Álgebra I
Práctica 7 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

1.	**6.**	**11.**	**16.**	**21.**	**26.**	**31.**	**36.**
2.	**7.**	**12.**	**17.**	**22.**	**27.**	**32.**	**37.**
3.	**8.**	**13.**	**18.**	**23.**	**28.**	**33.**	**38.**
4.	**9.**	**14.**	**19.**	**24.**	**29.**	**34.**	**39.**
5.	**10.**	**15.**	**20.**	**25.**	**30.**	**35.**	

- Ejercicios Extras

1.	3.	5.	7.	9.
2.	4.	6.	8.	

Notas teóricas:

- *Operaciones:*

  $+:$ Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$

  $$\Rightarrow f + g = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$$

  $\cdot:$ Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ con $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$

  $\Rightarrow f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j) X^k \in \mathbb{K}[X]$

- *Algoritmo de división*:

  $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no nulos, existen únicos q y $R \in \mathbb{K}[X]$ tal que

  $$f = q \cdot g + R$$

  con $\text{gr}(R) < \text{gr}(f)$ o $R = 0$.

- *Raíz de un Polinomio:*

  $$\alpha \text{ es raíz de } f \iff X - \alpha \,\big|\, f \iff f = q \cdot (X - \alpha)$$

- *Máximo común divisor:*

  Polinomio, $(f : g) \in \mathbb{K}[X]$, *mónico* de mayor grado que divide a ambos polinomios en $\mathbb{K}[X]$ y vale el algoritmo de Euclides.

  - $(f : g) \,\big|\, f \quad \text{y} \quad (f : g) \,\big|\, g$
  - $f = (f : g) \cdot k_f \quad \text{y} \quad g = (f : g) \cdot k_g \quad \text{con} \quad k_f \quad \text{y} \quad k_g$ en $\mathbb{K}[X]$
  - Dos polinomios son coprimos si $(f : g) = 1 \iff f \neq g$

- *Raíces múltiples:*

  Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se dice que:

  - Cuando f tiene una raíz múltiple:

  $$\alpha \text{ es raíz } \textit{múltiple} \text{ de } f \iff f = (X - \alpha)^2 q$$
  $$f = (X - \alpha) \cdot q, \quad \text{con } q \in \mathbb{K}[X] \quad \text{y} \quad q(\alpha) = 0.$$

  - Cuando la raíz *no* es múltiple, es *simple* cuando:

  $$\alpha \text{ es raíz } \textit{simple} \text{ de } f \iff (X - \alpha) \,\big|\, f \quad \text{y} \quad (X - \alpha)^2 \overset{!!}{\nmid} f$$
  $$f = (X - \alpha) \cdot q, \quad \text{con } q \in \mathbb{K}[X] \quad \text{y} \quad q(\alpha) \neq 0.$$

  Prestale atención a los ! porque sino la vas a cagar.

- Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Se dice que α es raíz de multiplicidad (exactamente) m de f, y se nota:
$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff (X-\alpha)^m \mid f,$$
y también
$$(X-\alpha)^{m+1} \nmid f.$$
O equivalentemente,
$$f = (X-\alpha)^m q \quad \text{con} \quad q \in \mathbb{K}[X], \quad \text{y} \quad q(\alpha) \neq 0.$$

- *Raíces y MCD:*
Sean $f, g \in \mathbb{K}[X]$ no ambos nulos, y $\alpha \in \mathbb{K}$: Esta se usa bastante.
$$\Rightarrow f(\alpha) = g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (f : g)(\alpha) = 0$$

- α es raíz múltiple de f si y solo si:
$$f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad f'(\alpha) = 0 \iff \alpha \text{ es raíz de } (f : f') \iff X - \alpha \mid (f : f')$$

- La multiplicidad m de una raíz, será $m-1$ en la derivada:
$$\text{mult}(\alpha, f) = m \iff f(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \text{mult}(\alpha; f') = m-1$$

- Relación entre la multiplicidad de una raíz de f y sus derivadas:
$$\text{mult}(\alpha; f) = m \iff \left\{ \begin{array}{l|l} \text{mult}(\alpha; f) \geq m & \left\} \begin{array}{l} f(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \end{array} \right. \\ \hline \text{mult}(\alpha; f) = m & \} \ f^{(m)}(\alpha) \neq 0 \text{ la } m\text{-ésima derivada no se anula.} \end{array} \right.$$
Todo ese quilombo de cosas lo que dice es por ejemplo, que si tenés una raíz α de f **triple** entonces la **tercera derivada** NO PUEDE SER 0, $f'''(\alpha) \overset{!!}{\neq} 0$.

Pero tanto la función, su primera y segunda derivada DEBEN SER 0, $f(\alpha) \overset{!!}{=} f'(\alpha) \overset{!!}{=} f''(\alpha) \overset{!!}{=} 0$

- *Lema de Gauss:*
Sea $f = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ con $a_0 \neq 0$. Si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[X]$ es una raíz racional de f, con α y $\beta \in \mathbb{Z}$ coprimos, entonces $\alpha \mid a_0$ y $\beta \mid a_n$.
El *Lema de Gauss* implica que en el conjunto de fracciones irreducibles $\frac{\alpha}{\beta}$ están todas las raíces racionales de f.

- Polinomios irreducibles:
Sea $f \in K[X]$
  - Se dice que f es *irreducible* en $K[X]$ cuando $f \notin K$ y los únicos divisores de f son de la forma $g = c$ o $g = cf$ para algún $c \in K^\times$. O sea f tiene únicamente dos divisores mónicos (distintos), que son 1 y $\frac{f}{\text{cp}(f)}$
  - Se dice que f es *reducible* en $K[X]$ cuando $f \notin K$ y f tiene algún divisor $g \in K[X]$ con $g \neq c$ y $g \neq cf$, $\forall c \in K^\times$, es decir f tiene algún divisor $g \in K[X]$ (no nulo por definición) con $0 < \text{gr}(g) < \text{gr}(f)$.

Ejercicios de la guía:

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$,

ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$,

iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$,

---

i) *coeficiente principal:* 4^{77}

grado: $6 \cdot 77$

ii) *coeficiente principal:* $(-3)^4 - 6^7 = -279.855$

grado: 28

iii) *coeficiente principal:* $\underbrace{(-3X^5 + X^4 - X + 5)}_{f}{}^4 + \underbrace{-81X^{20} + 19X^{19}}_{g}$

Cuando sumo me queda: $\text{cp}\, f^4 - \text{cp}\, g = (-3)^4 - 81 = 0 \Rightarrow gr(f^4 + g) < 20$

$\to$ Calculo el cp $f^4 + g$ con $\text{gr}(f^4 + g) = 19$.

Laburo a f:

$$\left\{\begin{array}{l}
\xrightarrow[\text{fórmula de } f\cdot g]{\text{para usar}} (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 = ({\color{cyan}-3}X^5 + {\color{magenta}1}X^4 - X + 5)^2 \cdot (-3X^5 + X^4 - X + 5)^2 \\
f^2 \cdot f^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \text{ con } a_i \text{ y } b_i \text{ los coeficientes de } f^2 \text{ y el otro } f^2 \text{ respectivamente } {\color{green}\bigstar^2} \\
\displaystyle\sum_{k=0}^{20} \left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \right) X^k \xrightarrow[\text{el término con } k=19]{\text{me interesa solo}} \sum_{i+j=19} a_i b_j X^{19} \overset{{\color{magenta}\bigstar^1}}{=} a_9 \cdot b_{10} + a_{10} \cdot b_9 \overset{{\color{green}\bigstar^2}}{=} 2 \cdot a_9 \cdot b_{10} \\
\left\{\begin{array}{l}
\xrightarrow[\text{ojímetro}]{b_{10} \text{ sale a}} b_{10} = ({\color{cyan}-3})^2 = 9 \\
\xrightarrow[\text{a usar } \sum f\cdot g \text{ en } k=9]{a_9 \text{ no tan fácil, volver}} f \cdot f = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot d_j \right) X^k \xrightarrow{k=9} \sum_{i+j=9} c_i \cdot d_j X^9 \overset{{\color{orange}\bigstar^3}}{=} {\color{magenta}c_4} \cdot {\color{cyan}d_5} + {\color{cyan}c_5} \cdot {\color{magenta}d_4} \overset{{\color{green}\bigstar^2}}{=} 2 \cdot {\color{magenta}c_4} \cdot {\color{cyan}d_5}
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\xrightarrow[\text{ojímetro}]{{\color{cyan}d_5} \text{ sale a}} {\color{cyan}d_5} = {\color{cyan}-3} \\
\xrightarrow[\text{ojímetro}]{{\color{magenta}c_4} \text{ sale a}} {\color{magenta}c_4} = 1
\end{array}\right\} \to a_9 = -6 \to \left\{\begin{array}{l} \text{cp}\, f^4 = 2 \cdot (-6) \cdot (9) = -108 \\ \text{cp}\, g = 19 \end{array}\right\} \to \boxed{\text{cp}\, f^4 + g = -89} \quad \checkmark
\end{array}\right.$$

${\color{magenta}\bigstar^1}$: Sabemos que el $\text{gr}(f^4) = 20 \Rightarrow \text{gr}(f^2) = 10$. Viendo las posibles combinaciones al multiplicar 2 polinomios de manera tal que los exponentes de las X sumen 19, es decir $X^i \cdot X^j = X^{19}$ con $i, j \leq 10$ solo puede ocurrir *cuando los exponentes* $\left\{\begin{array}{c} i = 10,\ j = 9 \\ \vee \\ i = 9,\ j = 10 \end{array}\right\}$

${\color{green}\bigstar^2}$: porque estoy multiplicando el mismo polinomio, $a_i = b_i$. Pero lo dejo distinto para hacerlos *visualmente* más genérico.

${\color{orange}\bigstar^3}$: Idem ${\color{magenta}\bigstar^1}$ para el polinomio f

grado: 19

2. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX →.

3. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX →.

---

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$ y $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$ y $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iii) $f = X^n - 1$ y $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

---

i)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
5X^4 & +2X^3 & & -X & +4 & X^2+2 \\
\cline{6-6}
-5X^4 & & -10X^2 & & & 5X^2+2X-10 \\
\cline{1-3}
& 2X^3 & -10X^2 & -X & & \\
& -2X^3 & & -4X & & \\
\cline{2-4}
& & -10X^2 & -5X & +4 & \\
& & 10X^2 & & +20 & \\
\cline{3-5}
& & & -5X & +24 &
\end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

ii)
$$\begin{array}{rrrr|l}
4X^4 & +X^3 & & -4 & 2X^2+1 \\
\cline{5-5}
-4X^4 & & -2X^2 & & 2X^2+\frac{1}{2}X-1 \\
\cline{1-3}
& X^3 & -2X^2 & & \\
& -X^3 & & -\frac{1}{2}X & \\
\cline{2-4}
& & -2X^2 & -\frac{1}{2}X-4 & \\
& & 2X^2 & +1 & \\
\cline{3-4}
& & & -\frac{1}{2}X-3 &
\end{array}$$

Resultado válido para $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

En $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 4X^4 + X^3 - 4 = (2X^2+1) \cdot \underbrace{(2X^2+4X+6)}_{q[X]} + \underbrace{(3X+4)}_{r[X]}$

iii) Después de hacer un par iteraciones en la división asoma la idea de que:

$X^n - 1 = (X-1) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} X^j}_{q[X]} + \underbrace{0}_{r[X]}$, (que es la geométrica con $X \neq 1$)

Inducción: Quiero probar que $p(n) : X^n - 1 = (X-1) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} X^j \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $p(1) : X^1 - 1 = (X-1) \underbrace{\sum_{j=0}^{1-1} X^j}_{X^0=1} \Rightarrow p(1)$ es Verdadero ✓

Paso inductivo:

$p(k): \underbrace{X^k - 1 = (X-1)\cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI}$ es Verdadera $\overset{?}{\Rightarrow} p(k+1): X^{k+1}-1 = (X-1)\cdot \sum_{j=0}^{k} X^j$ es Verdadera

$(X-1)\cdot \sum_{j=0}^{k} X^j = (X-1)\cdot (\sum_{j=0}^{k-1} X^j + X^k) = \underbrace{(X-1)\cdot \sum_{j=0}^{k-1} X^j}_{HI} + (X-1)\cdot X^k = X^k - 1 + X^{k+1} - X^k =$

$X^{k+1} - 1$ ✓

Dado que $p(1)$, $p(k)$ y $p(k+1)$ resultaron verdaderas por el principio de inducción también será verdadera $p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$,

ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$,

iii) El resto de la división de $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

---

i) Haciendo la division de $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^3 + 2X^2 + 2X + 1 = (X - a + 2)(X^2 + aX + 1) + \underbrace{(a^2 - 2a + 1)X + a - 1}_{\text{resto}}$$

Así, para que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$ tiene que ocurrir que el resto sea 0. O sea,

$$X^2 + aX + 1 \mid X^3 + 2X^2 + 2X + 1 \iff (a^2 - 2a + 1)X + a - 1 = 0$$
$$\iff \begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a - 1 = 0 \iff a = 1$
- $a^2 - 2a + 1 = 0 \xrightarrow{a=1} 1^2 - 2.1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ ✓

Luego, el valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ es divisible por $X^2 + aX + 1$ es $\boxed{a = 1}$.

ii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iii) Haciendo la division de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$, se tiene que:

$$X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1 = q(X^2 + aX + 1) + \underbrace{r}_{\text{resto}}$$

con $q = (X^3 - aX^2 + (a^2 - 4)X - a^3 + 5a - 1)$ y $r = (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2$.

Así,

$$\begin{aligned} & r = -8X + 4 \\ \iff & (a^4 - 6a^2 + a + 2)X + a^3 - 5a + 2 = -8X + 4 \\ \iff & \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0 \\ a^3 - 5a - 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Analizo las ecuaciones:

- $a^3 - 5a - 2 = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 5) - 2 = 0$
  Veo que $a = -2$ es solución, por lo que divido $a^3 - 5a - 2$ por $a + 2$ con Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -5 & -2 \\ -2 & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

  Por lo que $a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a^2 - 2a - 1)$

  Busco las raíces de $a^2 - 2a - 1$ con la fórmula resolvente:

$$\begin{aligned} a_{+,-} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

  Por lo que $a^3 - 5a - 2 = (a + 2)(a - 1 + \sqrt{2})(a - 1 - \sqrt{2}) = 0 \iff \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 + \sqrt{2} \\ a = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

- $a^4 - 6a^2 + a + 10 = 0$
  Me fijo que valores de a obtenidos antes verifican:
  - Si $a = -2 \Rightarrow (-2)^4 - 6(-2)^2 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0 \quad \checkmark$
  - Si $a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^4 - 6(1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 10 = 10 + \sqrt{2} \neq 0$
  - Si $a = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow (1 - \sqrt{2})^4 - 6(1 - \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2} + 10 = 10 - \sqrt{2} \neq 0$

Luego, el único valor de $a \in \mathbb{C}$ tal que el resto de dividir a $X^5 - 3x^3 - x^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$ es $\boxed{\text{a = -2}}$

6. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in \mathbb{K}[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in \mathbb{K}[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g\ (h)$.

i) Probar que $\equiv\ (h)$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{K}[X]$.

ii) Probar que si $f_1 \equiv g_1\ (h)$ y $f_2 \equiv g_2\ (h)$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2\ (h)$ $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2\ (h)$.

iii) Probar que si $f \equiv g\ (h)$ entonces $f^n \equiv g^n\ (h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iv) Probar que r es el resto de la división de f por h si y solo si $f \equiv r\ (h)$ y $r = 0$ o $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

---

i) uff... Para probar que esto es una relación de equivalencia pruebo que sea *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*,

- *reflexiva*: Es f congruente a f módulo h?
  $f \equiv f\ (h) \iff h \mid f - f = 0 \iff h \mid 0 \quad \checkmark$
- *simétrica*: Si $f \equiv g\ (h) \overset{?}{\iff} g \equiv f\ (h)$
  $f \equiv g\ (h) \iff h \mid f - g \iff h \mid -(g - f) \iff h \mid g - f \iff g \equiv f\ (h) \quad \checkmark$
- *transitiva*: Si $\begin{cases} f \equiv g\ (h) \\ g \equiv p\ (h) \end{cases} \overset{?}{\iff} f \equiv p\ (h).$

$$\begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid g - p \end{cases} \xrightarrow[\to F_2]{F_1 + F_2} \begin{cases} h \mid f - g \\ h \mid f - p \end{cases} \to f \equiv p\ (h) \quad \checkmark$$

Cumple condiciones para ser una relación de equivalencias en $\mathbb{K}[X]$

ii) Si $\begin{cases} f_1 \equiv g_1\ (h) \\ f_2 \equiv g_2\ (h) \bigstar^1 \end{cases}$

$$f_1 \equiv g_1\ (h) \iff h \mid f_1 - g_1 \Rightarrow h \mid f_2 \cdot (f_1 - g_1) \iff f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot f_2\ (h) \overset{\bigstar^1}{\iff} f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2\ (h)$$

iii) *Inducción:* Quiero probar $p(n)$: Si $f \equiv g\ (h)$ entonces $f^n \equiv g^n\ (h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Caso base: $p(1) : f^1 \equiv g^1\ (h)\bigstar^2$ Verdadera $\checkmark$

Paso inductivo: $p(k) : \underbrace{f^k \equiv g^k\ (h)}_{HI}$ es verdadera $\overset{?}{\Rightarrow} p(k+1) : f^{k+1} \equiv g^{k+1}\ (h)$ ¿También lo es?

$$f^k \equiv g^k\ (h) \iff h \mid f^k - g^k \Rightarrow h \mid f \cdot (f^k - g^k) \iff f^{k+1} \equiv f \cdot g^k\ (h) \overset{\bigstar^2}{\iff} f^{k+1} \equiv g^{k+1}\ (h) \quad \checkmark$$

Finalmente $p(1), p(k), p(k+1)$ resultaron verdaderas y por el principio de inducción $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

7. Hallar el resto de la división de f por g para:

i) $f = X^{353} - X - 1$ y $g = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$ y $g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$

iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, y $g = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$,

iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$, y $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ (Sugerencia ver **4.** iii))).

---

i) $g \mid g \iff X^{31} - 2 \equiv 0\ (X^{31} - 2) \iff X^{31} \equiv 2\ (g)$

$$f = X^{353} - X - 1 = (\underbrace{X^{31}}_{\overset{(g)}{\equiv} 2})^{11} X^{12} - X - 1 \overset{(g)}{\equiv} 2^{11} X^{12} - X - 1 \to \boxed{r_g(f) = 2^{11} X^{12} - 1}$$

ii) $g \mid g \iff X^6+1 \equiv 0\ (X^6+1) \iff X^6 \equiv -1\ (g)$

$f = X^{1000}+X^{40}+X^{20}+1 = (X^6)^{166}X^4+(X^6)^6X^4+(X^6)^3X^2+1 \overset{(g)}{\equiv} X^4+X^4-X^2+1 = 2X^4-X^2+1$

$\to \boxed{r_g(f) = 2X^4-X^2+1}$

¿Qué onda en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$? $\to \begin{cases} \text{si } p=2 \to \boxed{X^2+1} \\ \text{si } p>2 \to \boxed{2X^4+(p-1)X^2+1} \end{cases}$

iii) $g \mid g \iff X^{100}-X+1 \equiv 0\ (X^{100}-X+1) \iff X^{100} \equiv X-1\ (g)$

$f = X^{200}-3X^{101}+2 = (X^{100})^2-3X^{100}X+2 \overset{(g)}{\equiv} (X-1)^2-3(X-1)X+2$

$\to \boxed{r_g(f) = (X-1)^2-3(X-1)X+2}$

iv) *Usando la sugerencia*: Del ejercicio **4.** iii) sale que $X^n-1 = (X-1)\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1} X^k$

$\xrightarrow[\text{para el } g]{n=5} X^5-1 = (X-1)\underbrace{(X^4+X^3+X^2+X+1)}_{g} \iff X^5 \equiv \underbrace{1}_{r_g(X^5)}\ (g) \quad \checkmark$

$f = (X^5)^{603}X+2(X^5)^{366}X^3-(X^5)^{34}X^4+(X^5)^{27}X^2+2X^4-X^3+1$

$f \equiv \underbrace{X+2X^3-X^4+X^2+2X^4-X^3+1}_{=X^4+X^3+X^2+X+1=g}\ (g) \iff \boxed{f \equiv 0\ (g)}$

8. ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo:

i) $f = X^5+X^3-6X^2+2X+2$, $g = X^4-X^3-X^2+1$,

ii) $f = X^6+X^4+X^2+1$, $g = X^3+X$,

iii) $f = 2X^6-4X^5+X^4+4X^3-6X^2+4X+1$, $g = X^5-2X^4+2X^2-3X+1$,

---

i)
$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
X^5 & & +X^3 & -6X^2 & +2X & +2 & X^4-X^3-X^2+1 \\
\cline{7-7}
-X^5 & +X^4 & +X^3 & & -X & & X+1 \\
\cline{1-5}
 & X^4 & +2X^3 & -6X^2 & +X & +2 & \\
 & -X^4 & +X^3 & +X^2 & & -1 & \\
\cline{2-6}
 & & 3X^3 & -5X^2 & +X & +1 &
\end{array}
$$

$\xrightarrow{\text{Euclides}} (f:g) = (g : 3X^3-55X^2+X+1)$

$\xrightarrow[\text{en función de } g]{\text{escribo a } f} f = (X+1)\cdot g + 3X^3-55X^2+X+1$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -X^3 & -X^2 & & +1 & 3X^3-5X^2+X+1 \\
\cline{6-6}
-X^4 & +\frac{5}{3}X^3 & -\frac{1}{3}X^2 & -\frac{1}{3}X & & \frac{1}{3}X+\frac{2}{9} \\
\cline{1-4}
 & \frac{2}{3}X^3 & -\frac{4}{3}X^2 & -\frac{1}{3}X & +1 & \\
 & -\frac{2}{3}X^3 & +\frac{10}{9}X^2 & -\frac{2}{9}X & -\frac{2}{9} & \\
\cline{2-5}
 & & -\frac{2}{9}X^2 & -\frac{5}{9}X & +\frac{7}{9} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3X^3 & -5X^2 & +X & +1 & -\frac{2}{9}X^2-\frac{5}{9}X+\frac{7}{9} \\
\cline{5-5}
-3X^3 & -\frac{15}{2}X^2 & +\frac{21}{2}X & & -\frac{27}{2}X+\frac{225}{4} \\
\cline{1-3}
 & -\frac{25}{2}X^2 & +\frac{23}{2}X & +1 & \\
 & \frac{25}{2}X^2 & +\frac{125}{4}X & -\frac{175}{4} & \\
\cline{2-4}
 & & \frac{171}{4}X & -\frac{171}{4} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr|l}
-\frac{2}{9}X^2 & -\frac{5}{9}X & +\frac{7}{9} & \frac{171}{4}X-\frac{171}{4} \\
\cline{4-4}
\frac{2}{9}X^2 & -\frac{2}{9}X & & -\frac{8}{1539}X-\frac{28}{1539} \\
\cline{1-2}
 & -\frac{7}{9}X & +\frac{7}{9} & \\
 & \frac{7}{9}X & -\frac{7}{9} & \\
\cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
X^5+X^3-6X^2+2X+2 &= \big(X^4-X^3-X^2+1\big)\cdot\big(X+1\big)+\big(3X^3-5X^2+X+1\big)\\
X^4-X^3-X^2+1 &= \big(3X^3-5X^2+X+1\big)\cdot\big(\tfrac{1}{3}X+\tfrac{2}{9}\big)+\big(-\tfrac{2}{9}X^2-\tfrac{5}{9}X+\tfrac{7}{9}\big)\\
3X^3-5X^2+X+1 &= \big(-\tfrac{2}{9}X^2-\tfrac{5}{9}X+\tfrac{7}{9}\big)\cdot\big(-\tfrac{27}{2}X+\tfrac{225}{4}\big)+\big(\tfrac{171}{4}X-\tfrac{171}{4}\big)\\
-\tfrac{2}{9}X^2-\tfrac{5}{9}X+\tfrac{7}{9} &= \big(\tfrac{171}{4}X-\tfrac{171}{4}\big)\cdot\big(-\tfrac{8}{1539}X-\tfrac{28}{1539}\big)+0
\end{aligned}
$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\boxed{\to (f:g)=X-1}$

ii) $X^6+X^4+X^2+1=\big(X^3+X\big)\cdot X^3+\big(X^2+1\big)$

$$X^3+X=\big(X^2+1\big)\cdot X+0$$

El MCD será el último resto no nulo y mónico $\to\boxed{(f:g)=X^2+1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y g $\to\boxed{X^2+1=f\cdot 1+g\cdot(-X^3)}$

iii) $\xrightarrow[\text{Euclides}]{\text{Haciendo}}$

$$
\begin{aligned}
2X^6-4X^5+X^4+4X^3-6X^2+4X+1 &= \big(X^5-2X^4+2X^2-3X+1\big)\cdot 2X+\big(X^4+2X+1\big)\\
X^5-2X^4+2X^2-3X+1 &= \big(X^4+2X+1\big)\cdot\big(X-2\big)+3\\
X^4+2X+1 &= 3\cdot\big(\tfrac{1}{3}X^4+\tfrac{2}{3}X+\tfrac{1}{3}\big)+0
\end{aligned}
$$

El MCD será el último resto no nulo y *mónico* $\to\boxed{(f:g)=1}$

El MCD escrito como combinación polinomial de f y g $\to\boxed{1=\frac{1}{3}g\cdot(2X^2-4X+1)-\frac{1}{3}f\cdot(X-2)}$

10. Sea $f\in\mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1)=-2, f(2)=1$ y $f(-1)=0$. Hallar el resto de la división de f por X^3-2X^2-X+2.

Sea $P\in\mathbb{K}[X]\Rightarrow$ el resto de dividir a P por $X-a$ es $P(a)$.

$f(X)=q(X)\cdot\underbrace{X^3-2X^2-X+2}_{g(X)}+r(X)$, con $g(X)=(X-2)\cdot(X-1)\cdot(X+1)$ y $r(X)=a^2+bX+c$, ya

que el $\mathrm{gr}(r)<\mathrm{gr}(g)$ $\xrightarrow{\text{evaluar}}$ $\begin{cases} f(1)=-2=q(1)\cdot\cancel{g(1)}^{0}+r(1)=-2\\ f(2)=1=q(2)\cdot\cancel{g(2)}^{0}+r(2)=1\\ f(-1)=0=q(-1)\cdot\cancel{g(-1)}^{0}+r(-1)=0\end{cases}$ $\to\begin{cases} r(1)=a+b+c=-2\\ r(2)=4a+2b+c=1\\ r(-1)=a-b+c=0\end{cases}\to$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-2\\4&2&1&1\\1&-1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{4}{3}\\0&1&0&-1\\0&0&1&-\frac{7}{3}\end{array}\right)\to\boxed{r(X)=\frac{4}{3}X^2-X-\frac{7}{3}}$$

11. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$ en $\mathbb{Q}[X]$.

$$\begin{cases} f(X) = X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1 \\ g(X) = X \cdot (X-1) \cdot (X+1) \end{cases} \Rightarrow f = q(X) \cdot g(X) + r(X) \text{ con } \operatorname{gr}(\underbrace{aX^2 + bX + c}_{r(X)}) \leq 2$$

$$\begin{cases} f(0) = q(0) \cdot \underbrace{g(0)}_{=0} + r(0) = 1 \\ f(1) = q(1) \cdot \underbrace{g(1)}_{=0} + r(1) = 3 \\ f(-1) = q(-1) \cdot \underbrace{g(-1)}_{=0} + r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 + 1 = \begin{cases} 2 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{ecuaciones de } r(X)]{\text{sistema de}} \begin{cases} r(0) = c = 1 \\ r(1) = a + b + 1 = 3 \to a + b = 2 \\ r(-1) = a - b + 1 = \begin{cases} 2 \to a - b = 1 & n \text{ impar} \\ 1 \to a - b = 0 & n \text{ par} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow[\text{impar}]{n} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \boxed{r_{impar}(X) = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1} \quad \checkmark \\ \xrightarrow[\text{par}]{n} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \boxed{r_{par}(X) = X^2 + X + 1} \quad \checkmark \end{cases}$$

---

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $f(X) = X^6 + X^3 - 2$.

Primera raíz: $f(\alpha_1 = 1) = 0 \to f(X) = q(X) \cdot (X - 1)$. Busco $q(X)$ con algoritmo de división.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} X^6 & & & +X^3 & & & -2 & X-1 \\ \cline{8-8} -X^6 & +X^5 & & & & & & X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2 \\ \cline{1-2} & X^5 & & & & & & \\ & -X^5 & +X^4 & & & & & \\ \cline{2-3} & & X^4 & +X^3 & & & & \\ & & -X^4 & +X^3 & & & & \\ \cline{3-4} & & & 2X^3 & & & & \\ & & & -2X^3 & +2X^2 & & & \\ \cline{4-5} & & & & 2X^2 & & & \\ & & & & -2X^2 & +2X & & \\ \cline{5-6} & & & & & 2X & -2 & \\ & & & & & -2X & +2 & \\ \cline{6-7} & & & & & & 0 & \end{array}$$

El cociente $q(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 2X + 2$ se puede factorizar en grupos como $q(X) = (X^2 + X + 1) \cdot (X^3 + 2)$. Entonces las 5 raíces que me faltan para tener las 6 que debe tener $f \in \mathbb{C}[X]$ salen de esos dos polinomios.

$$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X^3 + 2 = 0 \xrightarrow[X = re^{i\theta}]{\text{exponencial}} \left\{ \begin{array}{l} r^3 = 2 \to r = \sqrt[3]{2} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \to \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ con } k = 0,\, 1,\, 2. \end{array} \right\} \to \begin{cases} \alpha_4 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \alpha_5 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{2} \\ \alpha_6 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

13. Sea $w = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. Probar que $w + w^2 + w^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$

Voy a usar que si $w \in G_7 \Rightarrow \sum_{j=0}^{6} w^j = 0 \quad (w \neq 1)$

Si $f(X) = X^2 + X + 2$ y $w + w^2 + w^4$ es raíz $\Rightarrow f(w + w^2 + w^4) = 0$

$(w + w^2 + w^4)^2 + w + w^2 + w^4 + 2 = \underbrace{w^8}_{=w} + 2w^6 + 2w^5 + 2w^4 + 2w^3 + 2w^2 + w + 2 = 2 \cdot \sum_{j=0}^{6} w^j = 0 \quad \checkmark$

14.

i) Probar que si $w = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces $X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})]$.

ii) Calcula, justificando cuidadosamente, el valor exacto de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

---

i) Voy a usar que si $w \in G_5 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^{4} w^j = 0 \quad (w \neq 1) \bigstar^2 \\ w^k = w^{r_5(k)} \bigstar^1 \end{cases}$

$X^2 + X - 1 = [X - (w + w^{-1})] \cdot [X - (w^2 + w^{-2})] =$
$X^2 - (w^2 + w^{-2})X - (w + w^{-1})X + \underbrace{(w + w^{-1})(w^2 + w^{-2})}_{\bigstar^1} =$

$= X^2 - X(\underbrace{w^2 + w^{-2} + w + w^{-1}}_{\bigstar^1}) + \underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\bigstar^2} =$

$= X^2 - X(\underbrace{w + w^2 + w^3 + w^4}_{\bigstar^2}) + -1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0} = X^2 - X(-1 + \underbrace{1 + w + w^2 + w^3 + w^4}_{=0}) - 1 =$

$= X^2 + X - 1 \quad \checkmark$

ii) Calculando las raíces a mano de $X^2 + X - 1 \to \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{y} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Pero del resultado del inciso i) tengo que :
$w = e^{i\frac{2\pi}{5}} \xrightarrow[\text{la factorización es}]{\text{sé que una raíz dada}} w + w^{-1} = w + \overline{w} = 2\,\mathrm{Re}(w) = 2 \cdot \underbrace{\cos(\tfrac{2\pi}{5})}_{\cos\theta \geq 0,\, \theta \in [0, 2\pi]} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\to \boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}} \quad \checkmark$

15.

i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y g si y sólo sí a es raíz de $(f : g)$.

ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz en común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

---

i) Hacer!

ii) Busco el $(f:g)$:

$$\begin{aligned} X^4+3X-2 &= \big(X^4+3X^3-3X+1\big)\cdot 1 + \big(-3X^3+6X-3\big)\\ X^4+3X^3-3X+1 &= \big(-3X^3+6X-3\big)\cdot\big(-\tfrac{1}{3}X-1\big)+\big(2X^2+2X-2\big)\\ -3X^3+6X-3 &= \big(2X^2+2X-2\big)\cdot\big(-\tfrac{3}{2}X+\tfrac{3}{2}\big)+0 \end{aligned}$$

$$(f:g)=X^2+X-1 \xrightarrow{\text{raíces}} \begin{cases}\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \alpha_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$$X^4+3X-2=\big(X^2+X-1\big)\cdot\big(X^2-X+2\big)+0$$

16. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f=X^5-2X^3+X,\quad a=1,$

ii) $f=X^6-3X^4+4,\quad a=i,$

iii) $f=(X-2)^2(X^2-4)+(X-2)^3(X-1),\quad a=2,$

iv) $f=(X-2)^2(X^2-4)-4(X-2)^3,\quad a=2.$

---

i) $f=X^5-2X^3+X,\quad a=1,$

Todos casos de factoreo:

$f=X^5-2X^3+X=X(X^4-2X^2+1)=X(X^2-1)^2=X(X-1)^2(X+1)^2=$

$\boxed{\text{La multiplicidad de } a=1 \text{ como raíz es 2.}}$

ii) $f=X^6-3X^4+4,\quad a=i,$

Si $a=i$ es raíz, entonces $-i$ también lo es en un polinomio $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{rrr|l} X^6 & -3X^4 & +4 & X^2+1\\ \cline{4-4} -X^6 & -X^4 & & X^4-4X^2+4\\ \hline & -4X^4 & & \\ & 4X^4 & +4X^2 & \\ \hline & & 4X^2+4 & \\ & & -4X^2-4 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

$f=(X^2+1)(X^4-4X^2+4)=(X^2+1)(X^2-2)^2=(X^2+1)(X-\sqrt{2})^2(X+\sqrt{2})^2=$
$(X-i)^1(X+i)(X-\sqrt{2})^2(X+\sqrt{2})^2=$

$\boxed{\text{La multiplicidad de } a=i \text{ como raíz de } f \text{ es 1.}}$

iii) $f=(X-2)^2(X^2-4)+(X-2)^3(X-1),\quad a=2,$

$f=(X-2)^3((X+2)+(X+1))=(X-2)^3(2X+3)$

$\boxed{\text{La multiplicidad de } a=2 \text{ como raíz de } f \text{ es 3.}}$

iv) $f=(X-2)^2(X^2-4)-4(X-2)^3,\quad a=2,$

$f=(X-2)^2(X^2-4)-4(X-2)^3=(X-2)^2(X-2)(X+2)-4(X-2)^3=$
$(X-2)^3(X+2-4)=(X-2)^4$

$\boxed{\text{La multiplicidad de } a=2 \text{ como raíz de } f \text{ es 4.}}$

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene solo raíces simples en $\mathbb{C}$.

$f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$

$\xrightarrow{\text{derivo}} f' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1} \overset{n>0}{\iff} f' = n(n+1)X^{n-1}(X-1)$

$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n > 1 \Rightarrow f'(\alpha = 1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(\alpha = 0) = 0 \\ n = 1 \Rightarrow f'(\alpha = 1) = 0 \bigstar^1 \end{cases}$

Para que las raíces α, de f no sean simples, es necesario que $f'(\alpha) = 0$. Por lo tanto, estudio solo los valores de raíces encontrados para la derivada. Si f ha de tener raíces dobles, estás deberían ser $\alpha = 1 \quad \text{o} \quad \alpha = 0$. Entonces:

$\begin{cases} f(\alpha = 1) = a - 1 \Rightarrow f(1) \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \neq 1 \\ f(\alpha = 0) = a \Rightarrow f(0) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \end{cases}$

Si $a = 0 \wedge n \overset{\bigstar^1}{=} 1 \Rightarrow f$ tiene solo una raíz simple en 0.
Si $a \neq 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Si $a \neq 0 \wedge n > 1 \Rightarrow f$ tiene solo raíces simples.
seguramente hay una mejor forma de expresar la respuesta.

18. Controlar y Pasar

19. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en $\mathbb{C}$. Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

Si f tiene raíces múltiples $\alpha_k \Leftrightarrow f(\alpha_k) = f'(\alpha_k) = 0$, por lo tanto tanto comienzo buscando las raíces de f' para sacarme ese a de en medio.

$f' = 20X^{19} + 80X^9 = 20X^9(X^{10} + 4) \Rightarrow f' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X^{10} = -4 \Leftrightarrow X = \sqrt[10]{4} e^{i\frac{2k+1}{10}\pi} \ k \in \mathbb{Z}_{[0,9]} \end{cases}$

Hay de momento 11 raíces de f'. Me interesa saber si son raíces de f:
$f(0) = 2a \Rightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$
$f = (X^{10})^2 + 8X^{10} + 2a \Rightarrow f(\alpha = X^{10} = -4) = (-4)^2 + 8(-4) + 2a = -16 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 8$

Entonces:
Si $a = 0 \Rightarrow f = X^{10}(X^{10} + 8)$
$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X = 0 \quad \text{o} \quad X^{10} = -8$, donde $\boxed{\mu(0; f) = 10}$ y $\boxed{\mu(\sqrt[10]{8} e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}); f) = 1 \ k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}$.
11 raíces distintas.

Si $a = 8 \Rightarrow f = X^{20} + 8X^{10} + 16 = (X^{10} + 4)^2$
$\Rightarrow f = 0 \Leftrightarrow X^{10} = -4$, donde $\boxed{\mu(\sqrt[10]{4} e^{i\frac{2k+1}{10}\pi}); f) = 2 \ k \in \mathbb{Z}_{[0-9]}}$.
10 raíces distintas.

20. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow$, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX $\rightarrow$.

21.

i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.

ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.

---

i) $(X-1)^2 \,\big|\, f \;\; \forall a \in \mathbb{C} \Leftrightarrow 1$ es *por lo menos* raíz doble de $f \Leftrightarrow f(1) = f'(1) = 0$.

$$\begin{cases} f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1 & \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \\ f' = 6X^5 - 10X^4 + 4(1+a)X^3 - 6aX^2 + 2(1+a)X - 2 & \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f'(1) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Calculando $f(1)$ y $f'(1)$ se comprueba. ✓

ii) $(X-1)^3 \,\big|\, f \Leftrightarrow f''(1) = 0$

$\Rightarrow f'' = 30X^4 - 40X^3 + 12(1+a)X^2 - 12aX + 2(1+a) \xrightarrow[X=1]{\text{evalúo}} f''(1) = 2a$

$\Rightarrow f''(1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$\boxed{(X-1)^3 \,\big|\, f \iff a = 0}$ ✓

Observar que si $a \neq 0$, 1 es una raíz *doble* de f de otra forma es una raíz *por lo menos* triple.

22. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

23. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

24. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

25. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

26. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

27. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

28. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

29. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

30. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

31. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

32. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

33. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

34. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

35. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

36. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

37. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

38. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

39. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram → , o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

Ejercicios extras:

1.

a) Hallar todos los posibles $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} > 0$ tales que:

$$f = X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + \mathbf{c}$$

tenga una raíz de argumento $\frac{3\pi}{2}$

b) Para cada valor de $\mathbf{c}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene al menos una raíz doble.

---

a) Si la raíz $\alpha = re^{i\frac{3\pi}{2}} = r(-i) \Rightarrow f(r(-i)) = 0$

Voy a usar que: $\star^1 \begin{cases} (-i)^2 &= -1 \\ (-i)^3 &= i \\ (-i)^4 &= 1 \\ (-i)^5 &= -i \\ (-i)^6 &= -1 \end{cases}$

$$f(r(-i)) = (r(-i))^6 - 4(r(-i))^5 - (r(-i))^4 + 4^3 + 4(r(-i))^2 + 48(r(-i)) + \mathbf{c} \overset{\star^1}{=}$$

$$-r^6 + 4r^5 i - r^4 - 4r^3 i - 4r^2 - 48ri + \mathbf{c} = 0 \iff \begin{cases} \text{Re} : -r^6 - r^4 - 4r^2 + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 \\ \text{Im} : r(4r^4 - 4r^2 - 48) = 0 \xrightarrow[r^2 = y \text{ y } r \in \mathbb{R}_{>0}]{\text{bicuadrática}} r^2 = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto si $\mathbf{c} = r^6 + r^4 + 4r^2 = (r^2)^3 + (r^2)^2 + 4r^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{c} = 48}$ ✓
con raíces $\pm\sqrt{3}i$ dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$

b) Debe ocurrir que $(X - \sqrt{3}i))(X + \sqrt{3}i) = X^2 + 3 \mid f$

$$\begin{array}{l|l} X^6 - 4X^5 - X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 48X + 48 & X^2 + 3 \\ \hline -X^6 \qquad\qquad - 3X^4 & X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16 \\ \quad - 4X^5 - 4X^4 + 4X^3 & \\ \quad 4X^5 \qquad\quad + 12X^3 & \\ \qquad - 4X^4 + 16X^3 + 4X^2 & \\ \qquad 4X^4 \qquad\quad + 12X^2 & \\ \qquad\quad 16X^3 + 16X^2 + 48X & \\ \qquad\quad - 16X^3 \qquad - 48X & \\ \qquad\qquad 16X^2 \qquad + 48 & \\ \qquad\qquad - 16X^2 \qquad - 48 & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$f = (X^2 + 3)\underbrace{(X^4 - 4X^3 - 4X^2 + 16X + 16)}_{q}$ como f tiene al menos una raíz doble puedo ver las raíces de la derivada de q:

$q' = (4X^3 - 12X^2 - 8X + 16)' = 4(X^3 - 3X^2 - 2X + 4) = 0 \xrightarrow[\pm 1, \pm 2, \pm 4]{\text{Posibles raíces, Gauss :(}} q'(1) = 0$, pero $g(1) \neq 0 \Rightarrow f(1) \neq 0$

$\xrightarrow[\text{bajar grado}]{\text{divido para}}$

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -3X^2 & -2X & +4 & X-1 \\
\cline{5-5}
-X^3 & +X^2 & & & X^2-2X-4 \\
\cline{1-2}
& -2X^2 & -2X & & \\
& 2X^2 & -2X & & \\
\cline{2-3}
& & -4X & +4 & \\
& & 4X & -4 & \\
\cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

$g' = 4(X-1)\underbrace{(X^2-2X-4)}_{=h} \xrightarrow[\text{de } h]{\text{busco raíces}} X^2-2X-4 = 0 \iff \alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$

$h = (X-(1+\sqrt{5}))\cdot(X-(1-\sqrt{5}) = X^2-2X-4$ Para calcular que $f(\alpha_1) = g(\alpha_1) = 0$ y comprobar que es una raíz doble, puedo hacer:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -4X^3 & -4X^2 & +16X & +16 & X^2-2X-4 \checkmark g = \\
\cline{6-6}
-X^4 & +2X^3 & +4X^2 & & & X^2-2X-4 \\
\cline{1-3}
& -2X^3 & & +16X & & \\
& 2X^3 & -4X^2 & -8X & & \\
\cline{2-4}
& & -4X^2 & +8X & +16 & \\
& & 4X^2 & -8X & -16 & \\
\cline{3-5}
& & & & 0 &
\end{array}$$

$h^2 = (X^2-2X-4)^2 \to$ no la vi venir

factorizaciones:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{Q}[X] & \to \quad f = (X^2+3)\,(X^2+3)(X^2-2X-4)^2 \\ \mathbb{R}[X] & \to \quad f = (X-(1+\sqrt{5}))(X-(1-\sqrt{5}))(X^2-2X-4)^2 \\ \mathbb{C}[X] & \to \quad f = (X-(1+\sqrt{5}))(X-(1-\sqrt{5}))(X-3i)^2(X+3i)^2 \end{cases}} \quad \checkmark$$

---

2. Factorizar el polinomio $P = X^6-X^5-13X^4+14X^3+35X^2-49X+49$ como producto de irreducibles en $\mathbb{C}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ sabiendo que $\sqrt{7}$ es una raíz múltiple.

Un polinomio con coeficientes racionales, y una raíz irracional $\alpha = \sqrt{7}$, tendrá también al *conjugado irracional* [1] , $\overline{\alpha} = -\sqrt{7}$

Si agregamos la información de que $\sqrt{7}$ es *por lo menos* raíz doble, obtenemos que:

$$\begin{cases} \sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz de } f \Rightarrow (X^2-7) \mid f \\ \sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow -\sqrt{7} \text{ es raíz doble de } f \Rightarrow (X^2-7)^2 = X^4-14X^2+49 \mid f \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^6 & -X^5 & -13X^4 & +14X^3 & +35X^2 & -49X & +49 & X^4-14X^2+49 \\
\cline{8-8}
-X^6 & & +14X^4 & & -49X^2 & & & X^2-X+1 \\
\cline{1-5}
& -X^5 & +X^4 & +14X^3 & -14X^2 & -49X & & \\
& X^5 & & -14X^3 & & +49X & & \\
\cline{2-6}
& & X^4 & & -14X^2 & & +49 & \\
& & -X^4 & & +14X^2 & & -49 & \\
\cline{3-7}
& & & & & & 0 &
\end{array}$$

$f = (X^4-14X^2+49)\cdot(X^2-X+1) \xrightarrow{\text{resolvente}} \begin{cases} \alpha_{+,-} = \frac{1\pm w}{2} \\ w^2 = -3 \end{cases}$

$\to f = (X^4-14X^2+49)\cdot(X-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X-(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}))$

[1] Estoy usando la misma notación para *conjugado racional* y *conjugado complejo*. ¿Está bien? No sé, no me importa mientras se entienda.

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{Q}[X] & \to & f = (X^2+7)^2(X^2-X+1) \\ \mathbb{R}[X] & \to & f = (X+\sqrt{7})^2(X-\sqrt{7})^2(X^2-X+1) \\ \mathbb{C}[X] & \to & f = (X+\sqrt{7})^2(X-\sqrt{7})^2(X-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}))(X-(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})) \end{cases}}$$

3. Hallar **todos** los polinomios **mónicos** $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

i) $1-\sqrt{2}$ es raíz de f;

ii) $X(X-2)^2 \mid (f : f')$;

iii) $(f : X^3-1) \neq 1$;

iv) $f(-1) = 27$;

---

i) Como $f \in \mathbb{Q}[X]$ si $\alpha_1 = 1-\sqrt{2}$ es raíz entonces $\alpha_2 = 1+\sqrt{2}$ para que no haya coeficientes irracionales en el polinomio.

$$(X-(1-\sqrt{2}))\cdot(X-(1+\sqrt{2})) = X^2-2X-1$$

Por lo tanto X^2-2X-1 será un factor de $f \in \mathbb{Q}[X]$.

ii) Si $X(X-2)^2 \mid (f : f') \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \text{ raíz simple de } f' \Rightarrow \text{ raíz doble de } f \\ \alpha_4 = 2 \text{ raíz simple de } f' \Rightarrow \text{ raíz doble de } f \end{cases}$ Por lo tanto $X^2(X-2)^3$ serán factores de f.

iii) Si $(f : X^3-1) \neq 1$ quiere decir que por lo menos alguna de las 3 raíces de:
$X^3-1 = (X-1)\cdot(X-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}))\cdot(X-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}))$ tiene que aparecer en la factorización de f. Pero parecido al item i) si tengo una raíz compleja, también necesito el conjugado complejo, para que no me queden coeficientes de f en complejos,
$X^3-1 = (X-1)\cdot(X^2+X+1)$, me quedaría con el *factor de menor grado* si eso no *rompe* otras condiciones.

Por lo tanto $(X-1)$ o (X^2+X+1) aparecerá en la factorización de f.

iv) $f(-1) = 27$. Hasta el momento:

$$\begin{cases} f_1 = (X^2-2X-1)\cdot(X-2)^3\cdot X^2\cdot(X^2+X+1) \to f_1(-1) = 2\cdot(-27)\cdot 1\cdot 1 = -54 \\ f_2 = (X^2-2X-1)\cdot(X-2)^3\cdot X^2\cdot(X-1) \to f_2(-1) = 2\cdot(-27)\cdot 1\cdot(-2) = 108 \end{cases}$$

, ninguno cumple la condición iv).

Para encontrar *un* polinomio que cumpla lo pedido tomaría el f_2 que tiene menor grado de los dos y lo multiplicaría por $(X-\frac{3}{4})$ de manera que $f = (X^2-2X-1)\cdot X^2\cdot(X-2)^3\cdot(X-1)\cdot(X-\frac{3}{4}) \to \boxed{f(-1) = 27}$ así cumpliendo todas las condiciones.

---

4. Factorizar como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$ al polinomio

$$f = X^5+2X^4-7X^3-7X^2+10X-15$$

sabiendo $(f : X^4-X^3+6X^2-5X+5) \neq 1$

Si el $(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) \neq 1$, esto nos da información sobre *raíces comunes* entre f y $X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5$. Puedo hacer el algoritmo de Euclides para encontrar el MCD, con esa o esas raíces. El último resto no nulo hecho mónico será el MCD.par

$$\begin{aligned}
X^5 + 2X^4 - 7X^3 - 7X^2 + 10X - 15 &= \big(X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5\big) \cdot (X+3) + \big(-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30\big) \\
X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5 &= \big(-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30\big) \cdot \big(-\tfrac{1}{10}X + \tfrac{3}{10}\big) + \big(14X^2 - 14X + 14\big) \\
-10X^3 - 20X^2 + 20X - 30 &= \big(14X^2 - 14X + 14\big) \cdot \big(-\tfrac{5}{7}X - \tfrac{15}{7}\big) + 0
\end{aligned}$$

$(f : X^4 - X^3 + 6X^2 - 5X + 5) = X^2 - X + 1$. Las raíces del MCD son $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm w}{2}$ con $w^2 = 3i$. $X^2 - X + 1 = (X - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}))(X - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}))$ ✓
Por definición de lo que es el MCD sabemos que $X^2 - X + 1 \,\big|\, f$, haciendo la división bajamos el grado y seguimos buscando las raíces.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
X^5 & +2X^4 & -7X^3 & -7X^2 & +10X & -15 & X^2 - X + 1 \\ \cline{7-7}
-X^5 & +X^4 & -X^3 & & & & X^3 + 3X^2 - 5X - 15 \\ \cline{1-3}
 & 3X^4 & -8X^3 & -7X^2 & & & \\
 & -3X^4 & +3X^3 & -3X^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -5X^3 & -10X^2 & +10X & & \\
 & & 5X^3 & -5X^2 & +5X & & \\ \cline{3-5}
 & & & -15X^2 & +15X & -15 & \\
 & & & 15X^2 & -15X & +15 & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Obtuvimos que $f = (X^2 - X + 1) \cdot (X^3 + 3X^2 - 5X - 15) + 0$. Hermoso resultado, donde la hermosura se mide en su simpleza para ser factorizado. Sin usar calculadora ni Guass ni ninguna cosa extraña podemos expresar a f como:

$$f \stackrel{!}{=} (X^2 - X + 1) \cdot \underbrace{(X - \sqrt{5}) \cdot (X + \sqrt{5}) \cdot (X + 3)}_{X^3 + 3X^2 - 5X - 15}$$

Si todavía no viste como fue la factorización en ! te recomiendo que sigas mirando sin tocar calculadora ni ningún tipo de *spoiler del pesado o pesada sabelotodo* que quizás tenés al lado y que no te deja tiempo para pensar. Es puro factoreo que debería salir a ojo.
Ahora factorizamos en irreducibles, que son polinomios mónicos que solo se dividen por sí mismos y por 1. Para tener una mejor explicación clickeá acá! Y vas a la teoría del apunte.
factorizaciones:

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{Q}[X] & \to & f = \overbrace{(X^2 - 5)}^{\in \mathbb{Q}[X]} \cdot \overbrace{(X^2 - X + 1)}^{\in \mathbb{Q}[X]} \cdot \overbrace{(X + 3)}^{\in \mathbb{Q}[X]} \\
\mathbb{R}[X] & \to & f = \overbrace{(X - \sqrt{5})}^{\in \mathbb{R}[X]} \cdot \overbrace{(X + \sqrt{5})}^{\in \mathbb{R}[X]} \cdot \overbrace{(X^2 - X + 1)}^{\in \mathbb{R}[X]} \cdot \overbrace{(X + 3)}^{\in \mathbb{R}[X]} \\
\mathbb{C}[X] & \to & f = \overbrace{(X + 3)}^{\in \mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X - \sqrt{5})}^{\in \mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X + \sqrt{5})}^{\in \mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}))}^{\in \mathbb{C}[X]} \cdot \overbrace{(X - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}))}^{\in \mathbb{C}[X]}
\end{array}$$

✓

---

5. Sea $(f_n)_{(n \geq 1)}$ la sucesión de poliniomios en $\mathbb{R}[X]$ definida como:

$$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X+2)^2 f_n' + 3f_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que -2 es raíz doble de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

No caer en la *trampilla*☠ de olvidar que para que una raíz de f sea doble, i.e. $\text{mult}(-2; f) \stackrel{!}{=} 2$ debe ocurrir lo *"obvio"*, $f(-2) = f'(-2) = 0$ y también que $f''(-2) \neq 0$. Si olvidamos esto último solo probaríamos que la $\text{mult}(-1; f) \geq 2$ y tendríamos el ejercicio mal.

Por inducción en n: $q(n)$: "-2 es raíz doble de f_n, $\forall n \in \mathbb{N}$"

<u>*Caso base:*</u> ¿$q(1)$ es V?

$$\begin{cases} f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} \quad f_1(-2) = 0 \\ f_1' = 5X^4 + 12X^3 + 15X^2 + 22X & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} \quad f_1'(-2) = 0 \\ f_1'' = 20X^3 + 36X^2 + 30X + 22 & \xrightarrow[\text{en } -2]{\text{evaluar}} \quad f_1''(-2) = 22 \neq 0 \end{cases}$$

$\therefore \text{mult}(-2; f_1) = 2 \Rightarrow -2$ es raíz doble de $f_1 \Rightarrow q(1)$ es V ✓

<u>*Paso inductivo:*</u> ¿Si $q(k)$ verdadera $\Rightarrow q(k+1)$ también lo es, $\forall k \in \mathbb{N}$?

HI: -2 es raíz doble de $f_k \Leftrightarrow \begin{cases} f_k(-2) = 0 \star^1 \\ f_k'(-2) = 0 \star^2 \\ f_k''(-2) \neq 0 \star^3 \end{cases}$

QPQ dado $k \in \mathbb{N}$, $q(k+1)$: -2 es raíz doble de $f_{k+1} \overset{\text{def}}{=} (X+2)^2 f_k' + 3f_k$:

Derivar:

$$\begin{cases} f_{k+1} \overset{\text{def}}{=} (X+2)^2 f_k' + 3f_k \\ f_{k+1}' = 2(X+2)f_k' + (X+2)^2 f_k'' + f_k' \\ f_{k+1}'' = 2f_k' + (2x+4)f_k'' + 2(x+2)f_k'' + (x+2)^2 f_k''' + f_k'' \end{cases}$$

Evaluar en -2:

$$f_{k+1}(-2) \overset{?}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_{k+1}(-2) = \cancel{(-2+2)}^2 f_k'(-2) + 3f_k(-2) = 0^2 f_k'(-2) + 3f_k(-2) = 3f_k(-2) \overset{\star^1}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f_{k+1}'(-2) \overset{?}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_{k+1}'(-2) = 2\cancel{(-2+2)} f_k'(-2) + \cancel{(-2+2)}^2 f'' + f_k'(-2) = f_k'(-2) \overset{\star^2}{=} 0 \quad \checkmark$$

$$f_{k+1}''(-2) \overset{?}{\neq} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_{k+1}''(-2) = 2f_k'(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f_k''(-2) + 2\cancel{(-2+2)} f_k''(-2) + \\ + \cancel{(-2+2)}^2 f_k'''(-2) + f_k''(-2) = 2\overbrace{f_k'(-2)}^{=0\star^2} + \overbrace{f_k''(-2)}^{\neq 0 \star^3} \neq 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$\therefore \text{mult}(-2; f_{k+1}) = 2 \Rightarrow -2$ es raíz doble de $f_{k+1} \Rightarrow q(k+1)$ es V ✓

Como $q(1)$, $q(k)$ y $q(k+1)$ resultaron verdaderas, por principio de inducción $q(n)$ también lo es $\forall n \in \mathbb{N}$.

6.

a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ **(positivo)** para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

---

a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ **(positivo)** para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz **entera** no nula.

Solución:

Limpiando los denominadores de f se obtiene el polinomio g con las mismas raíces:

$$g = 3X^5 + nX^4 - 8X^3 + 11X^2 - 3X = X(\underbrace{3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3}_{h})$$

Por enunciado ignoramos la raiz nula y utilizando el Lema de Gauss buscamos las raíces racionales de

$$h = 3X^4 + nX^3 - 8X^2 + 11X - 3$$

Aquí, $a_0 = -3$ y $a_n = 3$

$$\text{Div}(a_0) = \text{Div}(a_n) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

Como busco raíces enteras, las busco en el conjunto:

$$\{\pm 1, \pm 3\}$$

Chequeo:

$$\begin{array}{rcl} h(-1) = 0 & \iff & n = -19 \notin \mathbb{N} \\ h(1) = 0 & \iff & n = -3 \notin \mathbb{N} \\ h(-3) = 0 & \iff & \boxed{\text{n=5}} \in \mathbb{N} \\ h(3) = 0 & \iff & n = \frac{67}{9} \notin \mathbb{N} \end{array}$$

Rta: $n = 5$ es el único valor de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el polinomio f tiene una raíz entera no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$

Solución:

Primero factorizo la raiz nula de de f

$$f = X^5 + \frac{5}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X = X(X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1)$$

Se, por el item (a), que -3 es una de las raíces racionales de f. Busco otras posibles raiíces racionales en el polinomio h (con $n = 5$) obtenido en el item (a) en el conjunto $\{\pm\frac{1}{3}\}$

$h(-\frac{1}{3}) = -\frac{208}{27}$

$h(\frac{1}{3}) = 0 \implies \frac{1}{3}$ es una raiz racional de f.

Factorizo el polinomio f diviendolo por el producto de las dos raíces encontradas $(X+3)\cdot(X-\frac{1}{3}) = X^2 + \frac{8}{3} - 1$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{8}{3}X^2 + \frac{11}{3}X - 1 & X^2 + \frac{8}{3}X - 1 \\ \cline{2-2} -X^4 - \frac{8}{3}X^3 \;\; + X^2 \qquad\qquad\quad & X^2 - X + 1 \\ \hline -X^3 - \frac{5}{3}X^2 + \frac{11}{3}X \quad\; & \\ X^3 + \frac{8}{3}X^2 \quad - X \quad\; & \\ \hline X^2 \;\; + \frac{8}{3}X - 1 & \\ -X^2 \;\; - \frac{8}{3}X + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Factorizo el polinomio cuadrático $X^2 + \frac{8}{3}X - 1$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$$x_+ = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \text{ y } x_- = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$$

Rta:

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)) \in \mathbb{C}$ con todos sus factores de multiplicidad 1 y por lo tanto irreducibles.

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2-X+1) \in \mathbb{R}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto irreducibles en $\mathbb{R}$.

$\therefore f = X(X+3)(X-\frac{1}{3})(X^2-X+1) \in \mathbb{Q}$ con 3 factores de multiplicidad 1 y 1 de multiplicidad 2 pero de raíces complejas y por lo tanto irreducibles en $\mathbb{Q}$.

---

7. Determinar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo que satisfaga simultáneamente:

- f es mónico,
- $\text{gr}(f : 2X^3 - 5X^2 - 20X + 11) = 2$
- f tiene una raíz $z \in G_3$ con $z \neq 1$, que es doble,
- $f(0) = 33$;

El dato de $\text{gr}\overbrace{(f : \underbrace{2X^3 - 5X^2 - 20X + 11}_{g})}^{d} = 2$ indica que hay un polinomio, d, con $\text{gr}(d) = 2$ que cumple que $\left\{ \begin{array}{c|c} d & f \\ d & g \end{array} \right.$ entonces, f tiene 2 raíces en común con g, puede ser una doble o dos simples. Dado que nos piden que sea de grado mínimo habrá que tener *cuidado* cual elegir para no violar ninguna condición.
Calculemos las posibles raíces de g usando *lema de gauss*: Posibles raíces serán los cocientes de los divisores de 11 y los de 2. $\mathcal{D}(11) = \{\pm1, \pm11\}, \mathcal{D}(2) = \{\pm1, \pm2\}$: $\{\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm11, \pm\frac{11}{2}\}$. Probando esos valores encuentro que $g(\frac{1}{2}) = 0$ y ninguna de las otras funcionó. Le bajamos el grado con el algoritmo de división a g.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2X^3 & -5X^2 & -20X & +11 & X-\frac{1}{2} \\ \cline{5-5} -2X^3 & +X^2 & & & 2X^2-4X-22 \\ \cline{1-2} & -4X^2 & -20X & & \\ & 4X^2 & -2X & & \\ \cline{2-3} & & -22X & +11 & \\ & & 22X & -11 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

$g = (X-\frac{1}{2}) \cdot (\underbrace{2X^2 - 4X - 22}_{h}) + 0$, buscamos raíces de h:

$$\alpha_{+,-} = \frac{4 \pm 8\sqrt{3}}{4} = 1 \pm 2\sqrt{3} = \left\{ \begin{array}{l} 1+2\sqrt{3} \\ 1-2\sqrt{3} \end{array} \right.$$

Entonces: f tiene 2 raíces en común con $g = (X-\frac{1}{2})(X-(1+2\sqrt{3}))(X-(1-2\sqrt{3}))$. Dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$ voy a seleccionar las raíces $\in \mathbb{I}$ por la condiciónde grado mínimo.

Con la condición que dice que f tiene una raíz $z \in G_3$ con $z \neq 1$, que es doble, no nos dejan muchas opciones. G_3 tiene tres raíces, solución de $w^3 = 1$, dado que por enunciado no puede ser 1, entonces solo quedan. $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (si no te acordás como encontrar raíces de la familia G_n te dejo el ejercicio **12.**) que se hacen las cuentas. Ok, tengo esas dos $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ¿Cuál elijo? cualquiera nos sirve, porque, *nuevamente*, como $f en\, \mathbb{Q}[X]$ si agarro una raíz compleja también necesito su conjugado complejo, lo mismo que antes. Hasta el momento tenemos:

$$f = \overbrace{(X - (1+2\sqrt{3}))(X - (1-2\sqrt{3}))}^{X^2-2X-11} \underbrace{(X - (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}))^{2^{\star 1}} (X - (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}))^{2^{\star 1}}}_{(X^2+X+1)^2} =$$
$$= (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2$$

★[1] Si es doble una de las complejas, también debe serlo su conjugado, porque $f \in \mathbb{Q}[X]$.

Nos queda cumplir que $f(0) = 33$, si bien ahora $f(0) = -11$. Acá tenemos que tener en cuenta la primera condición. f es *mónico*, así que no podemos corregir el valor con coeficiente independiente. Hay que proponer otro factor en $\mathbb{Q}[X]$, que al evaluar de el número que al multiplicarse con -11 nos dé 33. El candidato es $(X - 3)$, dado que en 0 vale -3 y así $f(0) = (-11) \cdot (-3) = 33$ como queremos.
El $f \in \mathbb{Q}[X]$ que cumple lo pedido:

$$\boxed{f = (X^2 - 2X - 11)(X^2 + X + 1)^2 (X - 3)}$$

8.

a) Determinar todos los $f \in \mathbb{R}[X]$ mónicos de grado mínimo tales que cumplan:
- f contiene entre sus raíces al menos una raíz cúbica de la unidad,
- $X^2 + 1 \,\big|\, (f : f')$,
- f tiene al menos 2 raíces enteras,
- $f(1) = -12$,

b) Con el polinomio f hallado expresar factorización en irreducibles en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

---

a) Arrancando con la primera condición, tenemos al menos a una de las w tales que:

$$w^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = 1^{\star 1} \\ w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}.$$

Si no te acordás como calcular las raíces, mirá el ejercicio 12, donde se resuelve algo casi idéntico.

Como el polinomio *debe ser de grado mínimo* y tiene coeficientes en $\mathbb{R}$ hay que elegir con cuidado. Lo mejor es ver el resto de las condiciones para no hacer *cagadas*. (¡spoiler alert: Elegí el 1 si sos picante!)

De la segunda condición sacamos que:

$$X^2 + 1 = (X - i) \cdot (X + i) \,\big|\, (f : f') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X^2 + 1 \,\big|\, f \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i) \,\big|\, f \\ \text{y} \\ (X + i) \,\big|\, f \end{cases} \\ \text{y} \\ X^2 + 1 \,\big|\, f' \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i) \,\big|\, f' \\ \text{y} \\ (X + i) \,\big|\, f' \end{cases} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} (X - i)^2 \,\big|\, f \\ \text{y} \\ (X + i)^2 \,\big|\, f \end{cases}$$

Si no entendés el porqué de eso mirate esto de las notas teóricas, para tener contexto. Básicamente si α es una raíz de f y también de f', entoences es una raíz *por lo menos* doble de f.

En el tercer punto, nos dicen que tiene al menos 2 raíces en $\mathbb{Z}$. ¿Una de esas podría ser el 1 que obtuvimos como raíz de G_3?, Dejame que lo piense.

En el último punto tenemos que cumplir que al evaluar en nuestro polinomio f en 1, eso nos dé -12. Y es acá donde nos damos cuenta de que no podemos elegir a $1^{\star 1}$ para que sea raíz de f!! Y dado que $f \in \mathbb{R}[X]$ tenemos que elegir entonces ambas $\begin{cases} w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$. Propongo:

$$\begin{aligned} f &= (X - (-1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i))(X - (-1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i))(X - i)^2(X + i)^2(X - a)(X - b) \\ &\overset{\star^2}{=} (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - a)(X - b), \end{aligned}$$

con a y b a determinar, de manera tal de cumplir las últimas dos condiciones: *ambas* enteras y $f(1) = -12$.

$$f(1) = -12 \overset{\star^2}{\iff} 12 \cdot (1 - a)(1 - b) = -12 \iff (1 - a)(1 - b) = -1 \underset{\in \mathbb{Z}}{\overset{a \text{ y } b}{\iff}} a = 2 \quad \text{y} \quad b = 0.$$

Esas serían las candidatas a raíces enteras, obteniendo así un único polinomio

$$f = (X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2(X - 2)(X - 0) = X(X - 2)(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2$$

mónico y de grado mínimo que cumple las condiciones pedidas.

b) La definición de polinomio irreducible está acá.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{Q}[X] & \to & f = X(X-2)(X^2+X+1)(X^2+1)^2 \\ \mathbb{R}[X] & \to & f = X(X-2)(X^2+X+1)(X^2+1)^2 \\ \mathbb{C}[X] & \to & f = X(X-2)(X-(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(X-i)^2(X+i)^2 \end{array}}$$

Notar que en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$ las factorizaciones son iguales, dado que no hay raíces irracionales.

---

9. Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado mínimo tal que cumpla las siguientes condiciones

- f comparte una raíz con $X^3 - 3X^2 + 7X - 5$
- $X + 3 - \sqrt{2} \mid f$,
- $1 - 2i$ es raíz de f y $f'(X - 2i) = 0$

Vamos con la primera. Si dos polinomios , f y $g = X^3 - 3X^2 + 7X - 5$, comparten raíz buscamos raíces de g con el *lema de Gauss* de donde tomaremos las raíces que nos sirvan para construir nuestro f *mónico y de grado mínimo*: $A = \{\pm 1, \pm 5\}$, con $\alpha = 1 \Rightarrow g(1) = 0$ ✓.
Como $\alpha = 1$ es raíz, entonces $X - 1 \mid g$:

$$\begin{array}{rr|l} X^3 - 3X^2 + 7X - 5 & & X - 1 \\ \cline{3-3} -X^3 + X^2 & & X^2 - 2X + 5 \\ \hline -2X^2 + 7X & & \\ 2X^2 - 2X & & \\ \hline 5X - 5 & & \\ -5X + 5 & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

$g = (X-1)\cdot(X^2-2X+5)$, busco raíces del cociente X^2-2X+5, usando resolvente

$$r_{+,-} = \frac{2 \pm w}{2}, \text{ con } w^2 = -16 \to \begin{cases} r_+ = 1+2i \\ r_- = 1-2i. \end{cases}$$

Finalmente,

$$g \overset{\star^1}{=} (X-1)\cdot \underbrace{(X-(1+2i))\cdot(X-(1-2i))}_{X^2-2X+5} \quad \checkmark,$$

antes de elegir cuales de estas raíces serán comunes a f
es recomendable estudiar las otras condiciones del enunciado.

$X+3-\sqrt{2} = X-(-3+\sqrt{2}) \mid f$, por lo que $(-3+\sqrt{2})$ es una raíz de f y dado que $f \in \mathbb{Q}[X]$ también debe estar el conjugado irracional $-3-\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} X-(-3+\sqrt{2}) \mid f \\ \text{y} \\ X-(-3-\sqrt{2}) \mid f \end{cases} \overset{!}{\Leftrightarrow} X^2+6X+7 \mid f \quad \checkmark.$$

La tercera condición tiene *mucha data*. Nos da una raíz compleja de f, por lo cual también tendremos su conjugado complejo porque $f \in \mathbb{Q}[X]$.
Esa raíz es una de las que está en $g\star^1$.
El dato de f', también nos indica que la multiplicidad de $1-2i$ como raíz es por lo menos 2, ya que $f'(1-2i) = 0$, y porlo tanto $\text{mult}(1+2i; f)$ también será por lo menos 2.

Tenemos todo para armar a f:

$$f = (X^2-2X+5)^2\cdot(X^2+6X+7) \quad \checkmark$$