

# Práctica 5 de álgebra 1

Comunidad Algebraica

last update: 25/06/2024

## 1 Definiciones y fórmulas útiles

- Sea  $aX + bY = c$  con  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0 \wedge b \neq 0$  y sea  $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : aX + bY = C\}$ .  
Entonces  $S \neq \emptyset \iff (a : b) \mid c$
- Las soluciones al sistema:  $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ con } \begin{cases} x = x_0 + kb' \\ y = y_0 + kb' \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $aX \equiv c \pmod{b}$  con  $a, b \neq 0$  tiene solución  $\iff (a : b) \mid c$  tiene solución  $\iff (a : b) \mid c$ . En ese caso, coprimizando:

Ecuaciones de congruencia

- Algoritmo de solución:

1) reducir  $a, c$  módulo  $m$ . Podemos suponer  $0 \leq a, c < m$

2) tiene solución  $\iff (a : m) \mid c$ . Y en ese caso coprimizo:

$$aX \equiv c \pmod{m} \iff a'X \equiv c' \pmod{m'}, \text{ con } a' = \frac{a}{(a : m)}, m' = \frac{m}{(a : m)} \text{ y } c' = \frac{c}{(a : m)}$$

3) Ahora que  $a' \perp m'$ , puedo limpiar los factores comunes entre  $a'$  y  $c'$  (los puedo simplificar)

$$a'X \equiv c' \pmod{m'} \iff a''X \equiv c'' \pmod{m'} \text{ con } a'' = \frac{a'}{(a' : c')} \text{ y } c'' = \frac{c'}{(a' : c')}$$

4) Encuentro una solución particular  $X_0$  con  $0 \leq X_0 < m'$  y tenemos

$$aX \equiv c \pmod{m} \iff X \equiv X_0 \pmod{m'}$$

Ecuaciones de congruencia Sean  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$  coprimos dos a dos ( $\forall i \neq j$ , se tiene  $m_i \perp m_j$ ).  
Entonces, dados  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$  cualesquiera, el sistema de ecuaciones de congruencia.

$$\begin{cases} X \equiv c_1 \pmod{m_1} \\ X \equiv c_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ X \equiv c_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

es equivalente al sistema (tienen misma soluciones)

$$X \equiv x_0 \pmod{m_1 \cdot m_2 \cdots m_n}$$

para algún  $x_0$  con  $0 \leq x_0 < m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$

Pequeño teorema de Fermat

- Sea  $p$  primo, y sea  $a \in \mathbb{Z}$ . Entonces:

$$1.) a^p \equiv a \pmod{p}$$

$$2.) p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

- Sea  $p$  primo, entonces  $\forall a \in \mathbb{Z}$  tal que  $p \nmid a$  se tiene:

$$a^n \equiv a^{r_{p-1}(n)} \pmod{p}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Sea  $a \in \mathbb{Z}$  y  $p > 0$  primo tal que  $\underbrace{(a : p) = 1}_{a \perp p}$ , y sea  $d \in \mathbb{N}$  con  $d \leq p-1$  el mínimo tal que:

$$a^d \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow d \mid (p-1)$$

### Aritmética modular:

- Sea  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

$$\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/_n\mathbb{Z} : \begin{cases} \bar{a} + \bar{b} := \overline{r_n(a+b)} \\ \bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{r_n(a \cdot b)} \end{cases}$$

- Sea  $p$  primo, en  $\mathbb{Z}/_p\mathbb{Z}$  todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo, análogamente a  $\mathbb{Z}$ . Si  $m \in \mathbb{N}$  es compuesto,

- No todo  $\bar{a} \in \mathbb{Z}/_m\mathbb{Z}$  con  $\bar{a} \neq \bar{0}$  es inversible.
- $\exists \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/_m\mathbb{Z}$  con  $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$  tal que  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0}$
- $\text{Inv}(\mathbb{Z}/_m\mathbb{Z}) = \{\bar{a} \in \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}\} \text{ tales que } a \perp m$

- Si  $m = p$ , con  $p$  primo, todo elemento no nulo de  $\mathbb{Z}/_p\mathbb{Z}$  tiene inverso:

- $\text{Inv}(\mathbb{Z}/_p\mathbb{Z}) = \{\bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}.$
- $p$  primo  $\Rightarrow \mathbb{Z}/_p\mathbb{Z}$  es un cuerpo.
- en  $\mathbb{Z}/_p\mathbb{Z} : (\bar{a} + \bar{b})^p = \bar{a}^p + \bar{b}^p$

### **Ejercicios dados en clase:**

- 
1. Hallar los posibles restos de dividir a  $a$  por 70, sabiendo que  $(a^{1081} + 3a + 17 : 105) = 35$

---


$$\underbrace{(a^{1081} + 3a + 17)}_m : \underbrace{105}_{3 \cdot 5 \cdot 7} = \underbrace{35}_{5 \cdot 7} \xrightarrow[\text{que}]{\text{notar}} \begin{cases} 5 \mid m \\ 7 \mid m \\ 3 \nmid m \end{cases} \rightarrow \text{¡He aquí la más importante info!}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \mid m \rightarrow a^{1081} + 3a + \underbrace{17}_{\equiv 2^{(5)}} \equiv 0 \pmod{5} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{si } 5 \mid a \rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{5} \text{ ningún } a \text{ ☠} \\ \text{si } 5 \nmid a \xrightarrow[5 \text{ primo y } 5 \nmid a, \text{ fermateo}]{a^{1081} = a \cdot (a^4)^{270}} a + 3a + 2 \equiv 0 \pmod{5} \rightarrow a \equiv 2 \pmod{5} \\ \text{si } 5 \mid m \Rightarrow \boxed{a \equiv 2 \pmod{5}} \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \\ 7 \mid m \rightarrow a^{1081} + 3a + \underbrace{17}_{\equiv 3^{(7)}} \equiv 0 \pmod{7} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{si } 7 \mid a \rightarrow 3 \equiv 0 \pmod{7} \text{ ningún } a \text{ ☠} \\ \text{si } 7 \nmid a \xrightarrow[7 \text{ primo y } 7 \nmid a, \text{ fermateo}]{a^{1081} = a \cdot (a^6)^{180}} a + 3a + 3 \equiv 0 \pmod{7} \rightarrow 4a \equiv -3 \pmod{7} \\ \text{si } 7 \mid m \Rightarrow \boxed{a \equiv 1 \pmod{7}} \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \\ 3 \nmid m \rightarrow a^{1081} + 3a + \underbrace{17}_{\equiv 2^{(3)}} \equiv 0 \pmod{3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{si } 3 \mid a \rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{3} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } 3 \mid m \rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{3} \rightarrow \text{ningún } a \text{ ☠, pero} \\ \text{quiero } 3 \nmid m \Rightarrow \text{todo } a, \text{ pero en esta rama} \\ 3 \mid a \Rightarrow \text{si } 3 \nmid m \rightarrow \boxed{a \equiv 0 \pmod{3}} \quad \checkmark \end{array} \right. \\ \text{si } 3 \nmid a \xrightarrow[3 \text{ primo y } 3 \nmid a, \text{ fermateo}]{a^{1081} = a \cdot (a^2)^{540}} a + 0 + 2 \equiv 0 \pmod{3} \rightarrow a \equiv -2 \pmod{3} \\ \text{si } 3 \nmid m \Rightarrow \star^1 \boxed{a \not\equiv 1 \pmod{3}} \quad \checkmark \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Debido a la última condición  $\star^1$ , el problema se ramifica en 2 sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv 2 \pmod{5} \\ a \equiv 1 \pmod{7} \\ a \equiv 0 \pmod{3} \end{array} \right. \rightarrow \boxed{a \equiv 22 \pmod{105}} \qquad \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 2 \pmod{5} \\ a \equiv 1 \pmod{7} \\ a \equiv 2 \pmod{3} \end{array} \right. \rightarrow \boxed{a \equiv 92 \pmod{105}}$$

Veo que para el conjunto de posibles  $a \left\{ \begin{array}{l} a = 105k_1 + 22 \\ o \\ a = 105k_2 + 92 \end{array} \right\} \xrightarrow[(70)]{\text{calculo}} a \equiv 22 \pmod{35} \xrightarrow[\text{pedidos del enunciado}]{\text{quiero los restos}} r_{70}(a) = \{22, 57\}$ , valores de  $a$  que cumplan condición de  $r_{70}(a)$

2. Sea  $a \in \mathbb{Z}$  tal que  $(a^{197} - 26 : 15) = 1$ . Hallar los posibles valores de  $(a^{97} - 36 : 135)$

Tengo que dar posible valores para  $(a^{97} - 36 : 135)$ . Como  $135 = 3^3 \cdot 5$ , los posibles valores serán de la forma  $3^\alpha \cdot 5^\beta$  con  $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \leq 3 \\ 0 \leq \beta \leq 1 \end{array} \right\}$  potencialmente  $\underbrace{8}_{(3+1) \cdot (1+1)}$  posibles valores distintos  $\{1, 3, 9, 27, 5, 15, 45, 135\}$

Como condición mínima para que no sea siempre  $(a^{97} - 36 : 135) = 1$  es que  $\left\{ \begin{array}{l} 3 \mid a^{97} - 36 \\ o \text{ bien,} \\ 5 \mid a^{97} - 36 \end{array} \right\}$  si no ocurre ninguna de éstas el MCD será 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \mid a^{97} - 36 \rightarrow a^{97} - 36 \equiv a^{97} - 1 \equiv 0 \pmod{5} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[5 \mid a]{\text{si}} -1 \equiv 0 \pmod{5} \xrightarrow[5 \mid a \text{ logra que}]{\text{ningún } a \text{ tal que}} 5 \mid a^{97} - 36 \\ \xrightarrow[5 \nmid a]{\text{si}} (a^4)^{24} \cdot a - 1 \equiv 0 \pmod{5} \xrightarrow[a^4 \equiv 1 \pmod{5}]{5 \text{ primo, } 5 \nmid a} \boxed{a \equiv 1 \pmod{5}} \end{array} \right. \\ \text{Se concluye de esta rama que si } 5 \mid a^{97} - 36 \Rightarrow \boxed{a \equiv 1 \pmod{5}} \quad \star^3 \quad \checkmark \\ \\ 3 \mid a^{97} - 36 \rightarrow a^{97} - 36 \equiv a^{97} \equiv 0 \pmod{3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[3 \mid a]{\text{si}} 0 \equiv 0 \pmod{3} \xrightarrow[\text{esta rama } a \mid 3]{\text{dado que en}} \boxed{a \equiv 0 \pmod{3}} \\ \xrightarrow[3 \nmid a]{\text{si}} (a^2)^{48} \cdot a \equiv 0 \pmod{3} \xrightarrow[a^2 \equiv 1 \pmod{3}]{3 \text{ primo, } 3 \nmid a} \boxed{a \equiv 0 \pmod{3}} \end{array} \right. \\ \text{Se concluye de esta rama que si } 3 \mid a^{97} - 36 \Rightarrow \boxed{a \equiv 0 \pmod{3}} \quad \star^4 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

Todo muy lindo pero los valores de  $a$  están condicionados por  $(a^{197} - 26 : 15) = 1$  una condición que "nada" tiene que ver con el MCD, pero que condiciona los valores que puede tomar  $a$ . Como  $a^{197} - 26$  y  $15 = 3 \cdot 5$  son coprimos sus factorizaciones en primos no pueden tener ningún número factor en común,

dicho de otra forma:  $\left\{ \begin{array}{c} 5 \nmid a^{197} - 26 \\ \text{y} \\ 3 \nmid a^{197} - 26 \end{array} \right\}$  estudiar estas condiciones me va a restringir los valores de  $a$  que puedo usar para construir los posibles MCDs.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{supongo } 5 \mid a^{197} - 26 \text{ y me} \\ \text{quedo con el complemento} \end{array} \rightarrow a^{197} - 1 \equiv 0 \pmod{5} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \frac{5 \mid a}{5 \nmid a} \rightarrow -1 \equiv 0 \pmod{5} \xrightarrow{\text{ningún } a \text{ tal que}} 5 \mid a^{197} - 26 \\ \text{el complemento de "ningún" es} \\ \text{todo } a \text{ pero como } 5 \mid a \end{array} \right. \\ \hline \text{si } \frac{5 \nmid a}{5 \nmid a} \rightarrow (a^4)^{49} \cdot a - 1 \equiv 0 \pmod{5} \xrightarrow[5 \text{ primo, } 5 \nmid a]{a^4 \equiv 1 \pmod{5}} a \equiv 1 \pmod{5} \star^1 \\ \text{agarro el} \\ \text{complemento de } \star^1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 0 \pmod{5} \rightarrow \text{rama } 5 \nmid a \\ a \equiv 2 \pmod{5} \\ a \equiv 3 \pmod{5} \\ a \equiv 4 \pmod{5} \end{array} \right. \\ \hline \text{supongo } 3 \mid a^{197} - 26 \text{ y me} \\ \text{quedo con el complemento} \end{array} \rightarrow a^{197} - 2 \equiv 0 \pmod{3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \frac{3 \mid a}{3 \nmid a} \rightarrow -2 \equiv 0 \pmod{3} \xrightarrow{\text{ningún } a \text{ tal que}} 3 \mid a^{197} - 26 \\ \text{el complemento de "ningún" es} \\ \text{todo } a \text{ pero como } 3 \mid a \end{array} \right. \\ \hline \text{si } \frac{3 \nmid a}{3 \nmid a} \rightarrow (a^2)^{93} \cdot a - 2 \equiv 0 \pmod{3} \xrightarrow[3 \text{ primo, } 3 \nmid a]{a^2 \equiv 2 \pmod{3}} a \equiv 2 \pmod{3} \star^2 \\ \text{agarro el} \\ \text{complemento de } \star^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 0 \pmod{3} \rightarrow \text{rama } 3 \nmid a \\ a \equiv 1 \pmod{3} \end{array} \right.$$

Se concluye del estudio que si  $5 \nmid a^{197} - 26$  y  $3 \nmid a^{197} - 26 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 0 \pmod{5} \quad \text{o} \\ a \equiv 2 \pmod{5} \quad \text{o} \\ a \equiv 3 \pmod{5} \quad \text{o} \\ a \equiv 4 \pmod{5} \\ \text{y} \\ a \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{o} \\ a \equiv 1 \pmod{3} \end{array} \right.$ , 8 sistemas 💀

Para que el MCD *no sea 1*, se deben satisfacer  $\star^3$  o  $\star^4$ , lo cual no ocurre nunca con  $\star^3$ . Eso acota los valores de  $(a^{97} - 36 : 135)$  a  $\{1, 3, 9, 27\}$

De los 4 sistemas útiles:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv 0 \pmod{5} \\ a \equiv 0 \pmod{3} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{solución}} a \equiv 0 \pmod{15} \xrightarrow{\text{con } a=0} \left\{ \begin{array}{l} 0^{97} - 36 \equiv 0 \pmod{3} \\ 0^{97} - 36 \equiv 0 \pmod{9} \quad \checkmark \\ 0^{97} - 36 \equiv -9 \not\equiv 0 \pmod{27} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv 2 \pmod{5} \\ a \equiv 0 \pmod{3} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{solución}} a \equiv 12 \pmod{15} \xrightarrow{\text{con } a=12} \left\{ \begin{array}{l} 12^{97} - 36 \equiv 0 \pmod{3} \\ 12^{97} - 36 \equiv 4^{97} \cdot (3^2)^{48} \cdot 3 \equiv 0 \pmod{9} \quad \checkmark \\ 12^{97} - 36 \equiv 4^{97} \cdot (3^3)^{32} \cdot 3^1 - 9 \equiv -9 \not\equiv 0 \pmod{27} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv 3 \pmod{5} \\ a \equiv 0 \pmod{3} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{solución}} a \equiv 3 \pmod{15}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv 4 \pmod{5} \\ a \equiv 0 \pmod{3} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{solución}} a \equiv 9 \pmod{15} \xrightarrow{\text{con } a=9} \left\{ \begin{array}{l} 9^{97} - 36 \equiv 0 \pmod{3} \\ 9^{97} - 36 \equiv 0 \pmod{9} \rightarrow (9^{97} - 36 : 135) = 9 \quad \checkmark \\ 9^{97} - 36 \equiv (3^3)^{64} \cdot 3^2 - 9 \equiv -9 \not\equiv 0 \pmod{27} \end{array} \right.$$

Después de fumar me eso:  $(a^{97} - 36 : 135) \in \{1, 9\}$ , porque todas las soluciones cumplen que:  
 $3 \mid a^{97} \Rightarrow 9 \mid a^{97} \Rightarrow 27 \mid a^{97}$  y como  $9 \mid 36$  y  $27 \nmid 36$  siempre el mayor divisor de la expresión va a ser 9.  
No estoy súper convencido. ¿Podría ocurrir que en algún caso de 27?

---

## Ejercicios de la guía:

---

1.

---

2. Determinar todos los  $(a, b)$  que simultáneamente  $4 \mid a, 8 \mid b \wedge 33a + 9b = 120$ .

---

Si  $(33 : 9) \mid 120 \Rightarrow 33a + 9b = 120$  tiene solución.  $(33 : 9) = 3, 3 \mid 120 \quad \checkmark$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \mid a \rightarrow a = 4k_1 \\ 8 \mid b \rightarrow b = 8k_2 \end{array} \right. \xrightarrow[33a + 9b = 120]{\text{meto en}} 132k_1 + 72k_2 = 120 \xrightarrow[\text{coprimizo}]{(132 : 72) = 12 \mid 120} 11k_1 + 6k_2 = 10$$

Busco solución particular con algo parecido a Euclides:

$$\left\{ \begin{array}{l} 11 = 6 \cdot 1 + 5 \\ 6 = 5 \cdot 1 + 1 \quad \checkmark \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{combinación entera de } 11 \text{ y } 6]{\text{escribo al 1 como}} 1 = 11 \cdot -1 + 6 \cdot 2 \xrightarrow[\text{particular}]{\text{solución}} 10 = 11 \cdot \underbrace{(-10)}_{k_1} + 6 \cdot \underbrace{20}_{k_2}$$

Para  $11k_1 + 6k_2 = 10$  tengo la solución general  $(k_1, k_2) = (-10 + (-6)k, 20 + 11k)$  con  $k \in \mathbb{Z}$

Pero quiero los valores de  $a$  y  $b$ :

La solución general será  $\boxed{(a, b) = (4k_1, 8k_2) = (-40 + 24k, 160 + (-88)k)}$

Otra respuesta con solución a ojo menos falopa, esta recta es la misma que la anterior:

$(a, b) = (2 + 3k, 6 - 11k)$  con  $k \equiv 2 \pmod{8}$

---

3. Si se sabe que cada unidad de un cierto producto  $A$  cuesta 39 pesos y que cada unidad de un cierto producto  $B$  cuesta 48 pesos, ¿cuántas unidades de cada producto se pueden comprar gastando exactamente 135 pesos?

---

$$\left\{ \begin{array}{l} A \geq 0 \wedge B \geq 0. \text{ Dado que son productos.} \\ (A : B) = 3 \Rightarrow 39A + 28B = 135 \xrightarrow{\text{coprimizar}} 13A + 16B = 45 \\ A \text{ ojo} \rightarrow (A, B) = (1, 2) \end{array} \right.$$

4. Hallar, cuando existan, todas las soluciones de las siguientes ecuaciones de congruencia:

---

i)  $17X \equiv 3 \pmod{11} \xrightarrow{\text{respuesta}} X \equiv 6 \pmod{11}$   
**pasar**

ii)  $56X \equiv 28 \pmod{35}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 56X \equiv 28 \pmod{35} \iff 7X \equiv 21 \pmod{35} \xrightarrow{?} 7X - 35K = 21 \\ \xrightarrow[\text{ojo}]{a} (X, K) = (-2, -1) + q \cdot (-5, 1) \\ X \equiv -2 \pmod{5} \iff X \equiv 3 \pmod{5} = \{\dots, -2, 3, 8, \dots, 5q + 3\} \end{array} \right.$$

$\xrightarrow{\text{respuesta}} X \equiv 3 \pmod{5}$  **corroborar**

iii)

$$\text{iv)} \quad 78X \equiv 30 \pmod{12126} \rightarrow 78X - 12126Y = 30 \xrightarrow[\text{coprimizando}]{(78 : 12126) = 6} 13X - 2021Y = 5$$

Busco solución particular con algo parecido a Euclides:

$$\begin{cases} 2021 = 13 \cdot 155 + 6 \\ 13 = 6 \cdot 2 + 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{combinación de } 13 \text{ y } 2021]{\text{Escribo al 1 como}} 1 = 13 \cdot 311 + 2021 \cdot (-2) \xrightarrow[\text{al } 5]{\text{quiero}} 5 = 13 \cdot 1555 + 2021 \cdot (-10)$$

Respuesta:  $\boxed{78X \equiv 30 \pmod{12126} \iff X \equiv 1555 \pmod{2021}}$

5. Hallar todos los  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tales que  $b \equiv 2a \pmod{5}$  y  $28a + 10b = 26$ .

Parecido al 2..

$$b \equiv 2a \pmod{5} \iff b = 5k + 2a \xrightarrow[28a + 10b = 26]{\text{meto en}} 48a + 50k = 26 \xrightarrow[2 \mid 26]{(48 : 50) = 2} 24a + 25k = 13 \xrightarrow[\text{ojo}]{a} \begin{cases} a = -13 + (-25)q \\ k = 13 + 24q \end{cases}$$

Let's corroborate:

$$b = 5 \cdot \underbrace{(13 + 24q)}_k + 2 \cdot \underbrace{(-13 + (-25)q)}_a = 39 + 70q \begin{cases} b = 39 + 70q \equiv 4 \pmod{5} \quad \checkmark \\ 2a = -26 - 50q \equiv -1 \pmod{5} \equiv 4 \pmod{5} \quad \checkmark \end{cases}$$

10. Hallar, cuando existan, todos los enteros  $a$  que satisfacen simultáneamente:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \star^1 a \equiv 3 \pmod{10} \\ \star^2 a \equiv 2 \pmod{7} \\ \star^3 a \equiv 5 \pmod{9} \end{cases}$$

El sistema tiene solución dado que 10, 7 y 9 son coprimos dos a dos. Resuelvo:

$$\xrightarrow[\text{en } \star^1]{\text{Arranco}} a = 10k + 3 \equiv 3k + 3 \equiv 2 \pmod{7} \xrightarrow[3 \perp 7]{\text{usando que}} k \equiv 2 \pmod{7} \rightarrow k = 7q + 2.$$

$$\xrightarrow[a]{\text{actualizo}} a = 10 \cdot \underbrace{(7q + 2)}_k + 3 = 70q + 23 \equiv 7q \equiv 5 \pmod{9} \xrightarrow[7 \perp 9]{\text{usando que}} q \equiv 0 \pmod{9} \rightarrow q = 9j$$

$$\xrightarrow[a]{\text{actualizo}} a = 70 \underbrace{(9j)}_q + 23 = 630j + 23 \rightarrow \boxed{a \equiv 23 \pmod{630}} \quad \checkmark$$

La solución hallada es la que el Teorema chino del Resto me garantiza que tengo en el intervalo  $[0, 10 \cdot 7 \cdot 9)$

ii)

$$\text{iii)} \quad \begin{cases} \star^1 a \equiv 1 \pmod{12} \\ \star^2 a \equiv 7 \pmod{10} \\ \star^3 a \equiv 4 \pmod{9} \end{cases}$$

15. Hallar el resto de la división de  $a$  por  $p$  en los casos.

$$\text{i)} \quad a = 71^{22283}, \quad p = 11$$

$$a = 71^{22283} = 71^{10 \cdot 2228 + 2 + 1} = \underbrace{(71^{10})^{2228}}_{\equiv 1^{2228} \pmod{11}} \cdot 71^2 \cdot 71^1 \equiv 71^3 \pmod{11} \rightarrow a \equiv 5^3 \pmod{11} \quad \checkmark$$

Usando corolario con  $p$  primo y  $p \perp 71$ ,  $\rightarrow 71^{22283} \equiv 71^{r_{10}(22283)} \pmod{11} \equiv 71^3 \pmod{11} \rightarrow a \equiv 5^3 \pmod{11} \quad \checkmark$

ii)  $a = 5 \cdot 7^{2451} + 3 \cdot 65^{2345} - 23 \cdot 8^{138}$ ,  $p = 13$

$$a \equiv 5 \cdot 7^{204 \cdot 12 + 3} + 3 \cdot 8^{11 \cdot 12 + 6} \pmod{13} \rightarrow a \equiv 5 \cdot (7^{12})^{204} \cdot 7^3 + 3 \cdot (8^{12})^{11} \cdot 8^6 \pmod{13}$$

$$\xrightarrow[p \nmid 8]{p \nmid 7} a \equiv 5 \cdot 7^3 + 3 \cdot 8^6 \pmod{13} \rightarrow a \equiv 5 \cdot (-6^3 + 3 \cdot 5^5) \pmod{13} \text{ consultar}$$

**16.** Resolver en  $\mathbb{Z}$  las siguientes ecuaciones de congruencia:

i)  $2^{194}X \equiv 7 \pmod{97}$

$$\xrightarrow{2 \perp 97} 2^{194} = (2^{96})^2 \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod{97} \rightarrow 4X \equiv 7 \pmod{97} \xrightarrow{\times 24} -X \equiv \underbrace{168}_{\equiv 71 \pmod{97}} \pmod{97} \xrightarrow{-71 \equiv 26 \pmod{97}} X \equiv 26 \pmod{97} \quad \checkmark$$

ii)  $5^{86}X \equiv 3 \pmod{89}$

**Hacer!**

**20.** Hallar el resto de la división de:

i)  $43 \cdot 7^{135} + 24^{78} + 11^{222}$  por 70

ii)  $\sum_{i=1}^{1759} i^{42}$  por 56

i) **Hacer!**

ii) Calcular el resto pedido equivale a resolver la ecuación de equivalencia:

$$X \equiv \sum_{i=1}^{1759} i^{42} \pmod{56} \text{ que será aún más simple en la forma: } \begin{cases} X \equiv \sum_{i=1}^{1759} i^{42} \pmod{7} \\ X \equiv \sum_{i=1}^{1759} i^{42} \pmod{8} \end{cases}$$

Primerlo estudio la ecuación de módulo 7:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{1759} i^{42} \equiv X \pmod{7} \xrightarrow[\text{si } p \nmid i \rightarrow i^{42} = (i^6)^7 \equiv 1 \pmod{7}]{\substack{7 \text{ es primo, uso Fermat} \\ \star^1}} \sum_{i=1}^{1759} i^{42} = \sum_{i=1}^{1759} (i^6)^7 \xrightarrow{251 \cdot 7 + 2 = 1759} \\ \sum_{i=1}^{1759} (i^6)^7 \equiv 251 \cdot ((1^6)^7 + (2^6)^7 + (3^6)^7 + (4^6)^7 + (5^6)^7 + (6^6)^7 + (7^6)^7) + ((1^6)^7 + (2^6)^7 + (3^6)^7 + (4^6)^7) \\ \sum_{i=1}^{1759} (i^6)^7 \equiv 251 \cdot (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0) + (1 + 1 + 1 + 1) = 251 \cdot 6 + 4 \equiv 3 \pmod{7} \\ \star^1 \rightarrow \boxed{X \equiv 3 \pmod{7}} \end{array} \right.$$



Ahora se labura el módulo 8.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{1759} i^{42} \equiv X \pmod{8} \xrightarrow[\text{no uso Fermat}]{\text{8 no es primo}} \text{Analizo a mano} \xrightarrow{219 \cdot 8 + 7 = 1759} X \equiv \sum_{i=1}^{1759} i^{42} \pmod{8} \stackrel{(8)}{\equiv} \\ \stackrel{(8)}{\equiv} 219 \cdot \underbrace{(1^{42} + 2^{42} + 3^{42} + 4^{42} + 5^{42} + 6^{42} + 7^{42} + 0^{42})}_{\substack{8 \text{ términos: } r_8(i^{42}) = (r_8(i))^{42}}} + (1^{42} + 2^{42} + 3^{42} + 4^{42} + 5^{42} + 6^{42} + 7^{42}) \\ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2^{42} = (2^3)^{14} \stackrel{(8)}{\equiv} 0 \\ 4^{42} = (2^3)^{14} \cdot (2^3)^{14} \stackrel{(8)}{\equiv} 0 \\ 6^{42} = (2^3)^{14} \cdot 3^{42} \stackrel{(8)}{\equiv} 0 \\ 1^{42} = 1 \\ 3^{42} = (3^2)^{21} \stackrel{(8)}{\equiv} 1^{21} = 1 \\ 5^{42} = (5^2)^{21} \stackrel{(8)}{\equiv} 1^{21} = 1 \\ 7^{42} = (7^2)^{21} \stackrel{(8)}{\equiv} 1^{21} = 1 \end{array} \right\} \\ \xrightarrow[\text{esa en}]{\text{reemplazo}} \sum_{i=1}^{1759} i^{42} \stackrel{(8)}{\equiv} 219 \cdot 4 + 4 = 880 \stackrel{(8)}{\equiv} 0 \rightarrow \boxed{X \equiv 0 \pmod{8}} \end{array} \right.$$

El sistema  $\begin{cases} X \equiv 3 \pmod{7} \\ X \equiv 0 \pmod{8} \end{cases}$  tiene solución  $X \equiv 24 \pmod{56}$ , por lo tanto el *resto pedido*:  $r_{56} \left( \sum_{i=1}^{1759} i^{42} \right) = 24$

**22.** Resolver en  $\mathbb{Z}$  la ecuación de congruencia  $7X^{45} \equiv 1 \pmod{46}$ .

$$\begin{aligned} 7X^{45} &\equiv 1 \pmod{46} \xrightarrow[13]{\text{multiplico por}} 91X^{45} \equiv 13 \pmod{46} \rightarrow X^{45} \equiv -13 \pmod{46} \rightarrow X^{45} \equiv 33 \pmod{46} \\ &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X^{45} \equiv 33 \pmod{23} \rightarrow X^{45} \equiv 10 \pmod{23} \xrightarrow[\substack{X^{22} \equiv 1 \pmod{23}}]{23 \text{ primo y } 23 \nmid X} X^{22} X^{22} X^1 \stackrel{(23)}{\equiv} X \equiv 10 \pmod{23} \\ X^{45} \equiv 10 \pmod{2} \rightarrow X^{45} \equiv 0 \pmod{2} \xrightarrow[\text{si mismo impar veces}]{X \text{ multiplicado por}} X \equiv 0 \pmod{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

La ecuación de congruencia  $\boxed{X \equiv 10 \pmod{46}}$  cumple las condiciones encontradas.

**23.** Hallar todos los divisores positivos de  $25^{70}$  que sean congruentes a 2 módulo 9 y 3 módulo 11.

Quiero que ocurra algo así:  $\begin{cases} 25^{70} \equiv 0 \pmod{d} \rightarrow 5^{140} \equiv 0 \pmod{d} \\ d \equiv 2 \pmod{9} \\ d \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$ . De la primera ecuación queda que el divisor

$$d = 5^\alpha \text{ con } \alpha \text{ compatible con las otras ecuaciones.} \rightarrow \begin{cases} 5^\alpha \equiv 2 \pmod{9} \\ 5^\alpha \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$$

→ Usaré viejo truco de exponenciales de módulo periódicas:

$$\frac{\text{Busco}}{5^a \equiv 1 \text{ (d)}} \left\{ \begin{array}{l} 5^\alpha \equiv 2 \text{ (9)} \\ 5^3 \equiv -1 \text{ (9)} \xrightarrow[\text{cuadrado}]{\text{al}} 5^6 \equiv 1 \text{ (9)} \xrightarrow[\text{tabla de restos}]{5^\alpha = 5^{6k+r_6(\alpha)} = \overbrace{(5^6)^k}^{\equiv 1} 5^{r_6(\alpha)}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline r_6(\alpha) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline r_9(5^\alpha) & 1 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \xrightarrow[\text{tanto}]{\text{por lo}} \text{para que } 5^\alpha \equiv 2 \text{ (9)} \Rightarrow \boxed{\alpha \equiv 5 \text{ (9)}} \quad \checkmark \\ \hline 5^\alpha \equiv 3 \text{ (11)} \xrightarrow[\alpha=2]{\text{a ojo}} 5^2 \equiv 3 \text{ (11)} \\ \xrightarrow[\text{fermateo}]{11 \text{ es primo, } 11 \nmid 5} 5^{10} \equiv 1 \text{ (11)} \xrightarrow[\text{cuando hago } 5^{12}]{\text{noto que tengo otro}} 5^2 \cdot 5^{10} \equiv 3 \text{ (11)} \\ \text{para no perder soluciones de } 5^\alpha \equiv 3 \text{ (11)} \xrightarrow[\text{tabla de restos por las dudas}]{} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline r_{10}(\alpha) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline r_{11}(5^\alpha) & 1 & 5 & 3 & 4 & 9 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \xrightarrow[\text{periodicidad de } 5]{\text{por lo tanto hay}} \text{para que } 5^\alpha \equiv 3 \text{ (11)} \Rightarrow \boxed{\alpha \equiv 2 \text{ (5)}} \quad \checkmark \end{array} \right.$$

El sistema  $\begin{cases} \alpha \equiv 5 \text{ (9)} \\ \alpha \equiv 2 \text{ (5)} \end{cases}$  se resuelve para  $\alpha \equiv 32 \text{ (45)}$  y además  $0 < \alpha \leq 140$  lo que se cumple para

$$\alpha = 45k + 32 = \begin{cases} 32 & \text{si } k = 0 \\ 77 & \text{si } k = 1 \\ 122 & \text{si } k = 2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\mathcal{D}_+(25^{70}) = \{5^{32}, 5^{77}, 5^{122}\}}$$