

# Álgebra I

## Práctica 7 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
UBA

*Choose your destiny:*

*(doubleclick en los ejercicio para saltar)*

- [Notas teóricas](#)

- Ejercicios de la guía:

<a href="#">1.</a>	<a href="#">6.</a>	<a href="#">11.</a>	<a href="#">16.</a>	<a href="#">21.</a>	<a href="#">26.</a>	<a href="#">31.</a>	<a href="#">36.</a>
<a href="#">2.</a>	<a href="#">7.</a>	<a href="#">12.</a>	<a href="#">17.</a>	<a href="#">22.</a>	<a href="#">27.</a>	<a href="#">32.</a>	<a href="#">37.</a>
<a href="#">3.</a>	<a href="#">8.</a>	<a href="#">13.</a>	<a href="#">18.</a>	<a href="#">23.</a>	<a href="#">28.</a>	<a href="#">33.</a>	<a href="#">38.</a>
<a href="#">4.</a>	<a href="#">9.</a>	<a href="#">14.</a>	<a href="#">19.</a>	<a href="#">24.</a>	<a href="#">29.</a>	<a href="#">34.</a>	<a href="#">39.</a>
<a href="#">5.</a>	<a href="#">10.</a>	<a href="#">15.</a>	<a href="#">20.</a>	<a href="#">25.</a>	<a href="#">30.</a>	<a href="#">35.</a>	

- Ejercicios Extras

 <a href="#">1.</a>	 <a href="#">3.</a>	 <a href="#">5.</a>	 <a href="#">7.</a>	 <a href="#">9.</a>
 <a href="#">2.</a>	 <a href="#">4.</a>	 <a href="#">6.</a>	 <a href="#">8.</a>	

**Notas teóricas:**• *Operaciones:*

$$+ : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{i=0}^n b_i X^i$$

$$\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

$$\cdot : \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \text{ y } g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$$

$$\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} \left( \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \in \mathbb{K}[X]$$

• *Algoritmo de división:*

$f, g \in \mathbb{K}[X]$  no nulos, existen únicos  $q$  y  $R \in \mathbb{K}[X]$  tal que

$$f = q \cdot g + R$$

con  $\text{gr}(R) < \text{gr}(g)$  o  $R = 0$ .

• *Raíz de un Polinomio:*

$$\alpha \text{ es raíz de } f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$$

• *Máximo común divisor:*

Polinomio,  $(f : g) \in \mathbb{K}[X]$ , *mónico* de mayor grado que divide a ambos polinomios en  $\mathbb{K}[X]$  y vale el algoritmo de Euclides.

- $(f : g) \mid f$  y  $(f : g) \mid g$
- $f = (f : g) \cdot k_f$  y  $g = (f : g) \cdot k_g$  con  $k_f$  y  $k_g$  en  $\mathbb{K}[X]$
- Dos polinomios son coprimos si  $(f : g) = 1 \iff f \neq g$

• *Raíces múltiples:*

Sea  $f \in \mathbb{K}[x]$  no nulo, y sea  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Se dice que:

- Cuando  $f$  tiene una raíz múltiple:

$$\alpha \text{ es raíz múltiple de } f \iff f = (X - \alpha)^2 q$$

$$f = (X - \alpha) \cdot q, \text{ con } q \in \mathbb{K}[X] \text{ y } q(\alpha) = 0.$$

- Cuando la raíz *no* es múltiple, es *simple* cuando:

$$\alpha \text{ es raíz simple de } f \iff (X - \alpha) \mid f \text{ y } (X - \alpha)^2 \nmid f$$

$$f = (X - \alpha) \cdot q, \text{ con } q \in \mathbb{K}[X] \text{ y } q(\alpha) \neq 0.$$

Prestale atención a los ! porque sino la vas a cagar.

- Sea  $m \in \mathbb{N}_0$ . Se dice que  $\alpha$  es raíz de multiplicidad (exactamente)  $m$  de  $f$ , y se nota:

$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff (X - \alpha)^m \mid f,$$

y también

$$(X - \alpha)^{m+1} \nmid f.$$

O equivalentemente,

$$f = (X - \alpha)^m q \quad \text{con} \quad q \in \mathbb{K}[X], \quad \text{y} \quad q(\alpha) \neq 0.$$

- *Raíces y MCD:*

Sean  $f, g \in \mathbb{K}[X]$  no ambos nulos, y  $\alpha \in \mathbb{K}$ : **Esta se usa bastante.**

$$\Rightarrow f(\alpha) = g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (f : g)(\alpha) = 0$$

- $\alpha$  es raíz múltiple de  $f$  si y solo si:

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad f'(\alpha) = 0 \iff \alpha \text{ es raíz de } (f : f') \iff X - \alpha \mid (f : f')$$

- La multiplicidad  $m$  de una raíz, será  $m - 1$  en la derivada:

$$\text{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \text{mult}(\alpha; f') = m - 1$$

- Relación entre la multiplicidad de una raíz de  $f$  y sus derivadas:

$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{mult}(\alpha; f) \geq m \\ \text{mult}(\alpha; f) = m \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ \hline f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{array} \text{ la } m\text{-ésima derivada no se anula.}$$

Todo ese quilombo de cosas lo que dice es por ejemplo, que si tenés una raíz  $\alpha$  de  $f$  **triple** entonces la **tercera derivada NO PUEDE SER 0**,  $f'''(\alpha) \neq 0$ .

Pero tanto la función, su primera y segunda derivada DEBEN SER 0,  $f(\alpha) \stackrel{!!}{=} f'(\alpha) \stackrel{!!}{=} f''(\alpha) \stackrel{!!}{=} 0$

- *Lema de Gauss:*

Sea  $f = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$  con  $a_0 \neq 0$ . Si  $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[X]$  es una raíz racional de  $f$ , con  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{Z}$  coprimos, entonces  $\alpha \mid a_0$  y  $\beta \mid a_n$ .

El *Lema de Gauss* implica que en el conjunto de fracciones irreducibles  $\frac{\alpha}{\beta}$  están **todas** las raíces racionales de  $f$ .

- Polinomios irreducibles:

Sea  $f \in K[X]$

- Se dice que  $f$  es *irreducible* en  $K[X]$  cuando  $f \notin K$  y los únicos divisores de  $f$  son de la forma  $g = c$  o  $g = cf$  para algún  $c \in K^\times$ . O sea  $f$  tiene únicamente dos divisores mónicos (distintos), que son 1 y  $\frac{f}{\text{cp}(f)}$
- Se dice que  $f$  es *reducible* en  $K[X]$  cuando  $f \notin K$  y  $f$  tiene algún divisor  $g \in K[X]$  con  $g \neq c$  y  $g \neq cf$ ,  $\forall c \in K^\times$ , es decir  $f$  tiene algún divisor  $g \in K[X]$  (no nulo por definición) con  $0 < \text{gr}(g) < \text{gr}(f)$ .

## Ejercicios de la guía:

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en  $\mathbb{Q}[X]$ :

- i)  $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$ ,
- ii)  $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$ ,
- iii)  $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$ ,

i) *coeficiente principal:*  $4^{77}$

*grado:*  $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:*  $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$

*grado:* 28

iii) *coeficiente principal:*  $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4}_f + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_g$

Cuando sumo me queda:  $\text{cp } f^4 - \text{cp } g = (-3)^4 - 81 = 0 \Rightarrow \text{gr}(f^4 + g) < 20$

$\rightarrow$  Calculo el  $\text{cp } f^4 + g$  con  $\text{gr}(f^4 + g) = 19$ .

*Laburo a f:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{fórmula de } f \cdot g]{\text{para usar}} (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \\ f^2 \cdot f^2 = \sum_{k=0}^{20} \left( \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \star^2 \\ \sum_{k=0}^{20} \left( \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \xrightarrow[\text{el término con } k=19]{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \stackrel{\star^1}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} \\ \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{b_{10} \text{ sale a}} b_{10} = (-3)^2 = 9 \\ \xrightarrow[\text{a usar } \sum f \cdot g \text{ en } k=9]{a_9 \text{ no tan fácil, volver}} f \cdot f = \sum_{k=0}^{10} \left( \sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow{k=9} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \stackrel{\star^3}{=} c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4 \stackrel{\star^2}{=} 2 \cdot c_4 \cdot d_5 \\ \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{ojímetro}]{d_5 \text{ sale a}} d_5 = -3 \\ \xrightarrow[\text{ojímetro}]{c_4 \text{ sale a}} c_4 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a_9 = -6 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{cp } f^4 = 2 \cdot (-6) \cdot (9) = -108 \\ \text{cp } g = 19 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\text{cp } f^4 + g = -89} \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\star^1$ : Sabemos que el  $\text{gr}(f^4) = 20 \Rightarrow \text{gr}(f^2) = 10$ . Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las  $X$  sumen 19, es decir  $X^i \cdot X^j = X^{19}$  con  $i, j \leq 10$

solo puede ocurrir *cuando los exponentes*  $\left\{ \begin{array}{c} i = 10, j = 9 \\ \vee \\ i = 9, j = 10 \end{array} \right\}$

$\star^2$ : porque estoy multiplicando el mismo polinomio,  $a_i = b_i$ . Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

$\star^3$ : Idem  $\star^1$  para el polinomio  $f$

*grado:* 19

## 2. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → .

## 3. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → .

### 4. Hallar el cociente y el resto de la división de $f$ por $g$ en los casos

- i)  $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$  y  $g = X^2 + 2$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ ,  
 ii)  $f = 4X^4 + X^3 - 4$  y  $g = 2X^2 + 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$  y  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$ ,  
 iii)  $f = X^n - 1$  y  $g = X - 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$  y  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

$$\begin{array}{r} \text{i) } \begin{array}{r} 5X^4 + 2X^3 - X + 4 \\ - 5X^4 \phantom{- 10X^2} \\ \hline 2X^3 - 10X^2 - X + 4 \\ - 2X^3 \phantom{- 10X^2} \\ \hline - 10X^2 - 5X + 4 \\ 10X^2 \phantom{- 5X} + 20 \\ \hline - 5X + 24 \end{array} \bigg| \begin{array}{l} X^2 + 2 \\ 5X^2 + 2X - 10 \end{array} \end{array}$$

Resultado válido para  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$

$$\begin{array}{r} \text{ii) } \begin{array}{r} 4X^4 + X^3 - 4 \\ - 4X^4 \phantom{- 2X^2} \\ \hline X^3 - 2X^2 - 4 \\ - X^3 \phantom{- 2X^2} - \frac{1}{2}X \\ \hline - 2X^2 - \frac{1}{2}X - 4 \\ 2X^2 \phantom{- \frac{1}{2}X} + 1 \\ \hline - \frac{1}{2}X - 3 \end{array} \bigg| \begin{array}{l} 2X^2 + 1 \\ 2X^2 + \frac{1}{2}X - 1 \end{array} \end{array}$$

Resultado válido para  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$

$$\text{En } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2 + 1) \cdot \underbrace{(2X^2 + 4X + 6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X + 4)}_{r[X]}$$

- iii) Después de hacer un par iteraciones en la división asoma la idea de que:

$$X^n - 1 = (X - 1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} X^j}_{q[X]} + \underbrace{0}_{r[X]}, \quad (\text{que es la geométrica con } X \neq 1)$$

$$\text{Inducción: Quiero probar que } p(n) : X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Caso base: } p(1) : X^1 - 1 = (X - 1) \underbrace{\sum_{j=0}^{1-1} X^j}_{X^0=1} \Rightarrow p(1) \text{ es Verdadero} \quad \checkmark$$

*Paso inductivo:*

$$\underbrace{p(k) : X^k - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j \text{ es Verdadera}}_{HI} \stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1) : X^{k+1} - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j \text{ es Verdadera}$$

$$(X - 1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j = (X - 1) \cdot \left( \sum_{j=0}^{k-1} X^j + X^k \right) = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j + \underbrace{(X - 1) \cdot X^k}_{HI} = X^k - 1 + X^{k+1} - X^k = X^{k+1} - 1 \quad \checkmark$$

Dado que  $p(1)$ ,  $p(k)$  y  $p(k+1)$  resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera  $p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5. Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que

- i)  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  sea divisible por  $X^2 + aX + 1$ ,
- ii)  $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$  sea divisible por  $X^2 + X + 1$ ,
- iii) El resto de la división de  $X^5 - 3X^3 - x^2 - 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$  sea  $-8X + 4$ .

i) Haciendo la division de  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$ , se tiene que:

$$X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = (X - a + 2)(X^2 + aX + 1) + \underbrace{(a^2 - 2a + 1)X + a - 1}_{\text{resto}}$$

Así, para que  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  sea divisible por  $X^2 + aX + 1$  tiene que ocurrir que el resto sea 0.  
O sea,

$$\begin{aligned} X^2 + aX + 1 \mid X^3 + 2X^2 + 2X + 1 &\iff (a^2 - 2a + 1)X + a - 1 = 0 \\ &\iff \begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a - 1 = 0 \iff a = 1$
- $a^2 - 2a + 1 = 0 \xrightarrow{a=1} 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \quad \checkmark$

Luego, el valor de  $a \in \mathbb{C}$  tal que  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  es divisible por  $X^2 + aX + 1$  es  $\boxed{a = 1}$ .

ii) 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

iii) Haciendo la division de  $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$ , se tiene que:

$$X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1 = q(X^2 + aX + 1) + \underbrace{r}_{\text{resto}}$$

con  $q = (X^3 - aX^2 + (a^2 - 4)X - a^3 + 5a - 1)$  y  $r = (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2$ .

Así,

$$\begin{aligned} r &= -8X + 4 \\ \iff (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2 &= -8X + 4 \\ \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases} &\iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0 \\ a^3 - 5a - 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a^3 - 5a - 2 = 0 \iff a(a^2 - 5) - 2 = 0$

Veó que  $a = -2$  es solución, por lo que divido  $a^3 - 5a - 2$  por  $a + 2$  con Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

Por lo que  $a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a^2 - 2a - 1)$

Busco las raíces de  $a^2 - 2a - 1$  con la fórmula resolvente:

$$\begin{aligned} a_{+,-} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Por lo que  $a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a - 1 + \sqrt{2})(a - 1 - \sqrt{2}) = 0 \iff \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 + \sqrt{2} \\ a = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

- $a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0$

Me fijo que valores de  $a$  obtenidos antes verifican:

- Si  $a = -2 \Rightarrow (-2)^4 - 6(-2)^2 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0 \quad \checkmark$
- Si  $a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^4 - 6(1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 10 = 10 + \sqrt{2} \neq 0$
- Si  $a = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow (1 - \sqrt{2})^4 - 6(1 - \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2} + 10 = 10 - \sqrt{2} \neq 0$

Luego, el único valor de  $a \in \mathbb{C}$  tal que el resto de dividir a  $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$  sea  $-8X + 4$  es  $\boxed{a = -2}$

**6. Definición:** Sea  $K$  un cuerpo y sea  $h \in \mathbb{K}[X]$  un polinomio no nulo. Dados  $f, g \in \mathbb{K}[X]$ , se dice que  $f$  es congruente a  $g$  módulo  $h$  si  $h \mid f - g$ . En tal caso se escribe  $f \equiv g \pmod{h}$ .

- Probar que  $\equiv \pmod{h}$  es una relación de equivalencia en  $\mathbb{K}[X]$ .
- Probar que si  $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$  y  $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$  entonces  $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$  y  $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$ .
- Probar que si  $f \equiv g \pmod{h}$  entonces  $f^n \equiv g^n \pmod{h}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Probar que  $r$  es el resto de la división de  $f$  por  $h$  si y solo si  $f \equiv r \pmod{h}$  y  $r = 0$  o  $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$ .

i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*,

- *reflexiva*: Es  $f$  congruente a  $f$  módulo  $h$ ?

$$f \equiv f(h) \iff h \mid f - f = 0 \iff h \mid 0 \quad \checkmark$$

- *simétrica*: Si  $f \equiv g(h) \stackrel{?}{\iff} g \equiv f(h)$

$$f \equiv g(h) \iff h \mid f - g \iff h \mid -(g - f) \iff h \mid g - f \iff g \equiv f(h) \quad \checkmark$$

- *transitiva*: Si  $\begin{cases} f \equiv g(h) \\ g \equiv p(h) \end{cases} \stackrel{?}{\iff} f \equiv p(h)$ .

$$\begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid g - p \end{cases} \xrightarrow[F_2]{F_1 + F_2} \begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid f - p \end{cases} \rightarrow f \equiv p(h) \quad \checkmark$$

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en  $\mathbb{K}[X]$

ii) Si  $\begin{cases} f_1 \equiv g_1(h) \\ f_2 \equiv g_2(h) \end{cases} \star^1$

$$f_1 \equiv g_1(h) \iff h \mid f_1 - g_1 \Rightarrow h \mid f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2(h) \stackrel{\star^1}{\iff} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2(h)$$

iii) *Inducción*: Quiero probar  $p(n) : \text{Si } f \equiv g(h) \text{ entonces } f^n \equiv g^n(h) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$ .

*Caso base*:  $p(1) : f^1 \equiv g^1(h) \star^2$  Verdadera  $\checkmark$

*Paso inductivo*:  $p(k) : \underbrace{f^k \equiv g^k(h)}_{HI} \text{ es verdadera } \stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1) : f^{k+1} \equiv g^{k+1}(h) \text{ ¿También lo es?}$

$$f^k \equiv g^k(h) \iff h \mid f^k - g^k \Rightarrow h \mid f \cdot (f^k - g^k) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^k(h) \stackrel{\star^2}{\iff} f^{k+1} \equiv g^{k+1}(h) \quad \checkmark$$

Finalmente  $p(1), p(k), p(k+1)$  resultaron verdaderas y por el principio de inducción  $p(n)$  es verdadera  $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  📧, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  🔄.

7. Hallar el resto de la división de  $f$  por  $g$  para:

- $f = X^{353} - X - 1$  y  $g = X^{31} - 2$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ ,
- $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$  y  $g = X^6 + 1$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$  y  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$
- $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$ , y  $g = X^{100} - X + 1$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ ,
- $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$ , y  $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$  (Sugerencia ver 4. iii)).

i)  $g \mid g \iff X^{31} - 2 \equiv 0 \iff X^{31} \equiv 2(g)$

$$f = X^{353} - X - 1 = \underbrace{(X^{31})^{11}}_{\equiv_2} X^{12} - X - 1 \stackrel{(g)}{\equiv_2} 2^{11} X^{12} - X - 1 \rightarrow \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} - 1}$$



$$\text{ii) } g \mid g \iff X^6 + 1 \equiv 0 \pmod{X^6 + 1} \iff X^6 \equiv -1 \pmod{g}$$

$$f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166} X^4 + (X^6)^6 X^4 + (X^6)^3 X^2 + 1 \stackrel{(g)}{\equiv} X^4 + X^4 - X^2 + 1 = 2X^4 - X^2 + 1$$

$$\rightarrow \boxed{r_g(f) = 2X^4 - X^2 + 1}$$

$$\text{¿Qué onda en } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}? \rightarrow \begin{cases} \text{si } p = 2 \rightarrow \boxed{X^2 + 1} \\ \text{si } p > 2 \rightarrow \boxed{2X^4 + (p-1)X^2 + 1} \end{cases}$$

$$\text{iii) } g \mid g \iff X^{100} - X + 1 \equiv 0 \pmod{X^{100} - X + 1} \iff X^{100} \equiv X - 1 \pmod{g}$$

$$f = X^{200} - 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 - 3X^{100}X + 2 \stackrel{(g)}{\equiv} (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2$$

$$\rightarrow \boxed{r_g(f) = (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2}$$

$$\text{iv) Usando la sugerencia: Del ejercicio 4. iii) sale que } X^n - 1 = (X-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

$$\xrightarrow[\text{para el } g]{n=5} X^5 - 1 = (X-1) \underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_g \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)} \pmod{g} \quad \checkmark$$

$$f = (X^5)^{603} X + 2(X^5)^{366} X^3 - (X^5)^{34} X^4 + (X^5)^{27} X^2 + 2X^4 - X^3 + 1$$

$$f \equiv \underbrace{X + 2X^3 - X^4 + X^2 + 2X^4 - X^3 + 1}_=X^4+X^3+X^2+X+1=g \pmod{g} \iff \boxed{f \equiv 0 \pmod{g}}$$

## 8. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

9. Calcular el máximo común divisor entre  $f$  y  $g$  en  $\mathbb{Q}[X]$  y escribirlo como combinación polinomial de  $f$  y  $g$  siendo:

$$\text{i) } f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, g = X^4 - X^3 - X^2 + 1,$$

$$\text{ii) } f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, g = X^3 + X,$$

$$\text{iii) } f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1, g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1,$$

$$\text{i) } \begin{array}{r|l} X^5 & X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ -X^5 + X^4 & + X^3 \\ \hline X^4 + 2X^3 - 6X^2 & + X + 2 \\ -X^4 + X^3 & + X^2 \\ \hline 3X^3 - 5X^2 & + X + 1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Euclides}} (f : g) = (g : 3X^3 - 5X^2 + X + 1)$$

$$\xrightarrow[\text{en función de } g]{\text{escribo a } f} f = (X+1) \cdot g + 3X^3 - 5X^2 + X + 1$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 - X^3 - X^2 & + 1 \\ -X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X & \\ \hline \frac{2}{3}X^3 - \frac{4}{3}X^2 - \frac{1}{3}X & + 1 \\ -\frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9} & \\ \hline -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3X^3 - 5X^2 + X + 1 & -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\
-3X^3 - \frac{15}{2}X^2 + \frac{21}{2}X & -\frac{27}{2}X + \frac{225}{4} \\
\hline
-\frac{25}{2}X^2 + \frac{23}{2}X + 1 & \\
-\frac{25}{2}X^2 + \frac{125}{4}X - \frac{175}{4} & \\
\hline
\frac{171}{4}X - \frac{171}{4} & \\
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \\
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X & -\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \\
\hline
-\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} & \\
-\frac{7}{9}X - \frac{7}{9} & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 &= (X^4 - X^3 - X^2 + 1) \cdot (X + 1) + (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \\
X^4 - X^3 - X^2 + 1 &= (3X^3 - 5X^2 + X + 1) \cdot \left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \\
3X^3 - 5X^2 + X + 1 &= \left(-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{27}{2}X + \frac{225}{4}\right) + \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \\
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} &= \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539}\right) + 0
\end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico  $\rightarrow (f : g) = X - 1$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } X^6 + X^4 + X^2 + 1 &= (X^3 + X) \cdot X^3 + (X^2 + 1) \\
X^3 + X &= (X^2 + 1) \cdot X + 0
\end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico  $\rightarrow (f : g) = X^2 + 1$

El MCD escrito como combinación polinomial de  $f$  y  $g \rightarrow X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)$

iii)  $\xrightarrow[\text{Euclides}]{\text{Haciendo}}$

$$\begin{aligned}
2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1 &= (X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1) \cdot 2X + (X^4 + 2X + 1) \\
X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1 &= (X^4 + 2X + 1) \cdot (X - 2) + 3 \\
X^4 + 2X + 1 &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) + 0
\end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico  $\rightarrow (f : g) = 1$

El MCD escrito como combinación polinomial de  $f$  y  $g \rightarrow 1 = \frac{1}{3}g \cdot (2X^2 - 4X + 1) - \frac{1}{3}f \cdot (X - 2)$

**10.** Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  tal que  $f(1) = -2, f(2) = 1$  y  $f(-1) = 0$ . Hallar el resto de la división de  $f$  por  $X^3 - 2X^2 - X + 2$ .

Sea  $P \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow$  el resto de dividir a  $P$  por  $X - a$  es  $P(a)$ .

$f(X) = q(X) \cdot \underbrace{X^3 - 2X^2 - X + 2}_{g(X)} + r(X)$ , con  $g(X) = (X - 2) \cdot (X - 1) \cdot (X + 1)$  y  $r(X) = a^2 + bX + c$ , ya

$$\text{que el } \text{gr}(r) < \text{gr}(g) \xrightarrow{\text{evaluar}} \begin{cases} f(1) = -2 = q(1) \cdot \cancel{g(1)}^0 + r(1) = -2 \\ f(2) = 1 = q(2) \cdot \cancel{g(2)}^0 + r(2) = 1 \\ f(-1) = 0 = q(-1) \cdot \cancel{g(-1)}^0 + r(-1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array} \right) \rightarrow \boxed{r(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{7}{3}}$$

11. Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Hallar el resto de la división de  $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$  por  $X^3 - X$  en  $\mathbb{Q}[X]$ .

$$\begin{cases} f(X) = X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1 \\ g(X) = X \cdot (X-1) \cdot (X+1) \end{cases} \Rightarrow f = q(X) \cdot g(X) + r(X) \text{ con } \text{gr}(\underbrace{aX^2 + bX + c}_{r(X)}) \leq 2$$

$$\begin{cases} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_{=0} + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_{=0} + r(1) = 3 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_{=0} + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 = \begin{cases} 2 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

sistema de ecuaciones de  $r(X)$   $\rightarrow \begin{cases} r(0) = c = 1 \\ r(1) = a + b + 1 = 3 \rightarrow a + b = 2 \\ r(-1) = a - b + 1 = \begin{cases} 2 \rightarrow a - b = 1 & n \text{ impar} \\ 1 \rightarrow a - b = 0 & n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$

$$\begin{cases} \xrightarrow{n \text{ impar}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \rightarrow \boxed{r_{\text{impar}}(X) = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1} \quad \checkmark \\ \xrightarrow{n \text{ par}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \boxed{r_{\text{par}}(X) = X^2 + X + 1} \quad \checkmark \end{cases}$$

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio  $f(X) = X^6 + X^3 - 2$ .

Primera raíz:  $f(\alpha_1 = 1) = 0 \rightarrow f(X) = q(X) \cdot (X - 1)$ . Busco  $q(X)$  con algoritmo de división.

$$\begin{array}{r} X^6 \phantom{+ X^5} + X^3 \phantom{+ X^2} - 2 \phantom{+ X} \bigg| X - 1 \\ - X^6 + X^5 \phantom{+ X^4} \phantom{+ X^3} \phantom{+ X^2} \phantom{+ X} \phantom{+ 2} \\ \hline X^5 \phantom{+ X^4} \phantom{+ X^3} \phantom{+ X^2} \phantom{+ X} \phantom{+ 2} \\ - X^5 + X^4 \phantom{+ X^3} \phantom{+ X^2} \phantom{+ X} \phantom{+ 2} \\ \hline X^4 \phantom{+ X^3} \phantom{+ X^2} \phantom{+ X} \phantom{+ 2} \\ - X^4 \phantom{+ X^3} \phantom{+ X^2} \phantom{+ X} \phantom{+ 2} \\ \hline 2X^3 \phantom{+ X^2} \phantom{+ X} \phantom{+ 2} \\ - 2X^3 + 2X^2 \phantom{+ X} \phantom{+ 2} \\ \hline 2X^2 \phantom{+ X} \phantom{+ 2} \\ - 2X^2 + 2X \phantom{+ 2} \\ \hline 2X - 2 \\ - 2X + 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

El cociente  $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$  se puede factorizar en grupos como  $q(X) = (X^2 + X + 1) \cdot (X^3 + 2)$ . Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener  $f \in \mathbb{C}[X]$  salen de esos dos polinomios.

$$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X^3 + 2 = 0 \xrightarrow[X = re^{i\theta}]{\text{exponencial}} \left\{ \begin{array}{l} r^3 = 2 \rightarrow r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ con } k = 0, 1, 2. \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \alpha_5 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ \alpha_6 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

**13.** Sea  $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ . Probar que  $w + w^2 + w^4$  es raíz del polinomio  $X^2 + X + 2$

---

Voy a usar que si  $w \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^6 w^j = 0 \quad (w \neq 1)$

Si  $f(X) = X^2 + X + 2$  y  $w + w^2 + w^4$  es raíz  $\Rightarrow f(w + w^2 + w^4) = 0$

$$(w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8}_{=w} + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2 \cdot \sum_{j=0}^6 w^j = 0 \quad \checkmark$$

**14.**

i) Probar que si  $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$ , entonces  $X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})]$ .

ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de  $\cos(\frac{2\pi}{5})$ .

---

i) Voy a usar que si  $w \in G_5 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^4 w^j = 0 & (w \neq 1) \star^2 \\ w^k = w^{r_5(k)} \star^1 \end{cases}$

$$X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})] = X^2 - (w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + \underbrace{(w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\star^1} =$$

$$= X^2 - X(\underbrace{w^2 + w^{-2} + w + w^{-1}}_{\star^1}) + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2} =$$

$$= X^2 - X(\underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2}) + \underbrace{-1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = X^2 - X(\underbrace{-1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0}) - 1 =$$

$$= X^2 + X - 1 \quad \checkmark$$

ii) Calculando las raíces a mano de  $X^2 + X - 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Pero del resultado del inciso i) tengo que :

$$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow[\text{la factorización es}]{\text{sé que una raíz dada}} w + w^{-1} = w + \bar{w} = 2\operatorname{Re}(w) = 2 \cdot \underbrace{\cos(\frac{2\pi}{5})}_{\cos \theta \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$$

**15.**

i) Sean  $f, g \in \mathbb{C}[X]$  y sea  $a \in \mathbb{C}$ . Probar que  $a$  es raíz de  $f$  y  $g$  si y sólo si  $a$  es raíz de  $(f : g)$ .

ii) Hallar todas las raíces complejas de  $X^4 + 3X - 2$  sabiendo que tiene una raíz en común con  $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$ .

---

i) **Hacer!**

ii) Busco el  $(f : g)$ :

$$\begin{aligned} X^4 + 3X - 2 &= (X^4 + 3X^3 - 3X + 1) \cdot 1 + (-3X^3 + 6X - 3) \\ X^4 + 3X^3 - 3X + 1 &= (-3X^3 + 6X - 3) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - 1\right) + (2X^2 + 2X - 2) \\ -3X^3 + 6X - 3 &= (2X^2 + 2X - 2) \cdot \left(-\frac{3}{2}X + \frac{3}{2}\right) + 0 \\ (f : g) &= X^2 + X - 1 \xrightarrow{\text{raíces}} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ X^4 + 3X - 2 &= (X^2 + X - 1) \cdot (X^2 - X + 2) + 0 \end{aligned}$$

**16.** Determinar la multiplicidad de  $a$  como raíz de  $f$  en los casos

i)  $f = X^5 - 2X^3 + X$ ,  $a = 1$ ,

ii)  $f = X^6 - 3X^4 + 4$ ,  $a = i$ ,

iii)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1)$ ,  $a = 2$ ,

iv)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3$ ,  $a = 2$ .

i)  $f = X^5 - 2X^3 + X$ ,  $a = 1$ ,

Todos casos de factorización:

$$f = X^5 - 2X^3 + X = X(X^4 - 2X^2 + 1) = X(X^2 - 1)^2 = X(X - 1)^2(X + 1)^2 =$$

La multiplicidad de  $a = 1$  como raíz es 2.

ii)  $f = X^6 - 3X^4 + 4$ ,  $a = i$ ,

Si  $a = i$  es raíz, entonces  $-i$  también lo es en un polinomio  $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{r|l} X^6 - 3X^4 & + 4 \quad \left| \begin{array}{l} X^2 + 1 \\ X^4 - 4X^2 + 4 \end{array} \right. \\ - X^6 - X^4 & \\ \hline - 4X^4 & \\ 4X^4 + 4X^2 & \\ \hline 4X^2 + 4 & \\ - 4X^2 - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$f = (X^2 + 1)(X^4 - 4X^2 + 4) = (X^2 + 1)(X^2 - 2)^2 = (X^2 + 1)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 = (X - i)^1(X + i)^1(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 =$$

La multiplicidad de  $a = i$  como raíz de  $f$  es 1.

iii)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) + (X - 2)^3(X - 1)$ ,  $a = 2$ ,  
 $f = (X - 2)^3((X + 2) + (X + 1)) = (X - 2)^3(2X + 3)$

La multiplicidad de  $a = 2$  como raíz de  $f$  es 3.

iv)  $f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3$ ,  $a = 2$ ,

$$f = (X - 2)^2(X^2 - 4) - 4(X - 2)^3 = (X - 2)^2(X - 2)(X + 2) - 4(X - 2)^3 = (X - 2)^3(X + 2 - 4) = (X - 2)^4$$

La multiplicidad de  $a = 2$  como raíz de  $f$  es 4.

**17.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que  $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$  tiene solo raíces simples en  $\mathbb{C}$ .

$$f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$$

$$\xrightarrow{\text{derivo}} f' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} \xLeftrightarrow{n>0} f' = n(n+1)X^{n-1}(X-1)$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n > 1 \Rightarrow f'(\alpha=1) = 0 \text{ y } f'(\alpha=0) = 0 \\ n = 1 \Rightarrow f'(\alpha=1) = 0 \star^1 \end{cases}$$

Para que las raíces  $\alpha$ , de  $f$  no sean simples, es necesario que  $f'(\alpha) = 0$ . Por lo tanto, estudio solo los valores de raíces encontrados para la derivada. Si  $f$  ha de tener raíces dobles, estás deberían ser  $\alpha = 1$  o  $\alpha = 0$ .

Entonces:

$$\begin{cases} f(\alpha=1) = a-1 \Rightarrow f(1) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \neq 1 \\ f(\alpha=0) = a \Rightarrow f(0) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$$

Si  $a = 0 \wedge n \star^1 = 1 \Rightarrow f$  tiene solo una raíz simple en 0.

Si  $a \neq 1 \Rightarrow f$  tiene solo raíces simples  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Si  $a \neq 0 \wedge n > 1 \Rightarrow f$  tiene solo raíces simples.

seguramente hay una mejor forma de expresar la respuesta.

## 18. Controlar y Pasar

**19.** Sea  $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$ . Determinar todos los valores de  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales  $f$  admite una raíz múltiple en  $\mathbb{C}$ . Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene  $f$  y la multiplicidad de cada una de ellas.

Si  $f$  tiene raíces múltiples  $\alpha_k \Leftrightarrow f(\alpha_k) = f'(\alpha_k) = 0$ , por lo tanto tanto comienzo buscando las raíces de  $f'$  para sacarme ese  $a$  de en medio.

$$f' = 20X^{19} + 80X^9 = 20X^9(X^{10} + 4) \Rightarrow f' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X^{10} = -4 \Leftrightarrow X = \sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi} \quad k \in \mathbb{Z}_{[0,9]} \end{cases}$$

Hay de momento 11 raíces de  $f'$ . Me interesa saber si son raíces de  $f$ :

$$f(0) = 2a \Rightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$f = (X^{10})^2 + 8X^{10} + 2a \Rightarrow f(\alpha = X^{10} = -4) = (-4)^2 + 8(-4) + 2a = -16 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 8$$

Entonces:

$$\text{Si } a = 0 \Rightarrow f = X^{10}(X^{10} + 8)$$

$$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X = 0 \quad \text{o} \quad X^{10} = -8, \text{ donde } \boxed{\mu(0; f) = 10} \text{ y } \boxed{\mu(\sqrt[10]{8}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}; f) = 1 \quad k \in \mathbb{Z}_{[0,9]}}.$$

11 raíces distintas.

$$\text{Si } a = 8 \Rightarrow f = X^{20} + 8X^{10} + 16 = (X^{10} + 4)^2$$

$$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X^{10} = -4, \text{ donde } \boxed{\mu(\sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}; f) = 2 \quad k \in \mathbb{Z}_{[0,9]}}.$$

10 raíces distintas.

## 20. 🤔... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow$  , o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  $\rightarrow$  .

## 21.

i) Probar que para todo  $a \in \mathbb{C}$ , el polinomio  $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$  es divisible por  $(X-1)^2$ .

ii) Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales  $f$  es divisible por  $(X - 1)^3$ .

i)  $(X - 1)^2 \mid f \quad \forall a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow 1$  es *por lo menos* raíz doble de  $f \Leftrightarrow f(1) = f'(1) = 0$ .

$$\begin{cases} f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1 & \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \\ f' = 6X^5 - 10X^4 + 4(1+a)X^3 - 6aX^2 + 2(1+a)X - 2 & \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f'(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Calculando  $f(1)$  y  $f'(1)$  se comprueba. ✓

ii)  $(X - 1)^3 \mid f \Leftrightarrow f''(1) = 0$

$$\Rightarrow f'' = 30X^4 - 40X^3 + 12(1+a)X^2 - 12aX + 2(1+a) \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f''(1) = 2a$$

$$\Rightarrow f''(1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\boxed{(X - 1)^3 \mid f \Leftrightarrow a = 0} \quad \checkmark$$

Observar que si  $a \neq 0$ , 1 es una raíz *doble* de  $f$  de otra forma es una raíz *por lo menos triple*.

22. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram → 📩, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 📄.

23. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram → 📩, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 📄.

24. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram → 📩, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 📄.

25. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram → 📩, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 📄.

26. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram → 📩, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 📄.

27. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram → 📩, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 📄.

28. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram → 📩, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 📄.

29. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram → 📩, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 📄.

30. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram → 📩, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 📄.

31. 🙄... hay que hacerlo! 🙄

Si querés mandarlo: Telegram → 📩, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 📄.

**32.** 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 🐙.

**33.** 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 🐙.

**34.** 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 🐙.

**35.** 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 🐙.

**36.** 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 🐙.

**37.** 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 🐙.

**38.** 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 🐙.

**39.** 🤨... hay que hacerlo! 🤨

Si querés mandarlo: Telegram → 📎, o mejor aún si querés subirlo en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X → 🐙.



## Ejercicios extras:

### 1.

- a) Hallar todos los posibles  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{c} > 0$  tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento  $\frac{3\pi}{2}$

- b) Para cada valor de  $\mathbf{c}$  hallado, factorizar  $f$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ , sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

- a) Si la raíz  $\alpha = re^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) \Rightarrow f(r(-i)) = 0$

Voy a usar que:  $\star^1 \left\{ \begin{array}{l} (-i)^2 = -1 \\ (-i)^3 = i \\ (-i)^4 = 1 \\ (-i)^5 = -i \\ (-i)^6 = -1 \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} f(r(-i)) &= (r(-i))^6 - 4(r(-i))^5 - (r(-i))^4 + 4^3 + 4(r(-i))^2 + 48(r(-i)) + \mathbf{c} = \star^1 \\ -r^6 + 4r^5i - r^4 - 4r^3i - 4r^2 - 48ri + \mathbf{c} &= 0 \iff \begin{cases} \text{Re} : -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 \\ \text{Im} : r(4r^4 - 4r^2 - 48) = 0 \xrightarrow[r^2 = y \text{ y } r \in \mathbb{R}_{>0}]{\text{bicuadrática}} r^2 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto si  $\mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 = (r^2)^3 + (r^2)^2 + 4r^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{c} = 48} \quad \checkmark$   
con raíces  $\pm\sqrt{3}i$  dado que  $f \in \mathbb{Q}[X]$

- b) Debe ocurrir que  $(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$

$$\begin{array}{r|l} X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48 & X^2 + 3 \\ -X^6 & \\ \hline & -3X^4 \\ & -4X^5 - 4X^4 + 4X^3 \\ & 4X^5 & +12X^3 \\ \hline & -4X^4 + 16X^3 + 4X^2 \\ & 4X^4 & +12X^2 \\ \hline & 16X^3 + 16X^2 + 48X \\ & -16X^3 & -48X \\ \hline & 16X^2 & +48 \\ & -16X^2 & -48 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$f = (X^2 + 3) \underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_q$  como  $f$  tiene al menos una raíz doble puedo ver las raíces de la derivada de  $q$ :

$$q' = (4X^3 - 12X^2 - 8X + 16)' = 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 4) = 0 \xrightarrow[\pm 1, \pm 2, \pm 4]{\text{Posibles raíces, Gauss :}} q'(1) = 0, \text{ pero } g(\star^1) \neq 0 \Rightarrow f(1) \neq 0$$

$$\begin{array}{r}
 \xrightarrow[\text{bajar grado}]{\text{divido para}} \\
 \begin{array}{r}
 X^3 - 3X^2 - 2X + 4 \quad | \quad X - 1 \\
 -X^3 + X^2 \\
 \hline
 -2X^2 - 2X \\
 2X^2 - 2X \\
 \hline
 -4X + 4 \\
 4X - 4 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$g' = 4(X-1) \underbrace{(X^2 - 2X - 4)}_{=h} \xrightarrow[\text{de } h]{\text{busco raíces}} X^2 - 2X - 4 = 0 \iff \alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$h = (X - (1 + \sqrt{5})) \cdot (X - (1 - \sqrt{5})) = X^2 - 2X - 4$  Para calcular que  $f(\alpha_1) = g(\alpha_1) = 0$  y comprobar que es una raíz doble, puedo hacer:

$$\begin{array}{r}
 X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 \quad | \quad X^2 - 2X - 4 \checkmark g = \\
 -X^4 + 2X^3 + 4X^2 \\
 \hline
 -2X^3 + 16X \\
 2X^3 - 4X^2 - 8X \\
 \hline
 -4X^2 + 8X + 16 \\
 4X^2 - 8X - 16 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$h^2 = (X^2 - 2X - 4)^2 \rightarrow \text{no la vi venir}$$

factorizaciones:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Q}[X] & \rightarrow f = (X^2 + 3)(X^2 + 3)(X^2 - 2X - 4)^2 \\ \mathbb{R}[X] & \rightarrow f = (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))(X^2 - 2X - 4)^2 \\ \mathbb{C}[X] & \rightarrow f = (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))(X - 3i)^2(X + 3i)^2 \end{array} \right. \quad \checkmark$$

**2.** Factorizar el polinomio  $P = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49$  como producto de irreducibles en  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{Q}[X]$  sabiendo que  $\sqrt{7}$  es una raíz múltiple.

Un polinomio con coeficientes racionales, y una raíz irracional  $\alpha = \sqrt{7}$ , tendrá también al *conjugado irracional*<sup>1</sup>,  $\bar{\alpha} = -\sqrt{7}$

Si agregamos la información de que  $\sqrt{7}$  es *por lo menos* raíz doble, obtenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow (X^2 - 7) \mid f \\ \sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow (X^2 - 7)^2 = X^4 - 14X^2 + 49 \mid f \end{array} \right. \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{r}
 X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49 \quad | \quad X^4 - 14X^2 + 49 \\
 -X^6 + X^5 + 14X^4 - 49X^2 \\
 \hline
 -X^5 + X^4 + 14X^3 - 14X^2 - 49X \\
 X^5 - 14X^3 + 49X \\
 \hline
 X^4 - 14X^2 + 49 \\
 -X^4 + 14X^2 - 49 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X^2 - X + 1) \xrightarrow{\text{resolvente}} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{+,-} = \frac{1 \pm w}{2} \\ w^2 = -3 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$$

<sup>1</sup>Estoy usando la misma notación para *conjugado racional* y *conjugado complejo*. ¿Está bien? No sé, no me importa mientras se entienda.

$$\begin{cases} \mathbb{Q}[X] \rightarrow f = (X^2 + 7)^2(X^2 - X + 1) \\ \mathbb{R}[X] \rightarrow f = (X + \sqrt{7})^2(X - \sqrt{7})^2(X^2 - X + 1) \\ \mathbb{C}[X] \rightarrow f = (X + \sqrt{7})^2(X - \sqrt{7})^2(X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{cases}$$

**3.** Hallar **todos** los polinomios **mónicos**  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

- i)  $1 - \sqrt{2}$  es raíz de  $f$ ;
- ii)  $X(X - 2)^2 \mid (f : f')$ ;
- iii)  $(f : X^3 - 1) \neq 1$ ;
- iv)  $f(-1) = 27$ ;

- i) Como  $f \in \mathbb{Q}[X]$  si  $\alpha_1 = 1 - \sqrt{2}$  es raíz entonces  $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$  para que no haya coeficientes irracionales en el polinomio.

$$(X - (1 - \sqrt{2})) \cdot (X - (1 + \sqrt{2})) = X^2 - 2X - 1$$

Por lo tanto  $X^2 - 2X - 1$  será un factor de  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

- ii) Si  $X(X - 2)^2 \mid (f : f') \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \text{ raíz simple de } f' \Rightarrow \text{ raíz doble de } f \\ \alpha_4 = 2 \text{ raíz simple de } f' \Rightarrow \text{ raíz doble de } f \end{cases}$  Por lo tanto  $X^2(X - 2)^3$  serán factores de  $f$ .

- iii) Si  $(f : X^3 - 1) \neq 1$  quiere decir que por lo menos alguna de las 3 raíces de:  
 $X^3 - 1 = (X - 1) \cdot (X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \cdot (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))$  tiene que aparecer en la factorización de  $f$ .  
 Pero parecido al ítem i) si tengo una raíz compleja, también necesito el conjugado complejo, para que no me queden coeficientes de  $f$  en complejos,  
 $X^3 - 1 = (X - 1) \cdot (X^2 + X + 1)$ , me quedaría con el *factor de menor grado* si eso no rompe otras condiciones.

Por lo tanto  $(X - 1)$  o  $(X^2 + X + 1)$  aparecerá en la factorización de  $f$ .

- iv)  $f(-1) = 27$ . Hasta el momento:

$$\begin{cases} f_1 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X^2 + X + 1) \rightarrow f_1(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot 1 = -54 \\ f_2 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \rightarrow f_2(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot (-2) = 108 \end{cases}$$

, ninguno cumple la condición iv).

Para encontrar *un* polinomio que cumpla lo pedido tomaría el  $f_2$  que tiene **menor grado** de los dos y lo multiplicaría por  $(X - \frac{3}{4})$  de manera que  $f = (X^2 - 2X - 1) \cdot X^2 \cdot (X - 2)^3 \cdot (X - 1) \cdot (X - \frac{3}{4}) \rightarrow \boxed{f(-1) = 27}$  así cumpliendo todas las condiciones.

**4.** Factorizar como producto de polinomios irreducibles en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$  al polinomio

$$f = X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15$$

sabiendo  $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$

Si el  $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$ , esto nos da información sobre *raíces comunes* entre  $f$  y  $X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5$ . Puedo hacer el algoritmo de Euclides para encontrar el MCD, con esa o esas raíces. El último resto no nulo hecho mónico será el MCD.

$$\begin{aligned} X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 &= (X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \cdot (X + 3) + (-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30) \\ X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5 &= (-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30) \cdot \left(-\frac{1}{10}X + \frac{3}{10}\right) + (14X^2 - 14X + 14) \\ -10X^3 - 20X^2 + 20X - 30 &= (14X^2 - 14X + 14) \cdot \left(-\frac{5}{7}X - \frac{15}{7}\right) + 0 \end{aligned}$$

$(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) = X^2 - X + 1$ . Las raíces del MCD son  $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm w}{2}$  con  $w^2 = 3i$ .

$$X^2 - X + 1 = \left(X - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(X - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \quad \checkmark$$

Por definición de lo que es el MCD sabemos que  $X^2 - X + 1 \mid f$ , haciendo la división bajamos el grado y seguimos buscando las raíces.

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 & X^2 - X + 1 \\ -X^5 + X^4 - X^3 & \\ \hline 3X^4 - 8X^3 - 7X^2 & \\ -3X^4 + 3X^3 - 3X^2 & \\ \hline -5X^3 - 10X^2 + 10X & \\ 5X^3 - 5X^2 + 5X & \\ \hline -15X^2 + 15X - 15 & \\ 15X^2 - 15X + 15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Obtuvimos que  $f = (X^2 - X + 1) \cdot (X^3 + 3X^2 - 5X - 15) + 0$ . Hermoso resultado, donde la hermosura se mide en su simpleza para ser factorizado. Sin usar calculadora ni Gauss ni ninguna cosa extraña podemos expresar a  $f$  como:

$$f \stackrel{!}{=} (X^2 - X + 1) \cdot \underbrace{(X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X + 3)}_{X^3 + 3X^2 - 5X - 15}$$

Si todavía no viste como fue la factorización en **!** te recomiendo que sigas mirando sin tocar calculadora ni ningún tipo de *spoiler del pesado o pesada sabelotodo* que quizás tenés al lado y que no te deja tiempo para pensar. Es puro factoreo que debería salir a ojo.

Ahora factorizamos en irreducibles, que son polinomios mónicos que solo se dividen por sí mismos y por 1. Para tener una mejor explicación [clickeá acá!](#) Y vas a la teoría del apunte.

factorizaciones:

$\mathbb{Q}[X] \rightarrow f = \overbrace{(X^2 - 5)}^{\in \mathbb{Q}[X]} \cdot \overbrace{(X^2 - X + 1)}^{\in \mathbb{Q}[X]} \cdot \overbrace{(X + 3)}^{\in \mathbb{Q}[X]}$	✓
$\mathbb{R}[X] \rightarrow f = \overbrace{(X - \sqrt{5})}^{\in \mathbb{R}[X]} \cdot \overbrace{(X + \sqrt{5})}^{\in \mathbb{R}[X]} \cdot \overbrace{(X^2 - X + 1)}^{\in \mathbb{R}[X]} \cdot \overbrace{(X + 3)}^{\in \mathbb{R}[X]}$	
$\mathbb{C}[X] \rightarrow f = \overbrace{(X + 3)}^{\in \mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X - \sqrt{5})}^{\in \mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X + \sqrt{5})}^{\in \mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{\left(X - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}^{\in \mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{\left(X - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}^{\in \mathbb{C}[X]}$	

**5.** Sea  $(f_n)_{(n \geq 1)}$  la sucesión de polinomios en  $\mathbb{R}[X]$  definida como:

$$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X + 2)^2 f'_n + 3f_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que  $-2$  es raíz doble de  $f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

No caer en la **trampilla** de olvidar que para que una raíz de  $f$  sea doble, i.e.  $\text{mult}(-2; f) \stackrel{!}{=} 2$  debe ocurrir lo "obvio",  $f(-2) = f'(-2) = 0$  y también que  $f''(-2) \neq 0$ . Si olvidamos esto último solo probaríamos

que la mult $(-1; f) \geq 2$  y tendríamos el ejercicio mal 🦴.

Por inducción en  $n$ :  $q(n)$ :  $-2$  es raíz doble de  $f_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: ¿ $q(1)$  es V?

$$\begin{cases} f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} f_1(-2) = 0 \\ f'_1 = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 22X & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} f'_1(-2) = 0 \\ f''_1 = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 22 & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} f''_1(-2) = 22 \neq 0 \end{cases}$$

$\therefore \text{mult}(-2; f_1) = 2 \Rightarrow -2$  es raíz doble de  $f_1 \Rightarrow q(1)$  es V ✓

Paso inductivo: ¿Si  $q(k)$  verdadera  $\Rightarrow q(k+1)$  también lo es,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ?

$$HI: -2 \text{ es raíz doble de } f_k \Leftrightarrow \begin{cases} f_k(-2) = 0 \text{ ★}^1 \\ f'_k(-2) = 0 \text{ ★}^2 \\ f''_k(-2) \neq 0 \text{ ★}^3 \end{cases}$$

QPQ dado  $k \in \mathbb{N}$ ,  $q(k+1)$ :  $-2$  es raíz doble de  $f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (X+2)^2 f'_k + 3f_k$ :

Derivar:

$$\begin{cases} f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (X+2)^2 f'_k + 3f_k \\ f'_{k+1} = 2(X+2)f'_k + (X+2)^2 f''_k + f'_k \\ f''_{k+1} = 2f'_k + (2x+4)f''_k + 2(x+2)f'''_k + (x+2)^2 f''''_k + f''_k \end{cases}$$

Evaluar en  $-2$ :

$$f_{k+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow f_{k+1}(-2) = \cancel{(-2+2)^2} f'_k(-2) + 3f_k(-2) = 0^2 f'_k(-2) + 3f_k(-2) = 3f_k(-2) \stackrel{\text{★}^1}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f'_{k+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow f'_{k+1}(-2) = 2\cancel{(-2+2)} f'_k(-2) + \cancel{(-2+2)^2} f''_k + f'_k(-2) = f'_k(-2) \stackrel{\text{★}^2}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f''_{k+1}(-2) \stackrel{?}{\neq} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''_{k+1}(-2) = 2f'_k(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f''_k(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f''_k(-2) + \\ + \cancel{(-2+2)^2} f''''_k(-2) + f''_k(-2) = 2 \underbrace{f'_k(-2)}_{=0 \text{ ★}^2} + \underbrace{f''_k(-2)}_{\neq 0 \text{ ★}^3} \neq 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$\therefore \text{mult}(-2; f_{k+1}) = 2 \Rightarrow -2$  es raíz doble de  $f_{k+1} \Rightarrow q(k+1)$  es V ✓

Como  $q(1)$ ,  $q(k)$  y  $q(k+1)$  resultaron verdaderas, por principio de inducción  $q(n)$  también lo es  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 6.

- a) Determinar todos los valores de  $n \in \mathbb{N}$  (**positivo**) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

- b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio  $f$  obtenido como producto de irreducibles en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

- a) Determinar todos los valores de  $n \in \mathbb{N}$  (**positivo**) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

**Solución:**

Limpiando los denominadores de  $f$  se obtiene el polinomio  $g$  con las mismas raíces:

$$g = 3X^5 + nX^4 - 8X^3 + 11X^2 - 3X = X \underbrace{(3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3)}_h$$

Por enunciado ignoramos la raíz nula y utilizando el Lema de Gauss buscamos las raíces racionales de

$$h = 3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3$$

Aquí,  $a_0 = -3$  y  $a_n = 3$

$$\text{Div}(a_0) = \text{Div}(a_n) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

Como busco raíces enteras, las busco en el conjunto:

$$\{\pm 1, \pm 3\}$$

Chequeo:

$$\begin{aligned} h(-1) = 0 &\iff n = -19 \notin \mathbb{N} \\ h(1) = 0 &\iff n = -3 \notin \mathbb{N} \\ h(-3) = 0 &\iff \boxed{n=5} \in \mathbb{N} \\ h(3) = 0 &\iff n = \frac{67}{9} \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

**Rta:**  $n = 5$  es el único valor de  $n \in \mathbb{N}$  para los cuales el polinomio  $f$  tiene una raíz entera no nula.

- b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio  $f$  obtenido como producto de irreducibles en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$

**Solución:**

Primero factorizo la raíz nula de  $f$

$$f = X^5 + \frac{5}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X = X(X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1)$$

Se, por el ítem (a), que  $-3$  es una de las raíces racionales de  $f$ . Busco otras posibles raíces racionales en el polinomio  $h$  (con  $n = 5$ ) obtenido en el ítem (a) en el conjunto  $\{\pm \frac{1}{3}\}$

$$h(-\frac{1}{3}) = -\frac{208}{27}$$

$$h(\frac{1}{3}) = 0 \implies \frac{1}{3} \text{ es una raíz racional de } f.$$

Factorizo el polinomio  $f$  dividiéndolo por el producto de las dos raíces encontradas  $(X+3) \cdot (X-\frac{1}{3}) = X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1 & X^2 + \frac{8}{3}X - 1 \\ -X^4 - \frac{8}{3}X^3 + X^2 & \\ \hline -X^3 - \frac{5}{3}X^2 + \frac{11}{3}X & \\ X^3 + \frac{8}{3}X^2 - X & \\ \hline X^2 + \frac{8}{3}X - 1 & \\ -X^2 - \frac{8}{3}X + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Factorizo el polinomio cuadrático  $X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$


$$x_+ = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \text{ y } x_- = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$$

**Rta:**

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X-(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \in \mathbb{C}$  con todos sus factores de multiplicidad 1 y por lo tanto **irreducibles**.

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2 - X + 1) \in \mathbb{R}$  con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto **irreducibles** en  $\mathbb{R}$ .

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2 - X + 1) \in \mathbb{Q}$  con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto **irreducibles** en  $\mathbb{Q}$ .

 **7.** Determinar un polinomio  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo que satisfaga simultáneamente:

- $f$  es mónico,
- $\text{gr}(f : 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11) = 2$
- $f$  tiene una raíz  $z \in G_3$  con  $z \neq 1$ , que es doble,
- $f(0) = 33$ ;

El dato de  $\text{gr}(\overbrace{f : 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11}^d) = 2$  indica que hay un polinomio,  $d$ , con  $\text{gr}(d) = 2$  que cumple

que  $\begin{cases} d \mid f \\ d \mid g \end{cases}$  entonces,  $f$  tiene 2 raíces en común con  $g$ , puede ser una doble o dos simples. Dado que nos piden que sea de grado mínimo habrá que tener *cuidado* cual elegir para no violar ninguna condición. Calculemos las posibles raíces de  $g$  usando *lema de gauss*: Posibles raíces serán los cocientes de los divisores de 11 y los de 2.  $\mathcal{D}(11) = \{\pm 1, \pm 11\}$ ,  $\mathcal{D}(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$ :  $\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 11, \pm \frac{11}{2}\}$ . Probando esos valores encuentro que  $g(\frac{1}{2}) = 0$  y ninguna de las otras funcionó. Le bajamos el grado con el algoritmo de división a  $g$ .

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11 & X - \frac{1}{2} \\ - 2X^3 + X^2 & \hline - 4X^2 - 20X & \\ 4X^2 - 2X & \hline - 22X + 11 & \\ 22X - 11 & \hline 0 & \end{array}$$

$g = (X - \frac{1}{2}) \cdot \underbrace{(2X^2 - 4X - 22)}_h + 0$ , buscamos raíces de  $h$ :

$$\alpha_{+,-} = \frac{4 \pm 8\sqrt{3}}{4} = 1 \pm 2\sqrt{3} = \begin{cases} 1 + 2\sqrt{3} \\ 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Entonces:  $f$  tiene 2 raíces en común con  $g = (X - \frac{1}{2})(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))$ . Dado que  $f \in \mathbb{Q}[X]$  voy a seleccionar las raíces  $\in \mathbb{I}$  por la condición de grado mínimo.

Con la condición que dice que  $f$  tiene una raíz  $z \in G_3$  con  $z \neq 1$ , que es doble, no nos dejan muchas opciones.  $G_3$  tiene tres raíces, solución de  $w^3 = 1$ , dado que por enunciado no puede ser 1, entonces solo

quedan.  $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  (si no te acordás como encontrar raíces de la familia  $G_n$  te dejo el ejercicio 12.) que se hacen las cuentas. Ok, tengo esas dos  $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ¿Cuál elijo? cualquiera nos sirve, porque, *nuevamente*, como  $f \in \mathbb{Q}[X]$  si agarro una raíz compleja también necesito su conjugado complejo, lo mismo que antes. Hasta el momento tenemos:

$$f = \overbrace{(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))}^{X^2 - 2X - 11} \underbrace{(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))^{\star^1} (X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))^{\star^1}}_{(X^2 + X + 1)^2} = \\ = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2$$

★<sup>1</sup> Si es doble una de las complejas, también debe serlo su conjugado, porque  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

Nos queda cumplir que  $f(0) = 33$ , si bien ahora  $f(0) = -11$ . Acá tenemos que tener en cuenta la primera condición.  $f$  es *mónico*, así que no podemos corregir el valor con coeficiente independiente. Hay que proponer otro factor en  $\mathbb{Q}[X]$ , que al evaluar de el número que al multiplicarse con  $-11$  nos dé 33. El candidato es  $(X - 3)$ , dado que en 0 vale  $-3$  y así  $f(0) = (-11) \cdot (-3) = 33$  como queremos. El  $f \in \mathbb{Q}[X]$  que cumple lo pedido:

$$f = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2(X - 3)$$

## 8.

a) Determinar todos los  $f \in \mathbb{R}[X]$  mónicos de grado mínimo tales que cumplan:

- $f$  contiene entre sus raíces al menos una raíz cúbica de la unidad,
- $X^2 + 1 \mid (f : f')$ ,
- $f$  tiene al menos 2 raíces enteras,
- $f(1) = -12$ ,

b) Con el polinomio  $f$  hallado expresar factorización en irreducibles en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .

a) Arrancando con la primera condición, tenemos al menos a una de las  $w$  tales que:

$$w^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = 1 \star^1 \\ w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Si no te acordás como calcular las raíces, mirá el ejercicio 12, donde se resuelve algo casi idéntico.

Como el polinomio *debe ser de grado mínimo* y tiene coeficientes en  $\mathbb{R}$  hay que elegir con cuidado. Lo mejor es ver el resto de las condiciones para no hacer *cagadas*. (spoiler alert: Elegí el 1 si sos picante!)

De la segunda condición sacamos que:

$$X^2 + 1 = (X - i) \cdot (X + i) \mid (f : f') \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + 1 \mid f \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i) \mid f \\ y \\ (X + i) \mid f \end{cases} \\ X^2 + 1 \mid f' \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i) \mid f' \\ y \\ (X + i) \mid f' \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i)^2 \mid f \\ y \\ (X + i)^2 \mid f \end{cases}$$



Si no entendés el porqué de eso mirate [esto de las notas teóricas](#), para tener contexto. Básicamente si  $\alpha$  es una raíz de  $f$  y también de  $f'$ , entonces es una raíz *por lo menos* doble de  $f$ .

En el tercer punto, nos dicen que tiene al menos 2 raíces en  $\mathbb{Z}$ . ¿Una de esas podría ser el 1 que obtuvimos como raíz de  $G_3$ ? Dejame que lo piense.

En el último punto tenemos que cumplir que al evaluar en nuestro polinomio  $f$  en 1, eso nos dé  $-12$ . Y es acá donde nos damos cuenta de que no podemos elegir a  $1 \star^1$  para que sea raíz de  $f$ !! Y dado

que  $f \in \mathbb{R}[X]$  tenemos que elegir entonces ambas  $\begin{cases} w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$ . Propongo:

$$\begin{aligned} f &= (X - (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - i)^2(X + i)^2(X - a)(X - b) \\ &\stackrel{\star^2}{=} (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - a)(X - b), \end{aligned}$$

con  $a$  y  $b$  a determinar, de manera tal de cumplir las últimas dos condiciones: *ambas* enteras y  $f(1) = -12$ .

$$f(1) = -12 \stackrel{\star^2}{\iff} 12 \cdot (1 - a)(1 - b) = -12 \iff (1 - a)(1 - b) = -1 \stackrel{\substack{a \text{ y } b \\ \in \mathbb{Z}}}{\iff} a = 2 \text{ y } b = 0.$$

Esas serían las candidatas a raíces enteras, obteniendo así un único polinomio


$$f = (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - 2)(X - 0) = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$$

mónico y de grado mínimo que cumple las condiciones pedidas.

b) La definición de polinomio irreducible [está acá](#).

$\mathbb{Q}[X]$	$\rightarrow f = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$
$\mathbb{R}[X]$	$\rightarrow f = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$
$\mathbb{C}[X]$	$\rightarrow f = X(X - 2)(X - (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - i)^2(X + i)^2$

Notar que en  $\mathbb{Q}$  y en  $\mathbb{R}$  las factorizaciones son iguales, dado que no hay raíces irracionales.

 9. Hallar  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo tal que cumpla las siguientes condiciones

- $f$  comparte una raíz con  $X^3 - 3X^2 + 7X - 5$
- $X + 3 - \sqrt{2} \mid f$ ,
- $1 - 2i$  es raíz de  $f$  y  $f'(X - 2i) = 0$

Vamos con la primera. Si dos polinomios,  $f$  y  $g = X^3 - 3X^2 + 7X - 5$ , comparten raíz buscamos raíces de  $g$  con el [lema de Gauss](#) de donde tomaremos las raíces que nos sirvan para construir nuestro  $f$  *mónico y de grado mínimo*:  $A = \{\pm 1, \pm 5\}$ , con  $\alpha = 1 \Rightarrow g(1) = 0 \quad \checkmark$ .

Como  $\alpha = 1$  es raíz, entonces  $X - 1 \mid g$ :

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 3X^2 + 7X - 5 & X - 1 \\ -X^3 + X^2 & \\ \hline -2X^2 + 7X & \\ 2X^2 - 2X & \\ \hline 5X - 5 & \\ -5X + 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$g = (X - 1) \cdot (X^2 - 2X + 5)$ , busco raíces del cociente  $X^2 - 2X + 5$ , usando resolvente

$$r_{+,-} = \frac{2 \pm w}{2}, \text{ con } w^2 = -16 \rightarrow \begin{cases} r_+ = 1 + 2i \\ r_- = 1 - 2i. \end{cases}$$

Finalmente,

$$g \stackrel{\star^1}{=} (X - 1) \cdot \underbrace{(X - (1 + 2i)) \cdot (X - (1 - 2i))}_{X^2 - 2X + 5} \quad \checkmark,$$

antes de elegir cuales de estas raíces serán comunes a  $f$   
es recomendable estudiar las otras condiciones del enunciado.

$X + 3 - \sqrt{2} = X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f$ , por lo que  $(-3 + \sqrt{2})$  es una raíz de  $f$  y dado que  $f \in \mathbb{Q}[X]$  también **debe estar** el conjugado irracional  $-3 - \sqrt{2}$ .

$$\begin{cases} X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f \\ \quad \quad \quad \text{y} \\ X - (-3 - \sqrt{2}) \mid f \end{cases} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} X^2 + 6X + 7 \mid f \quad \checkmark.$$

La tercera condición tiene *mucha data*. Nos da una raíz compleja de  $f$ , por lo cual también tendremos su conjugado complejo porque  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

Esa raíz es una de las que está en  $g \star^1$ .

El dato de  $f'$ , también nos indica que la multiplicidad de  $1 - 2i$  como raíz es por lo menos 2, ya que  $f'(1 - 2i) = 0$ , y por lo tanto  $\text{mult}(1 + 2i; f)$  también será por lo menos 2.

Tenemos todo para armar a  $f$ :

$$f = (X^2 - 2X + 5)^2 \cdot (X^2 + 6X + 7) \quad \checkmark$$