# Álgebra I Práctica 3 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I Facultad de Ciencias Exactas y Naturales UBA

# Choose your destiny:

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

??.	??.	??.	??.	??.	??.	??.	??.
??.	??.	??.	??.	??.	??.	??.	??.
??.	??.	??.	??.	??.	??.	??.	??.
??.	??.	??.	??.	??.	??.	??.	??.

• Ejercicios Extras

??.

Notas teóricas:

#### Ejercicios de la guía:

1. Dado el conjunto referencial  $V = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es múltiplo de 15}\}$ , determinar el cardinal del complemento del subconjunto A de V definido por  $A = \{n \in V : n \geq 132\}$ .

Se tiene que  $A^c = \{n \in V : n \ngeq 132\} = \{n \in V : n < 132\}$ . Así,  $\#A^c = \text{todos los múltiplos de 15 menores a 132}$ . Lo calculo sacando la parte entera de  $\frac{132}{15}$ , o sea:

$$\#A^c = \lfloor \frac{132}{15} \rfloor = \lfloor 8, 8 \rfloor = 8$$

2. ¿Cuántos números naturales hay menores o iguales que 1000 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

Defino un conjunto referencial  $V = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 1000\}$ , y dos conjuntos  $A = \{n \in V : n \text{ no es múltiplo de 3}\}$ ,  $B = \{n \in V : n \text{ no es múltiplo de 5}\}$ .

Búsco calcular  $\#(A \cap B)$ 

Pero 
$$\#(A \cap B) = \#[V - (A \cap B)^c] = \#(V - A^c \cup B^c) = \#V - \#(A^c \cup B^c) = \#V - [\#A^c + \#B^c - \#(A^c \cap B^c)]$$
  
Donde  $A^c = \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 3\}$ ,  $B^c = \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 5\}$ ,  $(A^c \cap B^c) = \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 15\}$ 

Calculo sus cardinales:

- $\#A^c = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$
- $\#B^c = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$
- $\#(A^c \cap B^c) = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$

Así, 
$$\#(A \cap B) = \#V - [\#A^c + \#B^c - \#(A^c \cap B^c)] = 1000 - 333 - 200 + 66 = 533$$

**3.** Dados subconjuntos finitos A, B, C de un conjunto referencial V, calcular  $\#(A \cup B \cup C)$  en términos de los cadinales de A, B, C y sus intersecciones.

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A \cup (B \cup C))$$

$$= \#A + \#(B \cup C) - \#(A \cap (B \cup C))$$

$$= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

$$= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - [\#(A \cap B) + \#(A \cap C) - \#(A \cap B \cap C)]$$

$$= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

# 4. \*\* Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX$ 

## 5. \*\* Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \emptyset$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \emptyset$ .

## 6. Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \bigcirc$ .

# 7. \*\* Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX$ 

## 8. 🚼 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to ②$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \bigcirc$ .

- 9. Si A es un conjunto con n elementos ¿Cuántas relaciones en A hay? ¿Cuántas de ellas son reflexivas? ¿Cuántas de ellas son simétricas? ¿Cuántas de ellas son reflexivas y simétricas?
- 😱 ¡Aportá! Correcciones, subiendo ejercicios, \star al repo, críticas, todo sirve.

Dado que para dos conjuntos  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{1, 2\}$  la cantidad de relaciones que hay entre ellos es igual a la cantidad de subconjuntos de  $\mathcal{P}(A \times B)$ , entonces si  $A = \{1, \dots, n\}$  el cardinal  $\#\mathcal{P}(A \mathcal{R} A) = 2^{n^2}$ 

Las relaciones reflexivas son de la forma  $a_i \mathcal{R} a_i$ , por lo que solo será una relación por cada elemento del conjunto  $\#(A \mathcal{R} A)_{ref} = n$ . Voy a calcular la cantidad de elementos que tiene el conjunto  $\mathcal{P}((A \mathcal{R} A)_{ref})$ , porque estoy buscando todos los subconjuntos que puedo formar con los elementos de  $(A \mathcal{R} A)_{ref}$ , entonces  $\#\mathcal{P}((A \mathcal{R} A)_{ref}) = 2^n$ 

#### Corroborar

Las relaciones simétricas serán aquellas que  $a_i \mathcal{R} a_j \Rightarrow a_j \mathcal{R} a_i$ . Pensando esto como los elementos de la diagonal para abajo de una matriz de  $n \times n$  tengo  $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$  elementos matriciales.

$$\sum_{k=0}^{n} {n \cdot (n+1) \choose k} = 2^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}$$
Corroborar

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	• • •	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
$a_1$	R, S	•	•	• • •	•	•	
$a_2$	S	R, S	•	• • •	•	•	•
$a_3$	S	S	R, S	• • •	•	•	•
÷	:	•••	:	٠			
$a_{n-2}$	S	S	S	٠٠.	R, S		
$a_{n-1}$	S	S	S	٠٠.	S	R, S	.
$a_n$	S	S	S	• • •	S	S	R, S

**10.** Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de todas las funciones  $f: A \to B$ .

- i) ¿Cuántos elementos tiene le conjunto  ${\cal F}$
- ii) ¿Cuántos elementos tiene le conjunto  $\{f\in\mathcal{F}:10\in\mathrm{Im}(f)\}$
- iii) ¿Cuántos elementos tiene le conjunto  $\{f \in \mathcal{F} : 10 \in \text{Im}(fa)\}$
- iv) ¿Cuántos elementos tiene le conjunto  $\{f \in \mathcal{F} : f(1) \in \{2,4,6\}\}$

Cuando se calcula la cantidad de funciones, haciendo el árbol se puede ver que va a haber  $\#\operatorname{Im}(f)$  de funciones que provienen de un elemento del dominio. Por lo tanto si tengo un conjunto  $A_n$  y uno  $B_m$ , la cantidad de funciones  $f:A\to B$  será de  $m^n$ 

$$i)~\#\mathcal{F}=12^5$$

ii) 
$$\#\mathcal{F} = 11^5$$

iii) Tengo una que va a parar al 10 y cuento que queda. Por ejemplo si f(2) = 10:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Por lo tanto tengo  $\#\mathcal{F} = 12^4 \cdot \underbrace{1}_{f(2)=10}$ 

#### Corroborar

- iv) Me dicen que  $f(\{1\}) = \{2,4,6\}$ , Si lo pienso como el anterior ahora tengo 3 veces más combinaciones, entonces  $\#\mathcal{F} = 12^4 \cdot \underbrace{3}_{f(\{1\}) = \{2,4,6\}}$
- **11.** Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y  $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ .
  - i) ¿Cuántas funciones biyectivas  $f: A \to B$  hay?
  - ii) ¿Cuántas funciones biyectivas  $f: A \to B$  hay tales que  $f(\{1, 2, 3\}) = \{12, 13, 14\}$ ?

Cuando cuento funciones biyectivas, el ejercicio es como reordenar los elementos del conjunto de llegada de todas las formas posibles. Dado un conjunto Im(f), la cantidad de funciones biyectivas será # Im(f)

- i) Hay 7! funciones biyectivas.
- ii) Dado que hay 3 valores fijos, juego con los 4 valores restantes, por lo tanto habrá 4! funciones biyectivas
- 12. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden armar usando los dígitos del 1 al 5? ¿ Y usando los dígitos del 1 al 7? ¿ Y usando los dígitos del 1 al 7 de manera que el dígito de las centenas no sea el 2?
  - 1) Hay que usar  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  y reordenarlos de todas las formas posibles. 5!

  - 3) Parecido al anterior pero fijo el 2 en el dígito de las centenas:

$$\begin{cases} \#6 & \#5 & \#4 & \#1 & \#3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{-}{1} & \frac{-}{2} & \frac{-}{3} & \frac{2}{4} & \frac{-}{5} \end{cases} \to \text{Tengo } 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 = \frac{6!}{2!} \text{ interpretar?}$$

- **13.** Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .
  - i) ¿Cuántas funciones inyectivas  $f: A \to B$  hay?
  - ii) ¿Cuántas de ellas son tales que f(1) es par?
  - iii) ¿Y cuántas tales que f(1) y f(2) son pares?
  - i) Una pregunta equivalente a si tengo 10 pelotitas distintas y 7 cajitas cómo puedo ordenarlas.

$$\begin{cases} #10 & #9 & #8 & #7 & #6 & #5 & #4\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{cases} \rightarrow \frac{10!}{3!} = \frac{\#B}{\#B - \#A}$$

ii) Hay 5 números pares para elegir como imagen de f(1)

$$\begin{cases} #5 & #9 & #8 & #7 & #6 & #5 & #4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \to 5 \cdot \frac{9!}{3!} \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{cases}$$

iii) Hay 5 números pares para elegir como imagen de f(1), luego habrá 4 números pares para f(2)

$$\begin{cases} #5 & #4 & #8 & #7 & #6 & #5 & #4 \\ \downarrow & \rightarrow 5 \cdot 4 \cdot \frac{8!}{3!} \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{cases}$$

**14.** ¿Cuántas funciones biyectivas  $f:\{1,2,3,4,5,6,7\} \rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7\}$  tales que  $f(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$  hay?

Primero veo la condición  $f(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$ , donde podría formar  $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$  combinaciones biyectivas. Para obtener la cantidad de funciones pedidas, tengo que usar todos los valores del  $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ . Primero fijo la cantidad de valores que pueden tomar  $f(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$  luego lo que reste.

$$\begin{cases} #5 & #4 & #3 & #4 & #3 & #2 & #1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \\ \hline Condiciones pedidas & Loquer est a para completar \end{cases} \rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{5!}{(5-3)!} \cdot 4!$$

**15.** Sea  $A = \{f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  tal que f es una función inyectiva $\}$ . Sea  $\mathcal{R}$  la relación de equivalencia en A definida por:  $f \mathcal{R} g \iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2)$ . Sea  $f \in A$  la función definida por f(n) = n + 2 ¿Cuántos elementos tiene su clase de equivalencia?

### Hacer!

¿Errores? Mandanos tu solución, prolija, así lo arreglamos.

**16.** Determinar cuántas funciones  $f:\{1,2,3,4,5,6,7,8\} \rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$  satisfacen simultáneamente las condiciones:

 $\bullet$  f es inyectiva,

• f(5) + f(6) = 6,

- $f(1) \le 6$ .
- $\bullet$  f inyectiva hace que mi conjunto de llegada se reduzca en 1 con cada elección.
- Si f(5) + f(6) = 6 entonces  $f: \{5,6\} \to \{1,2,4,5\}$ . Una vez que f(5) tome un valor de los 4 posibles e.g.  $f(5) = 1 \xrightarrow{\text{condiciona} \atop \text{única opción}} f(6) = 5$
- $f(1) \leq 6 \rightarrow f: \{1\} \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$  donde cancelé el 1 y el 4, para sacar 2 números que sí o sí deben irse en la condición <sup>1</sup> de f(5) + f(6) = 6. Por lo tanto f(1) puede tomar 4 valores. Por lo que sobrarían 9 elementos del conjunto de llegada para repartir en las f que no tienen condición.

$$\begin{cases} #4 & #9 & #8 & #7 & #4 & #1 & #6 & #5 \\ \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & f(8) \end{cases} \rightarrow 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 4 \cdot 4 \cdot \frac{9!}{4!} = 241.920$$

Siento todo esto muy artesanal y poco justificable suficientemente mathy-snobby

#### Número combinatorio

17.

- i) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto  $\{1,2,3,4,5,6,7\}$
- ii) ¿ Y si se pide que 1 pertenezca al subconjunto?
- iii) ¿ Y si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto?
- iv) ¿ Y si se pide que 1 o 2 pertenezca al subconjunto, pero no simultáneamente los dos?

El problema de tomar k elementos de un conjunto de n elementos se calcula con  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 

i) 
$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{A}!}{\cancel{A}!(\cancel{3}!)} = 35$$

ii) 
$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$$

iii) 
$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$$

iv) 
$$\binom{5}{3} \cdot 2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 2 = 20$$

<sup>1</sup>; Podría haber elegido el 1 y 2? Sí, cualquiera 2 números del conjunto  $\{1,2,4,5\}$ 

- 18. Sea  $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$ . Calcular la cantidad de subconjuntos  $B \subseteq A$  que cumplen las siguientes condiciones:
  - i) B tiene 10 elementos y contiene exactamente 4 múltiplos de 3.
  - ii) B tiene 5 elementos y no hay dos elementos de B cuya suma sea impar.

El conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ 

i)  $\xrightarrow[\text{de }3]{\text{multiplos}}$   $C=\{3,6,9,12,15,18\}$ , agarro 4 elementos del conjunto C y luego 6 de los restantes del

conjunto 
$$A$$
 sin contar el múltiplo de 3 que ya usé. 
$$\begin{cases} \binom{6}{4} \cdot \binom{9}{6} = \frac{\cancel{\text{gr}}}{4!2!} \cdot \frac{9!}{\cancel{\text{gr}}3!} \xrightarrow{\text{simplificando}} 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 1260 \\ Verificary preguntar por la justificacin. \end{cases}$$

ii) La condición de que la suma no sea impar implica que todos los elementos deben ser par o todos

$$\begin{cases} \frac{1 \text{ todos}}{\text{pares}} \left\{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 \right\} & \frac{10 \text{ elementos}}{\text{quiero 5}} & \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252 \\ \frac{10 \text{ todos}}{\text{impares}} \left\{ 1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19 \right\} & \frac{9 \text{ elementos}}{\text{quiero 5}} & \binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126 \end{cases}$$

19. Dadas dos rectas paralelas en el plano, se marcan n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con vértices en esos puntos?

## 🚰 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

- **20.** Determinar cuántas funciones  $f:\{1,2,3,\ldots,11\} \to \{1,2,3,\ldots,16\}$  satisfacen simultáneamente las condiciones:
  - f es inyectiva,

- Si n es par, f(n) es par,  $f(1) \le f(3) \le f(5) \le f(7)$ .
- ullet La función es inyectiva y cuando inyecto un conjunto de m elementos en uno de n elementos ullet $\frac{m!}{(m-n)!}$ .
- ② ¿Errores? Mandanos tu solución, prolija, así lo arreglamos.

- Para cumplir la segunda condición el Dom(f) tengo 5 números par  $\{2,4,6,8,10\}$  y en el codominio tengo 8 números par  $\{2,4,6,8,10,12,14,16\}$  al inyectar obtengo  $\frac{8!}{(8-5)!}$  permutaciones.
- La condición de las desigualdades se piensa con los elementos de la  $\operatorname{Im}(f)$  restantes después de la inyección, que son 16-5=11. De esos 11 elementos quiero tomar 4. El cuántas formas distintas de tomar 4 elementos de un conjunto de 11 elementos se calcula con  $\binom{11}{4}$ , número de combinación que cumple las desigualdades, porque todos los números son <u>distintos</u>. Para la combinación **no hay órden**, elegir  $\{16, 1, 15, 13\}$  es lo mismo  $^2$  que  $\{1, 16, 13, 15\}$ . Es por eso que con 4 elementos seleccionados solo hay <u>una permutación</u> que cumple las desigualdades; en este ejemplo sería  $\{1, 13, 15, 16\}$
- Por último inyecto los número del dominio restantes  $\{9,11\}$  en los 7 elementos de  $\operatorname{Im}(f)$  que quedaron luego de la combinación de las desigualdades  $\to \frac{7!}{(7-2)!}$

Concluyendo: Habrían  $\frac{8!}{(8-5)!}\cdot\binom{11}{4}\cdot\frac{7!}{(7-2)!}=93.139.200$  Corroborar

#### 21. ¿Cuántos anagramas tienen las palabras estudio, elementos y combinatorio

El anagrama equivale a permutar los elementos. Si no hay letras repetidas es una biyección #(letras)! La palabra estudio tiene 7! anagramas.

Elementos tiene 3 letras <u>e</u>, por lo tanto los elementos no repetidos son 6  $\{l, m, n, t, o, s\}$ ; esto es una inyección  $^3 \rightarrow \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!}$ .

También puedo pensar esto con combinatoria: Primero ubico a las 3 letras e en los lugares de las letras,

Combinatorio tiene repetidas las letras i (x2) y la o (x3). Tengo un conjunto de 7 elementos  $\{c, m.b, n, a, t, r\}$  sin repetición. Puedo ubicar las letras con combinación en los 12 lugares o y luego las i en los 9 lugares restantes. Una vez hecho eso puedo inyectar (biyectar?) las letras no repetidas restantes:

$$\rightarrow \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{2} \cdot 7! = \underbrace{\frac{12!}{3!2!}}_{\text{notar}^{4}} = \frac{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2}}_{\text{notar}^{4}} = 39.916.800$$

 $<sup>^{2}</sup>$ Que sea lo mismo quiere decir que no lo cuenta nuevamente, el contador aumenta solo si cambian los elementos y <u>no</u> el lugar de los elementos

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Primero ubico lo que no está repetido. Luego agrego, en una dada posición, a eso 3 o más elementos repetidos. Esta última acción no altera la cantidad de permutaciones. Pensar en esto: lmntosEEE cuenta como lmntos .

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Esto es el total de biyecciones dividido entre las cantidades de repeticiones de los elementos en cuestión.

- 22. ¿Cuántas palabras se pueden formar permutando las letras de cuadros
  - i) con la condición de que todas las vocales estén juntas?
  - ii) con la condición de que las consonantes mantengan el orden relativo original?
  - iii) con la condición de que nunca haya dos (o más) consonantes juntas?

El conjunto de consonantes es  $C = \{c, d, r, s\}$  y de vocales  $V = \{u, a, o\}$ 

i) Para que las vocales estén juntas pienso a las 3 como un solo elemento, fusionadas las 3 letras, con sus permutaciones, es decir que tengo 3! cosas de la siguiente pinta:

$$\begin{cases}
 u & a & o \\
 u & o & a \\
 o & a & u \\
 o & u & a \\
 a & o & u \\
 a & u & o
\end{cases}$$

Los anagramas para que las letras estén juntas los formo combinando  $\binom{5}{1} = 5$  poniendo los 3!=6 valores así en cada uno de los 5 lugares:

$$\begin{cases} uao & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & uao & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & uao & \_ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{cases}$$

Àhora puedo inyectar las 4 consonantese en los 4 lugares que quedan libres. Finalmente se pueden formar  $\underbrace{4!}_{consonantes} \cdot \binom{5}{1} \cdot 3! = 720$  anagramas con la condición pedida.

ii) Supongo que el orden relativo es que aparezcan ordenadas así " $c \dots d \dots r \dots s$ ", quiere decir que tengo que combinar un grupo de 4 letras en 7 que serían los lugares de la letras teniendo un total de  $\binom{7!}{4!}$  y luego tengo 1! permutaciones o, no permuto dicho de otra forma, dado que eso alteraría el orden y no quiero que pase eso. Obtengo cosas así:

$$\begin{cases} c & d & r & s & \_ & \_ & \_ \\ \_ & c & \_ & d & \_ & r & s \\ c & \_ & \_ & d & r & \_ & s \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{cases} \rightarrow \text{lo cual deja 3 lugares libres para permutar con las 3 vocales, esa}$$

permutación es una biyección da 3!.

Por último se pueden formar  $\underbrace{\binom{7!}{4!} \cdot 1!}_{consonantes} \cdot \underbrace{3!}_{vocales} = \frac{7!}{4!\cancel{3!}} \cdot \cancel{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$ 

- iii)  $C = \{c, d, r, s\}$  sin que estén juntas quiere decir que puedo ordenar de pocas formas, muy pocas porque solo hay 7 lugares.  $\left\{ \begin{array}{c|c} c & d & r & s \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right. \rightarrow$  esta combinación es única  $\binom{7!}{7!} = 1$ , lo único
- 🕢 ¿Errores? Mandanos tu solución, prolija, así lo arreglamos.

que resta hacer es permutar las consonantes en esos espacios. 4 espacios para 4 consonantes. Luego relleno inyectando las vocales, como antes. El total de anagramas será  $\binom{7!}{7!} \cdot 4! \cdot \underbrace{3!}_{vocales} = 144$ 

- 23. Con la palabra polinomios,
  - i) ¿Cuántos anagramas pueden formarse en las que las 2 letras i no estén juntas?
  - ii) ¿Cuántos anagramas puede formarse en los que la letra n aparezca a la izquierda de la letra s y la letra s aparezca a la izquierda de la letra p (no necesariamente una al lado de la otra)?
  - i) Tengo 10 letras,  $\{p, l, n, m, s, o, o, o, i, i\}$ . Para que no hayan "ii" calculo  $\binom{10}{3} = 120$ , pensando que en un conjunto de 3, siempre puedo poner las letras " $\underline{i} \underline{i}$ ". Para cada uno de estas 120 configuraciones de la pinta: Está mal!

$$\begin{cases} i & -i & ----- & ---- \\ --i & ----- & i & ---- \\ \underline{---i & ----- & i & ---- \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{cases} \rightarrow \text{Con las } i \text{ donde están el "_" tiene 4 posiciones}$$

Estoy contando de más. La cantidad para que las i no estén juntas es 36... salieron contando a mano <sup>5</sup>. Luego inyectando con las repeticiones de la "o":  $36 \cdot \frac{8!}{3!} = 241.920$ 

Pensando en el complemento:

Las posiciones que pueden tomar las ii juntas, se calculan a mano enseguida. Habrían en total

$$\rightarrow \underbrace{\frac{10!}{3! \cdot 2!}}_{\mathcal{U}} - \underbrace{9 \cdot \frac{8!}{3!}}_{complemento} = 241.920$$

ii) Tengo 10 letras,  $\{p, l, n, m, s, o, o, o, o, i, i\}$ . Para que se forme " $n \dots s \dots p$ " calculo  $\binom{10}{3} = 120$ , pensando que en un conjunto de 3, siempre puedo poner las letras " $\underline{n} \dots \underline{s} \dots \underline{p}$ ". Para cada uno de estas 120 configuraciones de la pinta:

teniendo en cuenta las repeticiones de las "o" y de las "i":  $\binom{10}{3} \cdot \frac{7!}{3!2!}$ 

# 24. Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ ,

o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

$$5\sum_{1}^{8} k = 36$$

# 25. 🚼 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

### **26.** Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

# 27. 😭 Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX$ 

- 28. En este ejercicio no hace falta usar inducción.
  - i) Probar que  $\sum_{k=0}^{n} {n \choose k}^2 = {2n \choose n}$ . sug:  ${n \choose k} = {n \choose n-k}$ .
  - ii) Probar que  $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k {n \choose k} = 0$ .
  - iii) Probar que  $\sum_{k=0}^{2n} {2n \choose k} = 4^n$  y deducir que  ${2n \choose n} < 4^n$ .
  - iv) Calcular  $\sum_{k=0}^{2n+1} {2n+1 \choose k}$  y deducir que  $\sum_{k=0}^{n} {2n+1 \choose k}$ .

Binomio de Newton:  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^n y^{n-k}$ 

i)

ii) Binomio 
$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = & 1 \\ y & = & -1 \end{array} \right\} \rightarrow 0^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^n (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = 0 \rightarrow 0$$

🕢 ¿Errores? Mandanos tu solución, prolija, así lo arreglamos.

$$\begin{cases} \frac{\text{si } n \text{ es par}}{\text{primer término positivo}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}} + \dots - \binom{n}{k-1} + \binom{n}{n} \rightarrow \\ \frac{\text{uso sugerencia}}{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}} 2 \cdot \binom{n}{0} - 2 \cdot \binom{n}{1} + \dots + 2 \cdot (-1)^{\frac{n}{2}+1} \binom{n}{\frac{n}{2}+1} + (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}} = 0 \text{Quonda?} \\ \frac{\text{si } n \text{ es impar}}{\text{primer término negativo}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = -\binom{n}{0} + \binom{n}{1} - \dots - \binom{n}{k-1} + \binom{n}{n} \xrightarrow{\text{uso sugerencia}}{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}} \checkmark 0 \end{cases}$$

iii) **\*** Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

iv) **\*** Falta hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow 2$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\mathbb{A}T_{F}X \to \mathbb{Q}$ .

**29.** Sea  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ , y sea R la relación de orden en  $\mathcal{P}(X)$  definida por:  $A \mathcal{R} B \iff A - B = \emptyset$ . ¿Cuántos conjuntos  $A \in \mathcal{P}(X)$  cumplen simultáneamente  $\#A \geq 2$  y  $A \mathcal{R} \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ?

### Hacer!

**30.** Sea  $X = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 10\right\}$ , y sea R la relación de equivalencia en  $\mathcal{P}(X)$  definida por: ¿Cuántos conjuntos  $B \in \mathcal{P}(X)$  de exactamente 5 elementos tiene la clase de equivalencia  $\overline{A}$  de A = $\{1,3,5\}$ ?

Como A tiene al 1 y al 3, los elementos B, conjuntos en este caso, pertenecientes a la clase  $\overline{A}$  deberían cumplir que si  $B \subseteq \overline{A} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \in B \\ 3 \in B \\ 2 \notin B \end{array} \rightarrow \text{si } 2 \in B \Rightarrow A\mathcal{R}B \end{array} \right\}.$ 

Los conjuntos de 5 elementos serán de la forma:

 $\xrightarrow{\frac{5 \text{ elementos}}{0 \{1,2,3\} \leq \{1,3\}}} {\binom{7}{3}} = 35. \text{ Los 7 números usados son } \{4,5,6,7,8,9,10\}$ 

¿Es solo eso o interpreto mal la  $\mathcal{R}$  u otra cosa?

- Sean  $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$  y  $A = \{1\}$  ¿Cuántos subconjuntos  $B \subseteq X$  satisfacen que el conjunto
- 🎧 ¡Aportá! Correcciones, subiendo ejercicios, 🗡 al repo, críticas, todo sirve.

#### $A\triangle B$ tiene a lo sumo 2 elementos?

a lo sumo = como mucho = como máximo al menos = por poco = como mínimo

La diferencia simétrica es la unión de los elementos no comunes a los conjuntos A y B. Si me piden que:

La diferencia simétrica es la unión de los elementos no comunes a los conjuntos 
$$A y B$$
. Si  $B = \begin{cases} 1 \in B \rightarrow \#B \leq 3 & \frac{Busco\ conjuntos}{de\ la\ forma} \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 2.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 2.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{(99)}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} \\ \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ está\ usado}{quedan\ 99.\ Elijo\ 1.} & \frac{1}{2} - \frac{el\ 1\ esta\$ 

Por último habría un total de  $\binom{99}{2} + \binom{99}{1} + \binom{99}{0} + \binom{99}{1}$  $+\binom{99}{0}$  subconjuntos  $B\subseteq X$  para cumplir lo pedido.

#### 32.

- i) Sea A un conjunto con 2n elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo  $a \in A$  la clase de equivalencia de a tenga n elementos?
- ii) Sea A un conjunto con 3n elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo  $a \in A$  la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

### Hacer!



#### Ejercicios extras:

Sea  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$  la relación de equivalencia  $\to X \mathcal{R} Y \iff X \triangle Y \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\}.$ ¿Cuántos conjuntos hay en la clase de equivalencia de  $X = \{x \in \mathbb{N} : x \ge 6\}$ ?

- 1. La relación toma valores de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- 2. Los elementos del conjunto  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- 3. El conjunto  $X = \{6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$  es simplemente un elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Los conjuntos  $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tales que  $X \mathcal{R} Y$  van a ser los conjuntos que junto a X formarán la clase de equivalencia.  $\overline{X} = \{ Y \in \mathcal{P}\mathbb{N} : X \mathcal{R} Y \}$

Para tener una relación de equivalencia deben cumplirse:

- Reflexividad.  $X \triangle X = \emptyset \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\}$
- Simetría.  $X \triangle Y \stackrel{\checkmark}{=} Y \triangle X, \ \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- Transitividad.

Condiciones que debería cumplir un elemeto Y para pertenecer a la la clase de equivalencia, en otras palabras estar relacionado con X:

Los elementos 
$$\rightarrow$$

Los elementos 
$$\rightarrow$$

$$\begin{cases}
1, 2, 3 \text{ no deben pertenecer a } Y \xrightarrow{\text{por ejemplo}} \begin{cases}
X \triangle \{3, 8, 9, ...\} = \{3, 6, 7\} \not \angle \{4, 5, 6, 7, 8\} \\
X \triangle \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 6, 7, ...\} \not \angle \{4, 5, 6, 7, 8\} \\
X \triangle \{4, 6, 8, 9, ...\} = \{4, 7\} \hookrightarrow \{4, 5, 6, 7, 8\} \\
X \triangle \{9, ...\} = \{6, 7, 8\} \hookrightarrow \{4, 5, 6, 7, 8\}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
X \triangle \{6, 7, 8\} = \{9, 10, ...\} \not \angle \{4, 5, 6, 7, 8\} \\
X \triangle \{9, ...\} = \{9\} \not \angle \{4, 5, 6, 7, 8\} \\
X \triangle \{9, ...\} = \{6, 7, 8\} \hookrightarrow \{4, 5, 6, 7, 8\}
\end{cases}$$

$$X \triangle \{9, ...\} = \{9\} \not \angle \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$X \triangle \{9, ...\} = \{6, 7, 8\} \hookrightarrow \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$X \triangle \{9, ...\} = \{6, 7, 8\} \hookrightarrow \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

Se concluye que la clase de equivalencia será el conjunto  $\overline{X}$  (notación inventada):

 $\overline{X} = \{Y_1 \cup \{9, 10, \ldots\}, Y_2 \cup \{9, 10, \ldots\}, \ldots, Y_{32} \cup \{9, 10, \ldots\}\} \text{ con } Y_i \in \mathcal{P}(\{4, 5, 6, 7, 8\}) \ i \in [1, 2^5] \text{ donded} \}$  $\#\overline{X}=2^5$