# Apunte único: Álgebra I - Práctica 7

## Por alumnos de Álgebra I Facultad de Ciencias Exactas y Naturales UBA

## Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1.	<b>6.</b>	11.	<b>16.</b>	<b>21.</b>	<b>26.</b>	31.	<b>36.</b>
<b>2.</b>	<b>7.</b>	<b>12.</b>	<b>17.</b>	<b>22.</b>	<b>27.</b>	<b>32.</b>	<b>37.</b>
<b>3.</b>	8.	13.	18.	<b>23.</b>	<b>28.</b>	<b>33.</b>	<b>38.</b>
<b>4.</b>	9.	<b>14.</b>	19.	<b>24.</b>	<b>29.</b>	<b>34.</b>	<b>39.</b>
<b>5.</b>	<b>10</b> .	<b>15.</b>	<b>20.</b>	<b>25.</b>	<b>30.</b>	<b>35.</b>	

• Ejercicios de Parciales

<b>1</b> .	<b>3</b> .	<b>5</b> .	<b>७</b> 7.	<b>6</b> 9.
<b>2</b> .	<b>4</b> .	<b>♦</b> 6.	<b>\ddots</b> 8.	

#### Disclaimer:

Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

## ¡Si usás este apunte vas a reprobar!

Not really. Dependerá de como lo uses, puede ser un arma de doble filo. Ya sabés como se usa esto •• Depende de vos lo que hagas con él. Si estás trabado, antes de ver la solución que hizo otra persona:

- Mirar la solución ni bien te trabás, te condicionas pavlovianamente a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.
- forma de la composita del composita de la composita del composita de la composita de la composita del composita del composita della composita
- j.No sale el fácil? Intentá uno aún más fácil.
- Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.
- Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir 'no me sale' ∄+. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

#### Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles de un tema en particular, no te van a salir los ejercicios más difíciles: Sentido común.

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confiaza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, pero no estás aprendiendo nada. Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, algo raro debe haber. A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas de Teresa que son buenísimos .

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra: Prácticas Pandemia.

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre Just Do IT

El repo en github para descargar las guías con los últimos updates.



La Guía 7 se actualizó por última vez:  ${}_{12/11/24} \, {}_{\odot} \, {}_{14:00}$ 



Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por Telegram  $\bigcirc$ .



#### Notas teóricas:

• Operaciones:

+: Sean 
$$f, g \in \mathbb{K}[X]$$
 con  $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  y  $g = \sum_{i=0}^n b_i X^i$   

$$\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

$$: \text{ Sean } f, g \in \mathbb{K}[X] \text{ con } f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \text{ y } g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$$

$$\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j) X^k \in \mathbb{K}[X]$$

• Algoritmo de división:

 $f,g\in\mathbb{K}[X]$  no nulos, existen únicos q y  $R\in\mathbb{K}[X]$  tal que

$$f = q \cdot g + R$$

con gr(R) < gr(f) o R = 0.

• Raíz de un Polinomio:

$$\alpha$$
 es raíz de  $f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$ 

• Máximo común divisor:

Polinomio,  $(f:g) \in \mathbb{K}[X]$ , mónico de mayor grado que divide a ambos polinomios en  $\mathbb{K}[X]$  y vale el algoritmo de Euclides.

- $\bullet$  (f:g) | f y (f:g) | g
- $f = (f:g) \cdot k_f$  y  $g = (f:g) \cdot k_g$  con  $k_f$  y  $k_g$  en  $\mathbb{K}[X]$
- Dos polinomios son coprimos si  $(f:g)=1 \iff f \neq g$
- Raíces múltiples:

Sea  $f \in \mathbb{K}[x]$  no nulo, y sea  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Se dice que:

 $\bullet$  Cuando f tiene una raíz múltiple:

$$\alpha$$
 es raíz múltiple de  $f \iff f = (X - \alpha)^2 q$   
 $f = (X - \alpha) \cdot q$ , con  $q \in \mathbb{K}[X]$  y  $q(\alpha) = 0$ .

• Cuando la raíz no es múltiple, es simple cuando:

$$\alpha$$
 es raíz simple de  $f \iff (X - \alpha) \mid f$  y  $(X - \alpha)^2 \not \mid f$   $f = (X - \alpha) \cdot q$ , con  $q \in \mathbb{K}[X]$  y  $q(\alpha) \neq 0$ .

Prestale atención a los! porque sino la vas a cagar.

• Sea  $m \in \mathbb{N}_0$ . Se dice que  $\alpha$  es raíz de multiplicidad (exactamente) m de f, y se nota:

$$\operatorname{mult}(\alpha; f) = m \iff (X - \alpha)^m \mid f,$$

y también

$$(X-\alpha)^{m+1} \not\mid f.$$

O equivalentemente,

$$f = (X - \alpha)^m q$$
 con  $q \in \mathbb{K}[X]$ , y  $q(\alpha) \neq 0$ .

• Raíces y MCD:

Sean  $f, g \in \mathbb{K}[X]$  no ambos nulos, y  $\alpha \in \mathbb{K}$ : Esta se usa bastante.

$$\Rightarrow f(\alpha) = g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (f:g)(\alpha) = 0$$

 $\bullet$   $\alpha$  es raíz múltiple de f si y solo si:

$$f(\alpha) = 0$$
 y  $f'(\alpha) = 0 \iff \alpha$  es raíz de  $(f:f') \iff X - \alpha \mid (f:f')$ 

• La multiplicidad m de una raíz, será m-1 en la derivada:

$$\operatorname{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{mult}(\alpha; f') = m - 1$$

 $\bullet$  Relación entre la multiplicidad de una raíz de f y sus derivadas:

entonces la **tercera derivada** NO PUEDE SER 0,  $f'''(\alpha) \neq 0$ .

Pero tanto la función, su primera y segunda derivada DEBEN SER  $0, f(\alpha) \stackrel{!!}{=} f'(\alpha) \stackrel{!!}{=} f''(\alpha) \stackrel{!!}{=} 0$ 

• Lema de Gauss:

Sea  $f = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$  con  $a_0 \neq 0$ . Si  $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[X]$  es una raíz racional de f, con  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{Z}$  coprimos, entonces  $\alpha \mid a_0$  y  $\beta \mid a_n$ .

El Lema de Gauss implica que en el conjunto de fracciones irreducibles  $\frac{\alpha}{\beta}$  están todas las raíces racionales de f.

• Polinomios irreducibles:

Sea  $f \in K[X]$ 

- Se dice que f es irreducible en K[X] cuando  $f \notin K$  y los únicos divisores de f son de la forma g=c o g=cf para algún  $c\in K^{\times}$ . O sea f tiene únicamente dos divisores mónicos (distintos), que son 1 y  $\frac{f}{\operatorname{cp}(f)}$
- Se dice que f es reducible en K[X] cuando  $f \notin K$  y f tiene algún divisor  $g \in K[X]$  con  $g \neq c$ y  $g \neq cf$ ,  $\forall c \in K^{\times}$ , es decir f tiene algún divisor  $g \in K[X]$  (no nulo por definición) con  $0 < \operatorname{gr}(q) < \operatorname{gr}(f)$ .

#### Ejercicios de la guía:

- 1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en  $\mathbb{Q}[X]$ :
  - i)  $(4X^6 2X^5 + 3X^2 2X + 7)^{77}$ ,
  - ii)  $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 X + 5)^4 (6X^4 + 2X^3 + X 2)^7$ ,
  - iii)  $(-3X^5 + X^4 X + 5)^4 81X^{20} + 19X^{19}$
  - i) coeficiente principal:  $4^{77}$  grado:  $6 \cdot 77$
  - ii) coeficiente principal:  $(-3)^4 6^7 = -279.855$ grado: 28
  - iii) coeficiente principal:  $(\underbrace{-3X^5 + X^4 X + 5}_f)^4 + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_g$

Cuando sumo me queda:  $\operatorname{cp}(f^4) - \operatorname{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0$ , esto quiere decir que no sé cual es el coeficiente principal, porque el 0 está matando al término  $X^{20}$ . Tengo entonces  $\operatorname{gr}(f^4 + g) < 20$  Calculo el  $\operatorname{cp}(f^4 + g)$  con  $\operatorname{gr}(f^4 + g) = 19$ .

Laburo a f:

$$\frac{\operatorname{para\ usar}}{\operatorname{fórmula\ de}\ f \cdot g} \left(-3X^5 + X^4 - X + 5\right)^4 = \left(-3X^5 + 1X^4 - X + 5\right)^2 \cdot \left(-3X^5 + X^4 - X + 5\right)^2$$

$$f^2 \cdot f^2 = \sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j\right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \bigstar^2$$

$$\sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j\right) X^k \xrightarrow{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \stackrel{\bigstar}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \stackrel{\bigstar}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{b_{10} \text{ sale a}}{\text{ojimetro}} b_{10} = \left(-3\right)^2 = 9 \\ \frac{a_9 \text{ no tan fácil, volver}}{\text{a usar } \sum f \cdot g \text{ en } k = 9} f \cdot f = \sum_{k=0}^{10} \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j\right) X^k \stackrel{\bigstar}{=} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \stackrel{\bigstar}{=} c_4 \cdot d_5 + c_5 \cdot d_4 \stackrel{\bigstar}{=} 2 \cdot c_4 \cdot d_5 \\ \frac{d_5 \text{ sale a}}{\text{ojimetro}} d_5 = -3 \\ \frac{c_4 \text{ sale a}}{\text{ojimetro}} c_4 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow a_9 = -6 \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \operatorname{cp} f^4 = 2 \cdot \left(-6\right) \cdot \left(9\right) = -108 \\ \operatorname{cp} g = 19 \end{array}\right\} \rightarrow \left[\begin{array}{c} \operatorname{cp} f^4 + g = -89 \end{array}\right] \checkmark$$

\*: Sabemos que el gr $(f^4) = 20 \Rightarrow \operatorname{gr}(f^2) = 10$ . Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir  $X^i \cdot X^j = X^{19}$  con  $i, j \leq 10$  solo puede ocurrir cuando los exponentes  $\begin{cases} i = 10, j = 9 \\ \forall i = 9, i = 10 \end{cases}$ 

 $\star^2$ : porque estoy multiplicando el mismo polinomio,  $a_i = b_i$ . Pero lo dejo distinto para hacerlos visualmente más genérico.

★<sup>3</sup>: Idem ★<sup>1</sup> para el polinomio f grado: 19

### 2. Some suppose that the same of the same suppose that the same suppose the same supp

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc 3$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc 3$ .

**3.** Hallar, cuando existan, todos los  $f \in \mathbb{C}[X]$  tales que:

i) 
$$f^2 = Xf + X + 1$$
,

iii) 
$$(X+1)f^2 = X^6 + Xf$$
,

ii) 
$$f^2 - Xf = -X^2 + 1$$
,

iv) 
$$f \neq 0$$
 y  $f^3 = \operatorname{gr}(f) \cdot X^2 f$ .

i) La ecuación se tiene que cumplir para todo valor de X, así que no es cuestión de buscar algún valor para el que la igualdad se cumpla. Acomodo la ecuación:

$$f^2 = Xf + X + 1 \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (f - 1) \cdot (f + 1) = X \cdot (f - 1) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} (f + 1) \cdot (f - (X + 1)) = 0$$

Eso último es una igualación de polinomios, donde el polinomio del miembro derecho es g=0. Entonces, para que se cumpla esa igualdad para todo valor de X, el miembro derecho también tiene que ser 0 para todo valor de X. Eso ocurre cuando:

$$f = -1$$
 o  $f = X + 1$ 

- ii) Mirando la ecuación se puede calcular el grado que debería tener f:
  - $\blacksquare_1$ ) ¿Puede ser gr(f) = 0?

$$f = k \Rightarrow k^2 - X \cdot k = -X^2 + 1,$$

No cierra el tema del grado. Para que un polinomio sea igual a otro, estos deben tener igual grado.

 $\square_2$ ) ¿Puede ser gr(f) = 1?

$$f = bX + c \Rightarrow b^2X + 2bcX + c^2 - bX^2 + Xc = -X^2 + 1$$

en el miembro izquierdo se cancelan los términos cuadráticos, por lo que nuevamente no voy a poder tener un polinomios iguales en ambos miembros de la ecuación.

 $\square_3$  ¿Puede ser gr(f) = 2?

$$f = aX^2 + bX + c \stackrel{!}{\Rightarrow} (aX^2 + b^2X + c)^2 - X(aX^2 + bX + c) = -X^2 + 1,$$

Acá nos queda el miembro izquierdo con gr(4) y el izquierdo con gr(2), así que no hay f, bla, bla.

- $\square$ 4) ¿Puede ser  $gr(f) \geq 3$ ?. Diría que no por razones muy interesantes.
- iii) En este caso se puede ver que el miembro izquierdo va a tener siempre grado impar. Para que el miembro derecho tenga grado impar, necesito que f sea algo que cancele el  $X^6$

$$\operatorname{gr}((X+1) \cdot f^2) = \operatorname{gr}(X \cdot (X^5+f)) \Leftrightarrow \operatorname{gr}(X+1) + \operatorname{gr}(f^2) = \operatorname{gr}(X) \cdot \operatorname{gr}(X^5+f) \Leftrightarrow 2 \cdot \operatorname{gr}(f) = \operatorname{gr}(X^5+f)$$

Analizamos la última ecuación para distintos grados:

$$\operatorname{gr}(f) > 5 \Rightarrow \operatorname{gr}(X^5 + f) = 5 \stackrel{*}{\bigstar}^1$$
  
 $\operatorname{gr}(f) = 5 \Rightarrow \operatorname{gr}(X^5 + f) \le 5 \stackrel{*}{\bigstar}^2$   
 $\operatorname{gr}(f) > 5 \Rightarrow \operatorname{gr}(X^5 + f) = \operatorname{gr}(f) \stackrel{*}{\bigstar}^3$ 

Entonces no tenemos un valor para el grado de f en el que haya un balance en la ecuación, porque: Para el caso 🖈 el miembro derecho tiene un valor par así que descartado.

Para el caso  $\star^2$  el miembro derecho tiene un grado igual a 10 así que descartado.

Y por último para el caso \* el miembro derecho tiene un grado del doble que el polinomio del miembro izquierdo.

iv) Si  $f \neq 0$ :

$$f^3 = \operatorname{gr}(f) \cdot X^2 f \Leftrightarrow f \cdot (f^2 - \operatorname{gr}(f)X^2) = 0$$

Como por enunciado  $f \neq 0$ , para que el miembro izquierdo sea 0, necesitamos que:

$$(f^2 - \operatorname{gr}(f)X^2) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{gr}(f^2) = \operatorname{gr}\left(\operatorname{gr}(f) \cdot X^2\right) = 2 \Leftrightarrow 2\operatorname{gr}(f) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{gr}(f) = 1$$

Entonces  $gr(f) = 1 \Rightarrow f = aX$ , evalúo en la ecuación del enunciado para averiguar el valor de a:

$$a^{3} \cdot X^{3} = 1 \cdot X^{2} \cdot aX = aX^{3} \Leftrightarrow a \cdot (a^{2} - 1)X^{3} = 0 \xrightarrow{\stackrel{\text{si } f \neq 0}{\Rightarrow a \neq 0}} \begin{cases} a = 1 \\ y \\ a = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto los polinomios f que cumplen son:

$$f = -X$$
 y  $f = X$ 

Dale las gracias y un poco de amor 💛 a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

👸 Nad Garraz 🞧

Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) 
$$f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$$
 y  $g = X^2 + 2$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ ,

ii) 
$$f = 4X^4 + X^3 - 4$$
 y  $g = 2X^2 + 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$  y  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$ ,

iii) 
$$f=X^n-1$$
y  $g=X-1$ en  $\mathbb{Q}[X],\,\mathbb{R}[X],\,\mathbb{C}[X]$ y  $(\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z})[X]$ 

Resultado válido para  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ 

ii) 
$$\begin{array}{c|c}
4X^4 + X^3 & -4 & 2X^2 + 1 \\
-4X^4 & -2X^2 & 2X^2 + \frac{1}{2}X - 1
\end{array}$$

$$-X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X - 4 - 2X^2 - \frac{1}{2}X - 4 - 2X^2 - \frac{1}{2}X - 3$$

Resultado válido para  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ 

En 
$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2 + 1) \cdot \underbrace{(2X^2 + 4X + 6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X + 4)}_{r[X]}$$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división asoma la idea de que:

$$X^n-1=(X-1)\cdot\sum_{j=0}^{n-1}X^j+\underbrace{0}_{r[X]},$$
 (que es la geométrica con  $X\neq 1$ )

Inducción: Quiero probar que  $p(n): X^n - 1 = (X - 1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 

Caso base: 
$$p(1): X^1 - 1 = (X - 1) \sum_{j=0}^{1-1} X^j \Rightarrow p(1)$$
 es Verdadero  $\checkmark$ 

Paso inductivo:

$$p(k): \underbrace{X^k - 1 = (X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI} \text{ es Verdadera} \stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1): X^{k+1} - 1 = (X-1) \cdot \sum_{j=0}^k X^j \text{ es Verdadera}$$

$$(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k} X^{j} = (X-1) \cdot (\sum_{j=0}^{k-1} X^{j} + X^{k}) = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + (X-1) \cdot X^{k} = X^{k} - 1 + X^{k+1} - X^{k} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^{j}}_{HI} + \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{HI} = \underbrace{(X-1) \cdot X^{k}}_{$$

$$X^{k+1}-1$$
  $\checkmark$ 

Dado que p(1), p(k) y p(k+1) resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera p(n)  $\forall n \in \mathbb{N}$ 

Dale las gracias y un poco de amor ♥ a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

8 Nad Garraz •

- 5. Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que
  - i)  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  sea divisible por  $X^2 + aX + 1$ ,
  - ii)  $X^4 aX^3 + 2X^2 + X + 1$  sea divisible por  $X^2 + X + 1$ ,
  - iii) El resto de la división de  $X^5 3x^3 x^2 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$  sea -8X + 4.
    - i) Haciendo la division de  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$ , se tiene que:

$$X^{3} + 2X^{2} + 2X + 1 = (X - a + 2)(X^{2} + aX + 1) + \underbrace{(a^{2} - 2a + 1)X + a - 1}_{\text{resto}}$$

Así, para que  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  sea divisible por  $X^2 + aX + 1$  tiene que ocurrir que el resto sea 0. O sea,

$$X^{2} + aX + 1 \mid X^{3} + 2X^{2} + 2X + 1 \iff (a^{2} - 2a + 1)X + a - 1 = 0$$
$$\iff \begin{cases} a^{2} - 2a + 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

Analizo las ecuaciones:

- $\bullet$   $a-1=0 \iff a=1$
- $a^2 2a + 1 = 0 \xrightarrow{a=1} 1^2 2.1 + 1 = 1 2 + 1 = 0$   $\checkmark$

Luego, el valor de  $a \in \mathbb{C}$  tal que  $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$  es divisible por  $X^2 + aX + 1$  es a = 1

ii) 2... hay que hacerlo! 67

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc 3$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc 3$ .

iii) Haciendo la division de  $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$ , se tiene que:

$$X^{5} - 3X^{3} - X^{2} - 2X + 1 = q(X^{2} + aX + 1) + \underbrace{r}_{\text{proto}}$$

con  $q = (X^3 - aX^2 + (a^2 - 4)X - a^3 + 5a - 1)$  y  $r = (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2$ . Así,

$$r = -8X + 4$$

$$\iff (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2 = -8X + 4$$

$$\iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0 \\ a^3 - 5a - 2 = 0 \end{cases}$$

Analizo las ecuaciones:

•  $a^3 - 5a - 2 = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5) - 2 = 0$ Veo que a = -2 es solución, por lo que divido  $a^3 - 5a - 2$  por a + 2 con Ruffini:

Por lo que  $a^3 - 5a - 2 = (a+2)(a^2 - 2a - 1)$ 

Busco las raíces de  $a^2 - 2a - 1$  con la fórmula resolvente:

$$a_{+,-} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$
$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

Por lo que  $a^3 - 5a - 2 = (a+2)(a-1+\sqrt{2})(a-1-\sqrt{2}) = 0 \iff \begin{cases} a = -2 \\ a = 1+\sqrt{2} \\ a = 1-\sqrt{2} \end{cases}$ 

•  $a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0$ 

Me fijo que valores de a obtenidos antes verifican:

- Si 
$$a = -2 \Rightarrow (-2)^4 - 6(-2)^2 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0$$
   
- Si  $a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^4 - 6(1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 10 = 10 + \sqrt{2} \neq 0$   
- Si  $a = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow (1 - \sqrt{2})^4 - 6(1 - \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2} + 10 = 10 - \sqrt{2} \neq 0$ 

Luego, el único valor de  $a \in \mathbb{C}$  tal que el resto de dividir a  $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$  por  $X^2 + aX + 1$  sea -8X + 4 es a = -2

- **6.** <u>Definición</u>: Sea K un cuerpo y sea  $h \in \mathbb{K}[X]$  un polinomio no nulo. Dados  $f, g \in \mathbb{K}[X]$ , se dice que f es congruente a g módulo h si  $h \mid f g$ . En tal caso se escribe  $f \equiv g(h)$ .
  - i) Probar que  $\equiv (h)$  es una relación de equivalencia en  $\mathbb{K}[X]$ .
  - ii) Probar que si  $f_1 \equiv g_1(h)$  y  $f_2 \equiv g_2(h)$  entonces  $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2(h)$   $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2(h)$ .
  - iii) Probar que si  $f \equiv g(h)$  entonces  $f^n \equiv g^n(h)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
  - iv) Probar que r es el resto de la división de f por h si y solo si  $f \equiv r$  (h) y r = 0 o gr(r) < gr(h).
  - i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea reflexiva, simétrica y transitiva,
    - reflexiva: Es f congruente a f módulo h?  $f \equiv f(h) \iff h \mid f - f = 0 \iff h \mid 0 \quad \checkmark$
    - sim'etrica: Si  $f \equiv g$  (h)  $\iff g \equiv f$  (h)  $f \equiv g$  (h)  $\iff h \mid f g \iff h \mid -(g f) \iff h \mid g f \iff g \equiv f$  (h)  $\checkmark$
    - transitiva: Si  $\begin{cases} f \equiv g(h) \\ g \equiv p(h) \end{cases} \iff f \equiv p(h).$

$$\begin{cases} h \mid f - g & \xrightarrow{F_1 + F_2} \\ h \mid g - p & \xrightarrow{F_2} \end{cases} \begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid f - p \end{cases} \rightarrow f \equiv p(h) \quad \checkmark$$

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en  $\mathbb{K}[X]$ 

ii) Si 
$$\begin{cases} f_1 \equiv g_1(h) \\ f_2 \equiv g_2(h) \end{cases}$$

$$f_1 \equiv g_1(h) \iff h \mid f_1 - g_1 \Rightarrow h \mid f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2(h) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2(h)$$

iii) Inducción: Quiero probar p(n): Si  $f \equiv g(h)$  entonces  $f^n \equiv g^n(h)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Caso base:  $p(1): f^1 \equiv g^1(h) \bigstar^2$  Verdadera  $\checkmark$ 

 $Paso\ inductivo:\ p(k):\underbrace{f^k\equiv g^k\ (h)}_{HI}\ \text{es verdadera} \stackrel{?}{\Rightarrow} p(k+1):f^{k+1}\equiv g^{k+1}\ (h)\ \text{¿También lo es?}$ 

$$f^{k} \equiv g^{k} (h) \iff h \mid f^{k} - g^{k} \Rightarrow h \mid f \cdot (f^{k} - g^{k}) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^{k} (h) \iff^{2} f^{k+1} \equiv g^{k+1} (h) \quad \checkmark$$

Finalmente p(1), p(k), p(k+1) resultaron verdaderas y por el principio de inducción p(n) es verdadera  $\forall n \in \mathbb{N}$ 

iv) 9... hay que hacerlo! 6

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX$ 

- 7. Hallar el resto de la división de f por g para:
  - i)  $f = X^{353} X 1$  y  $g = X^{31} 2$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ ,
  - ii)  $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$  y  $g = X^6 + 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$  y  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$
  - iii)  $f = X^{200} 3X^{101} + 2$ , y  $q = X^{100} X + 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ ,
  - iv)  $f = X^{3016} + 2X^{1833} X^{174} + X^{137} + 2X^4 X^3 + 1$ , y  $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$  (Sugerencia ver 4. ??)).
  - i)  $g \mid g \iff X^{31} 2 \equiv 0 \ (X^{31} 2) \iff X^{31} \equiv 2 \ (g)$   $f = X^{353} X 1 = (\underbrace{X^{31}}_{\stackrel{(g)}{=}2})^{11} X^{12} X 1 \stackrel{(g)}{=} 2^{11} X^{12} X 1 \rightarrow \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} 1}$
  - ii)  $g \mid g \iff X^6 + 1 \equiv 0 \ (X^6 + 1) \iff X^6 \equiv -1 \ (g)$   $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166} X^4 + (X^6)^6 X^4 + (X^6)^3 X^2 + 1 \stackrel{(g)}{\equiv} X^4 + X^4 X^2 + 1 = 2X^4 X^2 + 1$   $\Rightarrow \boxed{r_g(f) = 2X^4 X^2 + 1}$   $\vdots \text{Qu\'e onda en } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}? \to \begin{cases} \text{si } p = 2 \to \boxed{X^2 + 1} \\ \text{si } p > 2 \to \boxed{2X^4 + (p-1)X^2 + 1} \end{cases}$
  - iii)  $g \mid g \iff X^{100} X + 1 \equiv 0 \ (X^{100} X + 1) \iff X^{100} \equiv X 1 \ (g)$   $f = X^{200} 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 3X^{100}X + 2 \stackrel{(g)}{\equiv} (X 1)^2 3(X 1)X + 2$   $\rightarrow \boxed{r_g(f) = (X 1)^2 3(X 1)X + 2}$
  - iv) Usando la sugerencia: Del ejercicio 4. ?? sale que  $X^n 1 = (X 1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$

$$\xrightarrow{\text{para el } g} X^5 - 1 = (X - 1) \underbrace{\left(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1\right)}_{g} \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)} (g) \quad \checkmark$$

$$f = (X^{5})^{603}X + 2(X^{5})^{366}X^{3} - (X^{5})^{34}X^{4} + (X^{5})^{27}X^{2} + 2X^{4} - X^{3} + 1$$

$$f = \underbrace{X + 2X^{3} - X^{4} + X^{2} + 2X^{4} - X^{3} + 1}_{=X^{4} + X^{3} + X^{2} + X + 1 = g}(g) \iff \boxed{f \equiv 0 \ (g)}$$

8. e... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \bigcirc 3$ , o mejor aún si querés subirlo en LATEX  $\to \bigcirc 3$ .

♠¡Aportá! Correcciones, subiendo ejercicios, ★ al repo, críticas, todo sirve.

- 9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en  $\mathbb{Q}[X]$  y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:
  - i)  $f = X^5 + X^3 6X^2 + 2X + 2$ ,  $q = X^4 X^3 X^2 + 1$ ,
  - ii)  $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$ ,  $g = X^3 + X$ ,
  - iii)  $f = 2X^6 4X^5 + X^4 + 4X^3 6X^2 + 4X + 1$ ,  $q = X^5 2X^4 + 2X^2 3X + 1$ ,

$$\xrightarrow{\text{Euclides}} (f:g) = (g:3X^3 - 55X^2 + X + 1)$$

$$\xrightarrow{\text{escribo a } f} f = (X+1) \cdot g + 3X^3 - 55X^2 + X + 1$$
en función de  $g$ 

$$\begin{array}{c|c}
-\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \\
\underline{\frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X} & -\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \\
-\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} \\
\underline{\frac{7}{9}X - \frac{7}{9}} \\
0
\end{array}$$

$$X^{5} + X^{3} - 6X^{2} + 2X + 2 = \left(X^{4} - X^{3} - X^{2} + 1\right) \cdot \left(X + 1\right) + \left(3X^{3} - 5X^{2} + X + 1\right)$$

$$X^{4} - X^{3} - X^{2} + 1 = \left(3X^{3} - 5X^{2} + X + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}X^{2} - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right)$$

$$3X^{3} - 5X^{2} + X + 1 = \left(-\frac{2}{9}X^{2} - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{27}{2}X + \frac{225}{4}\right) + \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right)$$

$$-\frac{2}{9}X^{2} - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} = \left(\frac{171}{4}X - \frac{171}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539}\right) + 0$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico  $\rightarrow (f:g) = X-1$ 

ii) 
$$X^6 + X^4 + X^2 + 1 = (X^3 + X) \cdot X^3 + (X^2 + 1)$$
  
 $X^3 + X = (X^2 + 1) \cdot X + 0$ 

El MCD será el último resto no nulo y mónico  $\rightarrow (f:g) = X^2 + 1$ 

El MCD escrito como combinación polinomial de f y  $g \rightarrow X^2 + 1 = f \cdot 1 + g \cdot (-X^3)$ 

$$2X^{6} - 4X^{5} + X^{4} + 4X^{3} - 6X^{2} + 4X + 1 = (X^{5} - 2X^{4} + 2X^{2} - 3X + 1) \cdot 2X + (X^{4} + 2X + 1)$$

$$X^{5} - 2X^{4} + 2X^{2} - 3X + 1 = (X^{4} + 2X + 1) \cdot (X - 2) + 3$$

$$X^{4} + 2X + 1 = 3 \cdot (\frac{1}{3}X^{4} + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}) + 0$$

 $X^4 + 2X + 1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}X^4 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) + 0$  El MCD será el último resto no nulo y  $m\'onico \rightarrow \boxed{(f:g)=1}$  El MCD escrito como combinación polinomial de f y  $g \rightarrow \boxed{1 = \frac{1}{3}g \cdot (2X^2 - 4X + 1) - \frac{1}{3}f \cdot (X - 2)}$ 

**10.** Sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  tal que f(1) = -2, f(2) = 1 y f(-1) = 0. Hallar el resto de la división de f por  $X^3 - 2X^2 - X + 2$ .

Sea  $P \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow el \ resto \ de \ dividir \ a \ P \ por \ X - a \ es \ P(a)$ .

$$f(X) = q(X) \cdot \underbrace{X^3 - 2X^2 - X + 2}_{g(X)} + r(X), \text{ con } g(X) = (X - 2) \cdot (X - 1) \cdot (X + 1)$$
 y  $r(X) = a^2 + bX + c, \text{ ya}$ 

$$\text{que el } \operatorname{gr}(r) < \operatorname{gr}(g) \xrightarrow{\operatorname{evaluar}} \left\{ \begin{array}{l} f(1) = -2 = q(1) \cdot g(1) + r(1) = -2 \\ f(2) = 1 = q(2) \cdot g(2) + r(2) = 1 \\ f(-1) = 0 = q(-1) \cdot g(-1) + r(-1) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{array} \right. \\ \left. \left( \begin{array}{ll} 1 & 1 & 1 & | -2 \\ 4 & 2 & 1 & | 1 \\ 1 & -1 & 1 & | 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ll} 1 & 0 & 0 & | \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | -1 \\ 0 & 0 & 1 & | -\frac{7}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left[ r(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{7}{3} \right]$$

**11.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \ge 3$ . Hallar el resto de la división de  $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$  por  $X^3 - X^n + 3X^n + 3X$ en  $\mathbb{Q}[X]$ .

$$\begin{cases} f(X) = X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1 \\ g(X) = X \cdot (X - 1) \cdot (X + 1) \end{cases} \Rightarrow f = q(X) \cdot g(X) + r(X) \text{ con } \operatorname{gr}(\underbrace{aX^2 + bX + c}) \leq 2$$

$$\begin{cases} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_{=0} + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_{=0} + r(-1) = 3 \end{cases}$$

$$f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_{=0} + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 = \begin{cases} 2 & n \text{ impar } \\ 1 & n \text{ par } \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(0) = c = 1 \\ r(1) = a + b + 1 = 3 \Rightarrow a + b = 2 \\ r(-1) = a - b + 1 = \begin{cases} 2 \Rightarrow a - b = 1 & n \text{ impar } \\ 1 \Rightarrow a - b = 0 & n \text{ par } \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{n}{\text{impar}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{r_{impar}(X) = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1}_{par} \checkmark$$

$$\begin{cases} \frac{n}{\text{par}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{r_{par}(X) = X^2 + X + 1}_{par} \checkmark$$

Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio  $f(X) = X^6 + X^3 - 2$ .

Primera raíz:  $f(\alpha_1=1)=0 \to f(X)=q(X)\cdot (X-1)$ . Busco q(X) con algoritmo de división.  $X^6 + X^3 - 2 \begin{vmatrix} X-1 \\ X-1 \end{vmatrix}$   $X^5 + X^4 + X^3$   $-X^5 + X^4 + X^3$   $-X^4 + X^3$   $-X^4 + X^3$   $-2X^3 + 2X^2$   $-2X^3 + 2X^2$   $-2X^2 + 2X$  -2X + 2

El cociente  $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$  se puede factorizar en grupos como  $q(X) = (X^2 + X + 1) \cdot (X^3 + 2)$ . Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener  $f \in \mathbb{C}[X]$  salen de esos dos polinomios.

$$X^{2} + X + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X^{3} + 2 = 0 \xrightarrow{\text{exponencial}} \begin{cases} r^{3} = 2 \rightarrow r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ con } k = 0, 1, 2. \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_{4} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \alpha_{5} = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ \alpha_{6} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

13. Sea  $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ . Probar que  $w + w^2 + w^4$  es raíz del polinomio  $X^2 + X + 2$ 

Voy a usar que si  $w \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^6 w^j = 0 \quad (w \neq 1)$ Si  $f(X) = X^2 + X + 2$  y  $w + w^2 + w^4$  es raíz  $\Rightarrow f(w + w^2 + w^4) = 0$  $(w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8}_{i=0} + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2 \cdot \sum_{i=0}^6 w^i = 0 \quad \checkmark$ 

14.

- i) Probar que si  $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$ , entonces  $X^2 + X 1 = [X (w + w^{-1})] \cdot [X (w^2 + w^{-2})]$ .
- ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de  $\cos(\frac{2\pi}{5})$ .
- i) Voy a usar que si  $w \in G_5 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^4 w^j = 0 & (w \neq 1)^{*} \\ w^k = w^{r_5(k)} \end{cases}^{*}$   $X^2 + X 1 = [X (w + w^{-1})] \cdot [X (w^2 + w^{-2})] = X^2 (w^2 + w^{-2})X (w + w^{-1})X + \underbrace{(w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{1} = \underbrace{(w + w^2 + w^2)(w^2 + w^2)}_{1} = \underbrace{(w + w^2)(w^2 + w^2)}_{1} =$

$$= X^{2} - X(\underbrace{w^{2} + w^{-2} + w + w^{-1}}_{\bigstar^{1}}) + \underbrace{w + w^{2} + w^{3} + w^{4}}_{\bigstar^{2}} = X^{2} - X(\underbrace{w + w^{2} + w^{3} + w^{4}}_{\bigstar^{2}}) + -1 + \underbrace{1 + w + w^{2} + w^{3} + w^{4}}_{=0} = X^{2} - X(-1 + \underbrace{1 + w + w^{2} + w^{3} + w^{4}}_{=0}) - 1 = \underbrace{X^{2} + X - 1}_{\bigstar^{2}} \checkmark$$

ii) Calculando las raíces a mano de  $X^2 + X - 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ 

Pero del resultado del inciso i) tengo que:

Pero del resultado del inciso 1) tengo que : 
$$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow{\text{sé que una raíz dada} \atop \text{la factorización es}} w + w^{-1} = w + \overline{w} = 2\operatorname{Re}(w) = 2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$$

15.

- i) Sean  $f, g \in \mathbb{C}[X]$  y sea  $a \in \mathbb{C}$ . Probar que a es raíz de f y g si y sólo sí a es raíz de (f : g).
- ii) Hallar todas las raíces complejas de  $X^4 + 3X 2$  sabiendo que tiene una raíz en común con  $X^4 + 3X^3 - 3X + 1.$
- i) Hacer!
- ii) Busco el (f:g):  $X^{4} + 3X - 2 = (X^{4} + 3X^{3} - 3X + 1) \cdot 1 + (-3X^{3} + 6X - 3)$  $X^4 + 3X^3 - 3X + 1 = \left(-3X^3 + 6X - 3\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}X - 1\right) + \left(2X^2 + 2X - 2\right)$  $-3X^3 + 6X - 3 = \left(2X^2 + 2X - 2\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}X + \frac{3}{2}\right) + 0$  $(f:g) = X^2 + X - 1 \xrightarrow{\text{raices}} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$
- **16.** Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) 
$$f = X^5 - 2X^3 + X$$
,  $a = 1$ ,

ii) 
$$f = X^6 - 3X^4 + 4$$
,  $a = i$ ,

iii) 
$$f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2,$$

iv) 
$$f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3$$
.  $a = 2$ .

i) 
$$f = X^5 - 2X^3 + X$$
,  $a = 1$ , Todos casos de factoreo: 
$$f = X^5 - 2X^3 + X = X(X^4 - 2X^2 + 1) = X(X^2 - 1)^2 = X(X - 1)^2(X + 1)^2 =$$
 La multiplicidad de  $a = 1$  como raíz es 2.

ii) 
$$f = X^6 - 3X^4 + 4$$
,  $a = i$ ,

Si a = i es raíz, entonces -i también lo es en un polinomio  $\mathbb{R}[X]$ 

Si 
$$a = t$$
 es faiz, entonces  $-t$  tambien to  $X^6 - 3X^4 + 4 \left| \frac{X^2 + 1}{X^4 - 4X^2 + 4} \right|$ 

$$- \frac{4X^4}{4X^2 + 4}$$

$$- \frac{4X^4 + 4X^2}{4X^2 + 4}$$

$$- \frac{4X^2 - 4}{0}$$

$$f = (X^2 + 1)(X^4 - 4X^2 + 4) = (X^2 + 1)(X^2 - 2)^2 = (X^2 + 1)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 = (X - i)^1(X + i)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 = (X - i)^1(X + i)(X - \sqrt{2})^2(X + \sqrt{2})^2 = (X - i)^1(X - i)(X - i)(X$$

La multiplicidad de a = i como raíz de f es 1.

iii) 
$$f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a=2,$$
  
 $f = (X-2)^3((X+2) + (X+1)) = (X-2)^3(2X+3)$   
La multiplicidad de  $a=2$  como raíz de  $f$  es 3.

iv) 
$$f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3$$
,  $a = 2$ ,  $f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3 = (X-2)^2(X-2)(X+2) - 4(X-2)^3 = (X-2)^3(X+2-4) = (X-2)^4$  La multiplicidad de  $a = 2$  como raíz de  $f$  es 4.

17. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  tales que  $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$  tiene solo raíces simples en  $\mathbb{C}$ .

$$\frac{f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a}{f = nX^{n+1} - (n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}} \stackrel{n>0}{\iff} f' = n(n+1)X^{n-1}(X-1)$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n > 1 \Rightarrow f'(\alpha = 1) = 0 & \text{y} \quad f'(\alpha = 0) = 0 \\ n = 1 \Rightarrow f'(\alpha = 1) = 0 & \text{y} \end{cases}$$

Para que las raíces  $\alpha$ , de f no sean simples, es necesario que  $f'(\alpha) = 0$ . Por lo tanto, estudio solo los valores de raíces encontrados para la derivada. Si f ha de tener raíces dobles, estás deberían ser  $\alpha = 1$  o  $\alpha = 0$ .

$$\begin{cases} f(\alpha = 1) = a - 1 \Rightarrow f(1) \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \neq 1 \\ f(\alpha = 0) = a \Rightarrow f(0) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$$

Si  $a = 0 \land n \stackrel{\bigstar}{=} 1 \Rightarrow f$  tiene solo una raíz simple en 0.

Si  $a \neq 1 \Rightarrow f$  tiene solo raíces simples  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Si  $a \neq 0 \land n > 1 \Rightarrow f$  tiene solo raíces simples.

seguramente hay una mejor forma de expresar la respuesta.

- 18. Controlar y Pasar
- 19. Sea  $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$ . Determinar todos los valores de  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales f admite una raíz múltiple en  $\mathbb{C}$ . Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

Si f tiene raíces múltiples  $\alpha_k \Leftrightarrow f(\alpha_k) = f'(\alpha_k) = 0$ , por lo tanto tanto comienzo buscando las raíces de f' para sacarme ese a de en medio.

$$f' = 20X^{19} + 80X^9 = 20X^9(X^{10} + 4) \Rightarrow f' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X^{10} = -4 \Leftrightarrow X = \sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi} & k \in \mathbb{Z}_{[0,9]} \end{cases}$$

Hay de momento 11 raíces de f'. Me interesa saber si son raíces de f:

$$f(0) = 2a \Rightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$f = (X^{10})^2 + 8X^{10} + 2a \Rightarrow f(\alpha = X^{10}) = -4 = (-4)^2 + 8(-4) + 2a = -16 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 8$$

Entonces:

Si 
$$a = 0 \Rightarrow f = X^{10}(X^{10} + 8)$$

$$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X = 0 \quad \text{o} \quad X^{10} = -8, \text{ donde } \boxed{\mu(0; f) = 10} \text{ y } \boxed{\mu(\sqrt[10]{8}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}); f) = 1 \text{ } k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}.$$

11 raíces distintas.

Si 
$$a = 8 \Rightarrow f = X^{20} + 8X^{10} + 16 = (X^{10} + 4)^2$$

$$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X^{10} = -4$$
, donde  $\mu(\sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}); f = 2 \ k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}$ .

10 raíces distintas.

### 20. Some suppose that the same of the same suppose that the same suppose the same suppose that the same suppose th

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

21.

- i) Probar que para todo  $a \in \mathbb{C}$ , el polinomio  $f = X^6 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 2X + 1$  es divisible por  $(X-1)^2$ .
- ii) Determinar todos los  $a \in \mathbb{C}$  para los cuales f es divisible por  $(X-1)^3$ .

i) 
$$(X-1)^2 \mid f \ \forall a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow 1 \text{ es } por \ lo \ menos \ \text{ra\'iz doble de } f \Leftrightarrow f(1) = f'(1) = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1 & \xrightarrow{\text{eval\'uo}} f(1) = 0 \ \forall a \in \mathbb{C} \\ f' = 6X^5 - 10X^4 + 4(1+a)X^3 - 6aX^2 + 2(1+a)X - 2 & \xrightarrow{\text{eval\'uo}} f'(1) = 0 \ \forall a \in \mathbb{C} \end{array} \right.$$

Calculando f(1) y f'(1) se comprueba.  $\checkmark$ 

ii) 
$$(X-1)^3 | f \Leftrightarrow f''(1) = 0$$
  
 $\Rightarrow f'' = 30X^4 - 40X^3 + 12(1+a)X^2 - 12aX + 2(1+a) \xrightarrow{\text{evalúo}} f''(1) = 2a$   
 $\Rightarrow f''(1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 

$$(X-1)^3 \mid f \iff a=0$$

Observar que si  $a \neq 0$ , 1 es una raíz doble de f de otra forma es una raíz por lo menos triple.

### 22. Sum hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

## 23. ②... hay que hacerlo! 😚

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \odot$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \bigcirc$ .

24. S... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

25. S... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc 3$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc 3$ .

26. 2... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

27. Some suppose that the same of the same suppose that the same suppose the same suppose that the same suppose that the same suppose the same suppose the same suppose that the same suppose the

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

28. ②... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

29. e... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

30. e... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc 3$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc 3$ .

31. Some support of the state o

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

32. Some support of the second of the second

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc 3$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc 3$ .

33. ②... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc 3$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc 3$ .

34. Omna hav que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

35. 2... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

36. Some support of the second of the second

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

37. 2... hav que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc$ .

38. Some support of the second second

Si querés mandarlo: Telegram  $\rightarrow \bigcirc 3$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \rightarrow \bigcirc 3$ .

39. 29... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram  $\to \odot$ , o mejor aún si querés subirlo en  $\LaTeX \to \bigcirc$ .



### Ejercicios de parciales:



a) Hallar todos los posibles  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{c} > 0$  tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento  $\frac{3\pi}{2}$ 

- b) Para cada valor de **c** hallado, factorizar f en  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ , sabiendo que tiene al menos una raíz doble.
- a) Si la raíz  $\alpha = re^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) \Rightarrow f(r(-i))$

$$f(r(-i)) = (r(-i))^6 - 4(r(-i))^5 - (r(-i))^4 + 4^3 + 4(r(-i))^2 + 48(r(-i)) + \mathbf{c} \stackrel{\bigstar}{=} \\ -r^6 + 4r^5i - r^4 - 4r^3i - 4r^2 - 48ri + \mathbf{c} = 0 \iff \begin{cases} \operatorname{Re} : -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 \\ \operatorname{Im} : r(4r^4 - 4r^2 - 48) = 0 \xrightarrow[r^2 = y \text{ y } r \in \mathbb{R}_{>0}]{\text{bicuadrática}} r^2 = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto si  $\mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 = (r^2)^3 + (r^2)^2 + 4r^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{c} = 48}$ con raíces  $\pm \sqrt{3}i$  dado que  $f \in \mathbb{Q}[X]$ 

b) Debe ocurrir que  $(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$   $X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48 \mid X^2 + 3$   $-X^6 - 3X^4$   $-4X^5 - 4X^4 + 4X^3$  $\begin{array}{r}
4X^{5} - \\
-3X^{4} \\
4X^{5} - 4X^{4} + 4X^{3} \\
4X^{5} + 12X^{3} \\
-4X^{4} + 16X^{3} + 4X^{2} \\
4X^{4} + 12X^{2} \\
\hline
16X^{3} + 16X^{2} + 48X \\
-16X^{3} - 48X \\
\hline
16X^{2} + 48 \\
-16X^{2} - 48 \\
\hline
0
\end{array}$ 

 $f = (X^2 + 3)\underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_q$  como f tiene al menos una raíz doble puedo ver las

raíces de la derivada de q:

$$q' = (4X^3 - 12X^2 - 8X + 16)' = 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 4) = 0 \xrightarrow{\text{Posibles rafces, Gauss :}(} q'(1) = 0, \text{ pero } g(1) \neq 0 \Rightarrow f(1) \neq 0$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{divido para}} \\ \xrightarrow{\text{bajar grado}} \end{array} & \begin{array}{c} X^3 - 3X^2 - 2X + 4 \\ -X^3 + X^2 \end{array} & X^2 - 2X \\ \hline -2X^2 - 2X \\ \hline -4X + 4 \\ \hline -4X - 4 \\ \hline 0 \\ \end{array} \\ g' = 4(X-1)\underbrace{(X^2 - 2X - 4)}_{=h} \xrightarrow{\text{busco raices}} X^2 - 2X - 4 = 0 \iff \alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5} \\ h = (X-(1+\sqrt{5})) \cdot (X-(1-\sqrt{5}) = X^2 - 2X - 4 \text{ Para calcular que } f(\alpha_1) = g(\alpha_1) = 0 \text{ y comprobar que es una raı́z doble, puedo hacer:} \\ X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 & X^2 - 2X - 4 \\ \hline -2X^3 + 16X \\ \hline -2X^3 + 16X \\ \hline -2X^3 - 4X^2 - 8X \\ \hline -4X^2 + 8X + 16 \\ \hline -4X^2 - 8X - 16 \\ \hline 0 \\ \end{array}$$

 $h^2 = (X^2 - 2X - 4)^2 \rightarrow \text{no la vi venir}$ 

$$\begin{cases}
\mathbb{Q}[X] \to f = (X^2 + 3)(X^2 + 3)(X^2 - 2X - 4)^2 \\
\mathbb{R}[X] \to f = (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))(X^2 - 2X - 4)^2 \\
\mathbb{C}[X] \to f = (X - (1 + \sqrt{5}))(X - (1 - \sqrt{5}))(X - 3i)^2(X + 3i)^2
\end{cases}$$

**2.** Factorizar el polinomio  $P = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49$  como producto de irreducibles en  $\mathbb{C}[X], \mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{Q}[X]$  sabiendo que  $\sqrt{7}$  es una raíz múltiple.

Un polinomio con coeficientes racionales, y una raíz irracional  $\alpha = \sqrt{7}$ , tendrá también al conjugado irracional <sup>1</sup>,  $\overline{\alpha} = -\sqrt{7}$ 

Si agregamos la información de que  $\sqrt{7}$  es por lo menos raíz doble, obtenemos que:

Solution as a mormación de que  $\sqrt{t}$  es por to menos raiz doble, obtenemos que:  $\begin{cases} \sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow (X^2 - 7) \mid f \\ \sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow (X^2 - 7)^2 = X^4 - 14X^2 + 49 \mid f = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49 \mid X^4 - 14X^2 + 49 \mid X^2 - X + 1 = X^5 + X^4 + 14X^3 - 14X^2 - 49X \end{cases}$ 

$$f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X^2 - X + 1) \xrightarrow{\text{resolvente}} \begin{cases} \alpha_{+,-} = \frac{1 \pm w}{2} \\ w^2 = -3 \end{cases}$$
$$\to f = (X^4 - 14X^2 + 49) \cdot (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Estoy usando la misma notación para conjugado racional y conjugado complejo. ¿Está bien? No sé, no me importa mientras se entienda.

$$\begin{cases} \mathbb{Q}[X] \to f = (X^2 + 7)^2 (X^2 - X + 1) \\ \mathbb{R}[X] \to f = (X + \sqrt{7})^2 (X - \sqrt{7})^2 (X^2 - X + 1) \\ \mathbb{C}[X] \to f = (X + \sqrt{7})^2 (X - \sqrt{7})^2 (X - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{cases}$$

- - i)  $1 \sqrt{2}$  es raíz de f;
  - ii)  $X(X-2)^2 \mid (f:f');$
  - iii)  $(f: X^3 1) \neq 1$ ;
  - iv) f(-1) = 27;
  - i) Como  $f \in \mathbb{Q}[X]$  si  $\alpha_1 = 1 \sqrt{2}$  es raíz entonces  $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$  para que no haya coeficientes irracionales en el polinomio.

$$(X - (1 - \sqrt{2})) \cdot (X - (1 + \sqrt{2})) = X^2 - 2X - 1$$

Por lo tanto  $X^2 - 2X - 1$  será un factor de  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

- ii) Si  $X(X-2)^2 \mid (f:f') \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \text{ raíz simple de } f' \Rightarrow \text{ raíz doble de } f \\ \alpha_4 = 2 \text{ raíz simple de } f' \Rightarrow \text{ raíz doble de } f \end{cases}$  Por lo tanto  $X^2(X-2)^3$  serán factores de f.
- iii) Si  $(f: X^3 1) \neq 1$  quiere decir que por lo menos alguna de las 3 raíces de:  $X^3 1 = (X 1) \cdot (X (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (X (-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}))$  tiene que aparecer en la factorización de f. Pero parecido al item i) si tengo una raíz compleja, también necesito el conjugado complejo, para que no me queden coeficientes de f en complejos,  $X^3 1 = (X 1) \cdot (X^2 + X + 1)$ , me quedaría con el factor de menor grado si eso no rompe otras condiciones.

Por lo tanto (X-1) o  $(X^2+X+1)$  aparecerá en la factorización de f.

iv) f(-1) = 27. Hasta el momento:

$$\begin{cases} f_1 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X^2 + X + 1) \to f_1(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot 1 = -54 \\ f_2 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X - 2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \to f_2(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot (-2) = 108 \end{cases}$$

, ninguno cumple la condición iv).

Para encontrar un polinomio que cumpla lo pedido tomaría el  $f_2$  que tiene menor grado de los dos y lo multiplicaría por  $(X - \frac{3}{4})$  de manera que  $f = (X^2 - 2X - 1) \cdot X^2 \cdot (X - 2)^3 \cdot (X - 1) \cdot (X - \frac{3}{4}) \rightarrow \boxed{f(-1) = 27}$  así cumpliendo todas las condiciones.

**\dot{\circ}4.** Factorizar como producto de polinomios irreducibles en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$  al polinomio

$$f = X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15$$

sabiendo  $(f: X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$ 

Si el  $(f: X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$ , esto nos da información sobre raíces comunes entre f y  $X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5$ . Puedo hacer el algoritmo de Euclides para encontrar el MCD, con esa o esas raíces. El último resto no nulo hecho mónico será el MCD.par

$$X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 = \left(X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5\right) \cdot \left(X + 3\right) + \left(-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30\right)$$

$$X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5 = \left(-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}X + \frac{3}{10}\right) + \left(14X^2 - 14X + 14\right)$$

$$-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30 = \left(14X^2 - 14X + 14\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}X - \frac{15}{7}\right) + 0$$

 $(f: X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) = X^2 - X + 1$ . Las raíces del MCD son  $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm w}{2}$  con  $w^2 = 3i$ .  $X^2 - X + 1 = (X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}))$  Por definición de lo que es el MCD sabemos que  $X^2 - X + 1 \mid f$ , haciendo la división bajamos el grado y

seguimos buscando las raíces.

Obtuvimos que  $f = (X^2 - X + 1) \cdot (X^3 + 3X^2 - 5X - 15) + 0$ . Hermoso resultado, donde la hermosura se mide en su simpleza para ser factorizado. Sin usar calculadora ni Guass ni ninguna cosa extraña podemos expresar a f como:

$$f \stackrel{!}{=} (X^2 - X + 1) \cdot \underbrace{(X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X + 3)}_{X^3 + 3X^2 - 5X - 15}$$

Si todavía no viste como fue la factorización en! te recomiendo que sigas mirando sin tocar calculadora ni ningún tipo de spoiler del pesado o pesada sabelotodo que quizás tenés al lado y que no te deja tiempo para pensar. Es puro factoreo que debería salir a ojo.

Ahora factorizamos en irreducibles, que son polinomios mónicos que solo se dividen por sí mismos y por 1. Para tener una mejor explicación clickeá acá! Y vas a la teoría del apunte.

factorizaciones:

$$\mathbb{Q}[X] \rightarrow f = (X^2 - 5) \cdot (X^2 - X + 1) \cdot (X + 3)$$

$$\stackrel{\in \mathbb{R}[X]}{\in \mathbb{R}[X]} \stackrel{\in \mathbb{R}[X]}{\in \mathbb{R}[X]} \stackrel{\in \mathbb{R}[X]}{\in \mathbb{R}[X]} \stackrel{\in \mathbb{R}[X]}{\bullet \mathbb{R}[X]}$$

$$\mathbb{R}[X] \rightarrow f = (X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X^2 - X + 1) \cdot (X + 3)$$

$$\stackrel{\in \mathbb{C}[X]}{\in \mathbb{C}[X]} \stackrel{\in \mathbb{C}[X]}{\bullet \mathbb{C}[X]} \stackrel{\in \mathbb{C}[X]}{\bullet \mathbb{C}[X]} \stackrel{\in \mathbb{C}[X]}{\bullet \mathbb{C}[X]}$$

$$\mathbb{C}[X] \rightarrow f = (X + 3) \cdot (X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})) \cdot (X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}))$$

Sea  $(f_n)_{(n\geq 1)}$  la sucesión de poliniomios en  $\mathbb{R}[X]$  definida como:

$$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20$$
 y  $f_{n+1} = (X+2)^2 f_n' + 3f_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Probar que -2 es raíz doble de  $f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

No caer en la  $trampilla^{2}$  de olvidar que para que una raíz de f sea doble, i.e.  $mult(-2; f) \stackrel{!}{=} 2$  debe ocurrir lo "obvio", f(-2) = f'(-2) = 0 y también que  $f''(-2) \neq 0$ . Si olvidamos esto último solo probaríamos que la mult $(-1; f) \ge 2$  y tendríamos el ejercicio mal  $\mathfrak{Z}$ .

Por inducción en n: q(n): "-2 es raíz doble de  $f_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ "

Caso base: j,q(1) es V?

$$\begin{cases} f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 & \xrightarrow{\text{evaluar}} & f_1(-2) = 0 \\ f_1' = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 22X & \xrightarrow{\text{evaluar}} & f_1'(-2) = 0 \\ f_1'' = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 22 & \xrightarrow{\text{evaluar}} & f_1''(-2) = 22 \neq 0 \end{cases}$$

 $\therefore$  mult $(-2; f_1) = 2 \Rightarrow -2$  es raíz doble de  $f_1 \Rightarrow q(1)$  es V

<u>Paso inductivo:</u> ¿Si q(k) verdadera  $\Rightarrow q(k+1)$  también lo es,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ?

$$HI: -2$$
 es raíz doble de  $f_k \Leftrightarrow \begin{cases} f_k(-2) = 0 \bigstar^1 \\ f'_k(-2) = 0 \bigstar^2 \\ f''_k(-2) \neq 0 \bigstar^3 \end{cases}$ 

QPQ dado  $k \in \mathbb{N}$ , q(k+1) : -2 es raíz doble de  $f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (X+2)^2 f_k' + 3f_k$ :

Derivar:

$$\begin{cases} f_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (X+2)^2 f_k' + 3f_k \\ f_{k+1}' = 2(X+2) f_k' + (X+2)^2 f_k'' + f_k' \\ f_{k+1}'' = 2f_k' + (2x+4) f_k'' + 2(x+2) f_k'' + (x+2)^2 f_k''' + f_k'' \end{cases}$$

Evaluar en -2:

$$f_{k+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow f_{k+1}(-2) = \underbrace{(-2+2)^2} f_k'(-2) + 3f_k(-2) = 0^2 f_k'(-2) + 3f_k(-2) = 3f_k(-2) \stackrel{\bigstar}{=} 0 \checkmark$$

$$f'_{k+1}(-2) \stackrel{?}{=} 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; f'_{k+1}(-2) = 2 \underbrace{(-2+2)} f'_k(-2) + \underbrace{(-2+2)^2} f'' + f'_k(-2) = f'_k(-2) \stackrel{\bigstar^2}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f_{k+1}''(-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_{k+1}''(-2) = 2f_k'(-2) + 2(-2 + 2)f_k''(-2) +$$

Como q(1), q(k) y q(k+1) resultaron verdaderas, por principio de inducción q(n) también lo es  $\forall n \in \mathbb{N}$ .



a) Determinar todos los valores de  $n \in \mathbb{N}$  (positivo) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

- b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$
- a) Determinar todos los valores de  $n \in \mathbb{N}$  (positivo) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

Solución:

Limpiando los denominadores de f se obtiene el polinomio g con las mismas raíces:

$$g = 3X^5 + nX^4 - 8X^3 + 11X^2 - 3X = X(\underbrace{3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3}_h)$$

Por enunciado ignoramos la raiz nula y utilizando el Lema de Gauss buscamos las raíces racionales de

$$h = 3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3$$

Aquí,  $a_0 = -3 \text{ y } a_n = 3$ 

$$Div(a_0) = Div(a_n) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

Como busco raíces enteras, las busco en el conjunto:

$$\{\pm 1, \pm 3\}$$

Chequeo:

$$\begin{array}{lll} h(-1) = 0 & \Longleftrightarrow & n = -19 \notin \mathbb{N} \\ h(1) = 0 & \Longleftrightarrow & n = -3 \notin \mathbb{N} \\ h(-3) = 0 & \Longleftrightarrow & \boxed{n = 5} \in \mathbb{N} \\ h(3) = 0 & \Longleftrightarrow & n = \frac{67}{9} \notin \mathbb{N} \end{array}$$

Rta: n=5 es el único valor de  $n \in \mathbb{N}$  para los cuales el polinomio f tiene una raíz entera no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ 

#### Solución:

Primero factorizo la raiz nula de de f

$$f = X^5 + \frac{5}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X = X(X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1)$$

Se, por el item (a), que -3 es una de las raíces racionales de f. Busco otras posibles raiíces racionales en el polinomio h (con n=5) obtenido en el item (a) en el conjunto  $\{\pm \frac{1}{3}\}$ 

$$h(-\frac{1}{3}) = -\frac{208}{27}$$

 $h(\frac{1}{3}) = 0 \implies \frac{1}{3}$  es una raiz racional de f.

Factorizo el polinomio f diviendolo por el producto de las dos raíces encontradas  $(X+3)\cdot (X-\frac{1}{3})=X^2+\frac{8}{3}-1$ 

$$\begin{array}{c|c} X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1 & X^2 + \frac{8}{3}X - 1 \\ -X^4 - \frac{8}{3}X^3 + X^2 & X^2 - X + 1 \\ \hline -X^3 - \frac{5}{3}X^2 + \frac{11}{3}X & X^3 + \frac{8}{3}X^2 - X \\ \hline X^2 + \frac{8}{3}X - 1 & X^2 - \frac{8}{3}X + 1 \\ \hline -X^2 - \frac{8}{3}X + 1 & 0 \end{array}$$

Factorizo el polinomio cuadrático  $X^2 + \frac{8}{3}X - 1$ 

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$$x_+ = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \text{ y } x_- = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$$

Rta:

- $\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)) \in \mathbb{C}$  con todos sus factores de multiplicidad 1 y por lo tanto irreducibles.
- $f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2-X+1) \in \mathbb{R}$  con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto irreducibles en  $\mathbb{R}$ .
- $f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2-X+1) \in \mathbb{Q}$  con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto irreducibles en  $\mathbb{Q}$ .
- **\Diamond7.** Determinar un polinomio  $f \in \mathbb{Q}[X]$  de grado mínimo que satisfaga simultáneamente:
  - $\blacksquare$  f es mónico,
  - $\operatorname{gr}(f: 2X^3 5X^2 20X + 11) = 2$
  - f tiene una raíz  $z \in G_3$  con  $z \neq 1$ , que es doble,
  - f(0) = 33;

El dato de gr $(f: 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11) = 2$  indica que hay un polinomio, d, con gr(d) = 2 que cumple

que  $\begin{cases} d & f \\ d & g \end{cases}$  entonces, f tiene 2 raíces en común con g, puede ser una doble o dos simples. Dado que nos piden que sea de grado mínimo habrá que tener cuidado cual elegir para no violar ninguna condición.

Calculemos las posibles raíces de g usando lema de gauss: Posibles raíces serán los cocientes de los divisores de 11 y los de 2.  $\mathcal{D}(11) = \{\pm 1, \pm 11\}, \mathcal{D}(2) = \{\pm 1, \pm 2\}$ :  $\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 11, \pm \frac{11}{2}\}$ . Probando esos valores encuentro que  $g(\frac{1}{2}) = 0$  y ninguna de las otras funcionó. Le bajamos el grado con el algoritmo de división a g.

$$\begin{array}{c|c}
2X^{3} - 5X^{2} - 20X + 11 & X - \frac{1}{2} \\
-2X^{3} + X^{2} & 2X^{2} - 4X - 22 \\
\hline
-4X^{2} - 20X \\
4X^{2} - 2X \\
-22X + 11 \\
\underline{22X - 11} \\
0
\end{array}$$

 $g = (X - \frac{1}{2}) \cdot (\underbrace{2X^2 - 4X - 22}_{h}) + 0$ , buscamos raíces de h:

$$\alpha_{+,-} = \frac{4 \pm 8\sqrt{3}}{4} = 1 \pm 2\sqrt{3} = \begin{cases} 1 + 2\sqrt{3} \\ 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Entonces: f tiene 2 raíces en común con  $g = (X - \frac{1}{2})(X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))$ . Dado que  $f \in \mathbb{Q}[X]$  voy a seleccionar las raíces  $\in \mathbb{I}$  por la condiciónde grado mínimo.

Con la condición que dice que f tiene una raíz  $z \in G_3$  con  $z \neq 1$ , que es doble, no nos dejan muchas opciones.  $G_3$  tiene tres raíces, solución de  $w^3 = 1$ , dado que por enunciado no puede ser 1, entonces solo

quedan.  $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  (si no te acordás como encontrar raíces de la familia  $G_n$  te dejo el ejercicio 12.) que se hacen las cuentas. Ok, tengo esas dos  $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ¿Cuál elijo? cualquiera nos sirve, porque, nuevamente, como  $fen \mathbb{Q}[X]$  si agarro una raíz compleja también necesito su conjugado complejo, lo mismo que antes. Hasta el momento tenemos:

$$f = (X - (1 + 2\sqrt{3}))(X - (1 - 2\sqrt{3}))\underbrace{(X - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}))^{2^{*1}}(X - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}))^{2^{*1}}}_{(X^2 + X + 1)^2} = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2$$

 $\bigstar$  Si es doble una de las complejas, también debe serlo su conjugado, porque  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

Nos queda cumplir que f(0) = 33, si bien ahora f(0) = -11. Acá tenemos que tener en cuenta la primera condición. f es m'onico, así que no podemos corregir el valor con coeficiente independiente. Hay que proponer otro factor en  $\mathbb{Q}[X]$ , que al evaluar de el número que al multiplicarse con -11 nos dé 33. El candidato es (X-3), dado que en 0 vale -3 y así  $f(0) = (-11) \cdot (-3) = 33$  como queremos. El  $f \in \mathbb{Q}[X]$  que cumple lo pedido:

$$f = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2(X - 3)$$

**\ddots**8.

- a) Determinar todos los  $f \in \mathbb{R}[X]$  mónicos de grado mínimo tales que cumplan:
  - f contiene entre sus raíces al menos una raíz cúbica de la unidad,
  - $X^2 + 1 \mid (f:f'),$
  - $\bullet$  f tiene al menos 2 raíces enteras,
  - f(1) = -12,
- b) Con el polinomio f hallado expresar factorización en irreducibles en  $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$  y  $\mathbb{C}[X]$ .
- a) Arrancando con la primera condición, tenemos al menos a una de las w tales que:

$$w^{3} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} w_{1} = 1 \overset{*}{\bigstar}^{1} \\ w_{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}.$$

Si no te acordás como calcular las raíces, mirá el ejercicio 12, donde se resuelve algo casi idéntico. Como el polinomio  $debe\ ser\ de\ grado\ m\'inimo\ y$  tiene coeficientes en  $\mathbb R$  hay que elegir con cuidado. Lo mejor es ver el resto de las condiciones para no hacer cagadas. ([spoiler alert: Elegí el 1 si sos picantel)

De la segunda condición sacamos que:

$$X^{2} + 1 = (X - i) \cdot (X + i) \mid (f : f') \Leftrightarrow \begin{cases} X^{2} + 1 \mid f \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i) \mid f \\ y \\ (X + i) \mid f \end{cases} \\ X^{2} + 1 \mid f' \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i) \mid f' \\ y \\ (X + i) \mid f' \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i)^{2} \mid f \\ y \\ (X + i)^{2} \mid f \end{cases}$$

Si no entendés el porqué de eso mirate esto de las notas teóricas, para tener contexto. Básicamente si  $\alpha$  es una raíz de f y también de f', entoences es una raíz por lo menos doble de f.

En el tercer punto, nos dicen que tiene al menos 2 raíces en  $\mathbb{Z}$ . ¿Una de esas podría ser el 1 que obtuvimos como raíz de  $G_3$ ?, Dejame que lo piense.

En el último punto tenemos que cumplir que al evaluar en nuestro polinomio f en 1, eso nos dé -12. Y es acá donde nos damos cuenta de que no podemos elegir a  $1^{*}$  para que sea raíz de f!! Y dado

que  $f \in \mathbb{R}[X]$  tenemos que elegir entonces <u>ambas</u>  $\begin{cases} w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$ . Propongo:

$$\begin{array}{ll} f &=& (X-(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-i)^2(X+i)^2(X-a)(X-b) \\ \stackrel{\bigstar^2}{=} & (X^2+X+1)(X^2+1)^2(X-a)(X-b), \end{array}$$

con a y b a determinar, de manera tal de cumplir las últimas dos condiciones: ambas enteras y f(1) = -12.

$$f(1) = -12 \stackrel{\bigstar^2}{\Longleftrightarrow} 12 \cdot (1-a)(1-b) = -12 \iff (1-a)(1-b) = -1 \stackrel{a}{\Longleftrightarrow} a = 2 \quad \text{y} \quad b = 0.$$

Esas serían las candidatas a raíces enteras, obteniendo así un único polinomio

$$f = (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - 2)(X - 0) = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$$

mónico y de grado mínimo que cumple las condiciones pedidas.

b) La definición de polinomio irreducible está acá.

$$\mathbb{Q}[X] \to f = X(X-2)(X^2+X+1)(X^2+1)^2$$

$$\mathbb{R}[X] \to f = X(X-2)(X^2+X+1)(X^2+1)^2$$

$$\mathbb{C}[X] \to f = X(X-2)(X-(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-i)^2(X+i)^2$$

Notar que en  $\mathbb{Q}$  y en  $\mathbb{R}$  las factorizaciones son iguales, dado que no hay raíces irracionales.

- - f comparte una raíz con  $X^3 3X^2 + 7X 5$
  - $X + 3 \sqrt{2} | f$ ,
  - 1-2i es raíz de f y f'(X-2i)=0

Vamos con la primera. Si dos polinomios , f y  $g=X^3-3X^2+7X-5$ , comparten raíz buscamos raíces de g con el lema de Gauss de donde tomaremos las raíces que nos sirvan para construir nuestro f mónico g de grado mínimo:  $A=\{\pm 1,\pm 5\}$ , con  $\alpha=1\Rightarrow g(1)=0$   $\checkmark$ . Como  $\alpha=1$  es raíz, entonces  $X-1\mid g$ :

$$\begin{array}{c|c}
X^{3} - 3X^{2} + 7X - 5 & X - 1 \\
-X^{3} + X^{2} & X^{2} - 2X + 5 \\
\hline
-2X^{2} + 7X & 2X^{2} - 2X \\
\hline
-5X - 5 & 5 \\
-5X + 5 & 0
\end{array}$$

 $g = (X-1) \cdot (X^2 - 2X + 5),$ busco raíces del cociente  $X^2 - 2X + 5,$ usando resolvente

$$r_{+,-} = \frac{2 \pm w}{2}$$
, con  $w^2 = -16 \rightarrow \begin{cases} r_+ = 1 + 2i \\ r_- = 1 - 2i. \end{cases}$ 

Finalmente,

$$g \stackrel{\star}{=} (X - 1) \cdot \underbrace{(X - (1 + 2i)) \cdot (X - (1 - 2i))}_{X^2 - 2X + 5} \quad \checkmark,$$

antes de elegir cuales de estas raíces serán comunes a f es recomendable estudiar las otras condiciones del enunciado.

 $X+3-\sqrt{2}=X-(-3+\sqrt{2})\mid f$ , por lo que  $(-3+\sqrt{2})$  es una raíz de f y dado que  $f\in\mathbb{Q}[X]$  también debe estar el conjugado irracional  $-3-\sqrt{2}$ .

$$\begin{cases} X - (-3 + \sqrt{2}) \mid f \\ y & \Leftrightarrow X^2 + 6X + 7 \mid f \quad \checkmark. \end{cases}$$

$$X - (-3 - \sqrt{2}) \mid f$$

La tercera condición tiene  $mucha\ data$ . Nos da una raíz compleja de f, por lo cual también tendremos su conjugado complejo porque  $f \in \mathbb{Q}[X]$ .

Esa raíz es una de las que está en  $q^{\bigstar}$ .

El dato de f', también nos indica que la multiplicidad de 1-2i como raíz es por lo menos 2, ya que f'(1-2i)=0, y porlo tanto mult(1+2i;f) también será por lo menos 2.

Tenemos todo para armar a f:

$$f = (X^2 - 2X + 5)^2 \cdot (X^2 + 6X + 7)$$
  $\checkmark$