Ejercicio 1.

1. Sea $\mathcal{R}$ una relación en $P = \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6\})$, $A\,\mathcal{R}\,B \iff A\triangle B$ no tiene múltiplos de 2 ni de 3.

   i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es antisimétrica?

   - R: ¿$A\,\mathcal{R}\,A,\ \forall A \in P$? Dado que $A\,\mathcal{R}\,A \iff A\triangle A = \varnothing$, se puede asegurar que no va a haber *nada* en ese conjunto en particular múltiplos de 2 o 3.
   - S: ¿$A\,\mathcal{R}\,B \Rightarrow B\,\mathcal{R}\,A\ \forall A, B \in P$? Dado que $A\,\mathcal{R}\,B \iff A\triangle B$, conjunto que no tiene múltiplos de 2 ni de 3 dado que $\overset{\text{tabla}}{=} B\triangle A$ tampoco tiene múltiplos, por lo tanto $B\,\mathcal{R}\,A$
   - T:

Divisibilidad, Congruencia

Ejercicio 2.

Probar que $8^{2n} - 63n - 1$ es divisible por 441 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Acomodar y luego inducción:

$8^{2n} - 63n - 1 = 64^n - 63n - 1 \to \boxed{p(n)\ :\ 441 \,|\, 8^{2n} - 63n - 1 = 64^n - 63n - 1\ \ \forall n \in \mathbb{N}}$

Caso base:

$p(1)\ :\ 441 \,|\, 64^1 - 63 - 1 = 0 \to 441 \,|\, 0 \to \text{Verdadero}\ \ \checkmark$

Hipótesis inductiva:

$p(k)\ :\ 144 \,|\, 64^k - 63 \cdot k - 1 \text{ Verdadero} \Rightarrow p(k+1)\ :\ 144 \,|\, 64^{k+1} - 63 \cdot (k+1) - 1 \text{ Verdadero?}$

Paso inductivo:

$441 \,|\, 64^k - 63 \cdot k - 1 \iff 64^k - 63 \cdot k - 1 \equiv 0\ (441)$

$$
\begin{aligned}
&\xrightarrow[\text{por } 64]{\text{multiplico}} 64 \cdot 64^k - 64 \cdot 63 \cdot k - 64 \equiv 0\ (441) \\
&\xrightarrow{\text{acomodo}} 64^{k+1} - 4032 \cdot k \underbrace{-63 - 1}_{-64} \equiv 0\ (441) \\
&\xrightarrow[r_{441}(4032) = 63]{\text{notar que}} 64^{k+1} - 63 \cdot k - 63 - 1 \equiv 0\ (441) \\
&\xrightarrow[\text{y listo}]{\text{acomodar}} 64^{k+1} - 63 \cdot (k-1) - 1 \equiv 0\ (441) \to \text{ Verdadero}\ \ \checkmark \\
&\xrightarrow[\text{que}]{\text{mismo}} \boxed{441 \,|\, 64^{k+1} - 63 \cdot (k-1) - 1}\ \ \checkmark
\end{aligned}
$$

Como se cumplen $p(1)$, $p(k) \wedge p(k+1)$ por el principio de inducción, $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$