

Apunte único: Álgebra I - Práctica 6

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:


(doubleclick en los ejercicio para saltar)

- [Notas teóricas](#)

- Ejercicios de la guía:

1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	

- Ejercicios Extras

 1.	 2.	 3.	 4.
--	--	--	--

Disclaimer:

Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Si usás este apunte vas a reprobar!

Not really. Dependerá de como lo uses, puede ser un arma de doble filo.

Ya sabés como se usa **esto** 📖. Depende de vos lo que hagás con él.

Si estás trabado, antes de ver la solución que hizo otra persona:

📖 Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.

📖 Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.

📖 ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.

📖 Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.

📖 Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir '*no me sale*' ≠ +. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles de un tema en particular, no te van a salir los ejercicios más difíciles: **Sentido común**.

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confianza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada*. Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber*. A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas de Teresa que son **buenísimos** 📺.

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra: **Prácticas Pandemia** 📺.

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre **Just Do IT** 🙌🙌🙌!

Eh, loco, fatalista, distópico, **relajá un toque te vas a quedar (más) pelado...** 🐸🐸🐸 *va a salir todo bien!*

El repo en [github](#) para descargar las guías con los últimos updates.



<https://github.com/nad-garraz/algebraUno>

La Guía 6 se actualizó por última vez: 27/10/24 @ 13:15

Guía 6



<https://github.com/nad-garraz/algebraUno/blob/main/6-guia/6-sol.pdf>

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por

[Telegram](#).



<https://t.me/+1znt2GV1i8cwMTNh>

Notas teóricas:Raíces de un número complejo:

- Sean $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z = r_z e^{i\theta_z}$ y $w = r_w e^{i\theta_w}$ con $r_z, r_w \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\theta_z, \theta_w \in \mathbb{R}$.

$$\text{Entonces } z = w \iff \begin{cases} r_z = r_w \\ \theta_z = \theta_w + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- raíces n -ésimas: $w^n = z \iff \begin{cases} (r_w)^n = r_z \\ \theta_w \cdot n = \theta_z + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

De donde se obtendrán n raíces distintas:

$$w_k = z_w e^{i\theta_{w_k}}, \text{ donde } r_w = \sqrt[n]{r_z} \text{ y } \theta_{w_k} = \frac{\theta_z}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta_z + 2k\pi}{n}$$

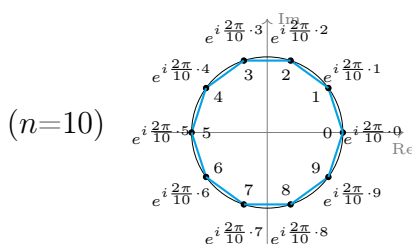
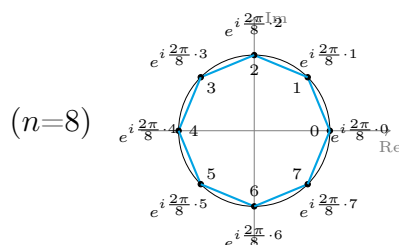
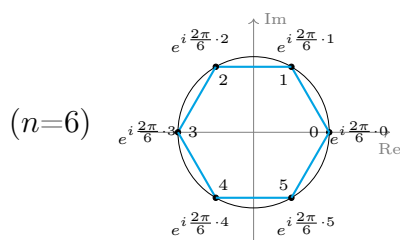
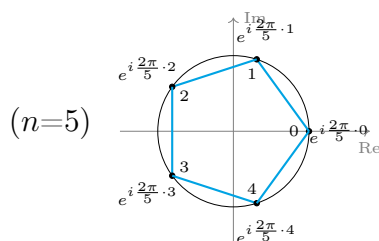
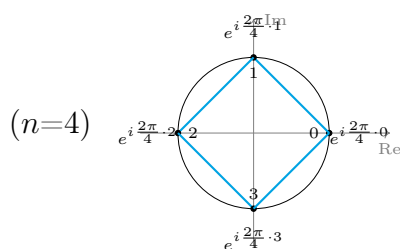
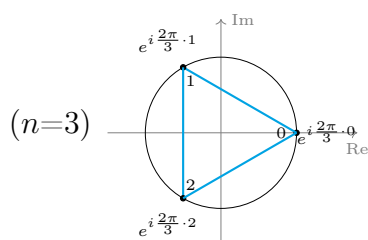
Entender bien como sacar raíces n -ésimas es importantísimo para toda la guía de complejos y la próxima de polinomios.

Grupos G_n :

$$G_n = \{w \in \mathbb{C} / w^n = 1\} = \left\{ e^{\frac{2k\pi}{n}i} : 0 \leq k \leq n-1 \right\}$$

$$(n=1) \quad w = 1$$

$$(n=2) \quad w = \pm 1$$



Notar que:

- Si n es par el grupo tiene al -1 .
- Toda raíz compleja tiene a su conjugado complejo.
- Para ir de un punto a otro, se lo multiplica por $e^{i\theta}$ eso *rota* al número en θ respecto al origen.
- (G_n, \cdot) es un grupo abeliano, o conmutativo.
 - $\forall w, z \in G_n, wz = zw$ y $zm \in G_n$.
 - $1 \in G_n, w \cdot 1 = 1 \cdot w = w \quad \forall w \in G_n$.
 - $w \in G_n \Rightarrow \exists w^{-1} \in G_n, w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1$
 - * $\bar{w} \in G_n, w \cdot \bar{w} = |w|^2 = 1 \Rightarrow \bar{w} = w^{-1}$
- *Propiedades:* $w \in G_n$
 - $m \in \mathbb{Z}$ y $n \mid m \Rightarrow w^m = 1$.
 - $m \equiv m' \pmod{n} \Rightarrow w^m = w^{m'} \quad (w^m = w^{r_n(m)})$
 - $n \mid m \iff G_n \subseteq G_m$
 - $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
 - La suma de una raíz w de G_n : $\sum_{k=0}^{n-1} w^k = \frac{w^n - 1}{w - 1} = 0$ si $w \neq 1$

Ejercicios de la guía:

1. 🤨... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

2. 🤨... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

3. 🤨... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

4. 🤨... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

5. 🤨... hay que hacerlo! 🏠

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

6.

i) Determinar la forma binomial de $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17}$.

ii) Determinar la forma binomial de $(-1 + \sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

7. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^n &= 2^n e^{i\frac{11}{12}\pi n} = 2^{n+1} \cdot 2e^{i\frac{2}{3}\pi} \\ &\rightarrow \begin{cases} 2^n = 2^{n+1} \\ \frac{11}{12}\pi n = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \rightarrow 11n = 8 + 8k \xrightarrow{8(k+1)} \boxed{n \equiv 0 \pmod{8}} \end{cases} \end{aligned}$$

ii) $(-\sqrt{3} + i)^n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ es un número real negativo.

Un número real negativo tendrá un $\arg(z) = \pi$

$$\underbrace{(-\sqrt{3} + i)^n}_{2^n e^{i\frac{5}{6}\pi n}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}_{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2^n e^{i(\frac{5}{6}n + \frac{1}{3})\pi} \rightarrow \theta = \left(\frac{5}{6}n + \frac{1}{3}\right)\pi$$

$$\xrightarrow{\theta = \pi + 2k\pi} \pi \frac{5}{6}n + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi \xrightarrow[\text{congruencia}]{\text{acomodo}} 5n \equiv 4 \pmod{12} \xrightarrow[\text{por } 5]{\text{multiplico}} \boxed{n \equiv 8 \pmod{12}}$$

iii) $\arg((-1 + i)^{2n}) = \frac{\pi}{2}$ y $\arg((1 - \sqrt{3}i)^{n-1}) = \frac{2}{3}\pi$

8. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

9. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0$

$$3z^5 + 2|z|^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3z^5}_{\in \mathbb{C}} = \underbrace{-2|z|^5 - 32}_{\in \mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(3z^5) = -2|z|^5 - 32 \\ \operatorname{Im}(3z^5) = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

De la ecuación de la parte imaginaria:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(3z^5) = 3 \cdot \frac{z^5 - \bar{z}^5}{2} = 0 \Leftrightarrow z^5 = \bar{z}^5 \Leftrightarrow |z|^5 e^{5\theta i} = |z|^5 e^{-5\theta i} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\theta = -5\theta + 2k\pi \\ \rightarrow \theta_k = \frac{1}{5}k\pi \end{cases} \text{ con } k \in [0, 4] \end{cases}$$

De la ecuación de la parte real:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(3z^5) = 3 \cdot \frac{z^5 + \bar{z}^5}{2} = 3 \cdot \frac{|z|^5 e^{5\theta i} + |z|^5 e^{-5\theta i}}{2} = 3|z|^5 \cos(5\theta) = -2|z|^5 - 32 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |z|^5 (3 \cos(5\theta) + 2) = -2^5 \xrightarrow[\text{en } \theta_k]{\text{evaluando}} |z|^5 (3 \cos(k\pi) + 2) = -2^5 \begin{cases} \xrightarrow[k \text{ par}]{k} 0 < |z|^5 (3 + 2) \neq -2^5 \quad \text{💀} \\ \xrightarrow[k \text{ impar}]{k} |z|^5 (-3 + 2) = -2^5 \Leftrightarrow |z| = 2 \end{cases} \\ \rightarrow \boxed{z_k = 2e^{\theta_k i}} \text{ con } \theta_k = \frac{1}{5}k\pi \text{ con } k \in [0, 4] \end{cases}$$

10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales la ecuación $z^n + i\bar{z}^2 = 0$, tenga exactamente 6 soluciones y resolver en ese caso.

$$\begin{aligned} \xrightarrow[\text{ecuación}]{\text{acomodo la}} z^n = -i\bar{z}^2 & \xrightarrow[\text{en notación exponencial}]{r = |z|, \text{ expreso todo}} \begin{cases} z^n = r^n e^{n\theta i} \\ \bar{z}^2 = r^2 e^{-2\theta i} \\ -i = e^{\frac{3}{2}\pi} \end{cases} \checkmark \\ \xrightarrow[\text{notación exponencial}]{\text{reescribo ecuación con}} r^n e^{n\theta i} = r^2 e^{(\frac{3}{2}\pi - 2\theta)i} & \Leftrightarrow \begin{cases} n\theta = \frac{3}{2}\pi - 2\theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ r^n = r^2 \rightarrow r^2(r^{n-2} - 1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La ecuación de r :

$r = 0$ aporta una solución trivial para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

$r = 1$ es un comodín que me deja usar cualquier n para jugar con la ecuación de θ .

$n = 2$ es un valor que daría una solución para cada $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. No sirve porque necesito solo 6 soluciones.

La ecuación de θ :

$$\xrightarrow[n \text{ libre}]{r=1} (n+2)\theta = \left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi \xrightarrow[\forall n \in \mathbb{N}]{\frac{n+2 \neq 0}{\forall n \in \mathbb{N}}} \theta = \frac{1}{n+2} \left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi \xrightarrow[5 \text{ porciones de } 2k\pi]{\frac{n=3 \text{ Cómo justificar esto elegantemente?}}{n=3}} \theta = \frac{3+4k}{10}\pi$$

Las 6 soluciones para $n = 3$:

$$z^n + i\bar{z}^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ z = 0, \text{ cuando } r = 0 \\ \text{o} \\ z_k = e^{\theta_k i} \text{ con } \theta_k = \frac{3+4k}{10}\pi, k \in [0, 4] \end{cases}$$

11.

- a) Calcular $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.
- b) Calcular $w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.
- c) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.
- d) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \bar{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$

Voy a estar usando las siguientes propiedades en G_n :

$$\text{Si } w \in G_n \Rightarrow \begin{cases} w^n = 1 \Rightarrow w^k = w^{r_n(k)} \\ \bar{w}^k = w^{r_n(-k)} \\ \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n, \text{ lo uso para saber con cuales raíces hay que tener cuidado} \\ \text{Si } w \in G_p \text{ con } p \text{ primo} \end{cases}$$

- a) Calcular $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

Raíces de G_7 de interés: 7 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.

Si $w = 1$:

$$w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) = 6$$

Si $w \neq 1$:

$$\begin{aligned} w + \underbrace{\bar{w}}_{w^6} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2) &= w + w^6 + w^2 + 2w^3 + w^4 - \underbrace{(w^7)^5}_{=1} w^3(1 - w^2) = \\ &= -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6}_{=0} = -1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

- b) Calcular $w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

Raíces de G_3 de interés: 3 es primo e impar $\Rightarrow w = 1$ se hace a parte.

Si $w = 1$:

$$w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8 = 10$$

Si $w \neq 1$:

$$\underbrace{w^{73}}_w + \underbrace{\bar{w} \cdot w^9}_{w^2 \cdot 1} + 8 = -1 + \underbrace{1 + w + w^2}_{=0} + 8 = 7$$

- c) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

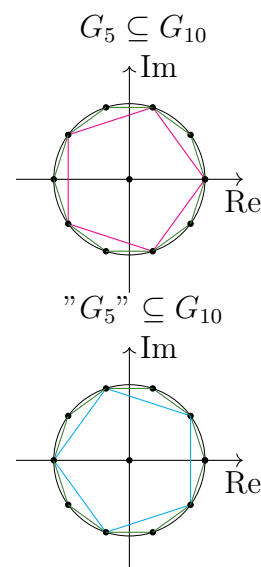
Raíces de G_{10} de interés: $2 \mid 10$ y $5 \mid 10$. 10 es par $\Rightarrow w = \pm 1$ y raíces de G_2 y de G_5 se hacen a parte.

– Si $w = \pm 1$:

$$1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} = 5 \quad \checkmark$$

– Si $w \in G_{10}$ y $w \neq \pm 1$:

$$\begin{aligned} 1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4} &= 1 + w^2 + w^8 + w^4 + w^6 = \\ &= \sum_{k=0}^4 (w^2)^k = \frac{(w^2)^5 - 1}{w^2 - 1} = \frac{\overbrace{w^{10}}^=1 - 1}{w^2 - 1} = 0 \end{aligned}$$



d) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w}^{-3}$ para cada $w \in G_5$

Si $w = 1$:

$$w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w}^{-3} = 4$$

Si $w \neq 1$:

$$w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w}^{-3} = w^4 + w^2 + w + w^3 = \textcolor{red}{-1} + \underbrace{\textcolor{red}{1} + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = -1$$

12.

i) Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$

ii) Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\text{Re} \left(\sum_{k=0}^{60} w^k \right)$.

i) Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$

$$\text{Sé que si } w \in G_{36} \Rightarrow \begin{cases} w^{36} = 1 \\ \sum_{k=0}^{35} w^k = 0 \end{cases}$$

Como $w^4 \neq 1$ sé que $w \neq \pm 1$. Si no tendría que considerar casos particulares para la suma.

$$\begin{aligned} \text{Si } \sum_{k=7}^{60} w^{4k} &= \underbrace{\sum_{k=7}^{60} w^{4k} + \sum_{k=0}^6 w^{4k} - \sum_{k=0}^6 w^{4k}}_{\sum_{k=0}^{60} w^{4k}} = \sum_{k=0}^{60} w^{4k} - \sum_{k=0}^6 w^{4k} = \frac{(w^4)^{61} - 1}{w^4 - 1} - \frac{(w^4)^7 - 1}{w^4 - 1} = \frac{(w^4)^{61} - (w^4)^7}{w^4 - 1} \\ &\xrightarrow[w^3 \cdot 6 = 1]{61 = 9 \cdot 6 + 7} \frac{\overbrace{(w^{36})}^=1)^6 \cdot (w^4)^7 - (w^4)^7}{w^4 - 1} \rightarrow \boxed{\sum_{k=7}^{60} w^{4k} = 0} \end{aligned}$$

ii) Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\text{Re} \left(\sum_{k=0}^{60} w^k \right)$.

$$\text{Sé que si } w \in G_{11} \Rightarrow \begin{cases} w^{11} = 1 \\ \sum_{k=0}^{10} w^k = 0 \\ 11 \text{ es impar} \Rightarrow -1 \notin G_{11} \end{cases}$$

Como $w \neq 1$ no calculo caso particular para la suma. Me piden la parte real $\xrightarrow{\text{uso}} \text{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$.

Probé hacer la suma de Gauss como en el anterior, pero no llegué a nada, abro sumatoria y uso que $61 = 5 \cdot 11 + 6$, porque hay 61 sumandos.

$$\sum_{k=0}^{60} w^k = w^0 + \dots + w^{60} = 5 \cdot \overbrace{(w^0 + w^1 + \dots + w^9 + w^{10})}^{=0} + w^{55} + w^{56} + w^{57} + w^{58} + w^{59} + w^{60} =$$

agrupé usando: $w \in G^{11} \Rightarrow w^k = w^{r_{11}(k)}$

$$= w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 \star^1$$

También voy a usar que si $w \in G_{11} \Rightarrow \bar{w}^k = w^{r_{11}(-k)}$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\sum_{k=0}^{60} w^k \right) &= \frac{\sum_{k=0}^{60} w^k + \sum_{k=0}^{60} \bar{w}^k}{2} \stackrel{\star^1}{=} \frac{w^0 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \bar{w}^0 + \bar{w}^1 + \bar{w}^2 + \bar{w}^3 + \bar{w}^4 + \bar{w}^5}{2} = \\ &= \frac{w^0}{2} + \frac{\overbrace{w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^0 + w^{10} + w^9 + w^8 + w^7 + w^6}^{\sum_{k=0}^{10} w^k}}{2} = \frac{w^0}{2} + \frac{\overbrace{\sum_{k=0}^{10} w^k}^{=0}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ raíz cúbica de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por:

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$. Concluir que $z_n \in G_6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hay que probar por inducción. Quiero probar:

$$p(n) : z_n = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ impar} \\ e^{-\frac{2\pi}{6}i} & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Caso base:

$$\begin{cases} p(1) : z_1 = 1 + e^{\frac{2\pi}{3}i} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ p(2) : z_2 = \overline{1 + z_1^2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = 1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$

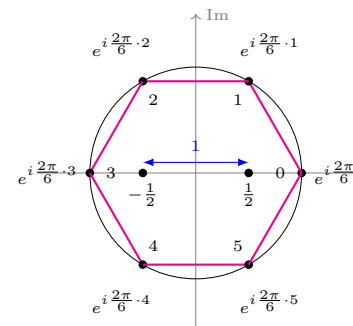
Paso inductivo:

$$\begin{cases} p(2k) : z_{2k} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero} \Rightarrow p(2k+2) \text{ ¿Verdadero?} \\ p(2k+1) : z_{2k+1} = e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ Verdadero} \Rightarrow p(2k+3) \text{ ¿Verdadero?} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{2k+2} = \overline{1 + z_{2k+1}^2} \xrightarrow{\text{HI}} z_{2k+2} = \overline{1 + e^{\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{1 + e^{\frac{\pi}{3}i}} = e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \\ z_{2k+3} = \overline{1 + z_{2k+2}^2} \xrightarrow{\text{HI}} z_{2k+3} = \overline{1 + e^{-\frac{2\pi}{3}i}} = \overline{1 + e^{-\frac{\pi}{3}i}} = e^{\frac{\pi}{3}i} \quad \checkmark \end{cases}$$

Dado que $p(1), p(2), p(2k), p(2k+1), p(2k+2), p(2k+3)$ resultaron ser verdaderas, entonces por el principio de inducción se concluye que $p(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado que la sucesión z_n tiene solo 2 imágenes, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y teniendo en cuenta que $e^{-i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 5} \in G_6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$



14. Se define en $\mathbb{C} - \{0\}$ la relación \mathcal{R} dada por $z \mathcal{R} w \iff z\bar{w} \in \mathbb{R}_{>0}$.

i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

ii) Dibujar en el plano complejo la clase de equivalencia de $z = 1 + i$.

i) Dado un $z = re^{i\theta}$, tengo que $z \in \mathbb{R}_{>0} \iff \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 \iff r > 0 \wedge \theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

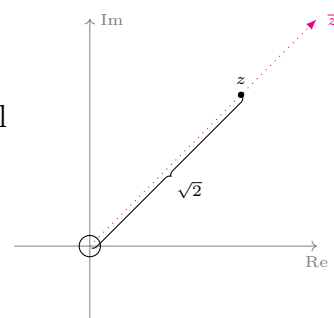
– Reflexividad: $z = re^{i\theta}$, $z \mathcal{R} z = r^2 e^{2\theta i}$ por lo tanto $z \mathcal{R} z \iff 2\theta = 2k\pi \iff \theta = k\pi \quad \checkmark$

– Simetría: $\begin{cases} z \mathcal{R} w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \quad \checkmark \\ w \mathcal{R} z = rse^{(\varphi-\theta)i} \iff \theta = -2k_2\pi + \varphi = 2k_3\pi + \varphi \quad \checkmark \end{cases}$

– Transitividad: $\begin{cases} z \mathcal{R} w = rse^{(\theta-\varphi)i} \iff \theta = 2k_1\pi + \varphi \\ w \mathcal{R} v = rte^{(\varphi-\alpha)i} \iff \varphi = 2k_2\pi + \alpha \\ \Rightarrow z \mathcal{R} v \iff \theta = 2k_1\pi + \underbrace{\varphi}_{2k_2\pi + \alpha} = 2\pi(k_1 + k_2) + \alpha = 2k_3\pi + \alpha \quad \checkmark \end{cases}$

La relación \mathcal{R} es de equivalencia.

Tengo que el $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. La clase \bar{z} estará formada por los $w \in \mathbb{C}$ tal
ii) que: $w \mathcal{R} z \iff \arg(w) = \frac{1}{4}\pi$



15. Se define la siguiente relación \mathcal{R} en G_{20} :

$$z \mathcal{R} w \iff zw^9 \in G_2.$$

i) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

ii) Calcular la cantidad de elementos que hay en cada clase de equivalencia.

i) Reflexividad:

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \Rightarrow z \mathcal{R} z \iff e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \cdot e^{i\frac{9}{10}\pi k_z} = e^{ik_z\pi} = \begin{cases} 1 & k_z \text{ par} \\ -1 & k_z \text{ impar} \end{cases} \quad \checkmark$$

Simetría:

$$z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \text{ y } w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \in G_{20}.$$

\mathcal{R} es simétrica si: $z \mathcal{R} w \iff w \mathcal{R} z$

$$\begin{cases} zw^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_w)} \in G_2 \iff \frac{1}{10}(k_z+9k_w) = k \iff k_z+9k_w = 10k \iff k_z \equiv -9k_w \pmod{10} \iff k_z \equiv k_w \pmod{10} \\ \rightarrow [z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w \pmod{10}] \\ wz^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9k_z)} = e^{i\frac{\pi}{10}(k_w+9(10k+k_z))} = e^{i\frac{\pi}{10}(90k+10k_w)} = e^{i(9k+k_w)\pi} = e^{ik'\pi} \end{cases}$$

$$[z \mathcal{R} w \iff w \mathcal{R} z] \quad \forall k, k_w \in \mathbb{Z} \text{ con } k_z \equiv k_w \pmod{10} \quad \checkmark$$

Transitividad:

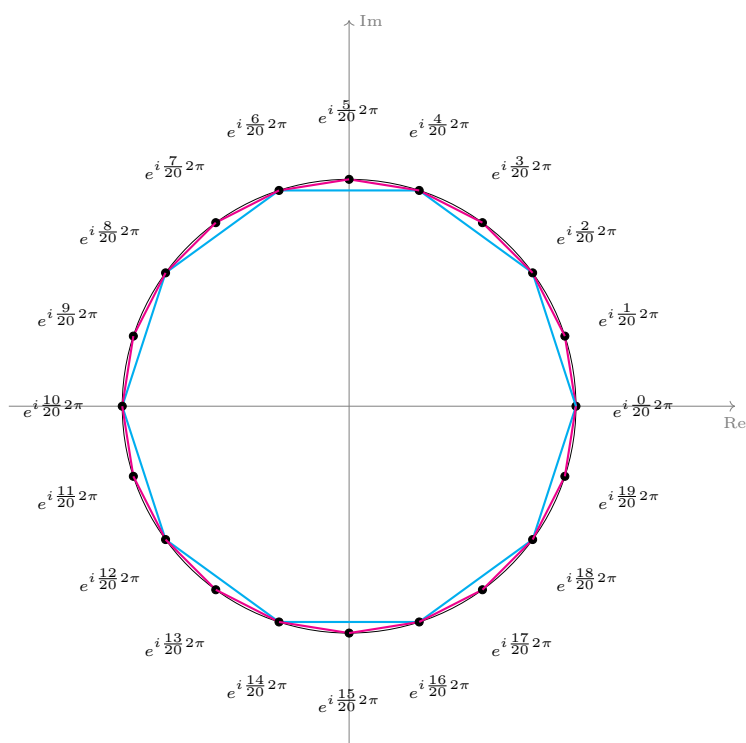
$$\left\{ \begin{array}{l} z = e^{i\frac{1}{10}\pi k_z} \\ w = e^{i\frac{1}{10}\pi k_w} \\ y = e^{i\frac{1}{10}\pi k_y} \end{array} \right\} \in G_{20} \rightarrow \mathcal{R} \text{ es transitiva si: } z \mathcal{R} w \text{ y } w \mathcal{R} y \Rightarrow z \mathcal{R} y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z \mathcal{R} w \iff k_z \equiv k_w (10) \star^1 \\ w \mathcal{R} y \iff k_w \equiv k_y (10) \star^2 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow zy^9 = e^{i\frac{\pi}{10}(k_z+9k_y)} \star^1 = e^{i\frac{\pi}{10}(10k+k_w+9k_y)} \star^1 = e^{i\frac{\pi}{10}(10k+10k'+k_y+9k_y)} = e^{i(k+k'+k_y)\pi} = e^{ik''\pi}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} z \mathcal{R} w \\ w \mathcal{R} z \end{array} \right\} \Rightarrow z \mathcal{R} y}$$

- ii) $\#e^{i\frac{2\pi}{20}k} = 2$ para algún $k \in \mathbb{Z}/r_{20}(k) < 20$. Dada la condición $k_z \equiv k_w (10)$, solo hay 2 números que tienen misma cifra de unidad entre 0 y 20. En el gráfico se ve que si $z \mathcal{R} w \Rightarrow w = -z$



🔥 Ejercicios extras:

🔥1. Para $w \in G_6$, calcular $S = w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023}$

Si $w = 1$:

$$S = 5$$

Si $w = -1$:

$$S = -1 + 1 + 5 - 1 - 4 - 1 = -1$$

Si $w \neq \pm 1$:

$$S = w^{71} + w^{-14} + 5\overline{w}^4 + w^{39} - 4w^{-22} + w^{2023} = w^5 + w^4 + 5w^2 + w^3 - 4w^2 + w^1 = w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 = \underbrace{-1 + 1 + w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5}_{=0} = -1$$

🔥2. Sea $w \in G_{14}$. Hallar todos los posibles valores de $w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j}$

Voy a usar que: $\begin{cases} w \in G_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0 \\ \text{Si } m \mid n \Rightarrow G_m \subseteq G_n \end{cases}$

Si $w = 1$:

$$\underbrace{w^7}_{=1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{w^{2j}}_{=1} = 1 + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{=134} = 1 + 134 = 135 \quad \checkmark$$

Si $w = -1$:

$$\underbrace{w^7}_{=-1} + \sum_{j=7}^{140} \underbrace{(w^j)^2}_{=1} = -1 + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{=134} = -1 + 134 = 133 \quad \checkmark$$

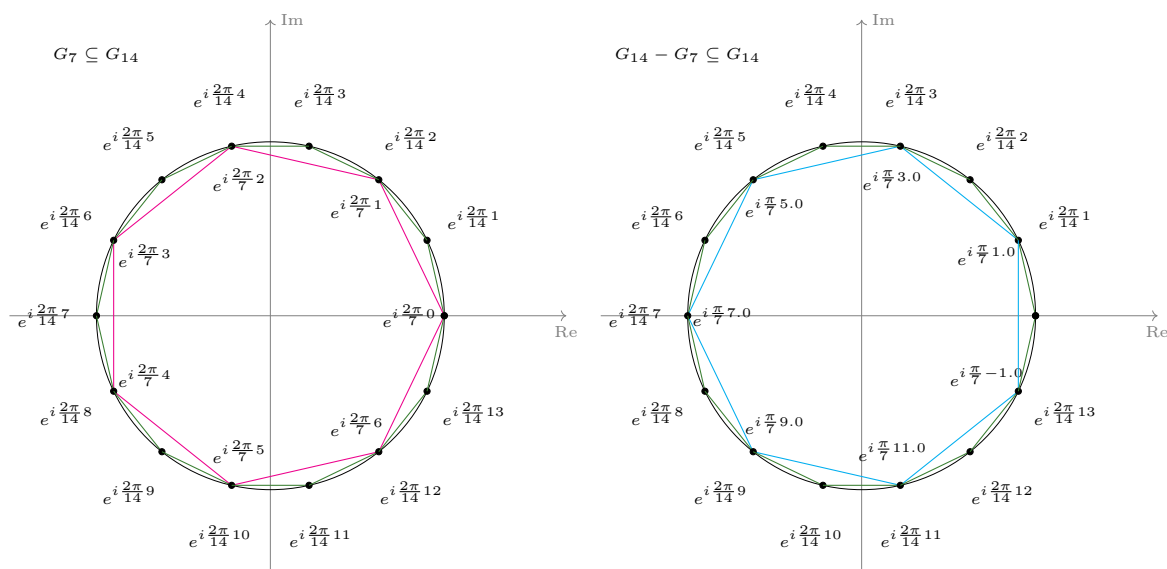
Si $w \neq \pm 1$:

$$w \in G_{14} \Rightarrow w = e^{i\frac{2k\pi}{14}} \text{ con } k \in \mathbb{Z}_{[0,13]} \Rightarrow w^2 = \left(e^{i\frac{2k\pi}{14}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{7} \cdot k} \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^6 (w^2)^j = 0$$

$$w^7 + \sum_{j=7}^{140} w^{2j} = w^7 + \sum_{j=0}^{140} (w^2)^j - \sum_{j=0}^6 (w^2)^j = w^7 + \underbrace{\frac{(w^2)^{141} - 1}{w^2 - 1}}_{=0} - 0 = \underbrace{w^7 + \frac{w^2((w^2)^{20} - 1)}{w^2 - 1}}_{=1} = w^7 + 1$$

$$\text{Si } \begin{cases} w \in G_7 \Rightarrow w^7 = 1 \\ w \in G_{14} - G_7 \Rightarrow w^7 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w \in G_7 \rightarrow 1 + 1 = 2 \quad \checkmark \\ w \in G_{14} - G_7 \rightarrow -1 + 1 = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$



3. Sea $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- $8 \mid 3n + |z^3|$
- $\arg(z^{7n+6}) = \arg(i)$

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ \theta_z = \frac{11}{6}\pi \end{cases} \rightarrow z = |z|e^{i\theta_z} = e^{i\frac{11}{6}\pi} \Rightarrow z^3 = e^{i\frac{11}{2}\pi} = -1 \Leftrightarrow |z^3| = 1$$

Primera condición:

$$8 \mid 3n + |z^3| = 3n + 1 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 3n + 1 = 8k \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 3n + 1 \equiv 0 \pmod{8} \Leftrightarrow 3n \equiv 7 \pmod{8} \stackrel{\times 3}{\Leftrightarrow} 9n \equiv 21 \pmod{8} \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod{8} \quad \checkmark$$

Segunda condición:

$$\begin{aligned} \arg(z^{7n+6}) = \arg(i) &\Leftrightarrow \left(e^{i\frac{11}{6}\pi}\right)^{7n+6} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{i\frac{77}{6}\pi + 11\pi} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{77}{6}n\pi + 11\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \xrightarrow[n]{\text{despejo}} \frac{77}{6}n + 11 &= \frac{1}{2} + 2k \Leftrightarrow 77n = -63 + 12k \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 77n \equiv -63 \pmod{12} \Leftrightarrow 5n \equiv -3 \pmod{12} \stackrel{\times 5}{\Leftrightarrow} n \equiv 9 \pmod{12} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{junto info} & \xrightarrow[\text{TCHR}]{\text{quiero}} & \begin{cases} n \equiv 1 \pmod{4} \quad \checkmark \\ n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{4} \quad \checkmark \\ n \equiv 1 \pmod{2} \quad \checkmark \end{cases} \xrightarrow[\text{de mayor divisor}]{\text{me quedo con el}} \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \quad \star^1 \\ n \equiv 5 \pmod{8} \quad \star^2 \end{cases} \\ \text{divisores coprimos} & & \end{array}$$

Ahora sí, tengo el sistema con *divisores coprimos*, por TCHR tengo solución.

$$\begin{aligned} \xrightarrow[\star^1]{\text{de}} n &= 3k \star^3 \quad \checkmark \xrightarrow[\text{en } \star^2]{\text{reemplazo}} 3k \equiv 5 \pmod{8} \stackrel{\times 3}{\Leftrightarrow} k \equiv 7 \pmod{8} \Leftrightarrow k = 8j + 7 \quad \checkmark \\ \xrightarrow[k \text{ en } \star^3]{\text{reemplazo}} n &= 3(8j + 7) = 24j + 21 \Leftrightarrow \boxed{n \equiv 21 \pmod{24}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

🔥4. Sea $w = e^{\frac{\pi}{18}i}$. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ que cumplen simultáneamente:

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = 0 \quad \sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = 0.$$

Expresar la solución como una única ecuación de congruencia.

Como $w = e^{\frac{\pi}{18}i} \neq \pm 1$ $\begin{cases} w^3 \neq \pm 1 \\ w^4 \neq \pm 1 \end{cases}$, puedo usar Gauss para las sumas.

$$\sum_{k=0}^{5n+1} w^{3k} = \sum_{k=0}^{5n+1} (w^3)^k = \frac{(w^3)^{5n+2}-1}{w^3-1} = 0 \Leftrightarrow (w^3)^{5n+2} = 1$$

$$(w^3)^{5n+2} = 1 \xleftrightarrow[\text{exponente}]{\text{laburo}} \frac{15n+6}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 5n+2 = 12k \xleftrightarrow{\text{def}} 5n \equiv 10 \pmod{12} \star^1$$

$$\sum_{k=0}^{4n+6} w^{4k} = \sum_{k=0}^{4n+6} (w^4)^k = \frac{(w^4)^{4n+7}-1}{w^4-1} = 0 \Leftrightarrow (w^4)^{4n+7} = 1$$

$$(w^4)^{4n+7} = 1 \xleftrightarrow[\text{exponente}]{\text{laburo}} \frac{16n+28}{18}\pi = 2k\pi \Leftrightarrow 4n+7 = 9k \xleftrightarrow{\text{def}} 4n \equiv 2 \pmod{9} \star^2$$

$$\star^1 \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{12} \\ n \equiv 5 \pmod{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 2 \pmod{4} \\ n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \xrightarrow[\text{me quedo con } n \equiv 5 \pmod{9}]{\text{Sistema compatible}} \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{4} \\ n \equiv 5 \pmod{9} \end{cases} \xrightarrow[\text{solución por TCR}]{9 \perp 4 \text{ hay}} \boxed{n \equiv 14 \pmod{36}} \checkmark$$