Álgebra I
Práctica 7 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

Notas teóricas:

- *Operaciones:*

  $+:$ Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$
  $\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$

  $\cdot:$ Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$
  $\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j) X^k \in \mathbb{K}[X]$

- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo $\to f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h, \ \forall f, \, g, \, h \in \mathbb{K}[X]$

- *Algoritmo de división*: $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos q y $R \in \mathbb{K}[X]$ tal que $f = q \cdot g + R$ con $\text{gr}(R) < \text{gr}(f)$ o $R = 0$

- α es raíz de $f \iff X - \alpha \mid f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$

- *Máximo común divisor:* Polinomio mónico de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.

  - $(f : g) \mid f$ y $(f : g) \mid g$
  - $f = (f : g) \cdot k_f$ y $g = (f : g) \cdot k_g$ con k_f y k_g en $\mathbb{K}[X]$
  - Dos polinomios son coprimos si $(f : g) = 1 \iff f \neq g$

- *Raíces múltiples:*
  Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se dice que:

  - α es raíz <u>múltiple</u> de $f \Leftrightarrow f = (x - \alpha)^2 q$ para algún $q \in \mathbb{K}[X]$
  - α es raíz <u>simple</u> de $f \Leftrightarrow x - \alpha \mid f$ en $\mathbb{K}[X]$, pero $(X - \alpha)^2 \nmid f$ en $\mathbb{K}[X] \Leftrightarrow f = (X - \alpha) q$ para algún $q \in \mathbb{K}[X]$ tal que $q(\alpha) \neq 0$.
  - Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Se dice que α es raíz de multiplicidad (exactamente) m de f, y se nota $\text{mult}(\alpha; f) = m \iff (X - \alpha)^m \mid f$, pero $(x - \alpha)^{m+1} \nmid f$.
    O equivalentemente, $f = (X - \alpha)^m q$ con $q \in \mathbb{K}[X]$, pero $q(\alpha) \neq 0$
  - Sea $f \in \mathbb{K}[X]$ no nulo $\text{mult}(\alpha; f) \leq \text{gr}(f)$:
  - Sean $f, \, g \in \mathbb{K}[X]$ no ambos nulos, y $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow f(\alpha) = f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (f : g)(\alpha) = 0$

- Vale que α es raíz múltiple de $f \iff f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) = 0 \iff \alpha$ es raíz de $(f : f')$, $X - \alpha \mid (f : f')$

  - $\text{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0$ y $\text{mult}(\alpha; f') = m - 1$
  - $\text{mult}(\alpha; f) = m \iff \left\{ \begin{array}{ll} \text{mult}(\alpha; f) \geq m & \left. \begin{array}{c} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \end{array} \right\} \\ \text{mult}(\alpha; f) = m & \} \ f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{array} \right.$

  Cantidad de raíces:

  -

Ejercicios de la guía:

---

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$,

ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$,

iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$,

---

i) *coeficiente principal:* 4^{77}
grado: $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:* $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$
grado: 28

iii) *coeficiente principal:* $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)}_{f}{}^4 + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_{g}$

Cuando sumo me queda: $\text{cp}(f^4) - \text{cp}(g) = (-3)^4 - 81 = 0 \Rightarrow gr(f^4 + g) < 20$
$\to$ Calculo el $\text{cp}(f^4 + g)$ con $\text{gr}(f^4 + g) = 19$.
Laburo a f:

$$\left\{\begin{array}{l}
\xrightarrow[\text{fórmula de } f\cdot g]{\text{para usar}} (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = ({\color{cyan}-3}X^5 + {\color{magenta}1}X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \\
f^2 \cdot f^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } \star^2 \\
\displaystyle\sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \xrightarrow[\text{el término con } k=19]{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \overset{\star^1}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \overset{\star^2}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} \\
\left\{\begin{array}{l}
\xrightarrow[\text{ojímetro}]{b_{10} \text{ sale a}} b_{10} = ({\color{cyan}-3})^2 = 9 \\
\xrightarrow[\text{a usar } \sum f\cdot g \text{ en } k=9]{a_9 \text{ no tan fácil, volver}} f \cdot f = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow{k=9} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \overset{\star^3}{=} {\color{magenta}c_4} \cdot {\color{cyan}d_5} + {\color{cyan}c_5} \cdot {\color{magenta}d_4} \overset{\star^2}{=} 2 \cdot {\color{magenta}c_4} \cdot {\color{cyan}d_5}
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\xrightarrow[\text{ojímetro}]{{\color{cyan}d_5} \text{ sale a}} {\color{cyan}d_5} = {\color{cyan}-3} \\
\xrightarrow[\text{ojímetro}]{{\color{magenta}c_4} \text{ sale a}} {\color{magenta}c_4} = 1
\end{array}\right\} \to a_9 = -6
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{cp}(f^4) = 2 \cdot (-6) \cdot (9) = -108 \\ \text{cp}(g) = 19 \end{array}\right\} \to \boxed{\text{cp}(f^4 + g) = -89} \quad \checkmark$$

$\star^1$: Sabemos que el $\text{gr}(f^4) = 20 \Rightarrow \text{gr}(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \leq 10$ solo puede ocurrir *cuando los exponentes* $\left\{\begin{array}{c} i = 10,\ j = 9 \\ \vee \\ i = 9,\ j = 10 \end{array}\right\}$

$\star^{2}$: porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

$\star^{3}$: Idem $\star^{1}$ para el polinomio f

grado: 19

---

2. Hacer!

---

3. Hacer!

---

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$ y $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$ y $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iii) $f = X^n - 1$ y $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

---

i)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5X^4 & +2X^3 & & -X & +4 & X^2+2 \\ \cline{6-6}
-5X^4 & & -10X^2 & & & 5X^2+2X-10 \\ \cline{1-3}
 & 2X^3 & -10X^2 & -X & & \\
 & -2X^3 & & -4X & & \\ \cline{2-4}
 & & -10X^2 & -5X & +4 & \\
 & & 10X^2 & & +20 & \\ \cline{3-5}
 & & & -5X & +24 &
\end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

ii)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4X^4 & +X^3 & & & -4 & 2X^2+1 \\ \cline{6-6}
-4X^4 & & -2X^2 & & & 2X^2+\frac{1}{2}X-1 \\ \cline{1-3}
 & X^3 & -2X^2 & & & \\
 & -X^3 & & -\frac{1}{2}X & & \\ \cline{2-4}
 & & -2X^2 & -\frac{1}{2}X & -4 & \\
 & & 2X^2 & & +1 & \\ \cline{3-5}
 & & & -\frac{1}{2}X & -3 &
\end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$
En $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ \to 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2+1)\cdot \underbrace{(2X^2+4X+6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X+4)}_{r[X]}$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división asoma la idea de que:
$X^n - 1 = (X-1)\cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} X^j}_{q[X]} + \underbrace{0}_{r[X]},$ (que es la geométrica con $X \neq 1$)

Inducción: Quiero probar que $p(n) : X^n - 1 = (X-1)\cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1) : X^1 - 1 = (X-1) \underbrace{\sum_{j=0}^{1-1} X^j}_{X^0=1} \Rightarrow p(1)$ es Verdadero ✓

Paso inductivo:
$\underbrace{p(k) : X^k - 1 = (X-1)\cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI}$ es Verdadera $\overset{?}{\Rightarrow} p(k+1) : X^{k+1} - 1 = (X-1)\cdot \sum_{j=0}^{k} X^j$ es Verdadera

$(X-1)\cdot \sum_{j=0}^{k} X^j = (X-1)\cdot (\sum_{j=0}^{k-1} X^j + X^k) = \underbrace{(X-1)\cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI} + (X-1)\cdot X^k = X^k - 1 + X^{k+1} - X^k =$

$X^{k+1} - 1$ ✓

Dado que $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera $p(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

---

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$,

ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$,

iii) El resto de la división de $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

---

i) Haciendo la division de $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = (X - a + 2)(X^2 + aX + 1) + \underbrace{(a^2 - 2a + 1)X + a - 1}_{\text{resto}}$$

Así, para que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$ tiene que ocurrir que el resto sea 0. O sea,

$$\begin{aligned} X^2+aX+1 \,|\, X^3+2X^2+2X+1 &\iff (a^2-2a+1)X+a-1=0 \\ &\iff \begin{cases} a^2-2a+1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a-1=0 \iff a=1$
- $a^2-2a+1=0 \xrightarrow{\text{a = 1}} 1^2-2.1+1=1-2+1=0 \quad \checkmark$

Luego, el valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que X^3+2X^2+2X+1 es divisible por X^2+aX+1 es $\boxed{\text{a = 1}}$.

ii) Hacer!

iii) Haciendo la division de $X^5-3X^3-X^2-2X+1$ por X^2+aX+1, se tiene que:

$$X^5-3X^3-X^2-2X+1 = q(X^2+aX+1)+\underbrace{r}_{\text{resto}}$$

con $q=(X^3-aX^2+(a^2-4)X-a^3+5a-1)$ y $r=(a^4-6a^2+a+2)X+a^3-5a+2$.
Así,

$$\begin{aligned} & r=-8X+4 \\ \iff & (a^4-6a^2+a+2)X+a^3-5a+2=-8X+4 \\ \iff & \begin{cases} a^4-6a^2+a+2=-8 \\ a^3-5a+2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} a^4-6a^2+a+10=0 \\ a^3-5a-2=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a^3-5a-2=0 \Leftrightarrow a(a^2-5)-2=0$
  Veo que $a=-2$ es solución, por lo que divido a^3-5a-2 por $a+2$ con Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -5 & -2 \\ -2 & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

  Por lo que $a^3-5a-2=(a+2)(a^2-2a-1)$

  Busco las raíces de a^2-2a-1 con la fórmula resolvente:

$$\begin{aligned} a_{+,-} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)}}{2} \\ &= \frac{2\pm\sqrt{8}}{2} \\ &= 1\pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

  Por lo que $a^3-5a-2=(a+2)(a-1+\sqrt{2})(a-1-\sqrt{2})=0 \iff \begin{cases} a=-2 \\ a=1+\sqrt{2} \\ a=1-\sqrt{2} \end{cases}$

- $a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0$
  Me fijo que valores de a obtenidos antes verifican:
  - Si $a = -2 \Rightarrow (-2)^4 - 6(-2)^2 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0$ ✓
  - Si $a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow (1+\sqrt{2})^4 - 6(1+\sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 10 = 10 + \sqrt{2} \neq 0$
  - Si $a = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow (1-\sqrt{2})^4 - 6(1-\sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2} + 10 = 10 - \sqrt{2} \neq 0$

Luego, el único valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que el resto de dividir a $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$ es $\boxed{\text{a = -2}}$

---

6. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in \mathbb{K}[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in \mathbb{K}[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \,|\, f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g\ (h)$.

i) Probar que $\equiv\ (h)$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{K}[X]$.

ii) Probar que si $f_1 \equiv g_1\ (h)$ y $f_2 \equiv g_2\ (h)$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2\ (h)$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2\ (h)$.

iii) Probar que si $f \equiv g\ (h)$ entonces $f^n \equiv g^n\ (h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iv) Probar que r es el resto de la división de f por h si y solo si $f \equiv r\ (h)$ y $r = 0$ o $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

---

i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*,

- *reflexiva*: Es f congruente a f módulo h?
  $f \equiv f\ (h) \iff h \,|\, f - f = 0 \iff h \,|\, 0$ ✓
- *simétrica*: Si $f \equiv g\ (h) \overset{?}{\iff} g \equiv f\ (h)$
  $f \equiv g\ (h) \iff h \,|\, f - g \iff h \,|\, -(g - f) \iff h \,|\, g - f \iff g \equiv f\ (h)$ ✓
- *transitiva*: Si $\begin{cases} f \equiv g\ (h) \\ g \equiv p\ (h) \end{cases} \overset{?}{\iff} f \equiv p\ (h)$.

  $\begin{cases} h \,|\, f - g \\ h \,|\, g - p \end{cases} \xrightarrow[\to F_2]{F_1 + F_2} \begin{cases} h \,|\, f - g \\ h \,|\, f - p \end{cases} \to f \equiv p\ (h)$ ✓

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en $\mathbb{K}[X]$

ii) Si $\begin{cases} f_1 \equiv g_1\ (h) \\ f_2 \equiv g_2\ (h) \end{cases}$ $\star^1$

$f_1 \equiv g_1\ (h) \iff h \,|\, f_1 - g_1 \Rightarrow h \,|\, f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2\ (h) \overset{\star^1}{\iff} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2\ (h)$

iii) *Inducción:* Quiero probar $p(n)$: Si $f \equiv g\ (h)$ entonces $f^n \equiv g^n\ (h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Caso base: $p(1) : f^1 \equiv g^1\ (h)$ $\star^2$ Verdadera ✓

Paso inductivo: $p(k): \underbrace{f^k \equiv g^k \ (h)}_{HI}$ es verdadera $\overset{?}{\Rightarrow} p(k+1): f^{k+1} \equiv g^{k+1} \ (h)$ ¿También lo es?

$$f^k \equiv g^k \ (h) \iff h \mid f^k - g^k \Rightarrow h \mid f \cdot (f^k - g^k) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^k \ (h) \overset{\star^2}{\iff} f^{k+1} \equiv g^{k+1} \ (h) \quad \checkmark$$

Finalmente $p(1), p(k), p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) Hacer!

---

7. Hallar el resto de la división de f por g para:

i) $f = X^{353} - X - 1$ y $g = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$ y $g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, y $g = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$, y $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ (Sugerencia ver **4.** iii))).

---

i) $g \mid g \iff X^{31} - 2 \equiv 0 \ (X^{31} - 2) \iff X^{31} \equiv 2 \ (g)$

$$f = X^{353} - X - 1 = (\underbrace{X^{31}}_{\overset{(g)}{\equiv} 2})^{11} X^{12} - X - 1 \overset{(g)}{\equiv} 2^{11} X^{12} - X - 1 \to \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} - 1}$$

ii) $g \mid g \iff X^6 + 1 \equiv 0 \ (X^6 + 1) \iff X^6 \equiv -1 \ (g)$

$$f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1 = (X^6)^{166} X^4 + (X^6)^6 X^4 + (X^6)^3 X^2 + 1 \overset{(g)}{\equiv} X^4 + X^4 - X^2 + 1 = 2X^4 - X^2 + 1$$

$\to \boxed{r_g(f) = 2X^4 - X^2 + 1}$

¿Qué onda en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$? $\to \begin{cases} \text{si } p = 2 \to \boxed{X^2 + 1} \\ \text{si } p > 2 \to \boxed{2X^4 + (p-1)X^2 + 1} \end{cases}$

iii) $g \mid g \iff X^{100} - X + 1 \equiv 0 \ (X^{100} - X + 1) \iff X^{100} \equiv X - 1 \ (g)$

$$f = X^{200} - 3X^{101} + 2 = (X^{100})^2 - 3X^{100} X + 2 \overset{(g)}{\equiv} (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2$$

$\to \boxed{r_g(f) = (X-1)^2 - 3(X-1)X + 2}$

iv) *Usando la sugerencia*: Del ejercicio **4.** iii) sale que $X^n - 1 = (X-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} X^k$

$$\xrightarrow[\text{para el } g]{n=5} X^5 - 1 = (X-1) \underbrace{(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}_{g} \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)} \ (g) \quad \checkmark$$

$$f = (X^5)^{603} X + 2(X^5)^{366} X^3 - (X^5)^{34} X^4 + (X^5)^{27} X^2 + 2X^4 - X^3 + 1$$

$$f \equiv \underbrace{X + 2X^3 - X^4 + X^2 + 2X^4 - X^3 + 1}_{= X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = g} \ (g) \iff \boxed{f \equiv 0 \ (g)}$$

---

8. Hacer!

---

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$, $g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$,

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X^3 + X$,

iii) $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1$, $g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1$,

---

i)
$$\begin{array}{l|l} X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 & X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ \hline -X^5 + X^4 + X^3 - X & X + 1 \\ \hline X^4 + 2X^3 - 6X^2 + X + 2 & \\ -X^4 + X^3 + X^2 - 1 & \\ \hline 3X^3 - 5X^2 + X + 1 & \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Euclides}} (f:g) = (g : 3X^3 - 55X^2 + X + 1)$$

$$\xrightarrow[\text{en función de } g]{\text{escribo a } f} f = (X+1)\cdot g + 3X^3 - 55X^2 + X + 1$$

$$\begin{array}{l|l} X^4 - X^3 - X^2 + 1 & 3X^3 - 5X^2 + X + 1 \\ \hline -X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X & \frac{1}{3}X + \frac{2}{9} \\ \hline \frac{2}{3}X^3 - \frac{4}{3}X^2 - \frac{1}{3}X + 1 & \\ -\frac{2}{3}X^3 + \frac{10}{9}X^2 - \frac{2}{9}X - \frac{2}{9} & \\ \hline -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 3X^3 - 5X^2 + X + 1 & -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} \\ \hline -3X^3 - \frac{15}{2}X^2 + \frac{21}{2}X & -\frac{27}{2}X + \frac{225}{4} \\ \hline -\frac{25}{2}X^2 + \frac{23}{2}X + 1 & \\ \frac{25}{2}X^2 + \frac{125}{4}X - \frac{175}{4} & \\ \hline \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} -\frac{2}{9}X^2 - \frac{5}{9}X + \frac{7}{9} & \frac{171}{4}X - \frac{171}{4} \\ \hline \frac{2}{9}X^2 - \frac{2}{9}X & -\frac{8}{1539}X - \frac{28}{1539} \\ \hline -\frac{7}{9}X + \frac{7}{9} & \\ \frac{7}{9}X - \frac{7}{9} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2 &= \big(X^4 - X^3 - X^2 + 1\big) \cdot \big(X+1\big) + \big(3X^3 - 5X^2 + X + 1\big) \\ X^4 - X^3 - X^2 + 1 &= \big(3X^3 - 5X^2 + X + 1\big) \cdot \big(\tfrac{1}{3}X + \tfrac{2}{9}\big) + \big(-\tfrac{2}{9}X^2 - \tfrac{5}{9}X + \tfrac{7}{9}\big) \\ 3X^3 - 5X^2 + X + 1 &= \big(-\tfrac{2}{9}X^2 - \tfrac{5}{9}X + \tfrac{7}{9}\big) \cdot \big(-\tfrac{27}{2}X + \tfrac{225}{4}\big) + \big(\tfrac{171}{4}X - \tfrac{171}{4}\big) \\ -\tfrac{2}{9}X^2 - \tfrac{5}{9}X + \tfrac{7}{9} &= \big(\tfrac{171}{4}X - \tfrac{171}{4}\big) \cdot \big(-\tfrac{8}{1539}X - \tfrac{28}{1539}\big) + 0 \end{aligned}$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\boxed{\to (f:g) = X-1}$

ii) $X^6+X^4+X^2+1 = \big(X^3+X\big)\cdot X^3 + \big(X^2+1\big)$

$X^3+X = \big(X^2+1\big) \cdot X + 0$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\to \boxed{(f:g) = X^2+1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \to \boxed{X^2+1 = f\cdot 1 + g\cdot(-X^3)}$

iii) $\xrightarrow[\text{Euclides}]{\text{Haciendo}}$

$$2X^6-4X^5+X^4+4X^3-6X^2+4X+1 = \big(X^5-2X^4+2X^2-3X+1\big)\cdot 2X + \big(X^4+2X+1\big)$$

$$X^5-2X^4+2X^2-3X+1 = \big(X^4+2X+1\big) \cdot \big(X-2\big) + 3$$

$$X^4+2X+1 = 3 \cdot \big(\tfrac{1}{3}X^4+\tfrac{2}{3}X+\tfrac{1}{3}\big) + 0$$

El MCD será el último resto no nulo y *mónico* $\to \boxed{(f:g) = 1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y $g \to \boxed{1 = \frac{1}{3}g\cdot(2X^2-4X+1) - \frac{1}{3}f\cdot(X-2)}$

---

10. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2, f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por X^3-2X^2-X+2.

Sea $P \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow$ el resto de dividir a P por $X-a$ es $P(a)$.

$f(X) = q(X)\cdot \underbrace{X^3-2X^2-X+2}_{g(X)} + r(X)$, con $g(X) = (X-2)\cdot(X-1)\cdot(X+1)$ y $r(X) = a^2+bX+c$, ya que el $\text{gr}(r) < \text{gr}(g) \xrightarrow{\text{evaluar}} \begin{cases} f(1) = -2 = q(1)\cdot \cancelto{0}{g(1)} + r(1) = -2 \\ f(2) = 1 = q(2)\cdot \cancelto{0}{g(2)} + r(2) = 1 \\ f(-1) = 0 = q(-1)\cdot \cancelto{0}{g(-1)} + r(-1) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} r(1) = a+b+c = -2 \\ r(2) = 4a+2b+c = 1 \\ r(-1) = a-b+c = 0 \end{cases} \to$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} \end{array}\right) \to \boxed{r(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{7}{3}}$$

---

11. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n}+3X^{n+1}+3X^n-5X^2+2X+1$ por X^3-X en $\mathbb{Q}[X]$.

$$\begin{cases} f(X) = X^{2n}+3X^{n+1}+3X^n-5X^2+2X+1 \\ g(X) = X\cdot(X-1)\cdot(X+1) \end{cases} \Rightarrow f = q(X)\cdot g(X) + r(X) \text{ con } \text{gr}(\underbrace{aX^2+bX+c}_{r(X)}) \leq 2$$

$$\begin{cases} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_{=0} + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_{=0} + r(1) = 3 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_{=0} + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 = \begin{cases} 2 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{ecuaciones de } r(X)]{\text{sistema de}} \begin{cases} r(0) = c = 1 \\ r(1) = a + b + 1 = 3 \to a + b = 2 \\ r(-1) = a - b + 1 = \begin{cases} 2 \to a - b = 1 & n \text{ impar} \\ 1 \to a - b = 0 & n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow[\text{impar}]{n} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \boxed{r_{impar}(X) = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1} \quad \checkmark \\ \xrightarrow[\text{par}]{n} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \boxed{r_{par}(X) = X^2 + X + 1} \quad \checkmark \end{cases}$$

---

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $f(X) = X^6 + X^3 - 2$.

Primera raíz: $f(\alpha_1 = 1) = 0 \to f(X) = q(X) \cdot (X - 1)$. Busco $q(X)$ con algoritmo de división.

$$\begin{array}{l|l} X^6 \qquad\qquad + X^3 \qquad\qquad - 2 & X - 1 \\ \hline -X^6 + X^5 & X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2 \\ \quad X^5 & \\ \quad -X^5 + X^4 & \\ \qquad X^4 + X^3 & \\ \qquad -X^4 + X^3 & \\ \qquad\quad 2X^3 & \\ \qquad\quad -2X^3 + 2X^2 & \\ \qquad\qquad 2X^2 & \\ \qquad\qquad -2X^2 + 2X & \\ \qquad\qquad\quad 2X - 2 & \\ \qquad\qquad\quad -2X + 2 & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

El cociente $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ se puede factorizar en grupos como $q(X) = (X^2 + X + 1) \cdot (X^3 + 2)$. Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener $f \in \mathbb{C}[X]$ salen de esos dos polinomios.

$$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X^3 + 2 = 0 \xrightarrow[X = re^{i\theta}]{\text{exponencial}} \left\{ \begin{array}{l} r^3 = 2 \to r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \to \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ con } k = 0, 1, 2. \end{array} \right\} \to \begin{cases} \alpha_4 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \alpha_5 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ \alpha_6 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

---

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. Probar que $w + w^2 + w^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$

Voy a usar que si $w \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^{6} w^j = 0 \quad (w \neq 1)$

Si $f(X) = X^2 + X + 2$ y $w + w^2 + w^4$ es raíz $\Rightarrow f(w + w^2 + w^4) = 0$

$(w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8}_{=w} + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2 \cdot \sum_{j=0}^{6} w^j = 0 \quad \checkmark$

14.

i) Probar que si $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces $X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})]$.

ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

---

i) Voy a usar que si $w \in G_5 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^{4} w^j = 0 \quad (w \neq 1) \ \star^2 \\ w^k = w^{r_5(k)} \ \star^1 \end{cases}$

$X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})] =$
$X^2 - (w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + \underbrace{(w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\star^1} =$

$= X^2 - X(\underbrace{w^2 + w^{-2} + w + w^{-1}}_{\star^1}) + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2} =$

$= X^2 - X(\underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\star^2}) + -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = X^2 - X(-1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0}) - 1 =$

$= X^2 + X - 1 \quad \checkmark$

ii) Calculando las raíces a mano de $X^2 + X - 1 \to \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{y} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Pero del resultado del inciso i) tengo que :
$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow[\text{la factorización es}]{\text{sé que una raíz dada}} w + w^{-1} = w + \overline{w} = 2\text{Re}(w) = 2 \cdot \underbrace{\cos(\tfrac{2\pi}{5})}_{\cos\theta \geq 0,\, \theta \in [0, 2\pi]} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\to \boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$

15.

i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y g si y sólo sí a es raíz de $(f : g)$.

ii) Hallar todas las raíces complejas de X^4+3X-2 sabiendo que tiene una raíz en común con X^4+3X^3-3X+1.

---

i) Hacer!

ii) Busco el $(f:g)$:

$$X^4+3X-2 = \big(X^4+3X^3-3X+1\big) \cdot 1 + \big(-3X^3+6X-3\big)$$
$$X^4+3X^3-3X+1 = \big(-3X^3+6X-3\big)\cdot\big(-\tfrac{1}{3}X-1\big)+\big(2X^2+2X-2\big)$$
$$-3X^3+6X-3 = \big(2X^2+2X-2\big)\cdot\big(-\tfrac{3}{2}X+\tfrac{3}{2}\big)+0$$
$$(f:g) = X^2+X-1 \xrightarrow{\text{raíces}} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$
$$X^4+3X-2 = \big(X^2+X-1\big)\cdot\big(X^2-X+2\big)+0$$

---

16. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5-2X^3+X, \quad a=1,$

ii) $f = X^6-3X^4+4, \quad a=i,$

iii) $f = (X-2)^2(X^2-4)+(X-2)^3(X-1), \quad a=2,$

iv) $f = (X-2)^2(X^2-4)-4(X-2)^3, \quad a=2.$

---

i) $f = X^5-2X^3+X, \quad a=1,$

Todos casos de factoreo:

$f = X^5-2X^3+X = X(X^4-2X^2+1) = X(X^2-1)^2 = X(X-1)^2(X+1)^2 =$

$\boxed{\text{La multiplicidad de } a=1 \text{ como raíz es 2.}}$

ii) $f = X^6-3X^4+4, \quad a=i,$

Si $a=i$ es raíz, entonces $-i$ también lo es en un polinomio $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{rrrr|l} X^6 & -3X^4 & & +4 & X^2+1 \\ \cline{5-5} -X^6 & -X^4 & & & X^4-4X^2+4 \\ \cline{1-2} & -4X^4 & & & \\ & 4X^4 & +4X^2 & & \\ \cline{2-3} & & 4X^2 & +4 & \\ & & -4X^2 & -4 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

$f = (X^2+1)(X^4-4X^2+4) = (X^2+1)(X^2-2)^2 = (X^2+1)(X-\sqrt{2})^2(X+\sqrt{2})^2 =$
$(X-i)^1(X+i)(X-\sqrt{2})^2(X+\sqrt{2})^2 =$

$\boxed{\text{La multiplicidad de } a=i \text{ como raíz de } f \text{ es 1.}}$

iii) $f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2,$
$f = (X-2)^3((X+2)+(X+1)) = (X-2)^3(2X+3)$
$\boxed{\text{La multiplicidad de } a = 2 \text{ como raíz de } f \text{ es } 3.}$

iv) $f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3, \quad a = 2,$
$f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3 = (X-2)^2(X-2)(X+2) - 4(X-2)^3 =$
$(X-2)^3(X+2-4) = (X-2)^4$
$\boxed{\text{La multiplicidad de } a = 2 \text{ como raíz de } f \text{ es } 4.}$

---

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene solo raíces simples en $\mathbb{C}$.

$f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$

$\xrightarrow{\text{derivo}} f' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} \overset{n>0}{\Longleftrightarrow} f' = n(n+1)X^{n-1}(X-1)$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n > 1 \Rightarrow f'(\alpha = 1) = 0 \text{ y } f'(\alpha = 0) = 0 \\ n = 1 \Rightarrow f'(\alpha = 1) = 0 \; \star^{1} \end{cases}$$

Para que las raíces α, de f no sean simples, es necesario que $f'(\alpha) = 0$. Por lo tanto, estudio solo los valores de raíces encontrados para la derivada. Si f ha de tener raíces dobles, estás deberían ser $\alpha = 1$ o $\alpha = 0$. Entonces:

$$\begin{cases} f(\alpha = 1) = a - 1 \Rightarrow f(1) \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \neq 1 \\ f(\alpha = 0) = a \Rightarrow f(0) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$$

Si $a = 0 \wedge n \overset{\star^1}{=} 1 \Rightarrow f$ tiene solo una raíz simple en 0.
Si $a \neq 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples $\forall n \in \mathbb{N}$.
Si $a \neq 0 \wedge n > 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples.
seguramente hay una mejor forma de expresar la respuesta.

---

18. Controlar y Pasar

---

19. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en $\mathbb{C}$. Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

Si f tiene raíces múltiples $\alpha_k \Leftrightarrow f(\alpha_k) = f'(\alpha_k) = 0$, por lo tanto tanto comienzo buscando las raíces de f' para sacarme ese a de en medio.

$f' = 20X^{19} + 80X^9 = 20X^9(X^{10}+4) \Rightarrow f' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X^{10} = -4 \Leftrightarrow X = \sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi} \; k \in \mathbb{Z}_{[0,9]} \end{cases}$

Hay de momento 11 raíces de f'. Me interesa saber si son raíces de f:
$f(0) = 2a \Rightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$
$f = (X^{10})^2 + 8X^{10} + 2a \Rightarrow f(\alpha = X^{10} = -4) = (-4)^2 + 8(-4) + 2a = -16 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 8$

Entonces:
Si $a = 0 \Rightarrow f = X^{10}(X^{10}+8)$
$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X = 0$ o $X^{10} = -8$, donde $\boxed{\mu(0; f) = 10}$ y $\boxed{\mu(\sqrt[10]{8}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}); f) = 1 \; k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}$.
11 raíces distintas.

Si $a = 8 \Rightarrow f = X^{20} + 8X^{10} + 16 = (X^{10}+4)^2$
$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X^{10} = -4$, donde $\boxed{\mu(\sqrt[10]{4}e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}); f) = 2 \; k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}$.
10 raíces distintas.

---

20. Hacer!

21.

i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.

ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.

---

i) $(X-1)^2 \mid f \; \forall a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow 1$ es *por lo menos* raíz doble de $f \Leftrightarrow f(1) = f'(1) = 0$.

$$\begin{cases} f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1 \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f(1) = 0 \;\; \forall a \in \mathbb{C} \\ f' = 6X^5 - 10X^4 + 4(1+a)X^3 - 6aX^2 + 2(1+a)X - 2 \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f'(1) = 0 \;\; \forall a \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Calculando $f(1)$ y $f'(1)$ se comprueba. ✓

ii) $(X-1)^3 \mid f \Leftrightarrow f''(1) = 0$
$\Rightarrow f'' = 30X^4 - 40X^3 + 12(1+a)X^2 - 12aX + 2(1+a) \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f''(1) = 2a$
$\Rightarrow f''(1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$\boxed{(X-1)^3 \mid f \iff a = 0}$ ✓

Observar que si $a \neq 0$, 1 es una raíz *doble* de f de otra forma es una raíz *por lo menos* triple.

22. Hacer!

23. Hacer!

24. Hacer!

25. Hacer!

26. Hacer!

27. Hacer!

28. Hacer!

29. Hacer!

30. Hacer!

31. Hacer!

32. Hacer!

33. Hacer!

34. Hacer!

35. Hacer!

36. Hacer!

37. Hacer!

38. Hacer!

39. Hacer!

Ejercicios extras:

1.

a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} > 0$ tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\frac{3\pi}{2}$

b) Para cada valor de $\mathbf{c}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

---

a) Si la raíz $\alpha = re^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) \Rightarrow f(r(-i)) = 0$

Voy a usar que: $\star^1$ $\begin{cases} (-i)^2 &= -1 \\ (-i)^3 &= i \\ (-i)^4 &= 1 \\ (-i)^5 &= -i \\ (-i)^6 &= -1 \end{cases}$

$$f(r(-i)) = (r(-i))^6 - 4(r(-i))^5 - (r(-i))^4 + 4^3 + 4(r(-i))^2 + 48(r(-i)) + \mathbf{c} \overset{\star^1}{=}$$

$$-r^6 + 4r^5 i - r^4 - 4r^3 i - 4r^2 - 48ri + \mathbf{c} = 0 \iff \begin{cases} \text{Re} : -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 \\ \text{Im} : r(4r^4 - 4r^2 - 48) = 0 \xrightarrow[r^2 = y \text{ y } r \in \mathbb{R}_{>0}]{\text{bicuadrática}} r^2 = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto si $\mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 = (r^2)^3 + (r^2)^2 + 4r^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{c} = 48}$ ✓
con raíces $\pm\sqrt{3}i$ dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$

b) Debe ocurrir que $(X - \sqrt{3}i))(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^6 & -4X^5 & -X^4 & +4X^3 & +4X^2 & +48X & +48 & X^2+3 \\ \cline{8-8}
-X^6 & & -3X^4 & & & & & X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 \\ \cline{1-3}
& -4X^5 & -4X^4 & +4X^3 & & & & \\
& 4X^5 & & +12X^3 & & & & \\ \cline{2-4}
& & -4X^4 & +16X^3 & +4X^2 & & & \\
& & 4X^4 & & +12X^2 & & & \\ \cline{3-5}
& & & 16X^3 & +16X^2 & +48X & & \\
& & & -16X^3 & & -48X & & \\ \cline{4-6}
& & & & 16X^2 & & +48 & \\
& & & & -16X^2 & & -48 & \\ \cline{5-7}
& & & & & & 0 &
\end{array}$$

$f = (X^2 + 3)\underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_{q}$ como f tiene al menos una raíz doble puedo ver las raíces de la derivada de q:

$q' = (4X^3 - 12X^2 - 8X + 16)' = 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 4) = 0 \xrightarrow[\pm 1, \pm 2, \pm 4]{\text{Posibles raíces, Gauss :(}} q'(1) = 0$, pero $g(1) \neq 0 \Rightarrow f(1) \neq 0$

$$\xrightarrow[\text{bajar grado}]{\text{divido para}} \quad \begin{array}{r|l} X^3 - 3X^2 - 2X + 4 & X - 1 \\ \cline{2-2} -X^3 + X^2 \quad & X^2 - 2X - 4 \\ \cline{1-1} -2X^2 - 2X & \\ 2X^2 - 2X & \\ \cline{1-1} -4X + 4 & \\ 4X - 4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$g' = 4(X-1)\underbrace{(X^2 - 2X - 4)}_{=h} \xrightarrow[\text{de } h]{\text{busco raíces}} X^2 - 2X - 4 = 0 \iff \alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$h = (X - (1+\sqrt{5}))\cdot(X-(1-\sqrt{5}) = X^2 - 2X - 4$ Para calcular que $f(\alpha_1) = g(\alpha_1) = 0$ y comprobar que es una raíz doble, puedo hacer:

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 & X^2 - 2X - 4 \checkmark g = \\ \cline{2-2} -X^4 + 2X^3 + 4X^2 \qquad\qquad\quad & X^2 - 2X - 4 \\ \cline{1-1} -2X^3 \qquad + 16X \quad & \\ 2X^3 - 4X^2 - 8X \quad & \\ \cline{1-1} -4X^2 + 8X + 16 & \\ 4X^2 - 8X - 16 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$h^2 = (X^2 - 2X - 4)^2 \to$ no la vi venir

factorizaciones:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{Q}[X] & \to \quad f = (X^2+3)\,(X^2+3)(X^2-2X-4)^2 \\ \mathbb{R}[X] & \to \quad f = (X-(1+\sqrt{5}))(X-(1-\sqrt{5}))(X^2-2X-4)^2 \\ \mathbb{C}[X] & \to \quad f = (X-(1+\sqrt{5}))(X-(1-\sqrt{5}))(X-3i)^2(X+3i)^2 \end{cases}} \quad \checkmark$$

---

2. Factorizar el polinomio $P = X^6 - X^5 - 13X^4 + 14X^3 + 35X^2 - 49X + 49$ como producto de irreducibles en $\mathbb{C}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ sabiendo que $\sqrt{7}$ es una raíz múltiple.

Un polinomio con coeficientes racionales, y una raíz irracional $\alpha = \sqrt{7}$, tendrá también al *conjugado irracional* [1] , $\overline{\alpha} = -\sqrt{7}$

Si agregamos la información de que $\sqrt{7}$ es *por lo menos* raíz doble, obtenemos que:

$$\begin{cases} \sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow (X^2-7) \mid f \\ \sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow (X^2-7)^2 = X^4 - 14X^2 + 49 \mid f \quad \checkmark \end{cases}$$

[1] Estoy usando la misma notación para *conjugado racional* y *conjugado complejo*. ¿Está bien? No sé, no me importa mientras se entienda.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^6 & -X^5 & -13X^4 & +14X^3 & +35X^2 & -49X & +49 & X^4-14X^2+49 \\ \cline{8-8}
-X^6 & & +14X^4 & & -49X^2 & & & X^2-X+1 \\ \cline{1-5}
 & -X^5 & +X^4 & +14X^3 & -14X^2 & -49X & & \\
 & X^5 & & -14X^3 & & +49X & & \\ \cline{2-6}
 & & X^4 & & -14X^2 & & +49 & \\
 & & -X^4 & & +14X^2 & & -49 & \\ \cline{3-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$f=(X^4-14X^2+49)\cdot(X^2-X+1) \xrightarrow{\text{resolvente}} \begin{cases} \alpha_{+,-}=\frac{1\pm w}{2} \\ w^2=-3 \end{cases}$

$\to f=(X^4-14X^2+49)\cdot(X-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X-(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}))$

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{Q}[X] & \to \quad f=(X^2+7)^2(X^2-X+1) \\ \mathbb{R}[X] & \to \quad f=(X+\sqrt{7})^2(X-\sqrt{7})^2(X^2-X+1) \\ \mathbb{C}[X] & \to \quad f=(X+\sqrt{7})^2(X-\sqrt{7})^2(X-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X-(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{cases}}$$

---

3. Hallar **todos** los polinomios **mónicos** $f\in\mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

i) $1-\sqrt{2}$ es raíz de f;

ii) $X(X-2)^2 \mid (f:f')$;

iii) $(f:X^3-1)\neq 1$;

iv) $f(-1)=27$;

---

i) Como $f\in\mathbb{Q}[X]$ si $\alpha_1=1-\sqrt{2}$ es raíz entonces $\alpha_2=1+\sqrt{2}$ para que no haya coeficientes irracionales en el polinomio.

$$(X-(1-\sqrt{2}))\cdot(X-(1+\sqrt{2}))=X^2-2X-1$$

Por lo tanto X^2-2X-1 será un factor de $f\in\mathbb{Q}[X]$.

ii) Si $X(X-2)^2\mid(f:f')\Rightarrow \begin{cases} \alpha_3=0 \text{ raíz simple de } f' \Rightarrow \text{ raíz doble de } f \\ \alpha_4=2 \text{ raíz simple de } f' \Rightarrow \text{ raíz doble de } f \end{cases}$ Por lo tanto $X^2(X-2)^3$ serán factores de f.

iii) Si $(f:X^3-1)\neq 1$ quiere decir que por lo menos alguna de las 3 raíces de:
$X^3-1=(X-1)\cdot(X-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}))\cdot(X-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}))$ tiene que aparecer en la factorización de f. Pero parecido al item i) si tengo una raíz compleja, también necesito el conjugado complejo, para que no me queden coeficientes de f en complejos,
$X^3-1=(X-1)\cdot(X^2+X+1)$, me quedaría con el *factor de menor grado* si eso no *rompe* otras condiciones.

Por lo tanto $(X-1)$ o (X^2+X+1) aparecerá en la factorización de f.

iv) $f(-1) = 27$. Hasta el momento:

$$\begin{cases} f_1 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X-2)^3 \cdot X^2 \cdot (X^2 + X + 1) \to f_1(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot 1 = -54 \\ f_2 = (X^2 - 2X - 1) \cdot (X-2)^3 \cdot X^2 \cdot (X - 1) \to f_2(-1) = 2 \cdot (-27) \cdot 1 \cdot (-2) = 108 \end{cases}$$

, ninguno cumple la condición iv).

Para encontrar *un* polinomio que cumpla lo pedido tomaría el f_2 que tiene menor grado de los dos y lo multiplicaría por $(X - \frac{3}{4})$ de manera que $f = (X^2-2X-1)\cdot X^2 \cdot (X-2)^3 \cdot (X-1) \cdot (X - \frac{3}{4}) \to \boxed{f(-1) = 27}$ así cumpliendo todas las condiciones.

---

4. Factorizar como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ al polinomio

$$f = X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15$$

sabiendo $(f : X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15) \neq 1$

$$X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 = \left(X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5\right) \cdot (X+3) + \left(-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30\right)$$
$$X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5 = \left(-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{10}X + \tfrac{3}{10}\right) + \left(14X^2 - 14X + 14\right)$$
$$-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30 = \left(14X^2 - 14X + 14\right) \cdot \left(-\tfrac{5}{7}X - \tfrac{15}{7}\right) + 0$$

Hacer!

---

5. Sea $(f_n)_{(n \geq 1)}$ la sucesión de poliniomios en $\mathbb{R}[X]$ definida como: $f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20$ y $f_{n+1} = (X+2)^2 f_n' + 3f_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que -2 es raíz doble de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por inducción en n:
$q(n)$ = "-2 es raíz doble de f_n", $\forall n \in \mathbb{N}$
<u>Caso base</u> ¿$q(1)$ es V?
$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20$
$f_1' = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 22X$
$f_1'' = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 22$
$f_1(-2) = 0$
$f_1'(-2) = 0$
$f_1''(-2) = -54 \neq 0$
$\therefore mult(-2, f_1) = 2 \Rightarrow -2$ es raíz doble de $f_1 \Rightarrow q(1)$ es V
<u>Paso inductivo</u> ¿$q(n) \Rightarrow q(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$?
HI: -2 es raíz doble de f_n
QPQ -2 es raíz doble de $f_{n+1} = (X+2)^2 f_n' + 3f_n$
-2 es raíz doble de $f_{n+1} \Leftrightarrow f_{n+1}(-2) = 0 \wedge f_{n+1}'(-2) = 0 \wedge f_{n+1}''(-2) \neq 0$
$f_{n+1}(-2) = (-2+2)^2 f_n'(-2) + 3f_n = \underbrace{0 f'n(-2)}_{=0} + 3f_n(-2) = 0$

Por HI, se que $f_n(-2) = 0$ pues -2 es raíz múltiple de $f_n \Rightarrow f_{n+1}(-2) = 3f_n(-2) = 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow mult(-2, f_{n+1}) \geq 1$
$f'_{n+1} = \underbrace{2(X+2)}_{=2X+4} f'_n + (X+2)^2 f''_n + f'_n$

$f'_{n+1}(-2) = \underbrace{2\underbrace{(-2+2)}_{=0} f'_n}_{=0} + \underbrace{\underbrace{(-2+2)}_{=0}^{2} f''_n}_{=0} + f'_n = f'_n \underbrace{=}_{HI} 0$ pues se que -2 es raíz doble de $f_n \Rightarrow -2$ es raíz de $f'_n \Rightarrow mult(-2, f_{n+1}) \geq 2$
$f''_{n+1} = 2f'_n + (2x+4)f''_n + 2(x+2)f''_n + (x+2)^2 f'''_n + f''_n$
$f''_{n+1}(-2) = 2f'_n(-2) + \underbrace{(-4+4)}_{=0} f''_n(-2) + 2\underbrace{(-2+2)}_{=0} f''_n(-2) + \underbrace{(-2+2)^2}_{=0} f'''n(-2) + f''n(-2) = 2f'_n(-2) + f''_n(-2)$
Por HI, $f'_n(-2) = 0$ y $f''_n(-2) \neq 0 \therefore f''_{n+1}(-2) \neq 0 \Rightarrow mult(-2, f_{n+1}) = 2 \Rightarrow -2$ es raíz doble de $f_{n+1} \Rightarrow (q(n) \Rightarrow q(n+1),\ \forall n \in \mathbb{N})$
Luego, queda probado que -2 es raíz doble de f $\forall n \in \mathbb{N}$.

6.

a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ **(positivo)** para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

---

a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ **(positivo)** para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

Solución:
Limpiando los denominadores de f se obtiene el polinomio g con las mismas raíces:

$$g = 3X^5 + nX^4 - 8X^3 + 11X^2 - 3X = X(\underbrace{3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3}_{h})$$

Por enunciado ignoramos la raiz nula y utilizando el Lema de Gauss buscamos las raices racionales de

$$h = 3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3$$

Aquí, $a_0 = -3$ y $a_n = 3$

$$\text{Div}(a_0) = \text{Div}(a_n) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

Como busco raíces enteras, las busco en el conjunto:

$$\{\pm 1, \pm 3\}$$

Chequeo:

$$\begin{array}{rcl} h(-1) = 0 & \iff & n = -19 \notin \mathbb{N} \\ h(1) = 0 & \iff & n = -3 \notin \mathbb{N} \\ h(-3) = 0 & \iff & \boxed{\text{n=5}} \in \mathbb{N} \\ h(3) = 0 & \iff & n = \frac{67}{9} \notin \mathbb{N} \end{array}$$

Rta: $n = 5$ es el único valor de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el polinomio f tiene una raíz entera no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

Solución:
Primero factorizo la raiz nula de de f

$$f = X^5 + \frac{5}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X = X(X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1)$$

Se, por el item (a), que -3 es una de las raices racionales de f. Busco otras posibles raiíces racionales en el polinomio h (con $n = 5$) obtenido en el item (a) en el conjunto $\{\pm\frac{1}{3}\}$
$h(-\frac{1}{3}) = -\frac{208}{27}$
$h(\frac{1}{3}) = 0 \implies \frac{1}{3}$ es una raiz racional de f.

Factorizo el polinomio f diviendolo por el producto de las dos raíces encontradas $(X + 3) \cdot (X - \frac{1}{3}) = X^2 + \frac{8}{3} - 1$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1 & X^2 + \frac{8}{3}X - 1 \\ \cline{2-2} -X^4 - \frac{8}{3}X^3 + X^2 \qquad\qquad\quad & X^2 - X + 1 \\ \cline{1-1} -X^3 - \frac{5}{3}X^2 + \frac{11}{3}X \qquad & \\ X^3 + \frac{8}{3}X^2 - X \qquad & \\ \cline{1-1} X^2 + \frac{8}{3}X - 1 & \\ -X^2 - \frac{8}{3}X + 1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Factorizo el polinomio cuadratico $X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\Delta^2 = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$$x_+ = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \text{ y } x_- = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$$

Rta:
$\therefore f = X(X+3)(X - \frac{1}{3})(X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)) \in \mathbb{C}$ con todos sus factores de multiplicidad 1 y por lo tanto irreducibles.
$\therefore f = X(X+3)(X - \frac{1}{3})(X^2 - X + 1) \in \mathbb{R}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raices complejas y por lo tanto irreducibles en $\mathbb{R}$.
$\therefore f = X(X+3)(X - \frac{1}{3})(X^2 - X + 1) \in \mathbb{Q}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raices complejas y por lo tanto irreducibles en $\mathbb{Q}$.