to \left\{ \begin{array}{l} g(1) = 4 \\ g(2) = 3 \\ g(3) = 2 \\ g(4) = 1 \end{array} \right.$$

$\begin{cases} f \mathrel{\mathcal{R}} g, \text{ sus imágenes cumplen } \bigstar^{1} \\ g \mathrel{\mathcal{R}} f, \text{ sus imágenes cumplen } \bigstar^{1} \end{cases}$, pero por como están definidas las funciones $f \neq g$. $\mathcal{R}$ no es antisimétrica. ☠

Transitiva: Quiero ver que si $f \mathrel{\mathcal{R}} g \quad \text{y} \quad g \mathrel{\mathcal{R}} h \Rightarrow f \mathrel{\mathcal{R}} h$.
Acá podemos encontrar un *contra*ejemplo para mostrar que no es transitiva, saco de la galera 3 funciones, $f, g \quad \text{y} \quad h \in \mathcal{F}$

$$f \to \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 3 \\ f(4) = 4 \end{cases}, \quad g \to \begin{cases} g(1) = 5 \\ g(2) = 6 \\ g(3) = 7 \\ g(4) = 8 \end{cases} \quad \text{y} \quad h \to \begin{cases} h(1) = 1 \\ h(2) = 2 \\ h(3) = 9 \\ h(4) = 10 \end{cases}$$

$\begin{cases} f \mathrel{\mathcal{R}} g, \text{ sus imágenes cumplen } \bigstar^{2} \\ g \mathrel{\mathcal{R}} h, \text{ sus imágenes cumplen } \bigstar^{2} \end{cases}$, pero $f \not\mathrel{\mathcal{R}} h$ dado que:

$$\{\text{Im}(f) \setminus \text{Im}(g)\} = \{3, 4\} \Rightarrow \# \{\text{Im}(f) \setminus \text{Im}(g)\} = 2 \neq 0 \quad \text{o} \quad 4.$$

$\mathcal{R}$ no es transitiva. ☠

b) Para que f y g se relacionen se debe cumplir con $\bigstar^{1}$ o con $\bigstar^{2}$. En otras palabras necesito encontrar funciones $g \in \mathcal{F}$ cuya imagen $\text{Im}(g) = \{1, 2, 3, 4\}$ o su codominio sea $\underbrace{\text{Cod} = \{5, 6, \dots, 49, 50\}}_{\#\,\text{Cod}=46}$.

Contar cuando $\text{Im}(g) = \{1, 2, 3, 4\}$*:*

Hago la *inyección* de los 4 valores que puede tomar la función inyectiva g.

$$\begin{cases} \quad\quad g \to & g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{opciones} \to & \#4 & \#3 & \#2 & \#1 \end{cases}$$

Hay 4! permutaciones $\checkmark$

Contar cuando codominio sea $\text{Cod} = \{5, 6, \dots, , 49, 50\}$

Hago la *inyección* de los 46 valores que puede tomar la función inyectiva g.

$$\begin{cases} \quad\quad g \to & g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{opciones} \to & \#46 & \#45 & \#44 & \#43 \end{cases}$$

Hay $\frac{46!}{42!}$ permutaciones $\checkmark$

Se concluye que hay un total de $\frac{46!}{42!} + 4!$ funciones $g \in \mathcal{F} / f \mathrel{\mathcal{R}} g \quad \checkmark$

🔥4. (recuperatorio 1er C. 24)

Se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$n \mathrel{\mathcal{R}} m \iff 10 \,\big|\, n^2 + 4m^2 + m - 6n.$$

a) Probar que $n \mathrel{\mathcal{R}} m \iff 5 \,\big|\, n^2 - m^2 + m - n \quad \text{y} \quad n \equiv m \ (2)$.

b) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

a) $(\Rightarrow)$

$$n \mathcal{R} m \overset{\text{def}}{\iff} n^2 + 4m^2 + m - 6n \equiv 0\ (10)$$

Si la expresión es divible por 10, debe ser divisible por 2 y también por 5:

$$\begin{cases} n^2 + 4m^2 + m - 6n \underset{!}{\overset{(5)}{\equiv}} n^2 - m^2 + m - n \equiv 0\ (5) \quad \checkmark \\ n^2 + 4m^2 + m - 6n \overset{(2)}{\equiv} n^2 + m \underset{!!}{\overset{(2)}{\equiv}} n + m \equiv 0\ (2) \Leftrightarrow n \equiv m\ (2) \quad \checkmark \end{cases}$$

Si no ves lo que pasó en !! pensá en la paridad de un número y su cuadrado.
Por lo tanto si

$$n \mathcal{R} m \quad \Rightarrow \quad 5 \,|\, n^2 - m^2 + m - n \quad \text{y} \quad n \equiv m\ (2)$$

$(\Leftarrow)$

$$n^2 - m^2 + m - n \equiv 0\ (5) \Leftrightarrow n^2 + 4m^2 + m - 6n \equiv 0\ (5) \Leftrightarrow 5 \,|\, n^2 + 4m^2 + m - 6n \quad \checkmark$$

Ahora uso la información de $n \equiv m\ (2)$

$$\text{Si } n \equiv m\ (2) \Rightarrow n^2 + 4m^2 + m - 6n \underset{!}{\overset{(2)}{\equiv}} 5\underbrace{m(m-1)}_{\text{par!}} \equiv 0\ (2) \iff 2 \,|\, n^2 + 4m^2 + m - 6n \quad \checkmark$$

Por lo tanto si

$$n \mathcal{R} m \quad \Leftarrow \quad 5 \,|\, n^2 - m^2 + m - n \quad \text{y} \quad n \equiv m\ (2)$$

b) No es casualidad que en el punto anterior tuvieramos una *redefinición* de la relación $\mathcal{R}$:

$$n \mathcal{R} m \iff \begin{cases} n^2 - m^2 + m - n \equiv 0\ (5) \\ \quad \text{y} \\ n \equiv m\ (2). \end{cases}$$

En esa forma es mucho más fácil mostrar lo que sigue porque la relación queda definida en función de congruencias que *ya son relaciones de equivalencias*. Para mostrar la relación de equivalencia, hay que probar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva: Si $n \mathcal{R} n \iff \begin{cases} n^2 - n^2 + n - n = 0 \equiv 0\ (5) \quad \checkmark \\ \quad \text{y} \\ n \equiv n\ (2) \quad \checkmark. \end{cases}$

La relación es *reflexiva*.

Simétrica: Si $n \mathcal{R} m \Rightarrow m \mathcal{R} n$, para algún par n, m.

$$\text{Si } n \mathcal{R} m \Rightarrow \begin{cases} n^2 - m^2 + m - n \equiv 0\ (5) \overset{m \mathcal{R} n}{\Longrightarrow} m^2 - n^2 + n - m = -(n^2 - m^2 + m - n) \equiv 0\ (5) \quad \checkmark \\ \quad \text{y} \\ n \equiv m\ (2) \overset{m \mathcal{R} n}{\Longrightarrow} m \equiv n\ (2) \quad \checkmark \end{cases}$$

La relación es *simétrica*

Transitiva: Quiero ver que si: $n \mathcal{R} m$ y $m \mathcal{R} j \Rightarrow n \mathcal{R} j$

Si

$$n \mathcal{R} m \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - m^2 + m - n \equiv 0\ (5) \\ \quad \text{y} \\ n \equiv m\ (2) \end{cases} \quad \text{y} \quad m \mathcal{R} j \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - j^2 + j - m \equiv 0\ (5) \bigstar^1 \\ \quad \text{y} \\ m \equiv j\ (2) \bigstar^2 \end{cases}$$

entonces

$$\left.\begin{array}{c} n^2 - m^2 + m - n \equiv 0\ (5) \overset{\star^1}{\underset{!}{\iff}} n^2 - j^2 + j - n \equiv 0\ (5) \\ \text{y} \\ n \equiv m\ (2) \overset{\star^2}{\iff} n \equiv j\ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{n\ \mathcal{R}\ j}$$

La relación es *transitiva.*

Como la relación resultó ser *reflexiva, simétrica y transitiva,* entonces es de equivalencia. Fin.

---

5. Sea X el conjunto de todas las funciones de $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ en $\{0,1\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en X como:

$$f\ \mathcal{R}\ g \iff f(1) + g(3) = f(3) + g(1).$$

a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es $\mathcal{R}$ antisimétrica?

b) Calcular la cantidad de clases de equivalencia de $\mathcal{R}$ y exhibir un representante de cada una de ellas.

---

a) Para probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, hay que probar que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*. Click acá para la 'teoría' de que son esas cosas

Las funciones toman todos los valores que hay en el conjunto del dominio y tienen que mandar ese valor a alguno de los dos valores que están en el conjunto del codominio. Podemos observar que la imagen de la función será $\{0\}, \{1\} \quad \text{o} \quad \{0,1\}$.

Antes de arrancar a hacer cuentas voy a acomodar la $\mathcal{R}$ para que quede más fácil de leer para mí. No es necesario hacer esto, pero como yo me distraigo hasta con la humedad del ambiente, me resulta más fácil pensarlo. Quedaría así:

$$\boxed{f\ \mathcal{R}\ g \iff f(1) - f(3) = g(1) - g(3).}$$

Reflexiva: En este caso se cumple de forma trivial.

$$f\ \mathcal{R}\ f \iff f(1) - f(3) = f(1) - f(3)$$

Simétrica: Quiero ver que si $f\ \mathcal{R}\ g \Rightarrow g\ \mathcal{R}\ f$.

Resulta parecido al anterior dado que la igualdad no cambia al conmutar las funciones

$$\begin{array}{l} f\ \mathcal{R}\ g \iff f(1) - f(3) = g(1) - g(3) \\ g\ \mathcal{R}\ f \iff g(1) - g(3) = f(1) - f(3) \iff f(1) - f(3) = g(1) - g(3) \end{array}$$

Transitiva: Quiero ver que si

$$f\ \mathcal{R}\ g \quad \text{y} \quad g\ \mathcal{R}\ h \Rightarrow f\ \mathcal{R}\ h.$$

Partiendo de las hipótesis de estas relaciones:

$$\begin{array}{l} f\ \mathcal{R}\ g \iff f(1) - f(3) \overset{\star^1}{=} g(1) - g(3) \\ g\ \mathcal{R}\ h \iff g(1) - g(3) \overset{\star^2}{=} h(1) - h(3) \end{array}$$

Despejando de $\bigstar^2$ y reemplazando en $\bigstar^1$:

$$g(1) \overset{\bigstar^2}{=} h(1) - h(3) + g(3) \overset{\bigstar^1}{\Longrightarrow} f(1) - f(3) = (h(1) - h(3) + g(3)) - g(3) \Leftrightarrow \underbrace{f(1) - f(3) = h(1) - h(3)}_{f \, \mathcal{R} \, h}$$

Antisimétrica: Puedo armar un ejemplo para ver si es antisimétrica. Cuando se define una función hay que definirla entera y no solo la parte que me interesa! Voy a armar un par de funciones que (f, g) con $f \neq g$ y $f \, \mathcal{R} \, g$ y que además $g \, \mathcal{R} \, f$. Eso sería suficiente para mostrar que la función no es antisimétrica

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(1) & = & 0 \\ f(2) & = & 0 \\ f(3) & = & 0 \\ f(4) & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ f(8) & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} g(1) & = & 0 \\ g(2) & = & 1 \\ g(3) & = & 0 \\ g(4) & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ g(8) & = & 0 \end{array} \right.$$

La función no es antisimétrica.

b) En este ejercicio hay 3 clases. Recuerdo que hago todo el ejercicio escribiendo la relación en esta forma:

$$\boxed{f \, \mathcal{R} \, g \iff f(1) - f(3) = g(1) - g(3).}$$

Solo puedo obtener como resultado de la cuenta, para la expresión del miembro izquierdo (y el derecho):

$$-1, 0 \quad \text{o} \quad 1,$$

Por lo tanto mientras la cuenta de $f(1) - f(3)$ de lo mismo para dos funciones distintas, van a estar relacionas y sino fueran iguales las funciones van a estar en clases distintas.

Cuando me da 0:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f(3) = 0 \Rightarrow f(1) - f(3) = 0 \\ f(1) = 1 \quad \text{y} \quad f(3) = 1 \Rightarrow f(1) - f(3) = 0 \end{array} \right.$$

Con esos valores obtengo la clase (y me invento esta notación, ojo!) que me da $\overline{0}$. Todas las funciones de esa *pinta* van a estar relacionadas. Piden uno pero te doy cuatro elementos de este conjunto a modo de ejemplo, porque soy un tipazo, no tengo nada que hacer y con el *copy paste* es muy fácil:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(1) & = & 0 \\ f(2) & = & 0 \\ f(3) & = & 0 \\ f(4) & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ f(8) & = & 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcl} g(1) & = & 1 \\ g(2) & = & 0 \\ g(3) & = & 1 \\ g(4) & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ g(8) & = & 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcl} h(1) & = & 1 \\ h(2) & = & 0 \\ h(3) & = & 1 \\ h(4) & = & 1 \\ \vdots & = & \vdots \\ h(8) & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} i(1) & = & 0 \\ i(2) & = & 1 \\ i(3) & = & 0 \\ i(4) & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ i(8) & = & 0 \end{array} \right.$$

Cuando me da 1:

$$\left\{ \; f(1) = 1 \quad \text{y} \quad f(3) = 0 \Rightarrow f(1) - f(3) = 1 \right.$$

Con esos valores obtengo la clase (y sigo con la notación inventada, ojo!) que me da $\overline{1}$. Todas las funciones de esa *pinta* van a estar relacionadas. Tres elementos de este conjunto a modo de ejemplo, porque con el *copy paste* sigue siendo muy fácil:

$$\begin{cases} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 0 \\ f(3) &= 3 \\ f(4) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ f(8) &= 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} g(1) &= 1 \\ g(2) &= 1 \\ g(3) &= 0 \\ g(4) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ g(8) &= 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} h(1) &= 1 \\ h(2) &= 0 \\ h(3) &= 0 \\ h(4) &= 1 \\ \vdots &= \vdots \\ h(8) &= 1 \end{cases}$$

Cuando me da -1:

$$\{ \; f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f(3) = 1 \Rightarrow f(1) - f(3) = -1$$

Con esos valores obtengo la clase (y sigo con la notación inventada, ojo!) que me da $\overline{-1}$. Todas las funciones de esa *pinta* van a estar relacionadas. Tres elementos de este conjunto a modo de ejemplo, porque con el *copy paste* sigue siendo muy fácil:

$$\begin{cases} f(1) &= 0 \\ f(2) &= 0 \\ f(3) &= 1 \\ f(4) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ f(8) &= 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} g(1) &= 0 \\ g(2) &= 1 \\ g(3) &= 1 \\ g(4) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ g(8) &= 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} h(1) &= 0 \\ h(2) &= 0 \\ h(3) &= 1 \\ h(4) &= 1 \\ \vdots &= \vdots \\ h(8) &= 1 \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:
Nad Garraz
Ale Teran