# Álgebra I Práctica 3 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I Facultad de Ciencias Exactas y Naturales UBA

## Choose your destiny:

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1.	<b>5.</b>	9.	13.	<b>17</b> .	<b>21.</b>	<b>25.</b>	29.
<b>2.</b>	<b>6.</b>	<b>10.</b>	<b>14.</b>	18.	<b>22.</b>	<b>26.</b>	30.
<b>3.</b>	<b>7.</b>	11.	<b>15.</b>	19.	<b>23.</b>	<b>27</b> .	31.
4.	8.	<b>12.</b>	<b>16.</b>	<b>20.</b>	<b>24.</b>	<b>28.</b>	<b>32.</b>

• Ejercicios Extras



Notas teóricas:

#### Ejercicios de la guía:

1. Dado el conjunto referencial  $V = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es múltiplo de 15}\}$ , determinar el cardinal del complemento del subconjunto A de V definido por  $A = \{n \in V : n \geq 132\}$ .

Se tiene que  $A^c = \{n \in V : n \ngeq 132\} = \{n \in V : n < 132\}$ . Así,  $\#A^c = \text{todos los múltiplos de 15 menores a 132}$ . Lo calculo sacando la parte entera de  $\frac{132}{15}$ , o sea:

$$\#A^c = \lfloor \frac{132}{15} \rfloor = \lfloor 8, 8 \rfloor = 8$$

2. ¿Cuántos números naturales hay menores o iguales que 1000 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

Defino un conjunto referencial  $V = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 1000\}$ , y dos conjuntos  $A = \{n \in V : n \text{ no es múltiplo de } 3\}$ ,  $B = \{n \in V : n \text{ no es múltiplo de } 5\}$ .

Búsco calcular  $\#(A \cap B)$ 

Pero 
$$\#(A \cap B) = \#[V - (A \cap B)^c] = \#(V - A^c \cup B^c) = \#V - \#(A^c \cup B^c) = \#V - [\#A^c + \#B^c - \#(A^c \cap B^c)]$$
  
Donde  $A^c = \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 3\}$ ,  $B^c = \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 5\}$ ,  $(A^c \cap B^c) = \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 15\}$ 

Calculo sus cardinales:

- $\#A^c = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$
- $\#B^c = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$
- $\#(A^c \cap B^c) = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$

Así, 
$$\#(A \cap B) = \#V - [\#A^c + \#B^c - \#(A^c \cap B^c)] = 1000 - 333 - 200 + 66 = 533$$

**3.** Dados subconjuntos finitos A, B, C de un conjunto referencial V, calcular  $\#(A \cup B \cup C)$  en términos de los cadinales de A, B, C y sus intersecciones.

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A \cup (B \cup C))$$

$$= \#A + \#(B \cup C) - \#(A \cap (B \cup C))$$

$$= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

$$= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - [\#(A \cap B) + \#(A \cap C) - \#(A \cap B \cap C)]$$

$$= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

## 4. \*\* Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \emptyset$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \P$ .

### 5. \*\* Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

6.

- i) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras (no pueden empezar con 0) hay que no contienen al dígito 5?
- ii) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras hay que contienen al dígito 7?
- i) Como las cifras no pueden ser 5 y la primer cifra no puede empezar con 0, se tiene lo siguiente:

ii) Para hallar la cantidad de números de 4 cifras que contienen al 7 lo calculo con el complemento, o sea

#números de 4 cifras con el 7 =#números de 4 cifras - #números de 4 cifras sin el 7

 $\bullet$  # números de 4 cifras:

• # números de 4 cifras sin el 7: En el ítem anterior calculamos la cantidad de números de 4 cifras que no contienen al 5, que es la misma cantidad que números de 4 cifras que no contienen al 7, por lo tanto hay 5832 números posibles.

Así, #números de 4 cifras con el 7 = 9000 - 5832 = 3168

## 7. 🚼 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX$ 

### 8. \*\* Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX$ 

9. Si A es un conjunto con n elementos ¿Cuántas relaciones en A hay? ¿Cuántas de ellas son reflexivas? ¿Cuántas de ellas son simétricas? ¿Cuántas de ellas son reflexivas y simétricas?

Dado que para dos conjuntos  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{1, 2\}$  la cantidad de relaciones que hay entre ellos es igual a la cantidad de subconjuntos de  $\mathcal{P}(A \times B)$ , entonces si  $A = \{1, \dots, n\}$  el cardinal  $\#\mathcal{P}(A \mathcal{R} A) = 2^{n^2}$ 

Las relaciones reflexivas son de la forma  $a_i \mathcal{R} a_i$ , por lo que solo será una relación por cada elemento del conjunto  $\#(A \mathcal{R} A)_{ref} = n$ . Voy a calcular la cantidad de elementos que tiene el conjunto  $\mathcal{P}((A \mathcal{R} A)_{ref})$ , porque estoy buscando todos los subconjuntos que puedo formar con los elementos de  $(A \mathcal{R} A)_{ref}$ , entonces  $\#\mathcal{P}((A \mathcal{R} A)_{ref}) = 2^n$ 

#### Corroborar

Las relaciones simétricas serán aquellas que  $a_i \mathcal{R} a_j \Rightarrow a_j \mathcal{R} a_i$ . Pensando esto como los elementos de la diagonal para abajo de una matriz de  $n \times n$  tengo  $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$  elementos matriciales.

$$\sum_{k=0}^{n} {n \cdot (n+1) \choose k} = 2^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}$$
Corroborar

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	• • •	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
$a_1$	R, S	•	•		•		
$a_2$	S	R, S	•		•	•	•
$a_3$	S	S	R, S		•	•	•
÷	•••	•••	•	•••	•		
$a_{n-2}$	S	S	S	٠	R, S		•
$a_{n-1}$	S	S	S	٠٠.	S	R, S	
$a_n$	S	S	S	• • •	S	S	R, S

- **10.** Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de todas las funciones  $f: A \to B$ .
  - i) ¿Cuántos elementos tiene le conjunto  ${\cal F}$
  - ii) ¿Cuántos elementos tiene le conjunto  $\{f \in \mathcal{F} : 10 \in \text{Im}(f)\}$
  - iii) ¿Cuántos elementos tiene le conjunto  $\{f \in \mathcal{F} : 10 \in \text{Im}(fa)\}$
  - iv) ¿Cuántos elementos tiene le conjunto  $\{f \in \mathcal{F} : f(1) \in \{2,4,6\}\}$

Cuando se calcula la cantidad de funciones, haciendo el árbol se puede ver que va a haber  $\#\operatorname{Im}(f)$  de funciones que provienen de un elemento del dominio. Por lo tanto si tengo un conjunto  $A_n$  y uno  $B_m$ , la cantidad de funciones  $f:A\to B$  será de  $m^n$ 

- i)  $\#\mathcal{F} = 12^5$
- ii)  $\#\mathcal{F} = 11^5$
- iii) Tengo una que va a parar al 10 y cuento que queda. Por ejemplo si f(2) = 10:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Por lo tanto tengo  $\#\mathcal{F} = 12^4 \cdot \underbrace{1}_{f(2)=10}$

Corroborar

- iv) Me dicen que  $f(\{1\}) = \{2,4,6\}$ , Si lo pienso como el anterior ahora tengo 3 veces más combinaciones, entonces  $\#\mathcal{F} = 12^4 \cdot \underbrace{3}_{f(\{1\})=\{2,4,6\}}$
- **11.** Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y  $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ .
  - i) ¿Cuántas funciones biyectivas  $f: A \to B$  hay?
  - ii) ¿Cuántas funciones biyectivas  $f:A\to B$  hay tales que  $f(\{1,2,3\})=\{12,13,14\}$ ?

Cuando cuento funciones biyectivas, el ejercicio es como reordenar los elementos del conjunto de llegada de todas las formas posibles. Dado un conjunto Im(f), la cantidad de funciones biyectivas será # Im(f)

- i) Hay 7! funciones biyectivas.
- ii) Dado que hay 3 valores fijos, juego con los 4 valores restantes, por lo tanto habrá 4! funciones biyectivas

- 12. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden armar usando los dígitos del 1 al 5? ¿ Y usando los dígitos del 1 al 7? ¿ Y usando los dígitos del 1 al 7 de manera que el dígito de las centenas no sea el 2?
  - 1) Hay que usar  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  y reordenarlos de todas las formas posibles. 5!

  - 3) Parecido al anterior pero fijo el 2 en el dígito de las centenas:

$$\begin{cases} #6 & #5 & #4 & #1 & #3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{cases} \to \text{Tengo } 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 = \frac{6!}{2!} \text{ interpretar?}$$

- **13.** Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .
  - i) ¿Cuántas funciones inyectivas  $f; A \to B$  hay?
  - ii) ¿Cuántas de ellas son tales que f(1) es par?
  - iii) ¿Y cuántas tales que f(1) y f(2) son pares?
  - i) Una pregunta equivalente a si tengo 10 pelotitas distintas y 7 cajitas cómo puedo ordenarlas.

$$\begin{cases} #10 & #9 & #8 & #7 & #6 & #5 & #4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{cases} \rightarrow \frac{10!}{3!} = \frac{\#B}{\#B - \#A}$$

ii) Hay 5 números pares para elegir como imagen de f(1)

$$\begin{cases}
#5 & #9 & #8 & #7 & #6 & #5 & #4 \\
\downarrow & \rightarrow 5 \cdot \frac{9!}{3!} \\
f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7)
\end{cases}$$

iii) Hay 5 números pares para elegir como imagen de f(1), luego habrá 4 números pares para f(2)

$$\begin{cases} #5 & #4 & #8 & #7 & #6 & #5 & #4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{cases} \rightarrow 5 \cdot 4 \cdot \frac{8!}{3!}$$

**14.** ¿Cuántas funciones biyectivas  $f:\{1,2,3,4,5,6,7\} \rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7\}$  tales que  $f(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$  hay?

Primero veo la condición  $f(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$ , donde podría formar  $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$  combinaciones biyectivas. Para obtener la cantidad de funciones pedidas, tengo que usar todos los valores del  $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ . Primero fijo la cantidad de valores que pueden tomar  $f(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$  luego lo que reste.

$$\begin{cases} \#5 & \#4 & \#3 & \#4 & \#3 & \#2 & \#1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \\ \text{Condiciones pedidas} & \text{Lo que resta para completar} \end{cases} \rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{5!}{(5-3)!} \cdot 4!$$

**15.** Sea  $A = \{f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  tal que f es una función inyectiva $\}$ . Sea  $\mathcal{R}$  la relación de equivalencia en A definida por:  $f \mathcal{R} g \iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2)$ . Sea  $f \in A$  la función definida por f(n) = n + 2 ¿Cuántos elementos tiene su clase de equivalencia?

### Hacer!

- **16.** Determinar cuántas funciones  $f:\{1,2,3,4,5,6,7,8\} \rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$  satisfacen simultáneamente las condiciones:
  - f es inyectiva,

- f(5) + f(6) = 6,
- $f(1) \le 6$ .
- $\bullet \ f$ inyectiva hace que mi conjunto de llegada se reduzca en 1 con cada elección.
- Si f(5) + f(6) = 6 entonces  $f: \{5,6\} \to \{1,2,4,5\}$ . Una vez que f(5) tome un valor de los 4 posibles e.g.  $f(5) = 1 \xrightarrow{\text{condiciona} \atop \text{única opción}} f(6) = 5$
- $f(1) \leq 6 \rightarrow f: \{1\} \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$  donde cancelé el 1 y el 4, para sacar 2 números que sí o sí deben irse en la condición <sup>1</sup> de f(5) + f(6) = 6. Por lo tanto f(1) puede tomar 4 valores. Por lo que sobrarían 9 elementos del conjunto de llegada para repartir en las f que no tienen condición.

 $<sup>^1</sup>$ ¿Podría haber elegido el 1 y 2? Sí, cualquiera 2 números del conjunto  $\{1,2,4,5\}$ 

$$\begin{cases} #4 & #9 & #8 & #7 & #4 & #1 & #6 & #5 \\ \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & f(8) \end{cases} \rightarrow 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 4 \cdot 4 \cdot \frac{9!}{4!} = 241.920$$

Siento todo esto muy artesanal y poco justificable suficientemente mathy-snobby

#### Número combinatorio

#### 17.

- i) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto  $\{1,2,3,4,5,6,7\}$
- ii) ¿ Y si se pide que 1 pertenezca al subconjunto?
- iii) ¿ Y si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto?
- iv) ¿ Y si se pide que 1 o 2 pertenezca al subconjunto, pero no simultáneamente los dos?

El problema de tomar k elementos de un conjunto de n elementos se calcula con  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 

i) 
$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{A}!}{\cancel{A}!(\cancel{A}!)} = 35$$

ii) 
$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$$

iii) 
$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$$

iv) 
$$\binom{5}{3} \cdot 2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 2 = 20$$

- **18.** Sea  $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$ . Calcular la cantidad de subconjuntos  $B \subseteq A$  que cumplen las siguientes condiciones:
  - i) B tiene 10 elementos y contiene exactamente 4 múltiplos de 3.
  - ii) B tiene 5 elementos y no hay dos elementos de B cuya suma sea impar.

El conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ 

i)  $\xrightarrow[\text{de } 3]{\text{de } 3}$   $C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ , agarro 4 elementos del conjunto C y luego 6 de los restantes del conjunto A sin contar el múltiplo de 3 que ya usé.

conjunto 
$$A$$
 sin contar el múltiplo de 3 que ya usé. 
$$\begin{cases} \binom{6}{4} \cdot \binom{9}{6} = \frac{\cancel{\cancel{M}}}{4!2!} \cdot \frac{9!}{\cancel{\cancel{M}}3!} \xrightarrow{\text{simplificando}} 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 1260 \\ Verificary preguntar por la justificacin. \end{cases}$$

ii) La condición de que la suma no sea impar implica que todos los elementos deben ser par o todos impar.

$$\begin{cases} \xrightarrow{\text{todos}} \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} & \xrightarrow{\text{10 elementos}} \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252 \\ \xrightarrow{\text{todos}} \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19\} & \xrightarrow{\text{9 elementos}} \binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126 \end{cases}$$

19. Dadas dos rectas paralelas en el plano, se marcan n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con vértices en esos puntos?

### **F**alta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

- **20.** Determinar cuántas funciones  $f: \{1, 2, 3, \dots, 11\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 16\}$  satisfacen simultáneamente las condiciones:
  - f es invectiva,

- Si n es par, f(n) es par,
- $f(1) \le f(3) \le f(5) \le f(7)$ .
- La función es inyectiva y cuando inyecto un conjunto de m elementos en uno de n elementos  $\rightarrow$  $\overline{(m-n)!}$ .
- $\bullet$  Para cumplir la segunda condición el  $\mathrm{Dom}(f)$  tengo 5 números par  $\{2,4,6,8,10\}$  y en el codominio tengo 8 números par  $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$  al *inyectar* obtengo  $\frac{8!}{(8-5)!}$  permutaciones.
- La condición de las desigualdades se piensa con los elementos de la Im(f) restantes después de la inyección, que son 16-5=11. De esos 11 elementos quiero tomar 4. El cuántas formas distintas de tomar 4 elementos de un conjunto de 11 elementos se calcula con  $\binom{11}{4}$ , número de combinación que cumple las desigualdades, porque todos los números son distintos. Para la combinación no hay **órden**, elegir  $\{16, 1, 15, 13\}$  es lo mismo <sup>2</sup> que  $\{1, 16, 13, 15\}$ . Es por eso que con 4 elementos seleccionados solo hay una permutación que cumple las desigualdades; en este ejemplo sería {1, 13, 15, 16}
- Por último inyecto los número del dominio restantes  $\{9,11\}$  en los 7 elementos de  $\mathrm{Im}(f)$  que quedaron luego de la combinación de las desigualdades  $\rightarrow \frac{7!}{(7-2)!}$

Concluyendo: Habrían  $\frac{8!}{(8-5)!} \cdot {11 \choose 4} \cdot \frac{7!}{(7-2)!} = 93.139.200$ Corroborar

 $<sup>^{2}</sup>$ Que sea lo mismo quiere decir que no lo cuenta nuevamente, el contador aumenta solo si cambian los elementos y  $\underline{\text{no}}$  el lugar de los elementos

#### 21. ¿Cuántos anagramas tienen las palabras estudio, elementos y combinatorio

El anagrama equivale a permutar los elementos. Si no hay letras repetidas es una biyección #(letras)! La palabra estudio tiene 7! anagramas.

Elementos tiene 3 letras <u>e</u>, por lo tanto los elementos no repetidos son 6  $\{l, m, n, t, o, s\}$ ; esto es una inyección  $^3 \rightarrow \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!}$ .

Combinatorio tiene repetidas las letras i (x2) y la o (x3). Tengo un conjunto de 7 elementos  $\{c, m.b, n, a, t, r\}$  sin repetición. Puedo ubicar las letras con combinación en los 12 lugares o y luego las i en los 9 lugares restantes. Una vez hecho eso puedo inyectar (biyectar?) las letras no repetidas restantes:

$$\rightarrow \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{2} \cdot 7! = \underbrace{\frac{12!}{3!2!}}_{\text{notar}^{4}} = \frac{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2}}_{\text{2}} = 39.916.800$$

<sup>4</sup>Esto es el total de biyecciones dividido entre las cantidades de repeticiones de los elementos en cuestión.

actualizado: 15/07/2024

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Primero ubico lo que no está repetido. Luego agrego, en una dada posición, a eso 3 o más elementos repetidos. Esta última acción no altera la cantidad de permutaciones. Pensar en esto: lmntosEEE cuenta como lmntos\_\_\_\_.

- 22. ¿Cuántas palabras se pueden formar permutando las letras de cuadros
  - i) con la condición de que todas las vocales estén juntas?
  - ii) con la condición de que las consonantes mantengan el orden relativo original?
  - iii) con la condición de que nunca haya dos (o más) consonantes juntas?

El conjunto de consonantes es  $C = \{c, d, r, s\}$  y de vocales  $V = \{u, a, o\}$ 

i) Para que las vocales estén juntas pienso a las 3 como un solo elemento, fusionadas las 3 letras, con sus permutaciones, es decir que tengo 3! cosas de la siguiente pinta:

$$\begin{cases}
 u & a & o \\
 u & o & a \\
 o & a & u \\
 o & u & a \\
 a & o & u \\
 a & u & o
\end{cases}$$

Los anagramas para que las letras estén juntas los formo combinando  $\binom{5}{1} = 5$  poniendo los 3!=6 valores así en cada uno de los 5 lugares:

$$\begin{cases} uao & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & uao & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & uao & \_ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{cases}$$

Àhora puedo inyectar las 4 consonantese en los 4 lugares que quedan libres. Finalmente se pueden formar  $\underbrace{4!}_{consonantes} \cdot \binom{5}{1} \cdot 3! = 720$  anagramas con la condición pedida.

ii) Supongo que el orden relativo es que aparezcan ordenadas así " $c \dots d \dots r \dots s$ ", quiere decir que tengo que combinar un grupo de 4 letras en 7 que serían los lugares de la letras teniendo un total de  $\binom{7!}{4!}$  y luego tengo 1! permutaciones o, no permuto dicho de otra forma, dado que eso alteraría el orden y no quiero que pase eso. Obtengo cosas así:

$$\begin{cases} c & d & r & s & \_ & \_ & \_ \\ \_ & c & \_ & d & \_ & r & s \\ c & \_ & \_ & d & r & \_ & s \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{cases} \rightarrow \text{lo cual deja 3 lugares libres para permutar con las 3 vocales, esa}$$

permutación es una biyección da 3!.

Por último se pueden formar  $\underbrace{\binom{7!}{4!} \cdot 1!}_{consmantes} \cdot \underbrace{3!}_{vocales} = \frac{7!}{4!\cancel{3!}} \cdot \cancel{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$ 

- iii)  $C = \{c, d, r, s\}$  sin que estén juntas quiere decir que puedo ordenar de pocas formas, muy pocas porque solo hay 7 lugares.  $\left\{ \begin{array}{c|c} c & d & r & s \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right. \rightarrow$  esta combinación es única  $\binom{7!}{7!} = 1$ , lo único
- 😱 ¡Aportá! Correcciones, subiendo ejercicios, \star al repo, críticas, todo sirve.

que resta hacer es permutar las consonantes en esos espacios. 4 espacios para 4 consonantes. Luego relleno inyectando las vocales, como antes. El total de anagramas será  $\binom{7!}{7!} \cdot 4! \cdot \underbrace{3!}_{vocales} = 144$ 

- 23. Con la palabra polinomios,
  - i) ¿Cuántos anagramas pueden formarse en las que las 2 letras i no estén juntas?
  - ii) ¿Cuántos anagramas puede formarse en los que la letra n aparezca a la izquierda de la letra s y la letra s aparezca a la izquierda de la letra p (no necesariamente una al lado de la otra)?
  - i) Tengo 10 letras,  $\{p, l, n, m, s, o, o, o, i, i\}$ . Para que no hayan "ii" calculo  $\binom{10}{3} = 120$ , pensando que en un conjunto de 3, siempre puedo poner las letras " $\underline{i} \underline{i}$ ". Para cada uno de estas 120 configuraciones de la pinta: Está mal!

$$\begin{cases} i & -i & ----- & ---- \\ --i & ----- & i & ---- \\ \underline{---i & ----- & i & ---- \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{cases} \rightarrow \text{Con las } i \text{ donde están el "_" tiene 4 posiciones}$$

Estoy contando de más. La cantidad para que las i no estén juntas es 36... salieron contando a mano  $^5$ . Luego inyectando con las repeticiones de la "o":  $36 \cdot \frac{8!}{3!} = 241.920$ 

Pensando en el complemento:

Las posiciones que pueden tomar las ii juntas, se calculan a mano enseguida. Habrían en total

$$\rightarrow \underbrace{\frac{10!}{3! \cdot 2!}}_{\mathcal{U}} - \underbrace{9 \cdot \frac{8!}{3!}}_{complemento} = 241.920$$

ii) Tengo 10 letras,  $\{p, l, n, m, s, o, o, o, o, i, i\}$ . Para que se forme " $n \dots s \dots p$ " calculo  $\binom{10}{3} = 120$ , pensando que en un conjunto de 3, siempre puedo poner las letras " $\underline{n} \dots \underline{s} \dots \underline{p}$ ". Para cada uno de estas 120 configuraciones de la pinta:

teniendo en cuenta las repeticiones de las "o" y de las "i":  $\binom{10}{3} \cdot \frac{7!}{3!2!}$ 

### 24. Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$   $\bigcirc$ ,

o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX$ 

$$^{5}\sum_{1}^{8}k=36$$

3 ¿Errores? Mandanos tu solución, prolija, así lo arreglamos.

## 25. 😭 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \bigcirc$ .

## 26. 🚼 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \bigcirc$ .

## 27. 🚼 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \emptyset$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \P$ .

- 28. En este ejercicio no hace falta usar inducción.
  - i) Probar que  $\sum_{k=0}^{n} {n \choose k}^2 = {2n \choose n}$ . sug:  ${n \choose k} = {n \choose n-k}$ .
  - ii) Probar que  $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ .
  - iii) Probar que  $\sum_{k=0}^{2n} {2n \choose k} = 4^n$  y deducir que  ${2n \choose n} < 4^n$ .
  - iv) Calcular  $\sum_{k=0}^{2n+1} {2n+1 \choose k}$  y deducir que  $\sum_{k=0}^{n} {2n+1 \choose k}$ .

## Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ ,

o mejor aún si querés subirlo en LATEX  $\to \mathbb{Q}$ . Binomio de Newton:  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^n y^{n-k}$ 

- i)
- ii)
- iii)
- iv)

**29.** Sea  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ , y sea R la relación de orden en  $\mathcal{P}(X)$  definida por:  $A \mathcal{R} B \iff A - B = \emptyset$ . ¿Cuántos conjuntos  $A \in \mathcal{P}(X)$  cumplen simultáneamente  $\#A \ge 2$  y  $A \mathcal{R} \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ?

Hacer!

**30.** Sea  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 10\}$ , y sea R la relación de equivalencia en  $\mathcal{P}(X)$  definida por:  $A \mathcal{R} B \iff A \cap \{1, 2, 3\} = B \cap \{1, 2, 3\}$ . ¿Cuántos conjuntos  $B \in \mathcal{P}(X)$  de exactamente 5 elementos tiene la clase de equivalencia  $\overline{A}$  de  $A = \{1, 3, 5\}$ ?

Como A tiene al 1 y al 3, los elementos B, conjuntos en este caso, pertenecientes a la clase  $\overline{A}$  deberían cumplir que si  $B \subseteq \overline{A} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \in B \\ 3 \in B \\ 2 \notin B \end{array} \right. \rightarrow \text{ si } 2 \in B \Rightarrow A\mathcal{R}B \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}.$  Los conjuntos de 5 elementos serán de la forma:

{ 1 3 \_ \_ \_  $\xrightarrow{5 \text{ elementos}}$   $\xrightarrow{(1,2)}$   $\xrightarrow{(1,2)}$ 

¿Es solo eso o interpreto mal la  $\mathcal{R}$  u otra cosa?

**31.** Sean  $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$  y  $A = \{1\}$  ¿Cuántos subconjuntos  $B \subseteq X$  satisfacen que el conjunto  $A \triangle B$  tiene a lo sumo 2 elementos?

...
a lo sumo = como mucho = como máximo
al menos = por poco = como mínimo

La diferencia simétrica es la unión de los elementos no comunes a los conjuntos A y B. Si me piden que:

$$\#(A\triangle B) \leq 2 \Rightarrow B = \begin{cases} 1 \in B \rightarrow \#B \leq 3 & \frac{\text{Busco conjuntos}}{\text{de la forma}} \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 2.}} & \binom{99}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 0.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 0.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 0.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 0.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text{quedan 99. Elijo 1.}} & \binom{99}{1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\text{el 1 está usado}}{\text$$

**32**.

- i) Sea A un conjunto con 2n elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo  $a \in A$  la clase de equivalencia de a tenga n elementos?
- ii) Sea A un conjunto con 3n elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo  $a \in A$  la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

### Hacer!



#### Ejercicios extras:

**♦1.** Sea  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$  la relación de equivalencia  $\to X \mathcal{R} Y \iff X \triangle Y \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\}$ . ¿Cuántos conjuntos hay en la clase de equivalencia de  $X = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 6\}$ ?

- 1. La relación toma valores de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- 2. Los elementos del conjunto  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- 3. El conjunto  $X = \{6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$  es simplemente un elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Los conjuntos  $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  tales que  $X \mathcal{R} Y$  van a ser los conjuntos que junto a X formarán la clase de equivalencia.  $\overline{X} = \{Y \in \mathcal{P}\mathbb{N} : X \mathcal{R} Y\}$

Para tener una relación de equivalencia deben cumplirse:

- Reflexividad.  $X \triangle X = \varnothing \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\}$
- Simetría.  $X \triangle Y \stackrel{\checkmark}{=} Y \triangle X, \ \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- Transitividad.

Condiciones que debería cumplir un elemeto Y para pertenecer a la la clase de equivalencia, en otras palabras estar relacionado con X:

Se concluye que la clase de equivalencia será el conjunto  $\overline{X}$  (notación inventada):  $\overline{X} = \{Y_1 \cup \{9, 10, \ldots\}, Y_2 \cup \{9, 10, \ldots\}, \ldots, Y_{32} \cup \{9, 10, \ldots\}\}$  con  $Y_i \in \mathcal{P}(\{4, 5, 6, 7, 8\})$   $i \in [1, 2^5]$  donde  $\#\overline{X} = 2^5$ 

- **2.** Sea  $\mathcal{F} = \{f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$ .
  - a) Determinar cuántas funciones  $f \in \mathcal{F}$  satisfacen  $\#\{x \in \text{Dom}(f) \mid f(x) = 9\} = 2$ .
  - b) Determinar cuántas funciones  $f \in \mathcal{F}$  satisfacen  $\#\operatorname{Im}(f) = 4$

Observo que # Dom(f) = 5 y # Cod(f) = 9.

A partir de ese ejemplo puedo pensar que quiero que haya 2 valores de x, cualesquiera, que vayan a parar al 9 y el resto de los números,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  tiene que ir a parar a algo que sea  $\neq$  9. Lo primero que calculo es de cuántas maneras distintas puedo agarrar 2 x de entre las 5 que tengo para usar del conjunto de partida de las f:  $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ , entonces tengo 10 situaciones de la pinta de

★¹ donde para cada una de esas situaciones los número que no van al 9 pueden ir a parar a cualquier

posibles valores  $\rightarrow$  | #1 #8 #8 #1 #8  $\rightarrow$  8<sup>3</sup> funciones.

Eso es solo para el caso con lo 9 en esos lugares en particular. Tengo 10 de esos caso. Por lo que la cantidad de funciones total va a ser:  $10 \cdot 8^3$ 

con  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$ , para que Im(f) = 4. En un razonamiento análogo a lo hecho antes, tengo 2 valores iguales  $(\alpha)$ , que pueden estar en cualquier lugar de los 5 que hay eso, *nuevamente*:  $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \stackrel{\bigstar}{}^3$ , elijo los posibles valores, pero a diferencia del caso anterior teniendo en cuenta de <u>no</u> repetir.

El valor en  $\star^4$  es 1, porque una vez seleccionado un  $\alpha$  el otro solo puede valer lo mismo, bueno, porque son la misma letra, ¿no?. Entonces en esas posiciones en particular hay  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$ , y al igual que

antes hay  $^3$  10 de esas configuraciones así que la cantidad de funciones total va a ser:  $10 \cdot \frac{9!}{5!} = \frac{10!}{5!}$