

Apunte único: Álgebra I

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(doubleclick en los ejercicio para saltar)

- [Notas teóricas](#)

- Ejercicios de la guía:

1.	5.	9.	13.	17.	21.	25.	29.
2.	6.	10.	14.	18.	22.	26.	30.
3.	7.	11.	15.	19.	23.	27.	31.
4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.

- Ejercicios Extras

 [1.](#)  [2.](#)  [??.](#)

Disclaimer:

Dirigido para aquél que esté listo para leerlo, o no tanto. Va con onda.

¡Si usás este apunte vas a reprobar!

Not really. Dependerá de como lo uses, puede ser un arma de doble filo.

Ya sabés como se usa **esto** 📖. Depende de vos lo que hagás con él.

Si estás trabado, antes de ver la solución que hizo otra persona:

📖 Mirar la solución ni bien te trabás, te *condicionas pavlovianamente* a **no** pensar. Necesitás darle tiempo al cerebro para llegar a la solución.

📖 Intentá un ejercicio similar, pero **más fácil**.

📖 ¿No sale el fácil? Intentá uno **aún más fácil**.

📖 Fijate si tenés un ejercicio similar hecho en clase. Y mirá ese, así no quemás el ejercicio de la guía.

📖 Tomate 2 minutos para formular una pregunta que realmente sea lo que **no** entendés. Decir '*no me sale*' ≠ +. Escribí esa pregunta, vas a dormir mejor.

Ahora sí mirá la solución.

Si no te salen los ejercicios fáciles de un tema en particular, no te van a salir los ejercicios más difíciles: **Sentido común**.

¡Los más fáciles van a salir! Son el alimento de nuestra confianza.

Si mirás miles de soluciones a parciales en el afán de tener un ejemplo hecho de todas las variantes, estás apelando demasiado a la suerte de que te toque uno igual, *pero no estás aprendiendo nada*. Hacer un parcial bien lleva entre 3 y 4 horas. Así que si vos en 4 horas "hiciste" 3 o 4 parciales, *algo raro debe haber*. A los parciales se va a **pensar** y eso hay que practicarlo desde el primer día.

Mirá los videos de las teóricas de Teresa que son **buenísimos** 📺.

Videos de prácticas de pandemia, complemento extra: **Prácticas Pandemia** 📺.

Los ejercicios que se dan en clase suelen ser similares a los parciales, a veces más difíciles, repasalos siempre **Just Do IT** 🙌🙌🙌!

Eh, loco, fatalista, distópico, **relajá un toque te vas a quedar (más) pelado...** 🙌🙌🙌 *va a salir todo bien!*

El repo en [github](#)  para descargar las guías con los últimos updates.



<https://github.com/nad-garraz/algebraUno>

La Guía 3 se actualizó por última vez: 20/09/24 @ 14:49

Guía 3



<https://github.com/nad-garraz/algebraUno/blob/main/3-guia/3-sol.pdf>

Si querés mandar un ejercicio o avisar de algún error, lo más fácil es por

[Telegram](#) .



<https://t.me/+1znt2GV1i8cwMTNh>

Notas teóricas:

Te debo la teoría 😊

😬... hay que hacerlo! 🙏

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

Ejercicios de la guía:

1. Dado el conjunto referencial $V = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es múltiplo de } 15\}$, determinar el cardinal del complemento del subconjunto A de V definido por $A = \{n \in V : n \geq 132\}$.

Se tiene que $A^c = \{n \in V : n \not\geq 132\} = \{n \in V : n < 132\}$.

Así, $\#A^c =$ todos los múltiplos de 15 menores a 132. Lo calculo sacando la parte entera de $\frac{132}{15}$, o sea:

$$\#A^c = \lfloor \frac{132}{15} \rfloor = \lfloor 8,8 \rfloor = 8$$

2. ¿Cuántos números naturales hay menores o iguales que 1000 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

Defino un conjunto referencial $V = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 1000\}$, y dos conjuntos $A = \{n \in V : n \text{ no es múltiplo de } 3\}$, $B = \{n \in V : n \text{ no es múltiplo de } 5\}$.

Búscalo calcular $\#(A \cap B)$

Pero $\#(A \cap B) = \#[V - (A \cap B)^c] = \#(V - A^c \cup B^c) = \#V - \#(A^c \cup B^c) = \#V - [\#A^c + \#B^c - \#(A^c \cap B^c)]$
 Donde $A^c = \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 3\}$, $B^c = \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 5\}$,
 $(A^c \cap B^c) = \{n \in V : n \text{ es múltiplo de } 15\}$

Calculo sus cardinales:

- $\#A^c = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$
- $\#B^c = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$
- $\#(A^c \cap B^c) = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$

Así, $\#(A \cap B) = \#V - [\#A^c + \#B^c - \#(A^c \cap B^c)] = 1000 - 333 - 200 + 66 = 533$

3. Dados subconjuntos finitos A, B, C de un conjunto referencial V , calcular $\#(A \cup B \cup C)$ en términos de los cardinales de A, B, C y sus intersecciones.

$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup C) &= \#(A \cup (B \cup C)) \\ &= \#A + \#(B \cup C) - \#(A \cap (B \cup C)) \\ &= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\ &= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - [\#(A \cap B) + \#(A \cap C) - \#(A \cap B \cap C)] \\ &= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

4. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 📧.

5. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 📧.

6.

- i) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras (no pueden empezar con 0) hay que no contienen al dígito 5?
- ii) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras hay que contienen al dígito 7?

- i) Como las cifras no pueden ser 5 y la primer cifra no puede empezar con 0, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{c} \text{cifras} \\ \text{posibilidades} \end{array} \left| \begin{array}{cccc} \overline{8} & \overline{9} & \overline{9} & \overline{9} \end{array} \Rightarrow \text{hay } 8 \cdot 9^3 = 5832 \text{ posibles números}$$

- ii) Para hallar la cantidad de números de 4 cifras que contienen al 7 lo calculo con el complemento, o sea

$$\# \text{números de 4 cifras con el 7} = \# \text{números de 4 cifras} - \# \text{números de 4 cifras sin el 7}$$

- # números de 4 cifras:

$$\begin{array}{c} \text{cifras} \\ \text{posibilidades} \end{array} \left| \begin{array}{cccc} \overline{9} & \overline{10} & \overline{10} & \overline{10} \end{array} \Rightarrow \text{hay } 9 \cdot 10^3 = 9000 \text{ números de 4 cifras}$$

- # números de 4 cifras sin el 7:

En el ítem anterior calculamos la cantidad de números de 4 cifras que no contienen al 5, que es la misma cantidad que números de 4 cifras que no contienen al 7, por lo tanto hay 5832 números posibles.

$$\text{Así, } \# \text{números de 4 cifras con el 7} = 9000 - 5832 = 3168$$

7. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

8. 🤖... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

9. Si A es un conjunto con n elementos ¿Cuántas relaciones en A hay? ¿Cuántas de ellas son reflexivas? ¿Cuántas de ellas son simétricas? ¿Cuántas de ellas son reflexivas y simétricas?

Dado que para dos conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$ la cantidad de relaciones que hay entre ellos es igual a la cantidad de subconjuntos de $\mathcal{P}(A \times B)$, entonces si $A = \{1, \dots, n\}$ el cardinal $\# \mathcal{P}(A \mathcal{R} A) = 2^{n^2}$

Las relaciones reflexivas son de la forma $a_i \mathcal{R} a_i$, por lo que solo será una relación por cada elemento del conjunto $\#(A \mathcal{R} A)_{ref} = n$. Voy a calcular la cantidad de elementos que tiene el conjunto $\mathcal{P}((A \mathcal{R} A)_{ref})$, porque estoy buscando todos los subconjuntos que puedo formar con los elementos de $(A \mathcal{R} A)_{ref}$, entonces $\# \mathcal{P}((A \mathcal{R} A)_{ref}) = 2^n$

Corroborar

Las relaciones simétricas serán aquellas que $a_i \mathcal{R} a_j \Rightarrow a_j \mathcal{R} a_i$. Pensando esto como los elementos de la diagonal para abajo de una matriz de $n \times n$ tengo $\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ elementos matriciales.

$$\sum_{k=0}^n \binom{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}{k} = 2^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} \text{ Corroborar}$$

	a_1	a_2	a_3	\cdots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
a_1	R, S	\cdot	\cdot	\cdots	\cdot	\cdot	\cdot
a_2	S	R, S	\cdot	\cdots	\cdot	\cdot	\cdot
a_3	S	S	R, S	\cdots	\cdot	\cdot	\cdot
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\cdot	\cdot	\cdot
a_{n-2}	S	S	S	\ddots	R, S	\cdot	\cdot
a_{n-1}	S	S	S	\ddots	S	R, S	\cdot
a_n	S	S	S	\cdots	S	S	R, S

10. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Sea \mathcal{F} el conjunto de todas las funciones $f : A \rightarrow B$.

- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto \mathcal{F} ?
- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : 10 \in \text{Im}(f)\}$?
- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : 10 \in \text{Im}(fa)\}$?
- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : f(1) \in \{2, 4, 6\}\}$?

Cuando se calcula la cantidad de funciones, haciendo el árbol se puede ver que va a haber $\# \text{Im}(f)$ de funciones que provienen de un elemento del dominio. Por lo tanto si tengo un conjunto A_n y uno B_m , la cantidad de funciones $f : A \rightarrow B$ será de m^n

- $\# \mathcal{F} = 12^5$
- $\# \mathcal{F} = 11^5$
- Tengo una que va a parar al 10 y cuento que queda. Por ejemplo si $f(2) = 10$: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Por lo tanto tengo $\# \mathcal{F} = 12^4 \cdot \underbrace{1}_{f(2)=10}$

Corroborar

- Me dicen que $f(\{1\}) = \{2, 4, 6\}$, Si lo pienso como el anterior ahora tengo 3 veces más combinaciones, entonces $\# \mathcal{F} = 12^4 \cdot \underbrace{3}_{f(\{1\})=\{2,4,6\}}$

11. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.

- ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \rightarrow B$ hay?
- ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \rightarrow B$ hay tales que $f(\{1, 2, 3\}) = \{12, 13, 14\}$?

Cuando cuento funciones biyectivas, el ejercicio es como reordenar los elementos del conjunto de llegada de todas las formas posibles. Dado un conjunto $\text{Im}(f)$, la cantidad de funciones biyectivas será $\# \text{Im}(f)$

- Hay $7!$ funciones biyectivas.
- Dado que hay 3 valores fijos, juego con los 4 valores restantes, por lo tanto habrá $4!$ funciones biyectivas

12. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden armar usando los dígitos del 1 al 5? ¿Y usando los dígitos del 1 al 7? ¿Y usando los dígitos del 1 al 7 de manera que el dígito de las centenas no sea el 2?

1) Hay que usar $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y reordenarlos de todas las formas posibles. $5!$

2) Hay que usar $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y ver de cuantas formas posibles pueden ponerse en 5 lugares:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \end{array} \right. \rightarrow \text{Tengo } 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7!}{2!} \text{ interpretar?}$$

3) Parecido al anterior pero fijo el 2 en el dígito de las centenas:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \#6 & \#5 & \#4 & \#1 & \#3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & 4 & \overline{5} \end{array} \right. \rightarrow \text{Tengo } 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 = \frac{6!}{2!} \text{ interpretar?}$$

13. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

i) ¿Cuántas funciones inyectivas $f; A \rightarrow B$ hay?

ii) ¿Cuántas de ellas son tales que $f(1)$ es par?

iii) ¿Y cuántas tales que $f(1)$ y $f(2)$ son pares?

i) Una pregunta equivalente a si tengo 10 pelotitas distintas y 7 cajitas cómo puedo ordenarlas.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \#10 & \#9 & \#8 & \#7 & \#6 & \#5 & \#4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{array} \right. \rightarrow \frac{10!}{3!} = \frac{\#B}{\#B - \#A}$$

ii) Hay 5 números pares para elegir como imagen de $f(1)$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \#5 & \#9 & \#8 & \#7 & \#6 & \#5 & \#4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{array} \right. \rightarrow 5 \cdot \frac{9!}{3!}$$

iii) Hay 5 números pares para elegir como imagen de $f(1)$, luego habrá 4 números pares para $f(2)$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \#5 & \#4 & \#8 & \#7 & \#6 & \#5 & \#4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{array} \right. \rightarrow 5 \cdot 4 \cdot \frac{8!}{3!}$$

14. ¿Cuántas funciones biyectivas $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tales que $f(\{1, 2, 3\}) \subseteq \{3, 4, 5, 6, 7\}$ hay?

Primero veo la condición $f(\{1, 2, 3\}) \subseteq \{3, 4, 5, 6, 7\}$, donde podría formar $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$ combinaciones biyectivas. Para obtener la cantidad de funciones pedidas, tengo que usar todos los valores del $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Primero fijo la cantidad de valores que pueden tomar $f(\{1, 2, 3\}) \subseteq \{3, 4, 5, 6, 7\}$ luego lo que reste.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \#5 & \#4 & \#3 & \#4 & \#3 & \#2 & \#1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \end{array} \right. \rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{5!}{(5-3)!} \cdot 4!$$

Condiciones pedidas Lo que resta para completar

15. Sea $A = \{f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ tal que } f \text{ es una función inyectiva}\}$.
 Sea \mathcal{R} la relación de equivalencia en A definida por: $f \mathcal{R} g \iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2)$.
 Sea $f \in A$ la función definida por $f(n) = n + 2$ ¿Cuántos elementos tiene su clase de equivalencia?

Hacer!

16. Determinar cuántas funciones $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ satisfacen simultáneamente las condiciones:

- f es inyectiva,
- $f(5) + f(6) = 6$,
- $f(1) \leq 6$.

- f inyectiva hace que mi conjunto de llegada se reduzca en 1 con cada elección.
- Si $f(5) + f(6) = 6$ entonces $f : \{5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 4, 5\}$. Una vez que $f(5)$ tome un valor de los 4 posibles e.g. $f(5) = 1 \xrightarrow[\text{única opción}]{\text{condiciona}} f(6) = 5$
- $f(1) \leq 6 \rightarrow f : \{1\} \rightarrow \{\cancel{1}, 2, 3, \cancel{4}, 5, 6\}$ donde cancelé el 1 y el 4, para sacar 2 números que sí o sí deben irse en la condición ¹ de $f(5) + f(6) = 6$. Por lo tanto $f(1)$ puede tomar 4 valores. Por lo que sobrarían 9 elementos del conjunto de llegada para repartir en las f que no tienen condición.

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} \#4 & \#9 & \#8 & \#7 & \#4 & \#1 & \#6 & \#5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & f(8) \end{array} \right. \rightarrow 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 4 \cdot 4 \cdot \frac{9!}{4!} = 241.920$$

Siento todo esto muy artesanal y poco justificable suficientemente *mathy-snobby*

Número combinatorio

17.

- ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- ¿ Y si se pide que 1 pertenezca al subconjunto?
- ¿ Y si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto?
- ¿ Y si se pide que 1 o 2 pertenezca al subconjunto, pero no simultáneamente los dos?

El problema de tomar k elementos de un conjunto de n elementos se calcula con $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}!(\cancel{3}!)} = 35$
- $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$.
- $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$.
- $\binom{5}{3} \cdot 2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 2 = 20$

¹¿Podría haber elegido el 1 y 2? Sí, cualquiera 2 números del conjunto $\{1, 2, 4, 5\}$

18. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$. Calcular la cantidad de subconjuntos $B \subseteq A$ que cumplen las siguientes condiciones:

- B tiene 10 elementos y contiene exactamente 4 múltiplos de 3.
- B tiene 5 elementos y no hay dos elementos de B cuya suma sea impar.


El conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

- $\xrightarrow[\text{de } 3]{\text{múltiplos}} C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, agarro 4 elementos del conjunto C y luego 6 de los restantes del conjunto A sin contar el múltiplo de 3 que ya usé.

$$\left\{ \binom{6}{4} \cdot \binom{9}{6} = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{9!}{6!3!} \xrightarrow{\text{simplificando}} 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 1260 \right.$$

- La condición de que la suma *no sea impar* implica que todos los elementos deben ser par o todos impar.

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow[\text{pares}]{\text{todos}} \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \xrightarrow[\text{quiero } 5]{10 \text{ elementos}} \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252 \\ \xrightarrow[\text{impares}]{\text{todos}} \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\} \xrightarrow[\text{quiero } 5]{10 \text{ elementos}} \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252 \end{array} \right.$$

Dale las gracias y un poco de amor  a los que contribuyeron! Gracias por tu aporte:

 Nad Garraz 

 Jean 

19. Dadas dos rectas paralelas en el plano, se marcan n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con vértices en esos puntos?

... **hay que hacerlo!** 

Si querés mandarlo: Telegram \rightarrow , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX \rightarrow .

20. Determinar cuántas funciones $f : \{1, 2, 3, \dots, 11\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 16\}$ satisfacen simultáneamente las condiciones:

- f es inyectiva,
- Si n es par, $f(n)$ es par,
- $f(1) \leq f(3) \leq f(5) \leq f(7)$.

- La función es inyectiva y cuando *inyecto un conjunto de m elementos en uno de n elementos* $\rightarrow \frac{m!}{(m-n)!}$.

- Para cumplir la segunda condición el $\text{Dom}(f)$ tengo 5 números par $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ y en el codominio tengo 8 números par $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ al *inyectar* obtengo $\frac{8!}{(8-5)!}$ permutaciones.

- La condición de las desigualdades se piensa con los elementos de la $\text{Im}(f)$ restantes después de la inyección, que son $16 - 5 = 11$. De esos 11 elementos quiero tomar 4. El cuántas formas distintas de tomar 4 elementos de un conjunto de 11 elementos se calcula con $\binom{11}{4}$, número de combinación que cumple las desigualdades, porque todos los números son distintos. Para la combinación **no hay orden**, elegir $\{16, 1, 15, 13\}$ es lo mismo ² que $\{1, 16, 13, 15\}$. Es por eso que *con 4 elementos seleccionados* solo hay una permutación que cumple las desigualdades; en este ejemplo sería $\{1, 13, 15, 16\}$

²Que sea lo mismo quiere decir que no lo cuenta nuevamente, el contador aumenta solo si cambian los elementos y no el lugar de los elementos

- Por último inyecto los número del dominio restantes $\{9, 11\}$ en los 7 elementos de $\text{Im}(f)$ que quedaron luego de la combinación de las desigualdades $\rightarrow \frac{7!}{(7-2)!}$

Concluyendo: Habrían $\frac{8!}{(8-5)!} \cdot \binom{11}{4} \cdot \frac{7!}{(7-2)!} = 93.139.200$

Corroborar

21. ¿Cuántos anagramas tienen las palabras *estudio*, *elementos* y *combinatorio*

El anagrama equivale a permutar los elementos. Si no hay letras repetidas es una biyección $\#(\text{letras})!$. La palabra *estudio* tiene $7!$ anagramas.

Elementos tiene 3 letras *e*, por lo tanto los elementos no repetidos son 6 $\{l, m, n, t, o, s\}$; esto es una *inyección* ³ $\rightarrow \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!}$.

También puedo pensar esto con combinatoria: Primero ubico a las 3 letras *e* en los lugares de las letras, por ejemplo $\left\{ \begin{matrix} e & & e & & e & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \right\} \rightarrow$ donde esta es una de un total de $\binom{9}{3}$ formas de hacer eso, y los elementos que quedan en el conjunto de letras se *inyectan* en los lugares vacíos que quedan, en este caso tengo 6 elementos para ubicar en 6 lugares, lo que sería una biyección $\#(\text{letras})!$.

$$\rightarrow \binom{9}{3} \cdot 6! = \frac{9!}{3!}$$

Combinatorio tiene repetidas las letras *i* (x2) y la *o* (x3). Tengo un conjunto de 7 elementos $\{c, m, b, n, a, t, r\}$ sin repetición. Puedo ubicar las letras con combinación en los 12 lugares *o* y luego las *i* en los 9 lugares restantes. Una vez hecho eso puedo *inyectar* (*biyectar*?) las letras no repetidas restantes:

$$\rightarrow \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{2} \cdot 7! = \frac{12!}{\underbrace{3!2!}_{\text{notar } 4}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 39.916.800$$

³Primero ubico lo que no está repetido. Luego agrego, en una dada posición, a eso 3 o más elementos repetidos. Esta última acción no altera la cantidad de permutaciones. Pensar en esto: lmntosEEE cuenta como $\text{lmntos}___$.

⁴Esto es el total de biyecciones dividido entre las cantidades de repeticiones de los elementos en cuestión.

22. ¿Cuántas palabras se pueden formar permutando las letras de *cuadros*

- con la condición de que todas las vocales estén juntas?
- con la condición de que las consonantes mantengan el orden relativo original?
- con la condición de que nunca haya dos (o más) consonantes juntas?

El conjunto de consonantes es $C = \{c, d, r, s\}$ y de vocales $V = \{u, a, o\}$

- Para que las vocales estén juntas pienso a las 3 como un solo elemento, fusionadas las 3 letras, con sus permutaciones, es decir que tengo $3!$ cosas de la siguiente pinta:

$$\begin{cases} u & a & o \\ u & o & a \\ o & a & u \\ o & u & a \\ a & o & u \\ a & u & o \end{cases}$$

Los anagramas para que las letras estén juntas los formo combinando $\binom{5}{1} = 5$ poniendo los $3! = 6$ valores así en cada uno de los 5 lugares:

$$\begin{cases} uao & - & - & - & - \\ - & uao & - & - & - \\ - & - & - & uao & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{cases}$$

Ahora puedo *inyectar* las 4 consonantes en los 4 lugares que quedan libres. Finalmente se pueden formar $\underbrace{4!}_{\text{consonantes}} \cdot \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{vocales}} \cdot 3! = 720$ anagramas con la condición pedida.

- Supongo que el **orden relativo** es que aparezcan ordenadas así " $c \dots d \dots r \dots s$ ", quiere decir que tengo que combinar un grupo de 4 letras en 7 que serían los lugares de la letras teniendo un total de $\binom{7!}{4!}$ y luego tengo $1!$ permutaciones o, *no permuto dicho de otra forma*, dado que eso alteraría el orden y no quiero que pase eso. Obtengo cosas así:

$$\begin{cases} c & d & r & s & - & - & - \\ - & c & - & d & - & r & s \\ c & - & - & d & r & - & s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{cases} \rightarrow \text{lo cual deja 3 lugares libres para permutar con las 3 vocales, esa}$$

permutación es una biyección da $3!$.

Por último se pueden formar $\underbrace{\binom{7!}{4!}}_{\text{consonantes}} \cdot 1! \cdot \underbrace{3!}_{\text{vocales}} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 3! = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$

- $C = \{c, d, r, s\}$ sin que estén juntas quiere decir que puedo ordenar de pocas formas, muy pocas porque solo hay 7 lugares. $\left\{ \frac{c}{1} \frac{-}{2} \frac{d}{3} \frac{-}{4} \frac{r}{5} \frac{-}{6} \frac{s}{7} \right\} \rightarrow$ esta combinación es única $\binom{7!}{7!} = 1$, lo único que resta hacer es permutar las consonantes en esos espacios. 4 espacios para 4 consonantes. Luego relleno *inyectando* las vocales, como antes. El total de anagramas será $\underbrace{\binom{7!}{7!}}_{\text{consonantes}} \cdot 4! \cdot \underbrace{3!}_{\text{vocales}} = 144$

23. Con la palabra *polinomios*,

- ¿Cuántos anagramas pueden formarse en las que las 2 letras *i* no estén juntas?
- ¿Cuántos anagramas puede formarse en los que la letra *n* aparezca a la izquierda de la letra *s* y la letra *s* aparezca a la izquierda de la letra *p* (no necesariamente una al lado de la otra)?

- i) Tengo 10 letras, $\{p, l, n, m, s, o, o, o, i, i\}$. ~~Para que no hayan "ii" calculo $\binom{10}{3} = 120$, pensando que en un conjunto de 3, siempre puedo poner las letras "i i". Para cada uno de estas 120 configuraciones de la pinta: Está mal!~~

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} i & - & i & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & i & - & - & - & - & i & - & - \\ - & - & - & i & - & - & - & - & i & - \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \text{Con las } i \text{ donde están el " - " tiene 4 posiciones} \\ \rightarrow \text{Con las } i \text{ donde están el " - " tiene 5 posiciones} \end{array}$$

Estoy contando de más. La cantidad para que las *i* no estén juntas es 36... salieron contando a mano ⁵. Luego inyectando con las repeticiones de la "o": $36 \cdot \frac{8!}{3!} = 241.920$

Pensando en el complemento:

Las posiciones que pueden tomar las *ii* juntas, se calculan a mano enseguida. Habrían en total

$$\rightarrow \frac{10!}{3! \cdot 2!} - \underbrace{9 \cdot \frac{8!}{3!}}_{\text{complemento}} = 241.920$$

- ii) Tengo 10 letras, $\{p, l, n, m, s, o, o, o, i, i\}$. Para que se forme "*n...s...p*" calculo $\binom{10}{3} = 120$, pensando que en un conjunto de 3, siempre puedo poner las letras "n s p". Para cada uno de estas 120 configuraciones de la pinta:

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} n & s & p & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & n & s & - & - & - & p & - & - \\ - & - & - & n & s & - & - & - & p & - \end{array} \right. \rightarrow \text{tengo que rellenar con 7 letras los lugares que sobran,}$$

teniendo en cuenta las repeticiones de las "o" y de las "i": $\binom{10}{3} \cdot \frac{7!}{3!2!}$

24. 🤔... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 📄.

25. 🤔... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 📄.

26. 🤔... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 📄.

27. 🤔... hay que hacerlo! 🧐

Si querés mandarlo: Telegram → 📧, o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → 📄.

$$5 \sum_{k=1}^8 k = 36$$

28. En este ejercicio no hace falta usar inducción.

i) Probar que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. sug: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

ii) Probar que $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

iii) Probar que $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$ y deducir que $\binom{2n}{n} < 4^n$.

iv) Calcular $\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$ y deducir que $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

😬... hay que hacerlo! 🤖

Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en L^AT_EX → .

Binomio de Newton: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

i)

ii)

iii)

iv)

29. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, y sea R la relación de orden en $\mathcal{P}(X)$ definida por: $A \mathcal{R} B \iff A - B = \emptyset$.

¿Cuántos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ cumplen simultáneamente $\#A \geq 2$ y $A \mathcal{R} \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

Hacer!

30. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, \overset{6}{\cancel{6}}, 7, 8, 9, 10\}$, y sea R la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$ definida por: $A \mathcal{R} B \iff A \cap \{1, 2, 3\} = B \cap \{1, 2, 3\}$.

¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ de exactamente 5 elementos tiene la clase de equivalencia \overline{A} de $A = \{1, 3, 5\}$?

Como A tiene al 1 y al 3, los elementos B , conjuntos en este caso, pertenecientes a la clase \overline{A} deberían cumplir que si $B \subseteq \overline{A} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \in B \\ 3 \in B \\ 2 \notin B \end{array} \rightarrow \text{si } 2 \in B \Rightarrow A \mathcal{R} B \right\}$.

Los conjuntos de 5 elementos serán de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad _ \quad _ \quad _ \\ \cap \{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 3\} \end{array} \xrightarrow{5 \text{ elementos}} \binom{7}{3} = 35. \text{ Los 7 números usados son } \{4, 5, \overset{6}{6}, 7, 8, 9, 10\}$$

¿Es solo eso o interpreto mal la \mathcal{R} u otra cosa?

31. Sean $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$ y $A = \{1\}$ ¿Cuántos subconjuntos $B \subseteq X$ satisfacen que el conjunto $A \Delta B$ tiene a lo sumo 2 elementos?

...

a lo sumo = como mucho = como máximo

al menos = por poco = como mínimo

...

La diferencia simétrica es la unión de los elementos no comunes a los conjuntos A y B . Si me piden que:

$$\#(A \Delta B) \leq 2 \Rightarrow B = \left\{ \begin{array}{ll} 1 \in B \rightarrow \#B \leq 3 \xrightarrow[\text{de la forma}]{\text{Busco conjuntos}} \left\{ \begin{array}{ll} \underline{1} - - \xrightarrow[\text{quedan 99. Elijo 2.}]{\text{el 1 está usado}} \binom{99}{2} \\ \underline{1} - \xrightarrow[\text{quedan 99. Elijo 1.}]{\text{el 1 está usado}} \binom{99}{1} \\ \underline{1} \xrightarrow[\text{quedan 99. Elijo 0.}]{\text{el 1 está usado}} \binom{99}{0} \end{array} \right. \\ \\ 1 \notin B \rightarrow \#B \leq 1 \xrightarrow[\text{de la forma}]{\text{Busco conjuntos}} \left\{ \begin{array}{ll} - \xrightarrow[\text{elegir } 1 \notin B. \text{ Elijo 1}]{\text{tengo 99 números para}} \binom{99}{1} \\ \emptyset \xrightarrow[\text{elegir } 1 \notin B. \text{ Elijo 0}]{\text{tengo 99 números para}} \binom{99}{0} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Por último habría un total de $\binom{99}{2} + \binom{99}{1} + \binom{99}{0} + \binom{99}{1} + \binom{99}{0}$ subconjuntos $B \subseteq X$ para cumplir lo pedido.

32.

- Sea A un conjunto con $2n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?
- Sea A un conjunto con $3n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

Hacer!

Ejercicios extras:

33. Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la relación de equivalencia $\rightarrow X \mathcal{R} Y \iff X \Delta Y \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\}$.
¿Cuántos conjuntos hay en la clase de equivalencia de $X = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 6\}$?

1. La relación toma valores de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
2. Los elementos del conjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$
3. El conjunto $X = \{6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ es simplemente un elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Los conjuntos $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tales que $X \mathcal{R} Y$ van a ser los conjuntos que junto a X formarán la clase de equivalencia.
 $\bar{X} = \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : X \mathcal{R} Y\}$

Para tener una relación de equivalencia deben cumplirse:

- Reflexividad. $X \Delta X = \emptyset \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\}$
- Simetría. $X \Delta Y \iff Y \Delta X, \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- Transitividad.

Condiciones que debería cumplir un elemento Y para pertenecer a la la clase de equivalencia, en otras palabras estar relacionado con X :

Los elementos \rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, 2, 3 \text{ no deben pertenecer a } Y \xrightarrow[\text{ejemplo}]{\text{por}} \left\{ \begin{array}{l} X \Delta \underbrace{\{3, 8, 9, \dots\}}_Y = \{3, 6, 7\} \not\subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \\ X \Delta \underbrace{\{1, 2, 3\}}_Y = \{1, 2, 3, 6, 7, \dots\} \not\subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \end{array} \right. \\ \hline 4, 5, 6, 7, 8 \text{ pueden o no pertenecer a } Y \xrightarrow[\text{ejemplo}]{\text{por}} \left\{ \begin{array}{l} X \Delta \underbrace{\{4, 6, 8, 9, \dots\}}_Y = \{4, 7\} \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \\ X \Delta \underbrace{\{9, \dots\}}_Y = \{6, 7, 8\} \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \end{array} \right. \\ \hline 9, 10, \dots \text{ deben pertenecer a } Y \xrightarrow[\text{ejemplo}]{\text{por}} \left\{ \begin{array}{l} X \Delta \underbrace{\{6, 7, 8\}}_Y = \{9, 10, \dots\} \not\subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \\ X \Delta \underbrace{\{10, \dots\}}_Y = \{9\} \not\subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \\ X \Delta \underbrace{\{9, \dots\}}_Y = \{6, 7, 8\} \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Se concluye que la clase de equivalencia será el conjunto \bar{X} (notación inventada):

$\bar{X} = \{Y_1 \cup \{9, 10, \dots\}, Y_2 \cup \{9, 10, \dots\}, \dots, Y_{32} \cup \{9, 10, \dots\}\}$ con $Y_i \in \mathcal{P}(\{4, 5, 6, 7, 8\})$ $i \in [1, 2^5]$ donde $\#\bar{X} = 2^5$

1. Sea $\mathcal{F} = \{f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$.

- a) Determinar cuántas funciones $f \in \mathcal{F}$ satisfacen $\#\{x \in \text{Dom}(f) / f(x) = 9\} = 2$.
- b) Determinar cuántas funciones $f \in \mathcal{F}$ satisfacen $\#\text{Im}(f) = 4$

Observo que $\# \text{Dom}(f) = 5$ y $\# \text{Cod}(f) = 9$.

- a) Quiero contar cuántas cosas hay con esta pinta: \star^1
- | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $f(1)$ | $f(2)$ | $f(3)$ | $f(4)$ | $f(5)$ |
| \downarrow | \downarrow | \downarrow | \downarrow | \downarrow |
| 9 | β | γ | 9 | δ |

A partir de ese ejemplo puedo pensar que quiero que haya 2 valores de x , cualesquiera, que vayan a parar al 9 y el resto de los números, β , γ y δ tiene que ir a parar a algo que sea $\neq 9$.

Lo primero que calculo es de cuántas maneras distintas puedo agarrar 2 x de entre las 5 que tengo para usar del conjunto de partida de las f : $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$, entonces tengo 10 situaciones de la pinta de

\star^1 donde para cada una de esas situaciones los número que no van al 9 pueden ir a parar a cualquier

valor del 1 al 8. Por lo tanto

$$\text{posibles valores} \rightarrow \begin{array}{c|ccccc} f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & \beta & \gamma & 9 & \delta \\ \hline \#1 & \#8 & \#8 & \#1 & \#8 \end{array} \rightarrow 8^3 \text{ funciones.}$$

Eso es solo para el caso con lo 9 en esos lugares en particular. Tengo 10 de esos caso. Por lo que la cantidad de funciones total va a ser: $10 \cdot 8^3$

- b) Parecido al anterior. Voy a contar cosas con la pinta: \star^2
- | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $f(1)$ | $f(2)$ | $f(3)$ | $f(4)$ | $f(5)$ |
| \downarrow | \downarrow | \downarrow | \downarrow | \downarrow |
| α | β | γ | α | δ |

con $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$, para que $\text{Im}(f) = 4$. En un razonamiento análogo a lo hecho antes, tengo 2 valores iguales (α), que pueden estar en cualquier lugar de los 5 que hay eso, *nuevamente*: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \star^3$, elijo los posibles valores, pero a diferencia del caso anterior teniendo en cuenta de no repetir.

$$\text{posibles valores} \rightarrow \begin{array}{c|ccccc} f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \delta \\ \hline \#9 & \#8 & \#7 & \#1 \star^4 & \#6 \end{array} \rightarrow 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \text{ funciones.}$$

El valor en \star^4 es 1, porque una vez seleccionado un α el otro *solo puede valer lo mismo*, bueno, porque son la misma letra, ¿no?. Entonces en esas posiciones en particular hay $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$, y al igual que

antes hay \star^3 10 de esas configuraciones así que la cantidad de funciones total va a ser: $10 \cdot \frac{9!}{5!} = \frac{10!}{5!}$

2. Calcular la cantidad de anagramas de HIPOPOTAMO que preserven el orden relativo orifinal de las letras I y A, es decir, los que tengan la I a la izquierda de la A.

No sé si ésta es la mejor forma de hacer esto, pero es la forma que se me ocurrió.

En total hay 10 letras, **con repeticiones**. Primero voy a atacar el tema de la posición relativa de la I y la A. Calculo todas las posibles posiciones respetando que la I esté a las izquierda de la A.

La I fija y cuento posibles lugares para la A:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
<i>I</i>	<i>A</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	→ 9 posibles posiciones
—	<i>I</i>	<i>A</i>	—	—	—	—	—	—	—	→ 8 posibles posiciones
—	—	<i>I</i>	<i>A</i>	—	—	—	—	—	—	→ 7 posibles posiciones
—	—	—	<i>I</i>	<i>A</i>	—	—	—	—	—	→ 6 posibles posiciones
—	—	—	—	<i>I</i>	<i>A</i>	—	—	—	—	→ 5 posibles posiciones
—	—	—	—	—	<i>I</i>	<i>A</i>	—	—	—	→ 4 posibles posiciones
—	—	—	—	—	—	<i>I</i>	<i>A</i>	—	—	→ 3 posibles posiciones
—	—	—	—	—	—	—	<i>I</i>	<i>A</i>	—	→ 2 posibles posiciones
—	—	—	—	—	—	—	—	<i>I</i>	<i>A</i>	→ 1 posible posición

De ahí salen en total $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \sum_{i=1}^9 i = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ lugares los cuales hay que rellenar con las letras faltantes.

Para cada una de las 45 posiciones de la I y la A correctamente ubicadas tengo que ubicar 8 letras, de donde saldrían $8!$ posiciones, peeeero, al tener repeticiones y para no contar cosas de más, divido por la cantidad de letras repetidas tanto para la O como para la P:

$$\text{Total de anagramas: } 45 \cdot \left(\underbrace{\frac{8!}{3!}}_{\text{O}} \cdot \underbrace{\frac{2!}{2!}}_{\text{P}} \right).$$