

Apunte único: Álgebra I - Práctica 6

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(doubleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas

- Ejercicios de la guía:

1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	

- Ejercicios de Parciales

 1.	 2.	 3.	 4.	 5.	 ??.
--	--	--	--	--	---

Disclaimer:

Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Recomendación para sacarle jugo al apunte!

Estudiar con resueltos puede ser un arma de doble filo. Si estás trabado, antes de saltar a la solución que hizo otra persona:


- 📺₁ Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
- 📺₂ Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.
- 📺₃ ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.
- 📺₄ Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
- 📺₅ Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir '*no me sale*' ≠ +. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles sin ayuda, no te van a salir los ejercicios más difíciles: [Sentido común](#).

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confianza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada*. Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber*. A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas:
de Teresa que son **buenísimos** .

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra:
[Prácticas Pandemia](#) .

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre **Just Do IT** 🙌🙌🙌!

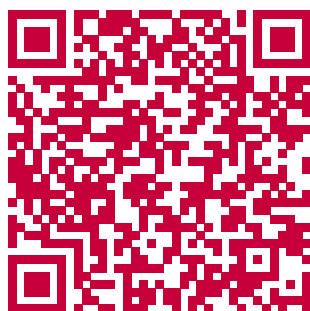
Eh, loco, fatalista, distópico, **relajá un toque te vas a quedar (más) pelado...** 🙌🙌🙌 *va a salir todo bien!*

Esta Guía 6 que tenés se actualizó por
última vez:

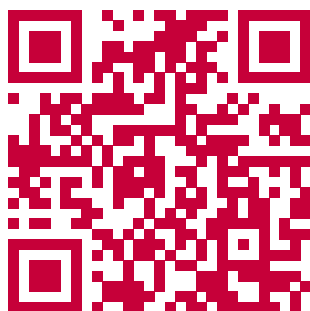
07/03/25 @ 18:53


Escaneá el QR para bajarte (quizás) una
versión más nueva:

Guía 6



El resto de las guías repo en [github](#)  para descargar
las guías con los últimos updates.



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error,
lo más fácil es por [Telegram](#) .

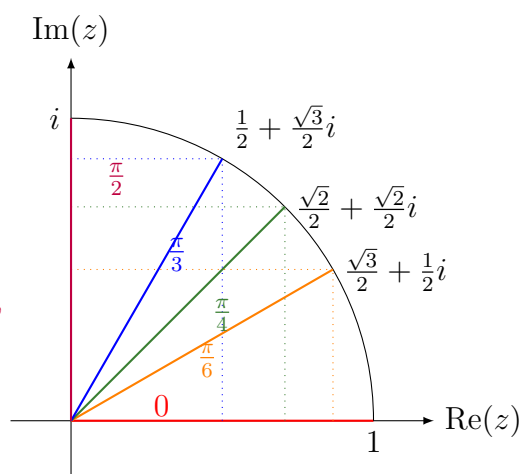


Notas teóricas:Raíces de un número complejo:

- Tablita de ángulos *agradables*:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Clickea para está *simpatética* forma de recordarlo: 🎵 um, dois, três, três, dois, um, todo mundo sobre 2...🎵



- Sean $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z = r_z e^{i\theta_z}$ y $w = r_w e^{i\theta_w}$ con $r_z, r_w \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\theta_z, \theta_w \in \mathbb{R}$.

Entonces $z = w \iff \begin{cases} r_z = r_w \\ \theta_z = \theta_w + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- raíces n -ésimas: $w^n = z \iff \begin{cases} (r_w)^n = r_z \\ \theta_w \cdot n = \theta_z + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

De donde se obtendrán n raíces distintas:

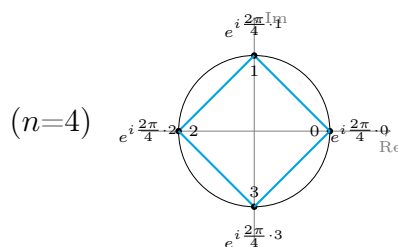
$$w_k = z_w e^{i\theta_{w_k}}, \text{ donde } r_w = \sqrt[n]{r_z} \text{ y } \theta_{w_k} = \frac{\theta_z}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta_z + 2k\pi}{n}$$

Entender bien como sacar raíces n -ésimas es importantísimo para toda la guía de complejos y la próxima de polinomios.

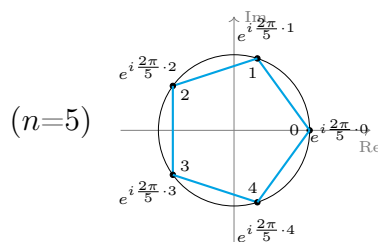
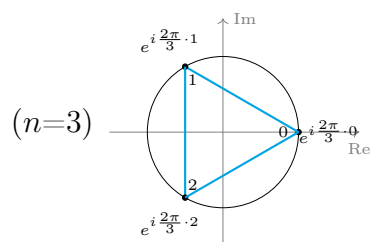
Grupos G_n :

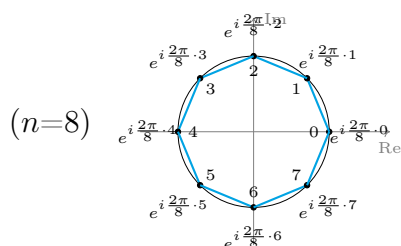
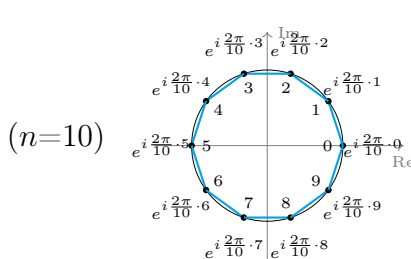
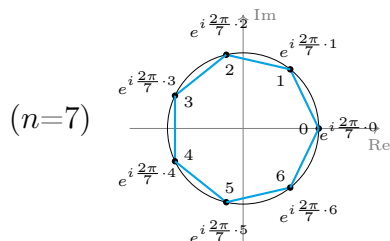
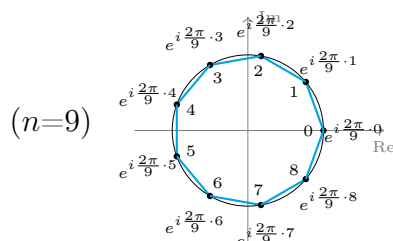
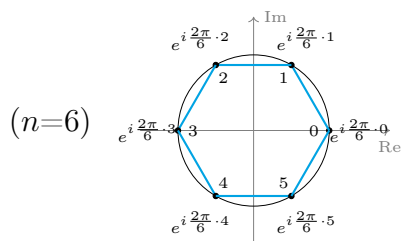
- $G_n = \{w \in \mathbb{C} / w^n = 1\} = \left\{ e^{\frac{2k\pi}{n}i} : 0 \leq k \leq n-1 \right\}$

$$(n=1) \quad w = 1$$



$$(n=2) \quad w = \pm 1$$





Notar que:

- Si n es par el grupo tiene al -1 .
- Toda raíz compleja tiene a su conjugado complejo.
- Para ir de un punto a otro, se lo multiplica por $e^{i\theta}$ eso *rota* al número en θ respecto al origen.

• (G_n, \cdot) es un grupo abeliano, o conmutativo.

- $\forall w, z \in G_n, wz = zw$ y $zm \in G_n$.
- $1 \in G_n, w \cdot 1 = 1 \cdot w = w \quad \forall w \in G_n$.
- $w \in G_n \implies \exists w^{-1} \in G_n, w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1$
- $\ast \bar{w} \in G_n, w \cdot \bar{w} = |w|^2 = 1 \implies \bar{w} = w^{-1}$

• *Propiedades:* $w \in G_n$

- $m \in \mathbb{Z}$ y $n \mid m \implies w^m = 1$.
- $m \equiv m' \pmod{n} \implies w^m = w^{m'} \quad (w^m = w^{r_n(m)})$
- $n \mid m \iff G_n \subseteq G_m$
- $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
- La suma de una raíz w de G_n : $\sum_{k=0}^{n-1} w^k = \frac{w^n - 1}{w - 1} = 0$ si $w \neq 1$

Ejercicios de la guía:

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Re}(z^{-1})$ e $\operatorname{Im}(i \cdot z)$

i) $z = 5i(1+i)^4$

iv) $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{10}$

ii) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2(1-3i)$

iii) $z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1-i)^3$

v) $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1}$.

Cosas para tener en cuenta sobre notación y algunos resultados:

En notación binomial:

$$z = a + ib = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z) \xrightarrow{\text{donde}} \begin{cases} a = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R} \\ b = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R} \\ z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ \operatorname{Im}(i \cdot z) = \operatorname{Im}(i \cdot a - b) = a = \operatorname{Re}(z) \end{cases}$$

Y en notación exponencial:

$$z = r \cdot e^{i\theta} \xrightarrow[r > 0]{\text{donde}} \begin{cases} r \cdot \cos(\theta) = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R} \\ r \cdot \sin(\theta) = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R} \\ z^{-1} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\bar{z}}{r} = \frac{\bar{z}}{r^2} \\ r \cdot e^{i\theta} = r \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \end{cases}$$

i) Cuando hay muchos productos, me gusta pasar todo a notación exponencial y jugar desde ahí:

$$z = 5 \cdot i \cdot (1+i)^4 \stackrel{!!}{=} 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot (\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})^4 = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot (4 \cdot e^{i\pi}) = 20 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} \stackrel{i}{=} -20i$$

Por lo tanto si:

$$z \cdot z^{-1} = 1 \xrightarrow{z = -20i} z^{-1} = \frac{1}{20}i$$

Finalmente:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) = -20 \\ |z| = 20 \\ \operatorname{Re}(z^{-1}) = 0 \\ \operatorname{Im}(i \cdot z) = \operatorname{Re}(z) = 0 \end{cases}$$

ii) A ojo, o casi, veo que los valores de los argumentos de los factores son feos. Recordar que hay muy pocos ángulos que tienen resultados agradables, los de la tablita, [tablita de ángulos agradables](#).

Dado que el exponente más alto es 2, se puede distribuir sin morir en el intento:

$$z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2 \cdot (\overline{1-3i}) \stackrel{!}{=} (-1 + 2\sqrt{6}i) \cdot (1 + 3i) \stackrel{!!}{=} -1 - 6\sqrt{6} + i(2\sqrt{6} - 3)$$

Donde en **!!** es distribuir y luego sacar factor común en los términos con i , nada extraño.

ehm... ¿Qué es esta mierda? 3 opciones, está mal el enunciado, lo estoy haciendo mal o los profesores nos están haciendo *bullying*.

iii) Atento a que $i^4 \stackrel{\star^1}{=} 1$:

$$z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1-i)^3 = i \cdot (i^4)^4 + \frac{1}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot (\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{7}{4}\pi})^3 \stackrel{\star^1}{=} i + \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{1}{2} + \frac{21}{4})\pi} = i + \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{23}{4}\pi} \stackrel{!!}{=} i + \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{7}{4}\pi}$$

En **!!** usé la periodicidad de la función exponencial, con el exponente complejo es 2π -periódica.

$$z = i + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1$$

Finalmente:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 1 \\ \operatorname{Im}(z) = 0 \\ |z| = 1 \\ \operatorname{Re}(z^{-1}) = 1 \\ \operatorname{Im}(i \cdot z) = \operatorname{Re}(z) = 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = 0, |z| = 1, \operatorname{Re}(z^{-1}) = 1, \operatorname{Im}(i \cdot z) = i$$

iv) Fácil con exponenciales:

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{10} \stackrel{!}{=} (e^{i\frac{\pi}{4}})^{10} = e^{i\frac{5}{2}\pi} \stackrel{!}{=} e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

Finalmente:


$$\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 1, |z| = 1, \operatorname{Re}(z^{-1}) \stackrel{!}{=} \operatorname{Re}(-i) = 0, \operatorname{Im}(i \cdot z) = -1$$

v) Fácil con exponenciales:

$$z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1} \stackrel{!}{=} (e^{i\frac{4}{3}\pi})^{-1} = e^{-i\frac{4}{3}\pi} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

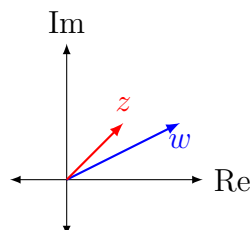
Finalmente:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{Im}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ |z| = 1 \\ \operatorname{Re}(z^{-1}) = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{Im}(i \cdot z) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz

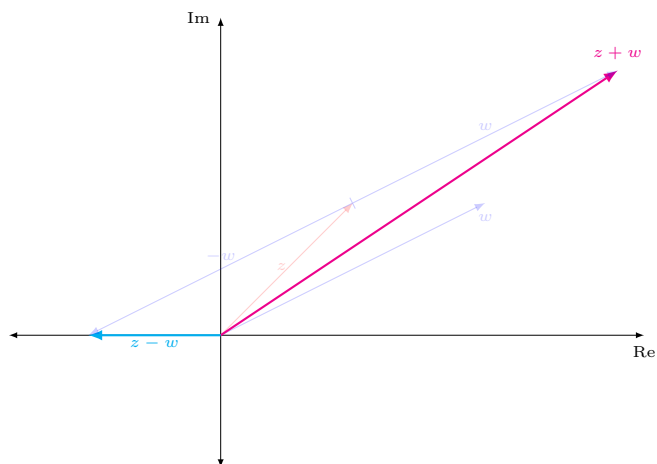
2. Dados los siguientes $z, w \in \mathbb{C}$ en el plano:



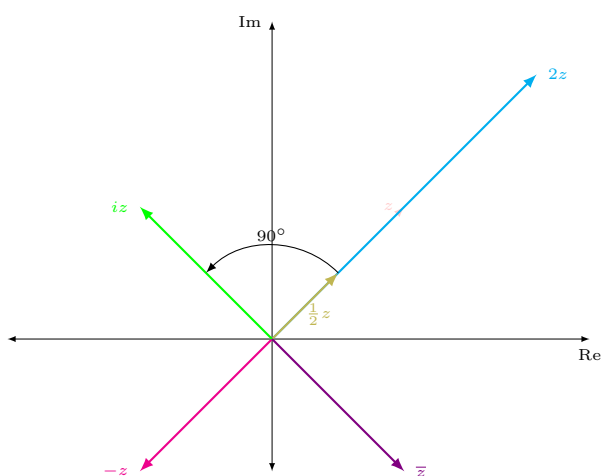
Representar en un gráfico aproximado los números complejos de cada inciso

- i) $z, w, z + w$ y $z - w$ ii) $z, -z, 2z, \frac{1}{2}z, iz$ y \bar{z} iii) $z, w, |z|, |z + w|$ y $|\overline{w - z}|$.

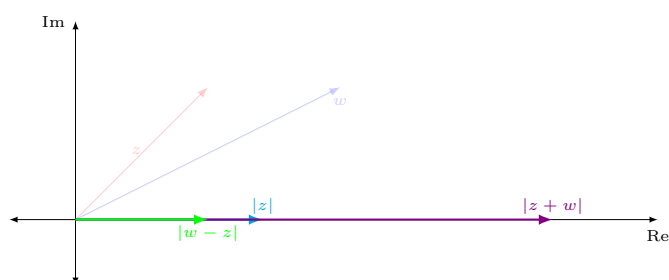
i)



ii)



iii)



Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🔄

3. Hallar todos los número complejos z tales que

i) $z^2 = -36$

ii) $z^2 = i$

iii) $z^2 = 7 + 24i$

iv) $z^2 + 15 - 8i = 0$

i) A ojo se puede ver el resultado:

$$z_1 = 6i \quad \text{y} \quad z_2 = -6i$$

Si no se ve a simple vista:

- Se puede plantear la *ecuación en forma exponencial*, para deducir módulo y argumento.
- Cuando la potencia de z es 2, como en este caso, se puede atacar separando para parte real y la imaginaria e igualando.

Ahora usamos la segunda de esas técnicas:

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Para que 2 números complejos sean iguales, debe ocurrir que:

- Sus partes reales tiene que ser iguales y sus partes imaginarias también.

$$z^2 = -36$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = -36 \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -36 & \text{parte real} \\ 2ab = 0 & \text{parte imaginaria} \end{cases}$$

De ese sistema queda que:

$$a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0,$$

y dado que a y $b \in \mathbb{R}$, para que se cumpla la otra ecuación debe suceder que:

$$a = 0 \quad \text{y} \quad b = \pm 6$$

Por lo tanto se recupera que :

$$z_1 = 0 + 6i = 6i \quad \text{y} \quad z_2 = 0 - 6i = -6i$$

ii) Este no me parece taan obvio. Resuelvo ecuación en forma exponencial:

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \rightarrow z^2 = r^2(e^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta} \\ i &= e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

La idea es separar la ecuación compleja en 2 ecuaciones con números reales. Atento a que $r \in \mathbb{R}_{>0}$ y que el argumento θ es 2π periódico!

Ahora la ecuación queda como:

$$r^2 e^{i2\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \xrightarrow[\text{argumentos por otro}]{\text{módulos por un lado}} \begin{cases} r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

tengo que $k \in \{0, 1\}$ de forma tal que el argumento $\theta \in [0, 2\pi)$.

Los valores que nos pedían:

$$z_{k=0} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \quad \text{y} \quad z_{k=1} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

Le comentario:

Sale más fácil por el método del item i)? Seguramente, pero pintó hacerlo con exponenciales.

iii) Ataco igual que antes:

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \rightarrow z^2 = r^2(e^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta} \\ 7 + 24i &\stackrel{!}{=} 25e^{i\arctan(\frac{24}{7})} \end{aligned}$$

Horrible esos valores, probablemente no salga por acá. Pruebo con el método del item i):

$$z^2 = 7 + 24i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 7 + 24i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 & \text{parte real} \\ 2ab = 24 & \text{parte imaginaria} \end{cases}$$

De ese sistema queda que:

$$a \cdot b = 12,$$

meto en la otra ecuación $a = \frac{12}{b}$:

$$\frac{144}{b^2} - b^2 = 7 \xleftrightarrow[b \in \mathbb{R}]{!!} b = \pm 3$$

En **!!**, bicuadrática.

Con ese resultado los valores quedarían para el sistema:

$$z_1 = -4 - 3i \quad \text{y} \quad z_2 = 4 + 3i$$

iv) Acomodo para que quede para resolver como el anterior:

$$z^2 + 15 - 8i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -15 + 8i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = -15 + 8i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -15 & \text{parte real} \\ 2a \cdot b = 8 & \text{parte imaginaria} \end{cases}$$

De ese sistema queda que:


$$a \cdot b = 4,$$

meto en la otra ecuación $a = \frac{4}{b}$:

$$\frac{16}{b^2} - b^2 = -15 \xleftrightarrow[b \in \mathbb{R}]{!!} b = \pm 4$$

Con ese resultado los valores quedarían para el sistema:

$$z_1 = 1 + 4i \quad \text{y} \quad z_2 = -1 - 4i$$

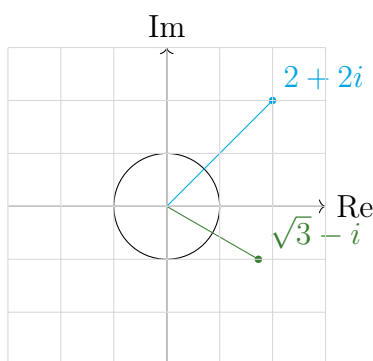
Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz 

4. Calcular los módulos y los argumentos de los siguiente números complejos Hallar todos los número complejos z tales que

$$\text{i) } (2 + 2i)(\sqrt{3} - i) \quad \text{ii) } (-1 + \sqrt{3}i)^5 \quad \text{iii) } (-1 + \sqrt{3}i)^{-5} \quad \text{iv) } \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}.$$

i) A mí me gusta usar propiedades de potencia para calcular la forma final del número:



$$z = (2 + 2i) \cdot (\sqrt{3} - i) \stackrel{!}{=} 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{11}{6}\pi}$$

Y ahora como se están multiplicando las potencias, solo hay que usar propiedades de potencias:

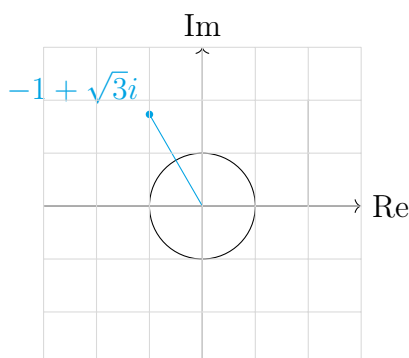
$$z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{25}{12}\pi}$$

Recordar que el argumento por definición está en $[0, 2\pi)$, así que si es mayor o menos se le restan o suman $2k\pi$ respectivamente hasta que caiga en el intervalo.

Por lo que el resultado pedido quedaría en:

$$|z| = 4\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \arg(z) = \frac{1}{12}\pi$$

ii) Como el anterior pero más fácil:



$$z = (-1 + \sqrt{3}i)^5 \stackrel{!}{=} 2^5 e^{i\frac{2}{3} \cdot 5\pi} = 32e^{i\frac{10}{3}\pi}$$

Nuevamente, corrijo el argumento para que caiga en el intervalo $[0, 2\pi)$. Por lo que el resultado pedido quedaría en:

$$|z| = 32 \quad \text{y} \quad \arg(z) = \frac{4}{3}\pi$$

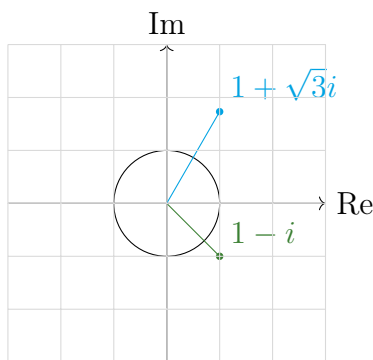
iii) Parecido al anterior:

$$z = (-1 + \sqrt{3}i)^{-5} \stackrel{!}{=} 2^{-5} e^{i\frac{2}{3} \cdot (-5)\pi} = \frac{1}{32} e^{-i\frac{10}{3}\pi}$$

Nuevamente, corrijo el argumento para que caiga en el intervalo $[0, 2\pi)$. Por lo que el resultado pedido quedaría en:

$$|z| = \frac{1}{32} \quad \text{y} \quad \arg(z) = \frac{2}{3}\pi$$

iv) Parecido a lo anterior:



$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \stackrel{!}{=} \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}} = \sqrt{2}e^{-\frac{17}{12}\pi}$$

Recordar que el argumento por definición está en $[0, 2\pi)$, así que si es mayor o menos se le restan o suman $2k\pi$ respectivamente hasta que caiga en el intervalo.

Por lo que el resultado pedido quedaría en:

$$|z| = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \arg(z) = \frac{7}{12}\pi$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🔄

5. 🤖... hay que hacerlo! 📢

Si querés mandá la solución → [al grupo de Telegram](#) 📢, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX → [una pull request](#) al 🔄.

6.

- Determinar la forma binomial de $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17}$.
- Determinar la forma binomial de $(-1 + \sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

- Multiplico y divido por el conjugado complejo para sacar la parte imaginaria del denominador:

$$z \stackrel{\star^1}{=} \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{17} \stackrel{!}{=} \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{(1 - i) \cdot \frac{1 + i}{1 + i}}\right)^{17} = \left(\frac{(1 + \sqrt{3}i) \cdot (1 + i)}{2}\right)^{17} = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i\right)^{17}$$

Ahora paso eso a notación exponencial y acomodo usando propiedades de exponentes:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \\ 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases} \\ \left(\frac{(1+\sqrt{3}i) \cdot (1+i)}{2}\right)^{17} = \left(\frac{2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^{17} = 2^{\frac{17}{2}} \cdot e^{\frac{119}{12}\pi i} \stackrel{!}{=} 2^{\frac{17}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i} \\ \star^1 z = 2^{\frac{17}{2}} \cos\left(\frac{1}{12}\pi\right) - i 2^{\frac{17}{2}} \sin\left(\frac{1}{12}\pi\right) \stackrel{!}{=} 2^{\frac{17}{2}} \cos\left(\frac{23}{12}\pi\right) + i 2^{\frac{17}{2}} \sin\left(\frac{23}{12}\pi\right) \end{aligned}$$

Un espanto. Pero bueh, $\frac{1}{12}\pi = 15^\circ$ y $\frac{23}{12}\pi = 345^\circ$.

Nota: Después de hacer el item b), *creo* que la idea del ejercicio es hacerlo así:

Como $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17}$ está compuesto por 2 elementos de nuestro conjunto de números complejos favoritos, lease:

$$\begin{cases} 1 + \sqrt{3}i &= 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \\ 1 - i &= \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{7}{4}\pi} \end{cases}$$

Y esto elevado a la 17 tiene dentro de todo un aspecto, no taaan vomitivo:

$$\begin{cases} (1 + \sqrt{3}i)^{17} &= 2^{17} \cdot e^{i\frac{17}{3}\pi} \stackrel{!}{=} 2^{17} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi} = 2^{16} \cdot (1 - i\sqrt{3}) \\ (1 - i)^{17} &= (\sqrt{2})^{17} \cdot e^{i\frac{119}{4}\pi} \stackrel{!}{=} (\sqrt{2})^{17} \cdot e^{i\frac{7}{4}\pi} = (\sqrt{2})^{17} \cdot (1 - i) \end{cases}$$

Juntando lo que fue quedando:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{17} = \frac{2^{16} \cdot (1 - i\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^{17} \cdot (1 - i)} \stackrel{!!}{=} (\sqrt{2})^{13} \cdot (1 - i\sqrt{3}) \cdot (1 + i) = (\sqrt{2})^{13} \cdot ((1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i)$$

En el **!!**, multipliqué y dividí por el conjugado complejo, y simplifiqué el exponente.

La forma binómica quedaría:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{17} = (\sqrt{2})^{13} \cdot (1 + \sqrt{3}) + (\sqrt{2})^{13} \cdot (1 - \sqrt{3})i$$

b)

$$(-1 + i\sqrt{3})^n = 2^n \cdot e^{i\frac{2n}{3}\pi} = 2^n \cdot \left(\cos\left(\frac{2n}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2n}{3}\pi\right)\right)$$

El módulo va a crecer con n , pero la parte exponencial es periódica por inspección:

$$(-1 + i\sqrt{3})^n \stackrel{!}{=} \begin{cases} 2^n & \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{3} \\ 2^{n-1} \cdot (-1 + i\sqrt{3}) & \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod{3} \\ 2^{n-1} \cdot (-1 - i\sqrt{3}) & \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

7. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$

ii) $(-\sqrt{3} + i)^n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ es un número real negativo.

iii) $\arg((-1 + i)^{2n}) = \frac{\pi}{2}$ y $\arg((1 - \sqrt{3}i)^{n-1}) = \frac{2}{3}\pi$

i) Para resolver las ecuaciones en números complejos con exponentes, en general, es más fácil resolver en notación exponencial. El miembro izquierdo queda:

$$(\sqrt{3} - i)^n = (2 \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi})^n = 2^n \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi n}$$

El miembro derecho queda:

$$2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i) = 2^{n-1} \cdot (2 \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}) = 2^n \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

Ahora la igualdad de los números se dará cuando sus módulos y argumentos sean iguales:

$$2^n \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi n} = 2^n \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^n = 2^n & \checkmark \\ \frac{11}{6}\pi n = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi & \Leftrightarrow 11n = 4 + 12k \star^1 \end{cases}$$

En \star^1 quedó una ecuación para despejar n que es un número entero:

$$\star^1 11n = 4 + 12k \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 11n \equiv 4 \pmod{12} \Leftrightarrow -n \equiv 4 \pmod{12} \Leftrightarrow n \equiv -4 \pmod{12} \Leftrightarrow n \equiv 8 \pmod{12}$$

Finalmente los valores de n buscados para que la ecuación se cumpla son:

$$n \equiv 8 \pmod{12}$$

- ii) Un número real z negativo tiene un $\arg(z) = \pi$. Ataco el ejercicio parecido al anterior en la parte de los exponentes, donde está el argumento:

$$\begin{aligned} (-\sqrt{3} + i)^n &= 2^n \cdot e^{i\frac{5}{6}\pi n} \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &= e^{\frac{\pi}{3}i} \end{aligned}$$

El enunciado queda como:

$$(-\sqrt{3} + i)^n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^n \cdot e^{i(\frac{5}{6}n + \frac{1}{3})\pi}$$

Ahora, *sin olvidar la periodicidad*, tengo que pedir que el argumento de esa expresión sea π :

$$\left(\frac{5}{6}n + \frac{1}{3}\right)\pi = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{5}{6}n + \frac{1}{3} = 1 + 2k \Leftrightarrow 5n = 4 + 12k \star^1$$

En \star^1 quedo una ecuación para resolver para $n \in \mathbb{Z}$:

$$\star^1 5n = 4 + 12k \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 5n \equiv 4 \pmod{12} \Leftrightarrow n \equiv 8 \pmod{12}$$

Finalmente los valores de n buscados para que la expresión sea un número negativo:

$$n \equiv 8 \pmod{12}$$

- iii) Arranco pasando las expresiones del enunciado a notación exponencial:

$$\begin{aligned} (-1 + i)^{2n} &= 2^n \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi n} \star^1 \\ (1 - \sqrt{3}i)^{n-1} &= 2^{n-1} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi(n-1)} \star^2 \end{aligned}$$

De \star^1 igualando a $\frac{\pi}{2}$, sin olvidar la *periodicidad* del argumento:

$$\frac{3}{2}\pi n = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow 3n = 1 + 4k \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 3n \equiv 1 \pmod{4} \Leftrightarrow n \equiv 3 \pmod{4} \star^3$$

De \star^2 igualando a $\frac{2}{3}\pi$, nuevamente sin olvidar la *periodicidad* del argumento:


$$\frac{5}{3}\pi(n-1) = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \Leftrightarrow 5n - 5 = 2 + 6k \Leftrightarrow 5n = 7 + 6k \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 5n \equiv 7 \pmod{6} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} n \equiv 5 \pmod{6} \star^4$$

Podemos observar que con los resultados de \star^3 y \star^4 esto se convirtió en un ejercicio del **TCHR**:

$$\begin{cases} n \equiv 3 \pmod{4} \\ n \equiv 5 \pmod{6} \end{cases} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \begin{cases} n \equiv 3 \pmod{4} \\ n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Resolviendo ese sistema, los valores de n buscados:

$$n \equiv 11 \pmod{12}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

8. Hallara en cada caso las raíces n -ésimas de $z \in \mathbb{C}$:

i) $z = 8, n = 6$

iii) $z = -1 + i, n = 7$

ii) $z = -4, n = 3$

iv) $z = (2 - 2i)^{12}, n = 6$

Ejercicio importante. La raíz n -ésima de z es el número que multiplicado por sí mismo n veces me da z :

$$w^n = z,$$

es decir que quiero encontrar w . Siempre va a haber tantas soluciones como n .

i) Dado un número *genérico* $w = r \cdot e^{\theta i}$, lo visto con la info del enunciado:

$$w^6 = w = (r \cdot e^{\theta i})^6 = r^6 \cdot e^{6\theta i} \quad \star^1$$

Ahora hago lo mismo con el otro número $z = 8$:

$$z = 8 \cdot e^{0i} = 8 \star^2$$

Una vez con todo escrito en forma exponencial, es igualar prestar atención a la periodicidad del argumento y listo:

$$w^6 = z \xleftrightarrow[\star^2]{\star^1} r^6 \cdot e^{6\theta i} = 8 \xleftrightarrow{!} \begin{cases} r^6 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} \\ 6\theta \stackrel{!}{=} 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta_k = \frac{1}{3}k\pi \end{cases}$$

Con eso concluimos que las raíces son de la forma:

$$w_k = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{1}{3}k\pi} \text{ con } k \in [0, 5]$$

ii) Mismo procedimiento, te tiro una pista: Los números negativos tienen argumento π , así que en notación exponencial:

$$-4 = 4 \cdot e^{\pi i}$$

iii) En notación exponencial z , que está en segundo cuadrante:

$$z = -1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

iv) En notación exponencial z se calcula primero con la base:

$$z = (2 - 2i)^{12} = (2\sqrt{2} \cdot e^{\frac{7}{4}\pi i})^{12} = 2^{18} \cdot e^{21\pi i} \stackrel{!}{=} 2^{18} \cdot e^{\pi i}$$

9. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0$

Para que se cumpla la igualdad entre 2 números complejos, *las partes reales y imaginarias* deben ser iguales:

$$3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3z^5}_{\in \mathbb{C}} = \underbrace{-2|z|^5 - 32}_{\in \mathbb{R}} \xleftrightarrow{!} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(3z^5) = -2|z|^5 - 32 \\ \operatorname{Im}(3z^5) = 0 \end{array} \right\}$$

De la ecuación de la parte imaginaria: (Es útil recordar que $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \implies \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$)

$$\operatorname{Im}(3z^5) = 3 \cdot \frac{z^5 - \bar{z}^5}{2i} = 0 \iff z^5 = \bar{z}^5 \iff |z|^5 e^{5\theta i} = |z|^5 e^{-5\theta i} \xleftrightarrow[2k\pi]{!} \begin{cases} 5\theta = -5\theta + 2k\pi \\ \xleftrightarrow[\star^1]{!} \theta_k = \frac{1}{5}k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

De la ecuación de la parte real: (Es útil recordar que si $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$, entonces se puede expresar $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(3z^5) &= 3 \cdot \frac{z^5 + \bar{z}^5}{2} = 3 \cdot \frac{|z|^5 e^{5\theta i} + |z|^5 e^{-5\theta i}}{2} = 3|z|^5 \cos(5\theta) = -2|z|^5 - 32 \iff \\ \iff |z|^5 (3 \cos(5\theta) + 2) &= -2^5 \xrightarrow[\text{en } \theta_k \star^1]{\text{evaluando}} |z|^5 (3 \cos(k\pi) + 2) = -2^5 \begin{cases} \xrightarrow[\text{par}]{k} 0 < |z|^5 (3 + 2) \neq -2^5 \quad \text{💀} \\ \xrightarrow[\text{impar}]{k} |z|^5 (-3 + 2) = -2^5 \iff |z| = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalmente teniendo en cuenta que k tiene que ser impar, y que el $\arg(z) \in [0, 2\pi)$:

$$z_k = 2e^{\theta_k i} \quad \text{con } \theta_k = \frac{1}{5}k\pi \quad \text{y } k \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👋 naD GarRaz 🍷

10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales la ecuación $z^n + i\bar{z}^2 = 0$, tenga exactamente 6 soluciones y resolver en ese caso.

Pasar todo a notación exponencial:

$$z^n + i\bar{z}^2 = 0 \iff z^n = -i\bar{z}^2 \iff \begin{cases} z^n = r^n e^{n\theta i} \\ \bar{z}^2 = r^2 e^{-2\theta i} \\ -i = e^{\frac{3}{2}\pi} \end{cases} \iff r^n e^{n\theta i} = r^2 e^{(\frac{3}{2}\pi - 2\theta)i}$$

Esa ecuación se resuelve como siempre igualando los módulos y los argumentos, *sin olvidar la periodicidad* de éste último:

$$\begin{cases} r^n = r^2 \iff r^2(r^{n-2} - 1) = 0 \star^1 \\ n\theta = \frac{3}{2}\pi - 2\theta + 2k\pi \iff (n+2)\theta = (\frac{3}{2} + 2k)\pi \star^2 \end{cases}$$

La ecuación de $r \star^1$:

Analizo para cuales valores de r y de n se cumple la ecuación:

- ☐ $r = 0$ Aporta una solución trivial para cualquier $n \in \mathbb{N}$ en la ecuación $z^n + i\bar{z}^2 = 0$. Pero solo habría una solución $z = 0$ necesito encontrar otras 5.
- ☐ $r = 1$ serviría. Quiere decir que voy a poder encontrar solución en \star^1 que me deja usar cualquier n para jugar con la ecuación de $\theta \star^2$.
- ☐ $n = 2$ no sirve. Si bien cumple \star^1 es un valor que daría una solución para cada $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Pero tengo que tener solo 6 soluciones.

La ecuación de $\theta \star^2$:

Por lo analizado antes, juego con $r = 1$, eso no impone de momento ninguna condición sobre n :


$$(n+2)\theta = (\frac{3}{2} + 2k)\pi \xleftrightarrow[\forall n \in \mathbb{N}_{\neq 2}]{!!} \theta = \frac{1}{n+2}(\frac{3}{2} + 2k)\pi$$

Y ahora surge la pregunta: ¿Qué onda esto? Necesitamos 6 soluciones según el enunciado, pero a no olvidar que ya tenemos una solución proporcionada por el $r = 0$. Así que ahora laburo el θ para que me de 5 soluciones y así tener 6 en total. Pido entonces $n = 3$, para partir en 5 y obtener de esta forma 5 valores para $\theta_k \in [0, 2\pi)$:

$$\theta_k = \frac{1}{5} \cdot \frac{3+4k}{2}\pi \Leftrightarrow \theta_k = \frac{3+4k}{10}\pi \quad \text{con } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Finalmente para que la ecuación falopa esa tenga únicamente 6 soluciones, necesito que $n = 3$:

$$z^n + i\bar{z}^2 = 0 \xleftrightarrow[\text{solo 6 soluciones}]{n=3 \text{ para tener}} \begin{cases} z = 0 & \text{con } r = 0 \\ z_{k=0} = e^{i\frac{3}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \\ z_{k=1} = e^{i\frac{7}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \\ z_{k=2} = e^{i\frac{11}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \\ z_{k=3} = e^{i\frac{15}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \\ z_{k=4} = e^{i\frac{19}{10}\pi} & \text{con } r = 1 \end{cases}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

11.

- Calcular $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.
- Calcular $w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.
- Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.
- Calcular $w^{14} + w^{-8} + \bar{w}^4 + \bar{w}^{-3}$ para cada $w \in G_5$

Voy a estar usando las siguientes propiedades en G_n :

$$\text{Si } w \in G_n \implies \begin{cases} w^n = 1 \implies w^k = w^{r_n(k)} \\ \bar{w}^k = w^{r_n(-k)} \\ \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ m \mid n \implies G_m \subseteq G_n, \text{ lo uso para saber con cuales raíces hay que tener cuidado} \\ \text{Si } w \in G_p \text{ con } p \text{ primo} \end{cases}$$

- Calcular $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

Raíces de G_7 de interés: 7 es primo e impar $\implies w = 1$ se hace a parte.

Si $w = 1$:

$$w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = 6$$

Si $w \neq 1$:

$$\begin{aligned} w + \underbrace{\bar{w}}_{w^6} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) &= w + w^6 + w^2 + 2w^3 + w^4 - \underbrace{(w^7)^5}_{=1} w^3(1 - w^2) = \\ &= -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6}_{=0} = -1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) Calcular $w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

Raíces de G_3 de interés: 3 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.

Si $w = 1$:

$$w^{73} + \overline{w} \cdot w^9 + 8 = 10$$

Si $w \neq 1$:

$$\underbrace{w^{73}}_w + \underbrace{\overline{w} \cdot w^9}_{w^2 \cdot 1} + 8 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2}_{=0} + 8 = 7$$

c) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

Raíces de G_{10} de interés: $2 \mid 10$ y $5 \mid 10$. 10 es par $\Rightarrow w = \pm 1$ y raíces de G_2 y de G_5 se hacen a parte.

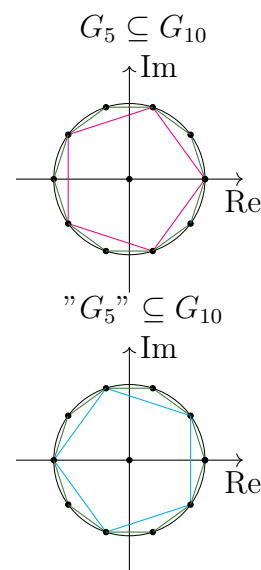
– Si $w = \pm 1$:

$$1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 5 \quad \checkmark$$

– Si $w \in G_{10}$ y $w \neq \pm 1$:

$$1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 1 + w^2 + w^8 + w^4 + w^6 =$$

$$= \sum_{k=0}^4 (w^2)^k = \frac{(w^2)^5 - 1}{w^2 - 1} = \frac{\overbrace{w^{10}}^{=1} - 1}{w^2 - 1} = 0$$



d) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$

Si $w = 1$:

$$w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}} = 4$$

Si $w \neq 1$:

$$w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}} = w^4 + w^2 + w + w^3 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = -1$$

12.

a) Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$

b) Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{60} w^k \right)$.

a) Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$.

Sé que si $w \in G_{36}$ ocurren:

$$\begin{cases} w^{36} = 1^{\star 1} \\ \sum_{k=0}^{35} w^k = 0 \end{cases}$$

Como $w^4 \neq 1 \implies w \neq \pm 1$. Si no tendría que considerar casos particulares para la suma.

Acomodo un poco la sumatoria, agregando los valores que faltan entre 0 y 7:

$$\begin{aligned} \sum_{k=7}^{60} w^{4k} &= \sum_{k=7}^{60} w^{4k} + \underbrace{\sum_{k=0}^6 w^{4k}}_{\sum_{k=0}^{60} w^{4k}} - \sum_{k=0}^6 w^{4k} = \sum_{k=0}^{60} w^{4k} - \sum_{k=0}^6 w^{4k} = \\ &= \frac{(w^4)^{61}-1}{w^4-1} - \frac{(w^4)^7-1}{w^4-1} = \frac{(w^4)^{61}-(w^4)^7}{w^4-1} \xrightarrow[\star 1]{61=9 \cdot 6+7} \frac{(w^{36})^6 \cdot (w^4)^7 - (w^4)^7}{w^4-1} = 0 \end{aligned}$$

Se concluye que:

$$\boxed{\sum_{k=7}^{60} w^{4k} = 0}$$

b) Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{60} w^k \right)$.

$$\text{Sé que si } w \in G_{11} \implies \begin{cases} w^{11} = 1 \\ \sum_{k=0}^{10} w^k = 0 \\ 11 \text{ es impar} \implies -1 \notin G_{11} \end{cases}$$

Como $w \neq 1$ no calculo caso particular para la suma. Me piden la parte real $\xrightarrow{\text{uso}} \operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$.


Probé hacer la suma de Gauss como en el anterior, pero no llegué a nada, abro sumatoria y uso que $61 = 5 \cdot 11 + 6$, porque hay 61 sumandos.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{60} w^k &= w^0 + \dots + w^{60} = 5 \cdot \overbrace{(w^0 + w^1 + \dots + w^9 + w^{10})}^{=0} + w^{55} + w^{56} + w^{57} + w^{58} + w^{59} + w^{60} = \\ &= w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 \star 1 \end{aligned}$$

agrupé usando: $w \in G^{11} \implies w^k = w^{r_{11}(k)}$

También voy a usar que si $w \in G_{11} \implies \bar{w}^k = w^{r_{11}(-k)}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{60} w^k \right) &= \frac{\sum_{k=0}^{60} w^k + \sum_{k=0}^{60} \bar{w}^k}{2} \stackrel{\star 1}{=} \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \bar{w}^0 + \bar{w}^1 + \bar{w}^2 + \bar{w}^3 + \bar{w}^4 + \bar{w}^5}{2} = \\ &= \frac{w^0}{2} + \frac{\overbrace{w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^{10} + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}^{\sum_{k=0}^{10} w^k}}{2} = \frac{\overbrace{w^0}^1}{2} + \frac{\overbrace{\sum_{k=0}^{10} w^k}^{=0}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD  GarRaz

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ raíz cúbica de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$. Concluir que $z_n \in G_6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hay que probar por inducción. Quiero probar:

$$p(n) : z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$\begin{cases} p(1) : z_1 = 1 + e^{\frac{2\pi}{3}i} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ p(2) : z_2 = \overline{1 + z_1^2} = \overline{1 + e^{\frac{4\pi}{3}i}} = \overline{1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i}} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$

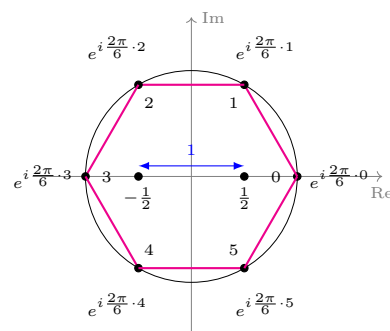
Paso inductivo:

$$\begin{cases} p(2k) : \underbrace{z_{2k} = e^{-\frac{\pi}{3}i}}_{\text{hipótesis inductiva}} \text{ Verdadero} \implies p(2k+2) \text{ ¿Verdadero?} \\ p(2k+1) : \underbrace{z_{2k+1} = e^{\frac{\pi}{3}i}}_{\text{hipótesis inductiva}} \text{ Verdadero} \implies p(2k+3) \text{ ¿Verdadero?} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{2k+2} = \overline{1 + z_{2k+1}^2} \xLeftrightarrow{\text{HI}} z_{2k+2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{\frac{\pi}{3}i}} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ z_{2k+3} = \overline{1 + z_{2k+2}^2} \xLeftrightarrow{\text{HI}} z_{2k+3} = \overline{1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{e^{-\frac{\pi}{3}i}} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$

Dado que $p(1), p(2), p(2k), p(2k+1), p(2k+2), p(2k+3)$ resultaron ser verdaderas, entonces por el principio de inducción se concluye que $p(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado que la sucesión z_n tiene solo 2 imágenes, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y teniendo en cuenta que $e^{-i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 5} \in G_6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$



Dale las gracias y un poco de amor ❤ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🍷

14. Se define en $\mathbb{C} - \{0\}$ la relación \mathcal{R} dada por $z \mathcal{R} w \iff z\bar{w} \in \mathbb{R}_{>0}$.

i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

ii) Dibujar en el plano complejo la clase de equivalencia de $z = 1 + i$.

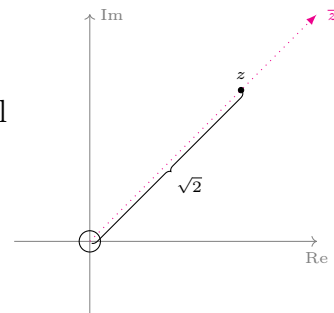
i) Dado un $z = re^{i\theta}$, tengo que $z \in \mathbb{R}_{>0} \iff \text{Re}(z) > 0 \wedge \text{Im}(z) = 0 \iff r > 0 \wedge \theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

– Reflexividad: $z = re^{i\theta}, z \mathcal{R} z = r^2 e^{2\theta i}$ por lo tanto $z \mathcal{R} z \iff 2\theta = 2k\pi \iff \theta = k\pi \quad \checkmark$

$$\begin{aligned}
- \text{ Simetría: } & \begin{cases} z \mathcal{R} w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \quad \checkmark \\ w \mathcal{R} z = rse^{(\varphi-\theta)i} \iff \theta = -2k_2\pi + \varphi = 2k_3\pi + \varphi \quad \checkmark \end{cases} \\
- \text{ Transitividad: } & \begin{cases} z \mathcal{R} w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \\ w \mathcal{R} v = rse^{(\varphi-\alpha)i} \iff \varphi = 2k_2\pi + \alpha \\ \implies z \mathcal{R} v \iff \theta = 2k_1\pi + \underbrace{\varphi}_{2k_2\pi + \alpha} = 2\pi(k_1 + k_2) + \alpha = 2k_3\pi + \alpha \quad \checkmark \end{cases}
\end{aligned}$$

La relación \mathcal{R} es de equivalencia.

ii) Tengo que el $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. La clase \bar{z} estará formada por los $w \in \mathbb{C}$ tal que:

$$w \mathcal{R} z \iff \arg(w) = \frac{1}{4}\pi$$


Dale las gracias y un poco de amor a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

naD GarRaz

15. Se define la siguiente relación \mathcal{R} en G_{20} :

$$z \mathcal{R} w \iff zw^9 \in G_2.$$

- Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- Calcular la cantidad de elementos que hay en cada clase de equivalencia.

i) *Reflexividad*:

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \implies z \mathcal{R} z \iff e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \cdot e^{i\frac{9}{10}\pi k_z} = e^{ik_z\pi} = \begin{cases} 1 & k_z \text{ par} \\ -1 & k_z \text{ impar} \end{cases} \quad \checkmark$$

Simetría: La relación \mathcal{R} será simétrica si:

$$z \mathcal{R} w \iff w \mathcal{R} z$$

De forma exponencial para poder expresar el producto de un número por otro:

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \in G_{20} \quad \text{y} \quad w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \in G_{20}.$$

$$zw^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_w)} \in G_2 \iff \frac{1}{10}(k_z+9k_w) = k \iff k_z+9k_w = 10k \iff k_z \equiv -9k_w \pmod{10}$$

Quedando la dentro de todo simpática relación de congruencia que me permite reescribir la definición de la relación:

$$k_z \equiv k_w \pmod{10} \overset{!}{\iff} \boxed{z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w \pmod{10}}$$

Voy a expresar ahora $w \mathcal{R} z$:

$$wz^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9k_z)} = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9(10k+k_z))} = e^{i\frac{\pi}{10}(90k+10k_w)} = e^{i(9k+k_w)\pi} = e^{ik'\pi} \text{ con } k' \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto se puede concluir que la relación es simétrica $\forall k_z, k_w \in \mathbb{Z}$ con $k_z \equiv k_w \pmod{10}$

Transitividad:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \\ w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \\ y = e^{i\frac{1}{10}\pi k_y} \end{array} \right\} \in G_{20}$$

Entonces la relación \mathcal{R} es transitiva si:

$$z \mathcal{R} w \text{ y } w \mathcal{R} y \xrightarrow{\text{atajo}} z \mathcal{R} y$$

Del punto anterior sé que:

$$\left\{ \begin{array}{l} z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w \pmod{10} \star^1 \\ w \mathcal{R} y \iff k_w \equiv k_y \pmod{10} \star^2 \end{array} \right.$$

Planteo similar al punto anterior, veo que cosa queda del producto:

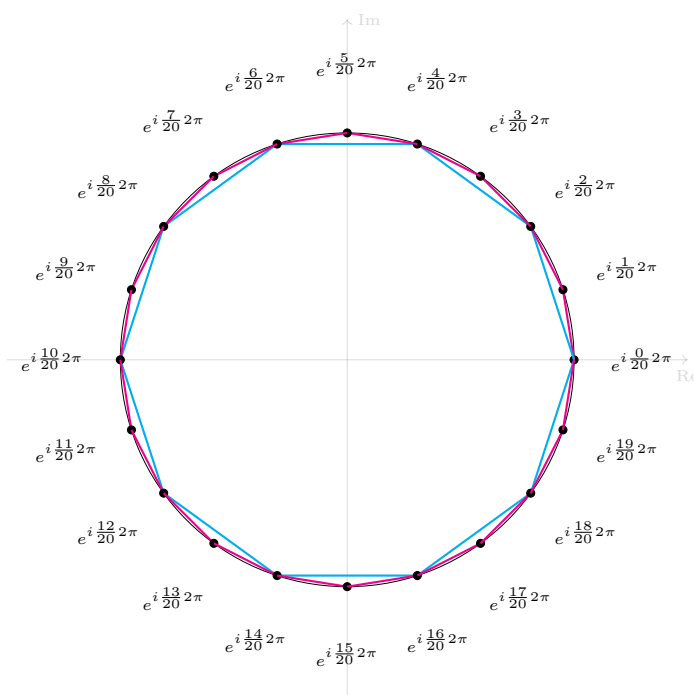
$$zy^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_y)} \star^1 = e^{i\frac{\pi}{10}(10k+k_w+9k_y)} \star^2 = e^{i\frac{\pi}{10}(10k+10k'+k_y+9k_y)} \stackrel{!}{=} e^{i(k+k'+k_y)\pi} = e^{ik''\pi}$$

Con ese resultado podemos concluir que la relación es transitiva:

$$z \mathcal{R} w \text{ y } w \mathcal{R} z \implies z \mathcal{R} y$$

Dado que la relación \mathcal{R} resultó ser *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*, es también una relación de *equivalencia*.

- ii) $\#e^{i\frac{2\pi}{20}k} = 2$ para algún $k \in \mathbb{Z}/r_{20}(k) < 20$. Dada la condición $k_z \equiv k_w \pmod{10}$, solo hay 2 números que tienen misma cifra de unidad entre 0 y 20. En el gráfico se ve que si $z \mathcal{R} w \implies w = -z$



Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🧡

🔥 Ejercicios de parciales:

🔥1. Para $w \in G_6$, calcular $S = w^{71} + w^{-14} + 5\bar{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023}$

Si $w = 1$:

$$S = 1 + 1 + 5 \cdot 1 + 1 - 4 \cdot 1 + 1 = 5$$

Si $w \neq 1$:

$$\begin{aligned} S &= w^{71} + w^{-14} + 5\bar{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023} \\ &\stackrel{!}{=} w^5 + w^4 + 5w^2 + w^3 - 4w^2 + w^1 \\ &\stackrel{!}{=} w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = \underbrace{-1 + 1 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5}_{=0} = -1 \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼

👉 Ale Teran 🐼

🔥2. Sea $w \in G_{14}$. Hallar todos los posibles valores de $w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j}$

Voy a usar que: $\begin{cases} w \in G_n \implies \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ \text{Si } m \mid n \implies G_m \subseteq G_n \end{cases}$

Si $w = 1$:

$$\underbrace{w^7}_{=1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{w^{2j}}_{=1} = 1 + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{=134} = 1 + 134 = 135 \quad \checkmark$$

Si $w = -1$:

$$\underbrace{w^7}_{=-1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{(w^j)^2}_{=1} = -1 + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{=134} = -1 + 134 = 133 \quad \checkmark$$

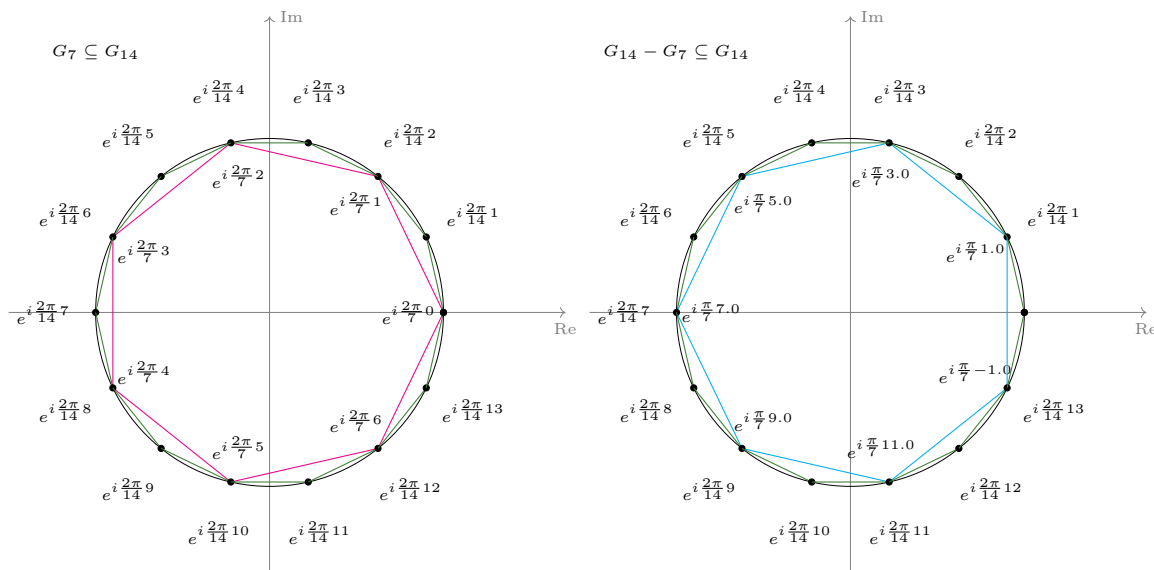
Si $w \neq \pm 1$:

$$w \in G_{14} \implies w = e^{i\frac{2k\pi}{14}} \text{ con } k \in \mathbb{Z}_{[0,13]} \implies w^2 = \left(e^{i\frac{2k\pi}{14}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{7} \cdot k} \in G_7 \implies \sum_{j=0}^6 (w^2)^j = 0$$

$$w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j} = w^7 + \sum_{j=0}^{140} (w^2)^j - \sum_{j=0}^6 (w^2)^j = w^7 + \frac{(w^2)^{141} - 1}{w^2 - 1} - \underbrace{0}_{=0} = \underbrace{w^7}_{=1} + \frac{w^2 \left(\underbrace{(w^{14})}_{=1} \right)^{20} - 1}{w^2 - 1} = w^7 + 1$$

$$\text{Si } \begin{cases} w \in G_7 & \implies w^7 = 1 \\ w \in G_{14} - G_7 & \implies w^7 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w \in G_7 & \rightarrow 1 + 1 = 2 \quad \checkmark \\ w \in G_{14} - G_7 & \rightarrow -1 + 1 = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$



Dale las gracias y un poco de amor ❤️ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🌀

🔥3. Sea $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- $8 \mid 3n + |z^3|$
- $\arg(z^{7n+6}) = \arg(i)$

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ \theta_z = \frac{11}{6}\pi \end{cases} \rightarrow z = |z|e^{i\theta_z} = e^{i\frac{11}{6}\pi} \implies z^3 = e^{i\frac{11}{2}\pi} = -1 \Leftrightarrow |z^3| = 1$$

Primera condición:

$$8 \mid 3n + |z^3| = 3n + 1 \xLeftrightarrow{\text{def}} 3n + 1 = 8k \xLeftrightarrow{\text{def}} 3n + 1 \equiv 0 \pmod{8} \Leftrightarrow 3n \equiv 7 \pmod{8} \xLeftrightarrow[3 \perp 8]{\times 3} 9n \equiv 21 \pmod{8} \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod{8} \quad \checkmark$$


Segunda condición:

$$\begin{aligned} \arg(z^{7n+6}) = \arg(i) &\Leftrightarrow \left(e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^{7n+6} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{i\frac{77}{6}\pi + 11\pi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{77}{6}n\pi + 11\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \xrightarrow[n]{\text{despejo}} \frac{77}{6}n + 11 &= \frac{1}{2} + 2k \Leftrightarrow 77n = -63 + 12k \xLeftrightarrow{\text{def}} 77n \equiv -63 \pmod{12} \Leftrightarrow 5n \equiv -3 \pmod{12} \xLeftrightarrow[(\Leftarrow)5 \perp 12]{\times 5} \\ n &\equiv 9 \pmod{12} \quad \checkmark \end{aligned}$$


$$\begin{array}{c} \text{junto info} \\ \text{TCHR} \end{array} \rightarrow \begin{cases} n \equiv 9 \pmod{12} \\ n \equiv 5 \pmod{8} \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{divisores coprimos}]{\text{quiero}} \begin{cases} n \equiv 1 \pmod{4} \quad \checkmark \\ n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{4} \quad \checkmark \\ n \equiv 1 \pmod{2} \quad \checkmark \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{de mayor divisor}]{\text{me quedo con el}} \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \quad \star^1 \\ n \equiv 5 \pmod{8} \quad \star^2 \end{cases}$$

Ahora sí, tengo el sistema con *divisores coprimos*, por TCHR tengo solución.

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[\star^1]{\text{de}} n = 3k \star^3 \quad \checkmark \xrightarrow[\text{en } \star^2]{\text{reemplazo}} 3k \equiv 5 \pmod{8} \xleftrightarrow[(\Leftarrow) 3 \perp 5]{\times 3} k \equiv 7 \pmod{8} \Leftrightarrow k = 8j + 7 \quad \checkmark \\ \xrightarrow[k \text{ en } \star^3]{\text{reemplazo}} n = 3(8j + 7) = 24j + 21 \Leftrightarrow \boxed{n \equiv 21 \pmod{24}} \quad \checkmark \end{array}$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 4. Sea $w = e^{\frac{\pi}{18}i}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente:

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = 0 \quad \sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = 0.$$

Expresar la solución como una única ecuación de congruencia.

Dado que:

$$w = e^{\frac{1}{18}\pi i} \Leftrightarrow \begin{cases} w^3 = e^{\frac{1}{6}\pi i} \neq 1 \\ w^4 = e^{\frac{2}{9}\pi i} \neq 1 \end{cases},$$

puedo usar la serie geométrica.

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = \sum_{k=0}^{5n+1} (w^3)^k = \frac{(w^3)^{5n+2} - 1}{w^3 - 1} = 0 \Leftrightarrow (w^3)^{5n+2} = 1.$$

Queda una ecuación para encontrar w :

$$(w^3)^{5n+2} = 1 \xleftrightarrow[\text{exponente}]{\text{laburo}} \frac{15n+6}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 5n+2 = 12k \xleftrightarrow{\text{def}} 5n \equiv 10 \pmod{12} \star^1$$

Y tenemos una ecuación. Ahora calculamos la otra sumatoria:

$$\sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = \sum_{k=0}^{4n+6} (w^4)^k = \frac{(w^4)^{4n+7} - 1}{w^4 - 1} = 0 \Leftrightarrow (w^4)^{4n+7} = 1$$

Igual que antes, busco los w que satisfacen:

$$(w^4)^{4n+7} = 1 \xleftrightarrow[\text{exponente}]{\text{laburo}} \frac{16n+28}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 4n+7 = 9k \xleftrightarrow{\text{def}} 4n \equiv 2 \pmod{9} \star^2$$

Con la segunda ecuación armo sistema y TCH:

$$\begin{array}{l} \star^1 \\ \star^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} n \equiv 2 \pmod{12} \\ n \equiv 5 \pmod{9} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 2 \pmod{4} \\ n \equiv 2 \pmod{3} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{!} \left\{ \begin{array}{l} n \equiv 2 \pmod{4} \\ n \equiv 5 \pmod{9} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{solución por TCR}]{9 \perp 4 \text{ hay}} \boxed{n \equiv 14 \pmod{36}} \quad \checkmark$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 naD GarRaz 

 Ale Teran 

🔥 5. Sea

$$z = (4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^a (8 + 8\sqrt{3}i)^b$$

se pide:

- Sabiendo que $\arg(z) = \arg(-i)$, hallar el resto de dividir a $3a + 4b$ por 24
- Determinar todas las parejas de números enteros (a, b) tales que cumplen lo anterior, y además

$$2^{10} < |z| < 2^{25}$$

Sugerencia: Use, sin demostrar, que $2^x < 2^y < 2^z \Leftrightarrow x < y < z$.

a) Acomodo z :

$$\begin{aligned} z &= (4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^a (8 + 8\sqrt{3}i)^b \\ &= (4\sqrt{2}(1 + i))^a \cdot (8(1 + \sqrt{3}i))^b \\ &= 8^a 16^b e^{a \cdot \frac{\pi}{4}i} \cdot e^{b \cdot \frac{\pi}{3}i} \\ &\stackrel{!}{=} 2^{3a+4b} \cdot e^{i(\frac{a}{4} + \frac{b}{3})\pi} \end{aligned}$$

Entonces si $\arg(z) = \arg(-i)$:

$$\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3}\right)\pi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \boxed{3a + 4b = 18 + 24k}$$

Esté resultado es literalmente la expresión de un número dividido por 24 con su resto:

$$r_{24}(3a + 4b) = 18 \quad \text{con} \quad 0 \leq 18 < 24$$

b) Condición sobre el $|z|$:

$$|z| = 2^{3a+4b} \quad \wedge \quad 2^{10} < |z| < 2^{25} \Leftrightarrow 10 < 3a + 4b < 25 \star^1$$

Por otro lado tengo:

$$3a + 4b \equiv 18 \pmod{24} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 3a + 4b = 24k + 18 \star^2.$$

Reemplazo \star^2 en \star^1 :

$$10 < 24k + 18 < 25 \Leftrightarrow -8 < 24k < 7 \Leftrightarrow k = 0.$$

Por lo tanto tengo:

$$3a + 4b = 18$$

Para encontrar los pares resuelvo la diofántica (a ojo en este caso, sino usar euclides):

$$(a, b)_{\text{particular}} = (2, 3) \quad \text{y} \quad (a, b)_{\text{homogeneo}} = (-4, 3)$$

La solución general final con todos los pares queda:

$$\begin{aligned} (a, b)_{\text{general}} &= k \cdot (-4, 3) + (2, 3) \\ &= (-4 + 2k, 3 + 3k) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dale las gracias y un poco de amor 🧡 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👉 naD GarRaz 🐼