Álgebra I
Práctica 1 Resuelta

Por alumnos de Álgebra I
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
UBA

Choose your destiny:

(dobleclick en los ejercicio para saltar)

- Notas teóricas
- Ejercicios de la guía:

- Ejercicios Extras

Notas teóricas:

Básicos sobre conjuntos y coso:

- ☻ *Las uniones e intersecciones de conjuntos conmutan:*

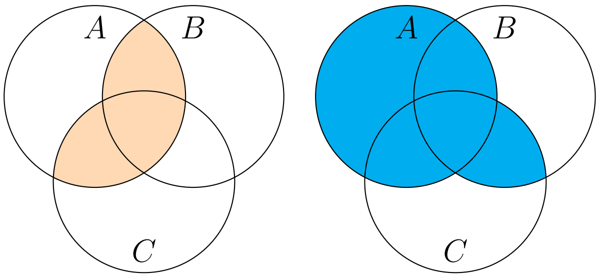
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

- ☻ *De Morgan Law's:*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \to \text{De Morgan 1}$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \to \text{De Morgan 2}$$

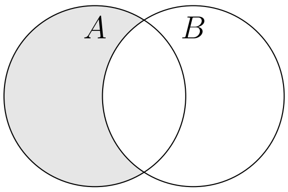
- ☻ *Distribución de la intersección en una unión y alverre:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



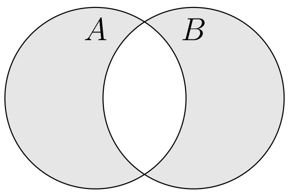
- ☻ *Diferencias en sus varios colores, sabores y notaciones:*

$$A - B \underset{\text{notación}}{\overset{\text{idem}}{\Longleftrightarrow}} A \setminus B \underset{\text{notación}}{\overset{\text{idem}}{\Longleftrightarrow}} A \cap B^c$$



- ☻ *Diferencia simétrica:*

$$A \triangle B = \begin{cases} (A - B) & \cup & (B - A) \\ (A \cup B) & \cap & (A \cap B)^c \\ (A \cup B) & \setminus & (A \cap B) \to \text{mi favorita 😐} \\ (A \cap B^c) & \cup & (B \cap A^c) \end{cases}$$



- *Complemento:*

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} \ / \ x \notin A\}$$

- *Tablas de verdad:*

  En las tablas de verdad que un elemento esté en un conjunto, $x \in A$ es equivalente a decir que la proposición A es verdadera. En mi cabeza es más fácil recordar las tablas en conjuntos que en ... lo otro.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A^c$	$x \in A \cap B$	$x \in A \cup B$	$x \in \begin{array}{c} A \subseteq B \\ \hline A^c \cup B \end{array}$	$x \in A \triangle B$	$A - B$
V	V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F	F

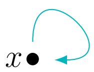
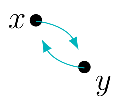
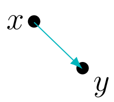
  Cuando para probar $p \Rightarrow q$ se prueba en su lugar $\sim q \Rightarrow \sim p$ se dice que es una *demostración por contrarrecíproco.*

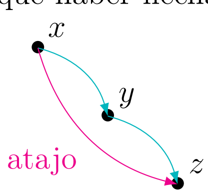
  Cuando para probar $p \Rightarrow q$ se prueba en su lugar $p \wedge \sim q$ para llegar así a una contradicción, se dice que es una demostración por reducción al absurdo.

- *Relaciones $\mathcal{R}$:*

  - *Definición de relación:*
    Sean A y B conjuntos. Una relación $\mathcal{R}$ de A en B es un suconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$. Es decir $\mathcal{R}$ es una relación de A en B si $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$.
  - *Definición de relación en un conjunto:*
    Sea A un conjunto. Se dice que $\mathcal{R}$ en A cuando $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

- *Propiedades destacables de una $\mathcal{R}$:*

  - *Reflexiva*: $(x, x) \in \mathcal{R} \ \ \forall x \in A$ o $x \mathcal{R} x$. $\forall x \in A$. Gráficamente, cada elemento tiene que tener un bucle. 
  - *Simétrica*: $(x, y) \in \mathcal{R}$, entonces el par $(y, x) \in \mathcal{R}$, también si $\forall x, y \in A, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$. Gráficamente tiene que haber un ida y vuelta en cada elemento de la relación. 
  - *Antisimétrica*: $(x, y) \in \mathcal{R}$, con $x \neq y$ entonces el par $(y, x) \notin \mathcal{R}$, también se puede pensar como $\forall x, y \in A, x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$. Gráficamente **no** tiene que haber ningún ida y vuelta en el gráfico. Solo en una dirección. 
  - *Transitiva*: Para toda terna $x, y, z \in A$ tales que $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$, se tiene que $(x, z) \in \mathcal{R}$. Otra manera sería si $\forall x, y, z \in A$, $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$. Gráficamente tiene que haber flecha directa entre las puntas de cualquier camino que vaya por más de dos nodos.



- - *Relación de equivalencia*: La relación debe ser reflexiva, simétrica y transitiva.
  - *Relación de orden*: La relación debe ser reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- *Funciones f:*

  - Sean A y B conjuntos, y sea $\mathcal{R}$ de A en B. Se dice que $\mathcal{R}$ es una *función* cuando todo elemento $x \in A$ está relacionado con algún $y \in B$, y este elemento y es único. Es decir:

$$\forall x \in A,\ \exists !\, y \in B \ /\ x \,\mathcal{R}\, y$$
$$\forall x \in A,\ \exists\ y \in B \ /\ x \,\mathcal{R}\, y,$$

  si $y, z \in B$ son tales que $x \,\mathcal{R}\, y \quad \text{y} \quad x \,\mathcal{R}\, z \Rightarrow y = z$.

    - Dada una función $f: A\,(\textit{dominio}) \to B\,(\textit{codominio})$ el conjunto *imagen* es:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B : \exists\, x \in A \ /\ f(x) = y\}$$

    - *Propiedades destacables de una f:*
      - *inyectiva:* si $\forall x, x' \in A$ tales que $f(x) = f(x')$ se tiene que $x = x'$
      - *sobreyectiva:* si $\forall y \in B, \exists\, x \in A$ tal que $f(x) = y$. f es sobreyectiva si $\mathrm{Im}(f) = B$
      - *biyectiva:* Cuando es *inyectiva* y *sobreyectiva*.
    - *Composición de funciones:*
      A, B, C conjuntos y $f: A \to B \to C$, $g: B \to C$ funciones. Entonces la *composición* de f con g, que se nota:

$$g \circ f = g(f(x)), \quad \forall x \in A,$$

      resulta ser una función $g \circ f$ de A en C.
    - f es biyectiva cuando $f^{-1}: B \to A$ es la función que satisface que:

$$\forall y \in B : f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

Ejercicios de la guía:

---

1. Dado el conjunto $A = \{1,2,3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

(i) $1 \in A$ (ii) $\{1\} \subseteq A$ (iii) $\{2,1\} \subseteq A$ (iv) $\{1,3\} \in A$ (v) $\{2\} \in A$

$A = \{1,2,3\}$

(i) $1 \in A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$

(ii) $\{1\} \subseteq A \xrightarrow{\text{respueta}} \text{V}$

(iii) $\{2,1\} \subseteq A \xrightarrow{\text{respuesta}} \text{V}$

(iv) $\{1,3\} \in A \xrightarrow{\text{respuesta}} \text{F}$

(v) $\{2\} \in A \xrightarrow{\text{respuesta}} \text{F}$

---

2. Dado el conjunto $A = \{1,2,\{3\},\{1,2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(i) $3 \in A$ (ii) $\{3\} \subseteq A$ (iii) $\{3\} \in A$ (iv) $\{\{3\}\} \in A$ (v) $\{1,2\} \in A$ (vi) $\{1,2\} \subseteq A$ (vii) $\{\{1,2\}\} \subseteq A$ (viii) $\{\{1,2\},3\} \subseteq A$ (ix) $\varnothing \in A$ (x) $\varnothing \subseteq A$ (xi) $A \in A$ (xii) $A \subseteq A$

(i) $3 \in A \to F$

(ii) $\{3\} \subseteq A \to F$

(iii) $\{3\} \in A \to V$

(iv) $\{\{3\}\} \in A \to V$

(v) $\{1,2\} \in A \to V$

(vi) $\{1,2\} \subseteq A \to V$

(vii) $\{\{1,2\}\} \subseteq A \to V$

(viii) $\{\{1,2\},3\} \subseteq A \to F$

(ix) $\varnothing \in A \to F$

(x) $\varnothing \subseteq A \to V$

(xi) $A \in A \to F$

(xii) $A \subseteq A \to V$

---

3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $A = \{1,2,3\}, B = \{5,4,3,2,1\}$

ii) $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,\{3\},-3\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < |x| < 3\}, B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 < 3\}$

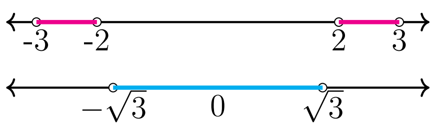
iv) $A = \{\varnothing\}, B = \varnothing$

$$\text{Inclusión}: \begin{cases} \text{Definición} & A \subseteq B \text{ si } \ \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \\ \text{Contrarecíproco} & A \not\subseteq B \text{ si } \exists\, x, x \in A \Rightarrow x \notin B \end{cases}$$

(i) $\begin{cases} A = \{1,2,3\} \\ B = \{5,4,3,2,1\} \end{cases} \xrightarrow{\text{respueta}} A \overset{\checkmark}{\subseteq} B$

(ii) $\begin{cases} A = \{1,2,3\} \\ B = \{1,2,\{3\},-3\} \end{cases} \xrightarrow{\text{respueta}} A \not\subseteq B \xrightarrow[\text{que}]{\text{dado}} \{3\} \notin B$

(iii) $\begin{cases} A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 2 < |x| < 3\} \\ B = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 < 3\} \end{cases}$



$\xrightarrow{\text{respueta}} A \not\subseteq B \xrightarrow[\text{que}]{\text{dado}} 2.5 \in A$ y $2.5 \notin B$

(iv) $\begin{cases} A = \{\varnothing\} \\ B = \varnothing \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{respueta}} A \not\subseteq B \xrightarrow[\text{que}]{\text{dado}}$ B no tiene ningún elemento, sin embargo A tiene un elemento: $\varnothing$.

---

4. Dados los subconjuntos: $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ del conjunto referencial: $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$, hallar

(a) $A \cap (B \triangle C)$ (b) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (c) $A^c \cap B^c \cap C^c$

---

a) $B \triangle C = \{-2, 1, 3, \{1, 2, 3\}, \{3\}\}$

$$A \cap (B \triangle C) = \{-2, 1, 3\}$$

b) $A \cap B = \{1\}$ y $(A \cap C) = \{-2, 3\}$

$$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \varnothing$$

c) $A^c = \{10, \{1, 2, 3\}, \{3\}\}$, $B^c = \{-2, 7, 3, \{1, 2, 3\}\}$ y $C^c = \{1, \{3\}, 7, 10\}$

$$A^c \cap B^c \cap C^c = \varnothing$$

---

5. Dados los subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos

---

i) $(A \cup B \cup C)^c \overset{(c)}{=} (A \cup B)^c \cap C^c \overset{(c)}{=} A^c \cap B^c \cap C^c$ ✓

ii) $(A \cap B \cap C)^c \overset{(d)}{=} (A \cap B)^c \cup C^c \overset{(d)}{=} A^c \cup B^c \cup C^c$ ✓

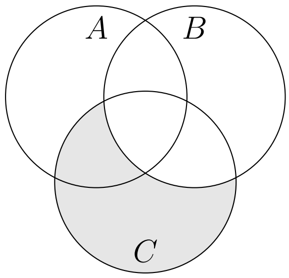
---

6. Sean A,B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

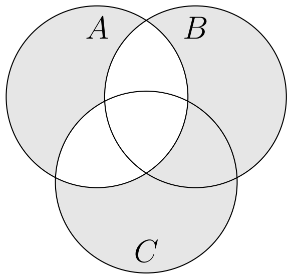
i) $(A \cup B^c) \cap C$

ii) $A \triangle (B \cup C)$

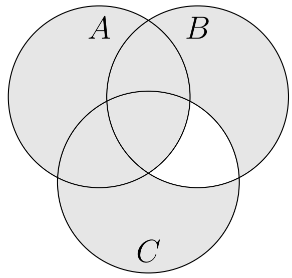
iii) $A \cup (B \triangle C)$



i)



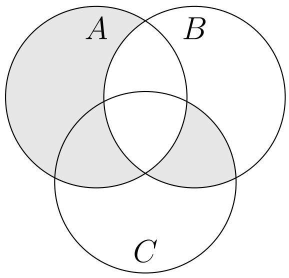
ii)



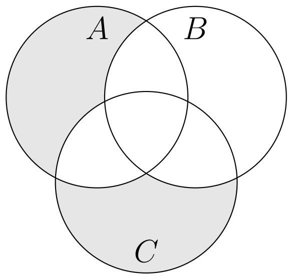
iii)

---

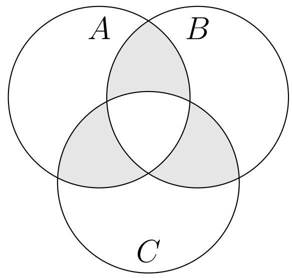
7. Encontrar fórmulas que describen las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.



(a)



(b)



(c)

(a) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B \cap C)$

(c) $((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)) \cap (A \cap B \cap C)^c$

(b) $(A \triangle C) \cap B^c \overset{!}{=} (A \cup C) \cap (A \cap C)^c \cap B^c$

---

8. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos.

i) $A = \{1\}$

ii) $A = \{a, b\}$

iii) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$

Recordando que:

$$\mathcal{P}(A) \to \begin{cases} B \in \mathcal{P}(A) \iff B \subseteq A \\ \mathcal{P}(A) = \{B \;/\; B \subseteq A\} \end{cases}$$

(i) $A = \{1\} \to \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A\}$ ✓

(ii) $A = \{a, b\} \to \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\}$ ✓

(iii) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\} \to \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{3\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{1, 3\}, \{\{1, 2\}, 3\}, A\}$ ✓

9. Sean A y B conjuntos, Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$

$\Rightarrow$) Pruebo por absurdo. Supongo que $A \nsubseteq B \Rightarrow \exists x \in A \;/\; x \notin B$.
Si $x \in A \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A) \xrightarrow[\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)]{\text{hipótesis}} \{x\} \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow x \in B$. Absurdo ☠.
$\to \boxed{\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B}$ ✓

$\Leftarrow$) quiero ver que $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$,
$\forall S \in \mathcal{P}(A) \iff S \subseteq A \overset{\text{hip}}{\subseteq} B \Rightarrow S \in \mathcal{P}(B)$.
$\to \boxed{A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)}$ ✓

---

10. Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes:

i) $p \Rightarrow q$, $\sim q \Rightarrow \sim p$, $\sim p \vee q$ y $\sim (p \wedge \sim q)$.

Esto nos dice que podemos demostrar una afirmación de la forma $p \Rightarrow q$ probando en su lugar $\sim q \Rightarrow \sim p$ (es decir *demostrando el contrarrecíproco*), o probando $\sim (p \wedge \sim q)$ (esto es una *demostración por reducción al absurdo*).

ii) $\sim (p \Rightarrow q)$ y $\sim q$.

---

i) Sean p, q proposiciones. Verificar que las siguientes expresiones tienen la misma tabla de verdad para concluir que son equivalentes:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

ii)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

---

11. Hallar contraejemplos para mostrar que las siguientes proposiciones son falsas:

---

i) $\forall a \in \mathbb{N}$, $\frac{a-1}{a}$ no es un número entero.

La proposición es falsa, dado que si $a = 1 \Rightarrow \frac{1-1}{1} = \frac{0}{1} = 0 \in \mathbb{Z}$

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con x, y positivos, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

La proposición es falsa, dado que si.

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 2. \\ y = 2 \end{array} \right\} \to \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \neq \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

La proposición es falsa, dado que si $x = -3$, queda $9 > 4 \Rightarrow -3 > 2$, lo cual es falso.

12.

i) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando debidamente:

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \vee n \leq 8.$

b) $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ n \geq 5 \wedge n \leq 8.$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N}\ /\ m > n.$

d) $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ \ \forall m \in \mathbb{N}, m > n.$

e) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 3 \Rightarrow x^2 > 4.$

f) Si n es un natural terminado en 4, entonces n es par.

g) Si z es un número real, entonces $z \in \mathbb{C}$.

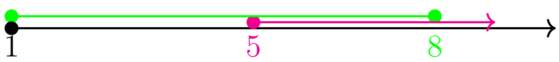
ii) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

iii) Reescribir las proposiciones e) y f) del item i) utilizando las equivalencias del ejercicio 10i)

---

i) (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \vee n \leq 8.$

La proposición es verdadera. El conjunto descrito por $\{n \in \mathbb{N}\ /\ n \leq 8 \vee n \geq 5\} = \mathbb{N}$



¿Se puede justificar con un gráfico?

(b) $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ n \geq 5 \wedge n \leq 8.$

La proposición es verdadera, en este caso es cuestión de encontrar solo un valor que cumpla, $n = 6$

(c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N}\ /\ m > n.$

La proposición es verdadera, si se elige por ejemplo a $m = n + 1$

(d) $\exists n \in \mathbb{N}\ /\ \ \forall m \in \mathbb{N}, m > n.$

La proposición es falsa, el único $n \in \mathbb{N}$ que no tiene un número menor estricto es el 1. Pero la condición dice que $\forall m \in \mathbb{N}$ se debe cumplir y si m $1 \not< 1$

(e) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 3 \Rightarrow x^2 > 4.$

La proposición es verdadera. Si $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9 \xrightarrow[\text{particular}]{\text{en}} x^2 > 9 > 4 \Rightarrow x^2 > 4$

(f) Si n es un natural terminado en 4, entonces n es par.

... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

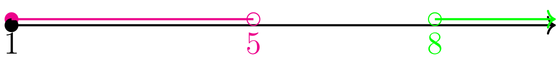
(g) Si z es un número real, entonces $z \in \mathbb{C}$.

Están proponiendo que dado $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z \in \mathbb{C}$. Dado que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = \{a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\ /\ a + ib\}$, con $i^2 = -1$ Por lo tanto para $b = 0$, podría generar todo $\mathbb{R}$.

---

ii) (a) $\exists n \in \mathbb{N},\ n < 5 \wedge n > 8.$

$A = \{n \in \mathbb{N}\ /\ n < 5 \wedge n > 8\} = \varnothing \Rightarrow \nexists n$ que cumpla lo pedido.



(b) $\forall n \in \mathbb{N}\ /\ n < 5 \vee n > 8.$

La proposición es falsa, $n = 6$ no cumple estar en ese conjunto.

(c) $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}\ /\ m \leq n$.
La proposición es falsa, porque el conjunto $\mathbb{N}$ no tiene un máximo. $n = m + 1$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}\ /\ \exists m \in \mathbb{N}, m \leq n$.
La proposición es verdadera, el único $m \in \mathbb{N}$ que cumple eso es el $m = 1$.

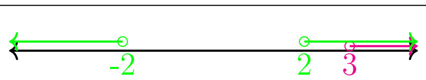
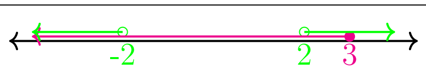
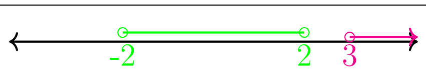
(e) $\exists x \in \mathbb{R},\ x \leq 3 \Rightarrow x^2 \leq 4$.
La proposición es falsa. Dado dos conjunto:

$\left\{ A = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x \leq 3\} B = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x^2 \leq 2\} \right\} \rightarrow$ 

(f) ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram $\rightarrow$, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX$\rightarrow$.

(g) Si z no es un número real, entonces $z \notin \mathbb{C}$.
La proposición es falsa. Están proponiendo que dado $z \notin \mathbb{R} \Rightarrow z \notin \mathbb{C}$. Si $z = i$, se prueba lo contrario. Dado que $i \notin \mathbb{R}$, pero $i \in \mathbb{C}$

iii)

$p \Rightarrow q$	$\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 4$		$A \overset{?}{\subseteq} B$ ✓
$\sim q \Rightarrow \sim p$	$x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 3$		$A \overset{?}{\subseteq} B$ ✓
$\sim p \vee q$	$x \leq 3 \vee x^2 > 4$		$A \cup B \overset{?}{=} \mathcal{U}$ ✓
$\sim (p \vee \sim q)$	$\sim (x > 3 \wedge x^2 \leq 4)$		$(A \cap B)^c \overset{?}{=} \varnothing^c = \mathcal{U}$ ✓

---

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial $\mathcal{U}$ y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$.

ii) $(A \cap B) \triangle C = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$

iii) $C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$

iv) $A \triangle B = \varnothing \iff A = B$

---

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$. Es verdadera. Pruebo con tabla de verdad.

A	B	C	C^c	$A - C$	$B - C$	$A \triangle B$	$(A \triangle B) - C$	$(A - C) \triangle (B - C)$
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	V	F	V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F	F

Hay distribución entre la resta y una diferencias simétrica.

ii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→ .

iii) hacer

iv) hacer

---

14. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Probar que:

i) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

iii) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$

iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

v) $A \subseteq B \Rightarrow A \triangle B = B \cap A^c$

vi) $A \subseteq C \iff B^c \subseteq A^c$

vii) $A \cap C = \varnothing \Rightarrow A \cap (B \triangle C) = A \cap B$

---

i) Voy a usar tablas con los resultados que hay en las tablas de verdad acá.

A	B	C	$B \triangle C$	$A \cap B$	$A \cap C$	$A \cap (B \triangle C)$	$(A \cap B) \triangle (A \cap C)$
V	V	V	F	V	V	F	F
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

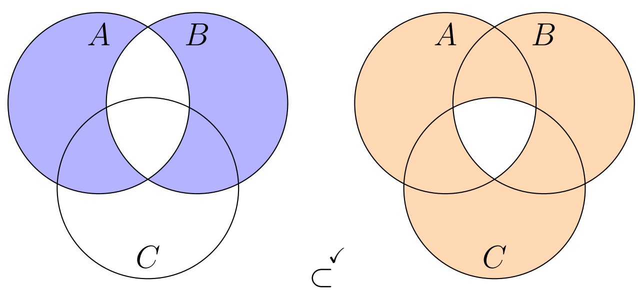
ii) Este sale sin tablas: Tratá de hacerlo con estas propiedades, (notas teóricas acá):

1) Notación de diferencia
2) Distributivas
3) DeMorgan

$$(A-B) \cup (A \cap C) \overset{!}{=} [(A \cap B^c) \cup A] \cap [(A \cap B^c) \cup C] \overset{!!}{=} A \cap (A \cup C) \cap (B^c \cup C) \overset{!!!}{=} A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B - C)^c \overset{!}{=} A - (B - C) \quad \checkmark$$

iii) Unos diagramas de Venn porque sino parece cuentoso:

$$A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C):$$



iv) Hacer!

v) Hacer!

vi) Hacer!

vii) Mirando el item i) sale solo. Dado que $X \triangle \varnothing \overset{!}{=} X$

---

15. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A, A \times B, (A \cap B) \times (A \cup B)$.

- $A \times A = \begin{cases} \{a \in A, b \in A \ / \ (a, b) \in A \times A\} \to \text{Comprensión} \\ \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} \to \text{Extensión} \end{cases}$

- $A \times B = \cdots$

- $(A \cap B) \times (A \cup B) =$
$$\begin{cases} \{1,3\} \times \{1,2,3,5,7\} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \times & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 1 & (1,1) & \cdots & \cdots & \cdots & (1,7) \\ \hline 3 & (3,1) & \cdots & \cdots & \cdots & (3,7) \end{array} \\ (A \cap B) \times (A \cup B) = \{s \in (A \cap B), t \in (A \cup B) \ / \ (s, t) \in (A \cap B) \times (A \cup B)\} \end{cases}$$

---

16. Sean A, B y C conjuntos. Probar que:

i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

iii) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

iv) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

Relaciones Definición de Relación, $\mathcal{R}$:

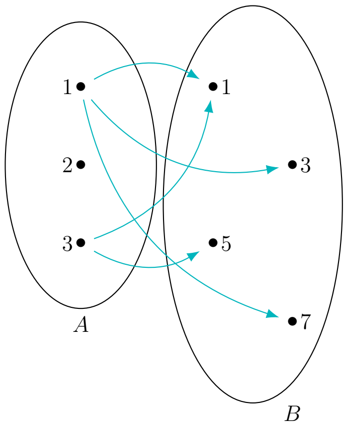
> Sean A y B conjuntos. Una *relación* $\mathcal{R}$ *de* A *en* B es un subconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$. Es decir $\mathcal{R}$ de A en B si $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(A \times B)$.

---

17. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Verificar las siguientes relaciones de A y B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

---

i) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,5)\}$



ii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,2),(3,5)\} \to 3\ \mathcal{R}\ 2 \notin \mathcal{P}(A \times B)$

iii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,7),(3,7)\}$ Hacer!

iv) $\mathcal{R} = \{(1,3),(2,1),(3,7)\}$ Hacer!

---

18. Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$. Describir por extensión cada una de las siguientes relaciones de A en B:

i) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$

ii) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a > b$

iii) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par

iv) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$

---

i) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b \to (a,b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(2,3),(2,5),(2,7),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

ii) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a > b \to (a,b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \{(2,1),(3,1)\}$

iii) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b \to (a,b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \{(2,1),(2,3),(2,5),(2,7)\}$

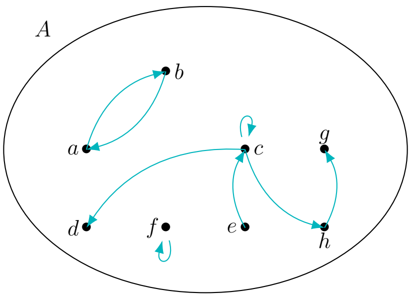
iv) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6 \to (a,b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \{(1,7),(2,5),(2,7),(3,5),(3,7)\}$

---

19. Sea $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es *reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.*

---

i)



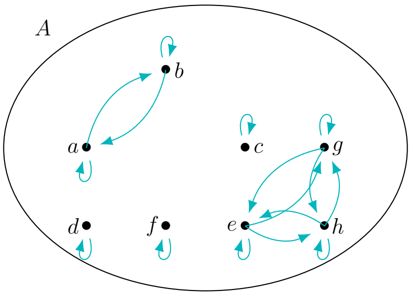
- No es reflexiva, porque no hay bucles en todos los vértices, en particular $a \not\mathcal{R} a$.
- No es simétrica, porque $d \not\mathcal{R} c$.
- No es antisimétrica, porque $a\ \mathcal{R}\ b$ y $b\ \mathcal{R}\ a$ con $a \neq b$.
- No es transitiva, porque $c\ \mathcal{R}\ h$ y $h\ \mathcal{R}\ g$, pero $c \not\mathcal{R} h$.

ii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iii) ... hay que hacerlo!

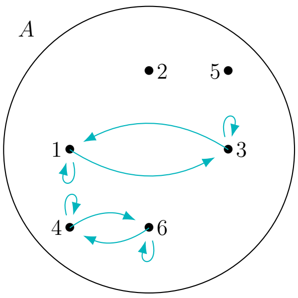
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iv) 

- Reflexiva, porque hay bucles en todos los elementos de A.
- Es simétrica, porque hay ida y vuelta en todos los pares de vértices.
- No es antisimétrica, porque $a \mathcal{R} b$ y $b \mathcal{R} a$ con $a \neq b$.
- Es transitiva, porque hay *atajos* en todas las relaciones de ternas.

---

20. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación, $\mathcal{R} = (1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6)$



- No es reflexiva porque no hay bucles ni en 2 ni en 5.
- Es simétrica, porque hay ida y vuelta en todos los pares de vértices.
- No es antisimétrica, porque $1 \mathcal{R} 3$ y $3 \mathcal{R} 1$ con $1 \neq 3$.
- Es transitiva.
  Chequear. Caso particula donde no hay ternas de x, y, z distintos.
  Sí, el que 2 esté ahí solo ni cumple la hipótesis de transitividad.

---

21. ... hay que hacerlo!
Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

---

22. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$

ii) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, a + b \text{ es par}\}$.

iii) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, |a| \leq |b|\}$.

iv) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}$ definida por $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow b$ es múltiplo de a.

v) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$.

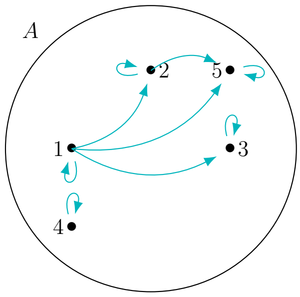
vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N} \,/\, n \leq 30\})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \mathcal{R} Y \iff 2 \notin X \cap Y^c$

vii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $(a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff bc$ es múltiplo de ad.

Voy a estar usando cosas del resumen teórico de relaciones.

i) Haciendo un gráfico en estos ejercicios de pocos elementos sale fácil.

Reflexiva:
Es reflexiva, porque hay bucles en todos los elementos de A.
Simétrica:
No es simétrica, dado que existe $(1, 5)$, pero no $(5, 1)$
Anti-Simétrica:
Es antisimétrica. No hay ningún par que tenga la vuelta, excepto los casos $x \mathcal{R} x$.
Transitiva:
Es transitiva. La terna 1, 2, 5 es transitiva. La relación es R, AS y T, por lo tanto es una *relación de orden.*



ii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iv) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

v) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N} \ / \ n \leq 30\})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \mathcal{R} Y \iff 2 \notin X \cap Y^c$

$2 \in X$	$2 \in Y$	$2 \in Y^c$	$2 \in X^c$	$2 \notin X \cap Y^c$	$2 \notin Y \cap X^c$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V

.

Reflexiva:

La relación es reflexiva ya que para que un elemento X esté relacionado con sí mismo debe ocurrir que $X \mathcal{R} X \iff 2 \notin X \cap X^c$, es decir $2 \notin \varnothing$, lo cual es siempre cierto.

Simétrica:

La relación no es simétrica. Se puede ver con la segunda y tercera fila de la tabla con un contraejemplo. $X = \{1\}$ y $Y = \{2\}$, $X, Y \subseteq A$, $X \mathcal{R} Y$, pero $Y \not\mathcal{R} X$,

Anti-Simétrica:

La relación no es antisimétrica. Se puede ver con la primera o cuarta fila tabla con un contraejempl con un contraejemplo. Si $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{2, 3\} \Rightarrow X \mathcal{R} Y$ y además $Y \mathcal{R} X$ con $X \neq Y$.

Transitiva:

Es transitiva. Si bien no es lo más fácil de explicar, se puede ver en la tabla que para tener 2 relaciones en una terna X, Y, Z no se puede llegar nunca al caso de la segunda fila de la tabla, donde se lograría que $X \not\mathcal{R} Z$

vii) *Reflexiva:*

$(a, b) \mathcal{R} (a, b) \iff ba = k \cdot ab$ con $k = 1$, se concluye que sí es reflexiva.

Simétrica:

$$\begin{cases} (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff bc \overset{\star^1}{=} k\cdot ad \\ (c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b) \iff ad = h\cdot bc \overset{\star^1}{=} h\cdot k\cdot ad = k'ad, \end{cases}$$

con $k' = 1$ se cumple la igualdad. La relación es simétrica. *Anti-Simétrica:*

Si tomo $(a,b) = (4,2)$ y $(c,d) = (16,4)$, tengo que $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ con $(a,b) \neq (c,d)$. Por lo tanto la relación no es antisimétrica.

Transitiva:

$$\begin{cases} (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff bc \overset{\star^1}{=} k\cdot ad \\ (c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f) \iff de \overset{\star^1}{=} h\cdot cf \\ \text{quiero ver que } (a,b)\,\mathcal{R}\,(e,f) \iff be = k'\cdot af \\ \xrightarrow[\text{M.A.M.}]{\text{multiplico}} \begin{Bmatrix} bc \overset{\star^1}{=} k\cdot ad \\ de \overset{\star^1}{=} h\cdot cf \end{Bmatrix} \xrightarrow[\text{acomodo}]{\text{y}} be\cdot \cancel{cd} = k\cdot h\cdot af\cdot \cancel{cd} \to be \overset{\checkmark}{=} k'\cdot af. \end{cases}$$

Se concluye que la relación es transitiva. Con esos resultados se puede decir que $\mathcal{R}$ en A es de *equivalencia.*

---

23. Sea A un conjunto. Describir todas las relaciones en A que son a la vez

i) simétricas y antisimétricas
elementos en bucles sueltos?

ii) de equivalencia y de orden
Idem anterior

---

i) simétricas y antisimétricas
elementos en bucles sueltos?

ii) de equivalencia y de orden
Idem anterior

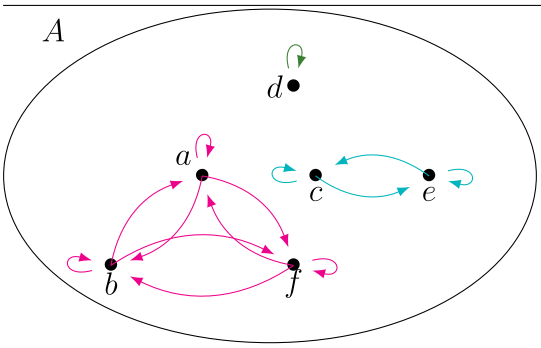
¿Puede una relación en A no ser ni simétrica ni antisimétrica? 22 (vi)?

---

24. Sea $A = \{a,b,c,d,e,f\}$. Dada la relación de equivalencia en A:

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(a,f),(f,a),(b,f),(f,b),(c,e),(e,c)\}$$

Hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathcal{R}$



$$\to \begin{cases} \overline{a} = \{a,b,f\} = \overline{b} = \overline{f} \\ \overline{c} = \{c,e\} = \overline{e} \\ \overline{d} = \{d\} \end{cases}$$

La partición asociada a $\mathcal{R}$: $\{\{d\}, \{c, e\}, \{a, b, f\}\} = \{\overline{d}, \overline{b}, \overline{a}\}$.

25. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 8, 9, 10\}, \{5\}\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

26. Sean $P = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\})$ el conjunto de partes de $\{1, \dots, 10\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en P definida por:

$$A \mathcal{R} B \iff (A \triangle B) \cap \{1, 2, 3\} = \varnothing$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y decidir si es antisimétrica (Sugerencia: usar adecuadamente el ejercicio **14iii)**)).

ii) Hallar la clase de equivalencia de $A = \{1, 2, 3\}$.

i) Para probar que es una relación de equivalencias hay que probar que sea *reflexiva, simétrica y transitiva.* La sugerencia que nos dan es:

$$A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$$

Reflexiva: ¿$A \mathcal{R} A$?

$$A \mathcal{R} A \iff (A \triangle A) = \varnothing \cap \{1, 2, 3\} = \varnothing \quad \checkmark$$

Por lo tanto la realción $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Simétrica: ¿$A \mathcal{R} B \Rightarrow B \mathcal{R} A$?

$$A \mathcal{R} B \iff \underbrace{(A \triangle B)}_{=B \triangle A} \cap \{1, 2, 3\} = \varnothing$$

Como la diferencia simétrica es conmutativa, $AtriangleB = B \triangle A$ se tiene que la relación $\mathcal{R}$ es simétrica también.

Transitiva: ¿$A \mathcal{R} B \quad y \quad B \mathcal{R} C \Rightarrow A \mathcal{R} C$?

$$\begin{cases} A \mathcal{R} B \iff (A \triangle B) \cap \{1, 2, 3\} = \varnothing & \checkmark \\ B \mathcal{R} C \iff (B \triangle C) \cap \{1, 2, 3\} = \varnothing & \checkmark \end{cases}$$

Acá uso la sugerencia.

Si el conjunto $\{1, 2, 3\}$ no está ni en $A \triangle B$ ni en $B \triangle C$, en particular tampoco está en $(A \triangle B) \cup (B \triangle C)$.

Sabemos que $(A \triangle C) \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$, es decir que $(A \triangle C)$ es un subconjunto de un conjunto que no tiene al conjunto $\{1, 2, 3\}$. Se concluye que

$$(A \cap B) \cap \{1, 2, 3\} = \varnothing\,.$$

La relación $\mathcal{R}$ es transitiva.

Como la relación es *reflexiva, simétrica y transitiva* es de equivalencia.

ii) La clase de equivalencia de $A = \{1,2,3\}$ va a estar formada por A y por todos los conjuntos $X \in P$ que cumplan
$$(\{1,2,3\} \triangle X) \cap \{1,2,3\} = \varnothing$$
Resulta que cerca de la sugerencia dada del **14.**iii), está el ejercicio **14.**i), donde se muestra que la intersección ($\cap$) es distributiva con la diferencia simétrica ($\triangle$). Con eso puedo reescribir la condición de más arriba como:
$$(\{1,2,3\} \triangle X) \cap \{1,2,3\} \overset{!}{=} \{1,2,3\} \triangle (X \cap \{1,2,3\}).$$
Si te perdiste en el !, *escribilo y miralo fuerte*. La condición para que $X \mathcal{R} \{1,2,3\}$ queda:
$$\{1,2,3\} \triangle (X \cap \{1,2,3\}) = \varnothing,$$
que, en mi opinión, está más fácil de leer. Para que una diferencia simétrica entre 2 conjuntos resulte en vacío, necesito que los conjuntos sean iguales. Por lo tanto quiero los conjuntos X tales que:
$$X \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3\}.$$
La clase $\overline{A}$:
$$\overline{A} = \left\{X \in P \middle/ \{1,2,3\} \subseteq X\right\} \text{ o también } \overline{A} = \{\{1,2,3\} \cup X \text{ con } X \in \mathcal{P}\{4,5,6,7,8,9,10\}\} \quad \checkmark$$

---

27. Sean $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \leq 92\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en A definida por $x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = 93x - 93y$

a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es antisimétrica?

b) Hallar la clase de equivalencia de cada $x \in A$. Deducir cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación $\mathcal{R}$.

---

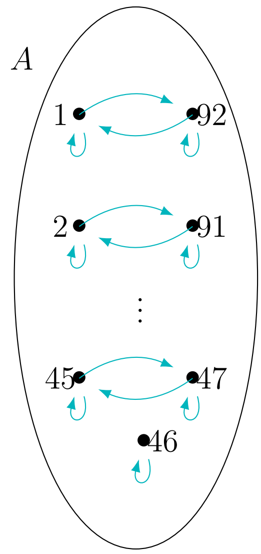
a) Primero acomodo la condición de la relación:
$$x^2 - y^2 = 93x - 93y \overset{!!!}{\iff} \begin{cases} x \overset{\star^1}{=} y \\ \text{o bien} \\ x + y \overset{\star^2}{=} 93 \end{cases}$$
Hacer este ejercicio sin avivarse de lo que pasa en !!! es horrible.

Para ser relación de equivalencia es necesario que sea *reflexiva, simétrica* y *transitiva*:

Reflexiva:
$$x \mathcal{R} x \iff x \overset{\star^1}{=} x \quad \checkmark$$
Simétrica:
$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \iff x + y \overset{\star^2}{=} 93 \\ y \mathcal{R} x \iff y + x \overset{\star^2}{=} 93 \end{cases} \checkmark$$
Transitiva:
$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \iff x \overset{\star^2}{=} 93 - y \\ y \mathcal{R} z \iff y \overset{\star^2}{=} 93 - z \end{cases} \xrightarrow[\text{M.A.M}]{\text{resto}} x - y = -y + z \to x \overset{\star^1}{=} z \iff x \mathcal{R} z \quad \checkmark$$
Antisimétrica:

La $\mathcal{R}$ no es antisimétrica, como contraejemplo se ve que $1 \mathcal{R} 92$ y $92 \mathcal{R} 1$ con $1 \neq 92$ ☠.

b) A priori no sé como encontrar las clases de equivalencia, pero solo buscando la relación del 1 con algún número (excepto el mismo) veo que únicamente se puede relacionar con el 92 por la condición $\bigstar^2$, dado que $1+92 \overset{\bigstar^2}{=} 93$. De ahí se pueden inferir que todas las clases van a ser conjuntos *chiquitos*, con los números que sumen 93.



Las clases de equivalencia :

$$\begin{cases} \overline{1} & = & \overline{92} & = & \{1,92\} \\ \overline{2} & = & \overline{91} & = & \{2,91\} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \overline{45} & = & \overline{47} & = & \{45,47\} \\ \overline{46} & = & \{46\} \end{cases}$$

Hay entonces 46 clases. $A = \{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{45}, \overline{46}\}$

28.

i) Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Consideremos en $\mathcal{P}(A)$ la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): Dos subconjuntos de A están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante par acada clase.

ii) En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, consideremos nuevamente la relación de equivalencia dada por el cardinal: Dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación? Hallar un representante para cada clase.

---

i) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \cdots, \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$, el conjunto $\mathcal{P}(A)$ tiene un total de $2^{10} = 1024$ elementos. La relación determina 11 *clases de equivalencia* distintas.

$$\begin{cases} \text{Conjuntos con 0 elementos:} & \overline{0} & \varnothing \\ \text{Conjuntos con 1 elemento:} & \overline{1} & \{3\} \\ \text{Conjuntos con 2 elementos:} & \overline{2} & \{5,2\} \\ \text{Conjuntos con 3 elementos:} & \overline{3} & \{1,6,3\} \\ \text{Conjuntos con 4 elementos:} & \overline{4} & \{1,8,10,4\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Conjuntos con 10 elementos:} & \overline{10} & \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = A \end{cases}$$

ii) Es parecido al inciso anterior, donde ahora $A = \{1,2,3,\cdots,N-1,N\}$, donde $\mathcal{P}(\mathbb{N}_N)$ tiene 2^N elementos.

La relación determina $N+1$ *clases de equivalencia* distintas.

$$\begin{cases} \text{Conjuntos con 0 elementos:} & \overline{0} & \varnothing \\ \text{Conjuntos con 1 elemento:} & \overline{1} & \{3\} \\ \text{Conjuntos con 2 elementos:} & \overline{2} & \{5,2\} \\ \text{Conjuntos con 3 elementos:} & \overline{3} & \{1,6,3\} \\ \text{Conjuntos con 4 elementos:} & \overline{4} & \{1,8,10,4\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Conjuntos con 10 elementos:} & \overline{N} & \{1,2,3,4,\cdots,N-1,N\}\,\mathbb{N}_N \end{cases}$$

Funciones

29. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

i) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,b),(5,c),(3,d)\}$

No es función, dado que $3\ \mathcal{R}\ a$, $3\ \mathcal{R}\ d$ y $a \neq d$

ii) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,b)\}$

No es función, dado que todo elemnto de A tiene que estar relacionado a algún elemento de B, $5 \not\mathcal{R}\ y$ para ninún $y \in B$

iii) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $\mathcal{R} = \{(1,a),(2,a),(3,d),(4,b),(5,c)\}$

Es función.

iv) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \ / \ a = 2b - 3\}$

Es función.

v) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \ / \ a = 2b - 3\}$

No es función, $\sqrt{2} \not\mathcal{R}\ b$ para ningún $b \in \mathbb{N}$

vi) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ / \ a + b \text{ es divisible por } 5\}$

No es función, porque $0\ \mathcal{R}\ 5$ y $0\ \mathcal{R}\ 10$ y necesito que $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists!\, y \in \mathbb{Z}$

30. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para la que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$

No es *inyectiva*, $f(-1) = f(1)$.

No es *sobreyectiva*, $\mathrm{Im}(f) = [-5, +\infty)$.

ii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iii) ... hay que hacerlo!

Si querés mandarlo: Telegram →, o mejor aún si querés subirlo en LaTeX→.

iv) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Es *inyectiva* y *sobreyectiva*. $\forall m, m' \in \mathbb{N}, \begin{cases} f(2m) = \frac{2m}{2} = m \\ f(2m'-1) = 2m' - 1 + 1 = 2m' \end{cases}$ $\to$ Si bien $f(8) = f(3)$ la función es *sobreyectiva* porque genera todo $\mathbb{N}$ tan solo con la parte par de la función.

$f^{-1}(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ es par} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Qué onda?

Ejercicios extras:

1. Probar la propiedad distributiva: $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

Tengo que hacer una doble inclusión:

1) $X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
2) $X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$

1) $x \in X \cap (Y \cup Z)$ quiere decir que $x \in X$ y $\left\{ \begin{array}{c} x \in Y \\ \text{o bien} \\ x \in Z \end{array} \right\}$. Por lo tanto $\to \left\{ \begin{array}{c} x \in X \cap Y \\ \text{o bien} \\ x \in X \cap Z \end{array} \right\}$, lo que equivale a $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad \checkmark$.

2) Ahora hay que probar la vuelta. Uso razonamiento análogo:

$$x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \Rightarrow x \in X \quad y \quad \left\{ \begin{array}{c} x \in X \cap Y \\ \text{o} \\ x \in X \cap Z \end{array} \right.$$

Pero teniendo en cuenta que:

$$\left\{ \begin{array}{c} Y \subseteq Y \cup Z \\ \text{y que} \\ Z \subseteq Z \cup Y, \end{array} \right. \overset{!!}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{c} x \in X \cap (Y \cup Z) \\ \text{o bien} \\ x \in X \cap (Z \cup Y) \end{array} \right. \Rightarrow x \in X \cap (Y \cup Z)$$

En !! uso algo "obvio" pero que me sirve para seguir bien donde está x: Resalto que si un elemento está en Y seguro va a estar en la unión de Y con lo que sea.

---

2. Probar la propiedad $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Tengo que hacer una doble inclusión $\to \begin{cases} 1) \quad (A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c \\ 2) \quad A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c \end{cases}$

1) Prueba directa: Si $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$
Por hipótesis $x \in (A \cap B)^c \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$

A	B	$A^c \cup B^c$	$(A \cap B)^c$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

Uso la tabla para ver la definición $x \in (A \cap B)^c \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \notin A \vee x \notin B$

2) Pruebo por absurdo. Si $\forall x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$

Supongo que $x \notin (A \cap B)^c \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \in (A \cap B) \xrightarrow[\text{hipótesis}]{\text{por}} x \in A^c \cup B^c \to \left\{ \begin{array}{c} x \notin A \\ \vee \\ x \notin B \end{array} \right\}$, por lo que $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \cap B$ contradiciendo el supuesto, absurdo. Debe ocurrir que $x \in (A \cap B)^c$

A	B	$A \cap B$	$(A \cup B)$	$(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

---

3. Sea

$$\mathcal{F} = \{h : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,\ldots,50\} \ / \ h \text{ es inyectiva}\}.$$

Definimos en $\mathcal{F}$ la relación $\mathcal{R}$ como

$$f \ \mathcal{R} \ g \quad \text{si y sólo si} \quad \#\left(\mathrm{Im}(f) \ \setminus \ \mathrm{Im}(g)\right) = 0 \quad \text{o} \quad 4.$$

a) Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

b) Sea $f \in \mathcal{F}$ definida como $f(x) = x$ para $1 \leq x \leq 4$. Calcular cuántas funciones $g \in \mathcal{F}$ satisfacen $f \ \mathcal{R} \ g$

Observar que $f \in \mathcal{F}$ es una función que tiene un dominio con solo 4 elementos, es decir

$$\#\,\mathrm{Dom}(f) = 4 \ \forall f \in \mathcal{F},$$

y dado que f es inyectiva, todos los elementos de la imagen deben ser distintos, por lo tanto

$$\#\,\mathrm{Im}(f) = 4 \ \forall f \in \mathcal{F}$$

a) *Reflexiva:* Quiero ver que si $f \ \mathcal{R} \ f$.

Esto debe ser cierto, ya que $A = \{\mathrm{Im}(f) \ \setminus \ \mathrm{Im}(f)\} = \varnothing$ y $\#\varnothing \overset{!}{=} 0 \ \ \forall f \in \mathcal{F}$. $\mathcal{R}$ es reflexiva ✓

Simétrica: Quiero ver que si $f \ \mathcal{R} \ g \Rightarrow g \ \mathcal{R} \ f$.

Si tengo que $f \ \mathcal{R} \ g$, sé algo sobre sus conjuntos Im ya que,

$$\begin{cases} \#\,\{\mathrm{Im}(f) \ \setminus \ \mathrm{Im}(g)\} = 0 & \iff \quad \mathrm{Im}(f) \overset{\star^1}{=} \mathrm{Im}(g) \\ & \quad \text{o} \\ \#\,\{\mathrm{Im}(f) \ \setminus \ \mathrm{Im}(g)\} = 4 & \iff \quad \mathrm{Im}(f) \overset{\star^2}{\cap} \mathrm{Im}(g) = \varnothing \end{cases}$$

Entonces los conjuntos $\mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Im}(g)$ están relacionados por un "$=$" y un "$\cap$", dos operadores simétricos por lo tanto $\mathcal{R}$ es simétrica. ✓

Antisimétrica: Quiero ver que si $f \ \mathcal{R} \ g \Rightarrow g \not\mathcal{R} \ f$, o también a veces está bueno pensarla la antisimetría como si $f \ \mathcal{R} \ g$ y $g \ \mathcal{R} \ f \Rightarrow f = g$. Bajo la sospecha de que la función no es antisimétrica la segunda forma de pensarlo me ayuda a encontrar un *contra*ejemplo.

$$f \to \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 3 \\ f(4) = 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g \to \begin{cases} g(1) = 4 \\ g(2) = 3 \\ g(3) = 2 \\ g(4) = 1 \end{cases}$$

$\begin{cases} f \ \mathcal{R} \ g, \text{ sus imágenes cumplen } \star^1 \\ g \ \mathcal{R} \ f, \text{ sus imágenes cumplen } \star^1 \end{cases}$, pero por como están definidas las funciones $f \neq g$. $\mathcal{R}$ no es antisimétrica. ☠

Transitiva: Quiero ver que si $f \mathcal{R} g$ y $g \mathcal{R} h \Rightarrow f \mathcal{R} h$.
Acá podemos encontrar un *contra*ejemplo para mostrar que no es transitiva, saco de la galera 3 funciones, f, g y $h \in \mathcal{F}$

$$f \to \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 3 \\ f(4) = 4 \end{cases}, \quad g \to \begin{cases} g(1) = 5 \\ g(2) = 6 \\ g(3) = 7 \\ g(4) = 8 \end{cases} \quad \text{y} \quad h \to \begin{cases} h(1) = 1 \\ h(2) = 2 \\ h(3) = 9 \\ h(4) = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f \mathcal{R} g, \text{ sus imágenes cumplen } \bigstar^2 \\ g \mathcal{R} h, \text{ sus imágenes cumplen } \bigstar^2 \end{cases}, \text{ pero } f \not\mathcal{R} h \text{ dado que:}$$

$$\{\mathrm{Im}(f) \setminus \mathrm{Im}(g)\} = \{3,4\} \Rightarrow \#\{\mathrm{Im}(f) \setminus \mathrm{Im}(g)\} = 2 \neq 0 \quad \text{o} \quad 4.$$

$\mathcal{R}$ no es transitiva. ☠

b) Para que f y g se relacionen se debe cumplir con $\bigstar^1$ o con $\bigstar^2$. En otras palabras necesito encontrar funciones $g \in \mathcal{F}$ cuya imagen $\mathrm{Im}(g) = \{1,2,3,4\}$ o su codominio sea $\underbrace{\mathrm{Cod} = \{5,6,\dots,49,50\}}_{\#\,\mathrm{Cod}=46}$.

Contar cuando $\mathrm{Im}(g) = \{1,2,3,4\}$*:*

Hago la *inyección* de los 4 valores que puede tomar la función inyectiva g.

$$\begin{cases} \begin{array}{rcccc} g \to & g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{opciones} \to & \#4 & \#3 & \#2 & \#1 \end{array} \end{cases}$$

Hay $4!$ permutaciones ✓

Contar cuando codominio sea $\mathrm{Cod} = \{5,6,\dots,,49,50\}$

Hago la *inyección* de los 46 valores que puede tomar la función inyectiva g.

$$\begin{cases} \begin{array}{rcccc} g \to & g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{opciones} \to & \#46 & \#45 & \#44 & \#43 \end{array} \end{cases}$$

Hay $\frac{46!}{42!}$ permutaciones ✓

Se concluye que hay un total de $\frac{46!}{42!} + 4!$ funciones $g \in \mathcal{F} / f \mathcal{R} g$ ✓

---

4. (recuperatorio 1er C. 24)

Se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$n \mathcal{R} m \iff 10 \mid n^2 + 4m^2 + m - 6n.$$

a) Probar que $n \mathcal{R} m \iff 5 \mid n^2 - m^2 + m - n$ y $n \equiv m\ (2)$.

b) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

a) $(\Rightarrow)$

$$n \mathcal{R} m \overset{\text{def}}{\iff} n^2 + 4m^2 + m - 6n \equiv 0\ (10)$$

Si la expresión es divible por 10, debe ser divisible por 2 y también por 5:

$$\begin{cases} n^2 + 4m^2 + m - 6n \underset{!}{\overset{(5)}{\equiv}} n^2 - m^2 + m - n \equiv 0\ (5) \quad \checkmark \\ n^2 + 4m^2 + m - 6n \overset{(2)}{\equiv} n^2 + m \underset{!!}{\overset{(2)}{\equiv}} n + m \equiv 0\ (2) \Leftrightarrow n \equiv m\ (2) \quad \checkmark \end{cases}$$

Si no ves lo que pasó en !! pensá en la paridad de un número y su cuadrado.
Por lo tanto si

$$n \mathcal{R} m \quad \Rightarrow \quad 5 \mid n^2 - m^2 + m - n \quad \text{y} \quad n \equiv m\ (2)$$

$(\Leftarrow)$

$$n^2 - m^2 + m - n \equiv 0\ (5) \Leftrightarrow n^2 + 4m^2 + m - 6n \equiv 0\ (5) \Leftrightarrow 5 \mid n^2 + 4m^2 + m - 6n \quad \checkmark$$

Ahora uso la información de $n \equiv m\ (2)$

$$\text{Si } n \equiv m\ (2) \Rightarrow n^2 + 4m^2 + m - 6n \underset{!}{\overset{(2)}{\equiv}} 5\underbrace{m(m-1)}_{\text{par!}} \equiv 0\ (2) \iff 2 \mid n^2 + 4m^2 + m - 6n \quad \checkmark$$

Por lo tanto si

$$n \mathcal{R} m \quad \Leftarrow \quad 5 \mid n^2 - m^2 + m - n \quad \text{y} \quad n \equiv m\ (2)$$

b) No es casualidad que en el punto anterior tuvieramos una *redefinición* de la relación $\mathcal{R}$:

$$n \mathcal{R} m \iff \begin{cases} n^2 - m^2 + m - n \equiv 0\ (5) \\ \quad \text{y} \\ n \equiv m\ (2). \end{cases}$$

En esa forma es mucho más fácil mostrar lo que sigue porque la relación queda definida en función de congruencias que *ya son relaciones de equivalencias*. Para mostrar la relación de equivalencia, hay que probar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva: Si $n \mathcal{R} n \iff \begin{cases} n^2 - n^2 + n - n = 0 \equiv 0\ (5) \quad \checkmark \\ \quad \text{y} \\ n \equiv n\ (2) \quad \checkmark. \end{cases}$

La relación es *reflexiva*.

Simétrica: Si $n \mathcal{R} m \Rightarrow m \mathcal{R} n$, para algún par n, m.

$$\text{Si } n \mathcal{R} m \Rightarrow \begin{cases} n^2 - m^2 + m - n \equiv 0\ (5) \xrightarrow{m \mathcal{R} n} m^2 - n^2 + n - m = -(n^2 - m^2 + m - n) \equiv 0\ (5) \quad \checkmark \\ \quad \text{y} \\ n \equiv m\ (2) \xrightarrow{m \mathcal{R} n} m \equiv n\ (2) \quad \checkmark \end{cases}$$

La relación es *simétrica*

Transitiva: Quiero ver que si: $n \mathcal{R} m \quad \text{y} \quad m \mathcal{R} j \Rightarrow n \mathcal{R} j$

Si

$$n \mathcal{R} m \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - m^2 + m - n \equiv 0\ (5) \\ \quad \text{y} \\ n \equiv m\ (2) \end{cases} \quad \text{y} \quad m \mathcal{R} j \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - j^2 + j - m \equiv 0\ (5)\bigstar^1 \\ \quad \text{y} \\ m \equiv j\ (2)\bigstar^2 \end{cases}$$

entonces

$$\left.\begin{array}{c} n^2 - m^2 + m - n \equiv 0\ (5) \overset{\star^1}{\underset{!}{\iff}} n^2 - j^2 + j - n \equiv 0\ (5) \\ \text{y} \\ n \equiv m\ (2) \overset{\star^2}{\iff} n \equiv j\ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{n\ \mathcal{R}\ j}$$

La relación es *transitiva.*

Como la relación resultó ser *reflexiva, simétrica y transitiva,* entonces es de equivalencia. Fin.