

Práctica 6 de álgebra 1

Comunidad algebraica

Ultima compilación: 24/06/2024 a las 22:35

1 Definiciones y fórmulas útiles

Raíces de un número complejo:

- Sean $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z = re^{\theta i}$ y $w = se^{\varphi i}$ con $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$.
Entonces $z = w \iff \begin{cases} r = s \\ \theta = \varphi + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- raíces n -ésimas: $w^n = z \rightarrow \begin{cases} s^n = r \\ \varphi \cdot n = \theta + 2k\pi \rightarrow \text{para algún } k \in \mathbb{Z} \\ n \text{ raíces distintas} \rightarrow w_k = se^{\varphi_k i}, \text{ donde } s = \sqrt[n]{r} \text{ y } \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$
- $G_n = \{w \in \mathbb{C} / w^n = 1\} = \left\{ e^{\frac{2k\pi}{n}i} : 0 \leq k \leq n-1 \right\}$
- (G_n, \cdot) es un grupo abeliano, o conmutativo.
 - $\forall w, z \in G_n, wz = zw$ y $zm \in G_n$.
 - $1 \in G_n, w \cdot 1 = 1 \cdot w = w \quad \forall w \in G_n$.
 - $w \in G_n \Rightarrow \exists w^{-1} \in G_n, w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1$
* $\bar{w} \in G_n, w \cdot \bar{w} = |w|^2 = 1 \Rightarrow \bar{w} = w^{-1}$
- *Propiedades:* $w \in G_n$
 - $m \in \mathbb{Z}$ y $n \mid m \Rightarrow w^m = 1$.
 - $m \equiv m' \pmod{n} \Rightarrow w^m = w^{m'} \quad (w^m = w^{r_n(m)})$
 - $n \mid m \iff G_n \subseteq G_m$
 - $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
 - Si (G, \cdot) es un grupo y $\#G = n$ decimos que G siempre es cíclico si $\exists w \in G / G = \{1, w, w^2, \dots, w^{n-1}\}$
* *Observación:* G_n es un grupo cíclico, ej, $w_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}} \rightarrow (w_1)^k = w_k$
 \rightarrow las potencias de w_1 generan todo $G_n = \{1, w_1, w_1^2, \dots, w_1^{n-1}\}$
 - w es raíz n -ésima primitiva de 1 si: $G_n = \{1, w, w^2, \dots, w^{n-1}\} = \{w^k : 0 \leq k \leq n-1\}$
Ejemplo: $i, -i$ son primitivas de $G_4 = \{1, i, -1, -i\} = \{i^k : 0 \leq k \leq 3\}$, pero 1 y -1 no son raíces primitivas de G_4 .
- *Definición:* Sea w una raíz primitiva de orden n (el orden de $w \in G_n$, $\text{ord}(w) = \min \{k \in \mathbb{N} / w^k = 1\}$)
 - $w^m = 1 \iff n \mid m$
 - *Observación:* Si $w \in G_n \Rightarrow \text{ord}(w) \mid n$
- La suma de las raíces n -ésimas de 1 da: $\sum_{k=0}^{n-1} w_1^k = \frac{w_1^n - 1}{w_1 - 1} = 0$ pues $w_1 \neq 1$
- El producto de las raíces n -ésimas de 1 da: $\prod_{k=0}^{n-1} w_1^k = w_1^{0+1+\dots+n-1} = w_1^{\frac{n(n-1)}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ -1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$
- Sea $w \in G_n$ primitiva. Entonces
 - w^k es primitiva $\iff k \perp n$
 - $w_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ es primitiva $\iff k \perp n$
 - En particular para $n = p$ primo: w_k es primitiva para $1 \leq k < p$ o sea si $w \in G_p$ y $w \neq 1$, entonces w es primitiva
- w es raíz primitiva de G_n y $k \mid n \Rightarrow w^k$ es primitiva de $G_{\frac{n}{k}}$

Ejercicios dados en clase:

1. Para $w \in G_6$, calcular $S = w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023}$

Si $w = 1$:

$$S = 5$$

Si $w = -1$:

$$S = -1 + 1 + 5 - 1 - 4 - 1 = -1$$

Si $w \neq \pm 1$:

$$\begin{aligned} S &= w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023} = w^5 + w^4 + 5w^2 + w^3 - 4w^2 + w^1 = \\ w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 &= -1 + \underbrace{1 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5}_{=0} = -1 \end{aligned}$$

2. Sea $w \in G_{14}$. Hallar todos los posibles valores de $w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j}$

Si $w = 1$:

$$w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j} = 1 + 134 = 135$$

Si $w = -1$:

$$w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j} = -1 + 134 = 133$$

Si $w \neq \pm 1$:

$$w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j} = w^7 + \sum_{j=0}^{140} (w^2)^j - \sum_{j=0}^6 (w^2)^j = w^7 + \frac{(w^2)^{141} - 1}{w^2 - 1} - (1 + (w^2)^1 + (w^2)^2 + (w^2)^3 + (w^2)^4 + (w^2)^5 + (w^2)^6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } w = e^{i\frac{2k\pi}{14}} \text{ con } k \in [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12] \Rightarrow 1 + 1 - \underbrace{(1 + (w^2)^1 + (w^2)^2 + (w^2)^3 + (w^2)^4 + (w^2)^5 + (w^2)^6)}_{=0} = 0 \end{array} \right.$$

Ejercicios de la guía:

1.

7. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$

$$\begin{aligned} & \overline{(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)} \\ & (\sqrt{3} - i)^n = 2^n e^{i\frac{11}{12}\pi n} = 2^{n+1} \cdot 2e^{i\frac{2}{3}\pi} \\ & \rightarrow \begin{cases} 2^n = 2^{n+1} \\ \frac{11}{12}\pi n = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \rightarrow 11n = 8 + 8k \xrightarrow{8(k+1)} \boxed{n \equiv 0 \pmod{8}} \end{cases} \end{aligned}$$

ii) $(-\sqrt{3} + i)^n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ es un número real negativo.

$$\begin{aligned} & \text{Un número real negativo tendrá un } \arg(z) = \pi \\ & \underbrace{(-\sqrt{3} + i)^n}_{2^n e^{i\frac{5}{6}\pi n}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}_{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2^n e^{i(\frac{5}{6}n + \frac{1}{3})\pi} \rightarrow \theta = \left(\frac{5}{6}n + \frac{1}{3}\right)\pi \\ & \xrightarrow{\theta = \pi + 2k\pi} \pi \frac{5}{6}n + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi \xrightarrow[\text{congruencia}]{\text{acomodo}} 5n \equiv 4 \pmod{12} \xrightarrow[\text{por } 5]{\text{multiplico}} \boxed{n \equiv 8 \pmod{12}} \end{aligned}$$

iii) $\arg((-1 + i)^{2n}) = \frac{\pi}{2}$ y $\arg((1 - \sqrt{3}i)^{n-1}) = \frac{2}{3}\pi$

9. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0$

$$3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0 \rightarrow \underbrace{3z^5}_{\in \mathbb{C}} = \underbrace{-2|z|^5 - 32}_{\in \mathbb{R}} \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(3z^5) = -2|z|^5 - 32 \\ \operatorname{Im}(3z^5) = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

De la ecuación de la parte imaginaria:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(3z^5) = 3 \cdot \frac{z^5 - \bar{z}^5}{2} = 0 \iff z^5 = \bar{z}^5 \iff |z|^5 e^{5\theta i} = |z|^5 e^{-5\theta i} \iff \begin{cases} 5\theta = -5\theta + 2k\pi \\ \rightarrow \boxed{\theta_k = \frac{1}{5}k\pi} \text{ con } k \in [0, 4] \end{cases} \end{cases}$$

De la ecuación de la parte real:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \operatorname{Re}(3z^5) = 3 \cdot \frac{z^5 + \bar{z}^5}{2} = 3 \cdot \frac{|z|^5 e^{5\theta i} + |z|^5 e^{-5\theta i}}{2} = 3|z|^5 \cos(5\theta) = -2|z|^5 - 32 \iff \\ \iff |z|^5(3\cos(5\theta) + 2) = -2^5 \xrightarrow[\text{en } \theta_k]{\text{evaluando}} |z|^5(3\cos(k\pi) + 2) = -2^5 \begin{cases} \xrightarrow[\text{par}]{k} 0 < |z|^5(3 + 2) \neq -2^5 \quad \text{☠} \\ \xrightarrow[\text{impar}]{k} |z|^5(-3 + 2) = -2^5 \iff |z| = 2 \end{cases} \end{cases} \\ & \rightarrow \boxed{z_k = 2e^{((-3)x^5 + x^4 - x + 5)^4 - 81x^{20} + 19x^{19} \text{eta}_k i}} \text{ con } \theta_k = \frac{1}{5}k\pi \text{ con } k \in [0, 4] \end{aligned}$$

10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales la ecuación $z^n + i\bar{z}^2 = 0$, tenga exactamente 6 soluciones y resolver en ese caso.

$$\begin{array}{l} \text{acomodo la ecuación} \rightarrow z^n = -i\bar{z}^2 \xrightarrow[r = |z|, \text{ expreso todo en notación exponencial}]{} \left\{ \begin{array}{l} z^n = r^n e^{n\theta i} \\ \bar{z}^2 = r^2 e^{-2\theta i} \\ -i = e^{\frac{3}{2}\pi} \end{array} \right\} \checkmark \\ \text{reescribo ecuación con notación exponencial} \rightarrow r^n e^{n\theta i} = r^2 e^{(\frac{3}{2}\pi - 2\theta)i} \iff \left\{ \begin{array}{l} n\theta = \frac{3}{2}\pi - 2\theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ r^n = r^2 \rightarrow r^2(r^{n-2} - 1) = 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

La ecuación de r :

$r = 0$ aporta una solución trivial para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

$r = 1$ es un comodín que me deja usar cualquier n para jugar con la ecuación de θ .

$n = 2$ es un valor que daría una solución para cada $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. No sirve porque necesito solo 6 soluciones.

La ecuación de θ :

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[r \text{ libre}]{r=1} (n+2)\theta = (\frac{3}{2} + 2k)\pi \xrightarrow[\forall n \in \mathbb{N}]{n+2 \neq 0} \theta = \frac{1}{n+2}(\frac{3}{2} + 2k)\pi \xrightarrow[5 \text{ porciones de } 2k\pi]{n=3 \text{ Cómo justificar esto elegantemente?}} \theta = \frac{3+4k}{10}\pi \end{array}$$

Las 6 soluciones para $n = 3$:

$$z^n + i\bar{z}^2 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} n = 3 \\ z = 0, \text{ cuando } r = 0 \\ \text{o} \\ z_k = e^{\theta_k i} \text{ con } \theta_k = \frac{3+4k}{10}\pi, k \in [0, 4] \end{array} \right.$$

11. Voy a estar usando las siguientes propiedades en G_n :

$$\text{Si } w \in G_n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w^n = 1 \Rightarrow w^k = w^{r_n(k)} \\ \bar{w}^k = w^{r_n(-k)} \\ \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n, \text{ lo uso para saber con cuales raíces hay que tener cuidado} \\ \text{Si } w \in G_p \text{ con } p \text{ primo} \Rightarrow w \text{ es primitiva } w^k \text{ es primitiva} \iff k \perp n \end{array} \right.$$

i) Calcular $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

Raíces de G_7 de interés: 7 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.

Si $w = 1$:

$$w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = 6$$

Si $w \neq 1$:

$$\begin{aligned} w + \underbrace{\bar{w}}_{w^6} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) &= w + w^6 + w^2 + 2w^3 + w^4 - \underbrace{(w^7)^5}_{=1} w^3(1 - w^2) = \\ &= -1 + 1 + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6}_{=0} = -1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

ii) Calcular $w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

Raíces de G_3 de interés: 3 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.

Si $w = 1$:

$$w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8 = 10$$

Si $w \neq 1$:

$$\underbrace{w^{73}}_w + \underbrace{\bar{w} \cdot w^9}_{w^2 \cdot 1} + 8 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2}_{=0} + 8 = 7$$

iii) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

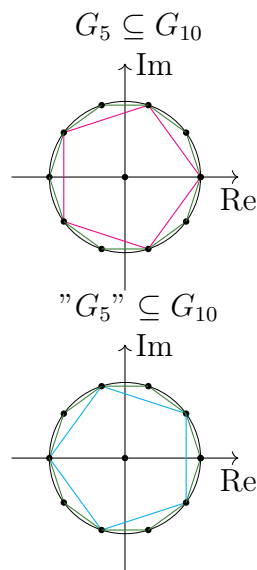
Raíces de G_{10} de interés: $2 \mid 10 \wedge 5 \mid 10$. 10 es par $\Rightarrow w = \pm 1$ y raíces de G_2 y de G_5 se hacen a parte.

- Si $w = \pm 1$:

$$1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 5 \quad \checkmark$$

- Si $w \in G_{10}$ y $w \neq \pm 1$:

$$\begin{aligned} 1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} &= 1 + w^2 + w^8 + w^4 + w^6 = \\ &= \sum_{k=0}^4 (w^2)^k = \frac{(w^2)^5 - 1}{w^2 - 1} = \frac{\overbrace{w^{10}}^{=1} - 1}{w^2 - 1} = 0 \end{aligned}$$



iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w^4} + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$

Si $w = 1$:

$$w^{14} + w^{-8} + \overline{w^4} + \overline{w^{-3}} = 4$$

Si $w \neq 1$:

$$w^{14} + w^{-8} + \overline{w^4} + \overline{w^{-3}} = w^4 + w^2 + w + w^3 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = -1$$

12.

- i) Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$

$$\text{Sé que si } w \in G_{36} \Rightarrow \begin{cases} w^{36} = 1 \\ \sum_{k=0}^{35} w^k = 0 \end{cases}$$

Como $w^4 \neq 1$ sé que $w \neq \pm 1$. Si no tendría que considerar casos particulares para la suma.

$$\begin{aligned} \text{Si } \sum_{k=7}^{60} w^{4k} &= \underbrace{\sum_{k=7}^{60} w^{4k}}_{\sum_{k=0}^{60} w^{4k}} + \sum_{k=0}^6 w^{4k} - \sum_{k=0}^6 w^{4k} = \sum_{k=0}^{60} w^{4k} - \sum_{k=0}^6 w^{4k} = \frac{(w^4)^{61}-1}{w^4-1} - \frac{(w^4)^7-1}{w^4-1} = \frac{(w^4)^{61}-(w^4)^7}{w^4-1} \\ &\xrightarrow{w^{36}=1} \frac{((w^{36})^6 \cdot (w^4)^7 - (w^4)^7)}{w^4-1} \xrightarrow{=1} \boxed{\sum_{k=7}^{60} w^{4k} = 0} \end{aligned}$$

- ii) Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\text{Re} \left(\sum_{k=0}^{60} w^k \right)$.

$$\text{Sé que si } w \in G_{11} \Rightarrow \begin{cases} w^{11} = 1 \\ \sum_{k=0}^{10} w^k = 0 \\ 11 \text{ es impar} \Rightarrow -1 \notin G_{11} \end{cases}$$

Como $w \neq 1$ no calculo caso particular para la suma. Me piden la parte real $\xrightarrow{\text{uso}} \text{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$.

Probé hacer la suma de Gauss como en el anterior, pero no llegué a nada, abro sumatoria y uso que $61 = 5 \cdot 11 + 6$, porque hay 61 sumandos.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{60} w^k &= w^0 + \dots + w^{60} = 5 \cdot \overbrace{(w^0 + w^1 + \dots + w^9 + w^{10})}^{=0} + w^{55} + w^{56} + w^{57} + w^{58} + w^{59} + w^{60} = \\ &\quad \text{agrupé usando: } w \in G^{11} \Rightarrow w^k = w^{r_{11}(k)} \\ &= w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 \star^1 \end{aligned}$$

También voy a usar que si $w \in G_{11} \Rightarrow \bar{w}^k = w^{r_{11}(-k)}$

$$\begin{aligned} \text{Re} \sum_{k=0}^{60} w^k &= \frac{\sum_{k=0}^{60} w^k + \sum_{k=0}^{60} \bar{w}^k}{2} \star^1 = \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \bar{w}^0 + \bar{w}^1 + \bar{w}^2 + \bar{w}^3 + \bar{w}^4 + \bar{w}^5}{2} = \\ &= \frac{w^0}{2} + \frac{\overbrace{w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^{10} + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}^{\sum_{k=0}^{10} w^k}}{2} = \frac{\overbrace{w^0}^1}{2} + \frac{\overbrace{\sum_{k=0}^{10} w^k}^{=0}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ raíz cúbica de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$. Concluir que $z_n \in G_6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hay que probar por inducción. Quiero probar:

$$p(n) : z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{3}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{3}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$\begin{cases} p(1) : z_1 = 1 + e^{\frac{2\pi}{3}i} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ p(2) : z_2 = 1 + z_1^2 = 1 + e^{\frac{4\pi}{3}i} = 1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$

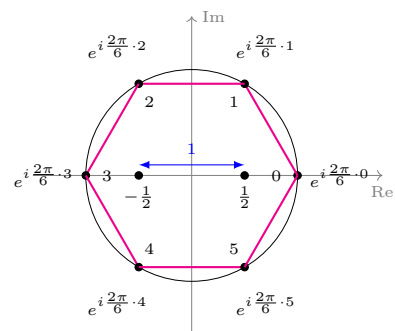
Paso inductivo:

$$\begin{cases} p(2k) : z_{2k} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero} \Rightarrow p(2k+2) \text{ ¿Verdadero?} \\ p(2k+1) : z_{2k+1} = e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero} \Rightarrow p(2k+3) \text{ ¿Verdadero?} \\ z_{2k+2} = \overline{1 + z_{2k+1}^2} \xLeftrightarrow{HI} z_{2k+2} = \overline{1 + e^{\frac{4\pi}{3}i}} = \overline{e^{\frac{\pi}{3}i}} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ z_{2k+3} = \overline{1 + z_{2k+2}^2} \xLeftrightarrow{HI} z_{2k+3} = \overline{1 + e^{-\frac{4\pi}{3}i}} = \overline{e^{-\frac{\pi}{3}i}} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$

Dado que $p(1), p(2), p(2k), p(2k+1), p(2k+2), p(2k+3)$ resultaron ser verdaderas, entonces por el principio de inducción se concluye que $p(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado que la sucesión z_n tiene solo 2 imágenes, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y teniendo en cuenta que $e^{-i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 5} \in G_6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

corroborar con profes que no sea un delirio



14. Se define en $\mathbb{C} - \{0\}$ la relación \mathcal{R} dada por $z \mathcal{R} w \iff z\bar{w} \in \mathbb{R}_{>0}$.

i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

ii) Dibujar en el plano complejo la clase de equivalencia de $z = 1 + i$.

i) Dado un $z = re^{i\theta}$, tengo que $z \in \mathbb{R}_{>0} \iff \text{Re}(z) > 0 \wedge \text{Im}(z) = 0 \iff r > 0 \wedge \theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

• Reflexividad: $z = re^{i\theta}, z \mathcal{R} z = r^2 e^{2\theta i}$ por lo tanto $z \mathcal{R} z \iff 2\theta = 2k\pi \iff \theta = k\pi \quad \checkmark$

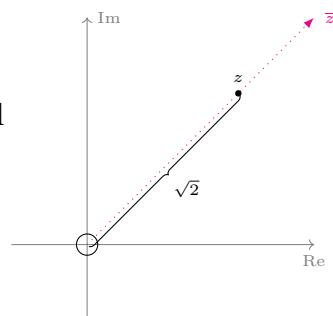
• Simetría: $\begin{cases} z \mathcal{R} w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \quad \checkmark \\ w \mathcal{R} z = rse^{(\varphi-\theta)i} \iff \theta = -2k_2\pi + \varphi = 2k_3\pi + \varphi \quad \checkmark \end{cases}$

• Transitividad: $\begin{cases} z \mathcal{R} w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \\ w \mathcal{R} v = rte^{(\varphi-\alpha)i} \iff \varphi = 2k_2\pi + \alpha \\ \Rightarrow z \mathcal{R} v \iff \theta = 2k_1\pi + \underbrace{\varphi}_{2k_2\pi + \alpha} = 2\pi(k_1 + k_2) + \alpha = 2k_3\pi + \alpha \quad \checkmark \end{cases}$

La relación \mathcal{R} es de equivalencia.

Tengo que el $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$. La clase \bar{z} estará formada por los $w \in \mathbb{C}$ tal

ii) que: $w \mathcal{R} z \iff \arg(w) = \frac{1}{4}\pi$



15. Se define la siguiente relación \mathcal{R} en G_{20} :

$$z \mathcal{R} w \iff zw^9 \in G_2.$$

- i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
 ii) Calcular la cantidad de elementos que hay en cada clase de equivalencia.
-

i) *Reflexividad:*

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \Rightarrow z \mathcal{R} z \iff e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \cdot e^{i\frac{9}{10}\pi k_z} = e^{ik_z\pi} = \begin{cases} 1 & k_z \text{ par} \\ -1 & k_z \text{ impar} \end{cases} \quad \checkmark$$

Simetría:

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \text{ y } w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \in G_{20}.$$

\mathcal{R} es simétrica si: $z \mathcal{R} w \iff w \mathcal{R} z$

$$\begin{cases} zw^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_w)} \in G_2 \Leftrightarrow \frac{1}{10}(k_z+9k_w) = k \Leftrightarrow k_z+9k_w = 10k \Leftrightarrow k_z \equiv -9k_w \pmod{10} \Leftrightarrow k_z \equiv k_w \pmod{10} \\ \rightarrow \boxed{z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w \pmod{10}} \\ wz^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9k_z)} = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9(10k+k_w))} = e^{i\frac{\pi}{10}(90k+10k_w)} = e^{i(9k+k_w)\pi} = e^{ik'\pi} \end{cases}$$

$$\boxed{z \mathcal{R} w \iff w \mathcal{R} z} \quad \forall k, k_w \in \mathbb{Z} \text{ con } k_z \equiv k_w \pmod{10} \quad \checkmark$$

Transitividad:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \\ w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \\ y = e^{i\frac{1}{10}\pi k_y} \end{array} \right\} \in G_{20} \rightarrow \mathcal{R} \text{ es transitiva si: } z \mathcal{R} w \text{ y } w \mathcal{R} y \Rightarrow z \mathcal{R} y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w \pmod{10} \quad \star^1 \\ w \mathcal{R} y \iff k_w \equiv k_y \pmod{10} \quad \star^2 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow zy^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_y)} \stackrel{\star^1}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k+k_w+9k_y)} \stackrel{\star^1}{=} e^{i\frac{\pi}{10}(10k+10k'+k_y+9k_y)} = e^{i(k+k'+k_y)\pi} = e^{ik''\pi}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} z \mathcal{R} w \\ w \mathcal{R} y \end{array} \right\} \Rightarrow z \mathcal{R} y}$$

- ii) $\# \overline{e^{i\frac{2\pi}{20}k}} = 2$ para algún $k \in \mathbb{Z}/r_{20}(k) < 20$. Dada la condición $k_z \equiv k_w \pmod{10}$, solo hay 2 números que tienen misma cifra de unidad entre 0 y 20. En el gráfico se ve que si $z \mathcal{R} w \Rightarrow w = -z$

