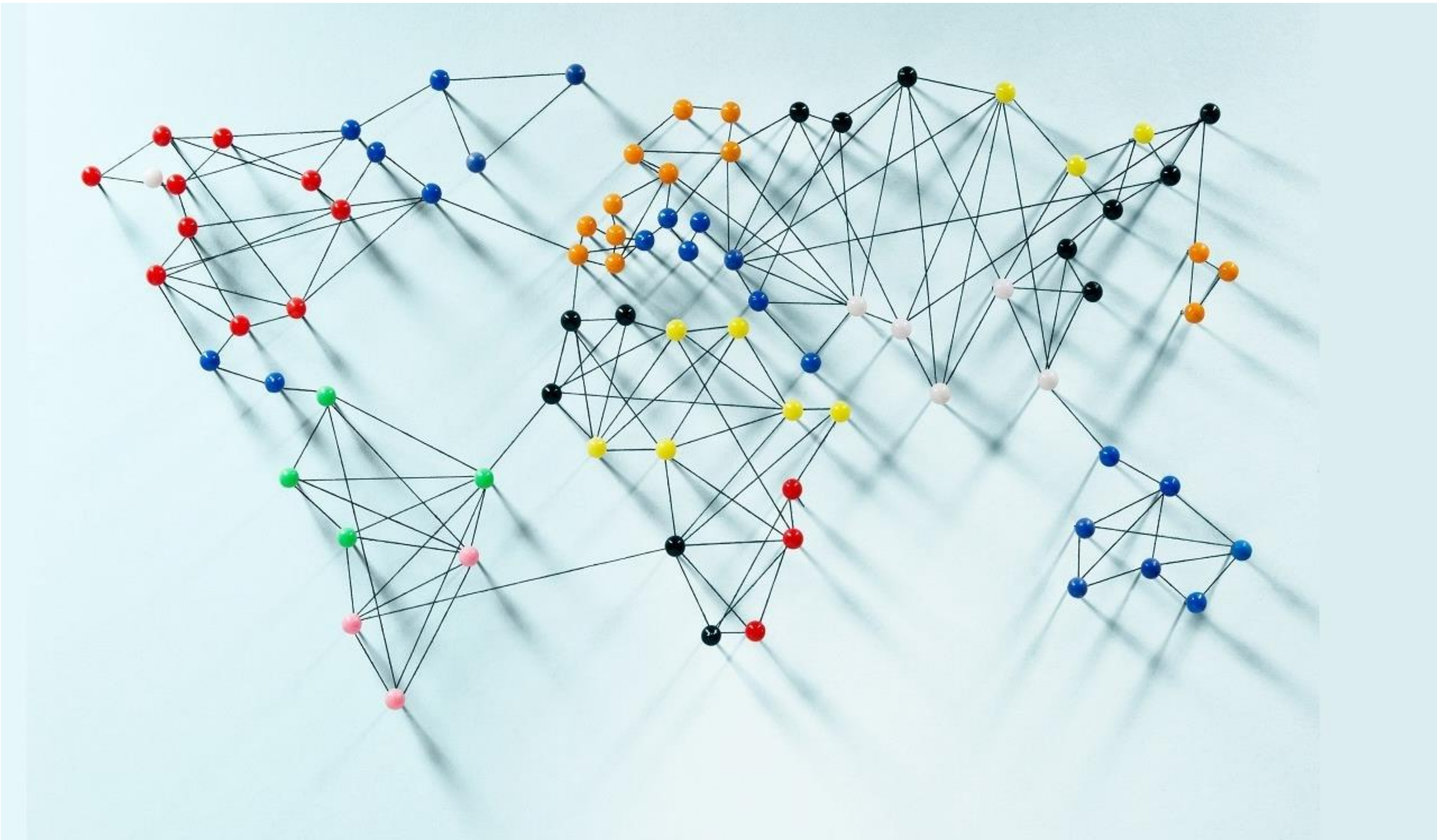
Programação Linear e Grafos

Sistemas de Informação - UNISUL

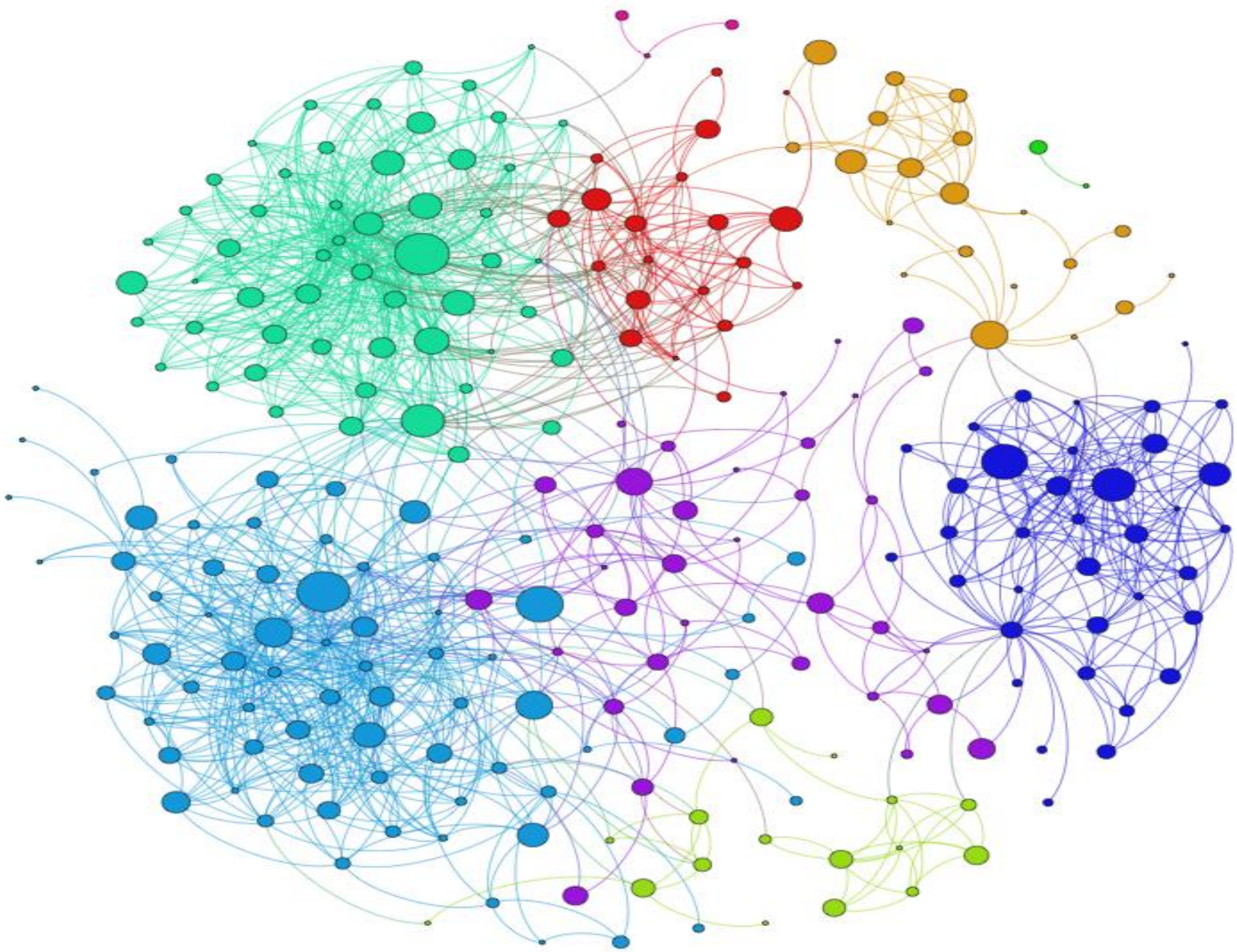
Aran Bey Tcholakian Morales, Dr. Eng.

(Apostila 4)

Teoria de Grafos



Localização de Facilidades



Localização de “Facilidades”

Distância: dados dois vértices v_i e v_j pertencentes ao grafo **G**, denomina-se **distância**, entre v_i e v_j, ao comprimento do menor caminho entre esses dois vértices.

No caso da não existência desse caminho, considera-se distância infinita.

Em um grafo conexo, **distância é uma métrica**, isto é, para todo vértice **u**, **v** e **w** de **G**, tem-se que:

i) **d(u,v) >= 0** com **d(u,v) = 0** se e só se **u = v**

ii) **d(u,v) = d(v,u)** ocorre apenas quando o grafo é não orientado.

iii) **d(u,v) + d(v,w) >= d(u,w)**

Localização de "Facilidades"

Com a distância assim definida podemos conceituar:

Excentricidade: denotada pôr **[e(v)]**, de um grafo G, e definida como:

A excentricidade de um vértice **v** é a maior distância existente a partir de **v,** isto é, **Max(d(v,u))**.

Raio de um grafo: denotado pôr **[r(G)]**, de um grafo **G,** é o **MIN(e(v))** (é o mínimo das excentricidades dos vértices).

Centro de G é definido pelo conjunto de vértices **v** tais que **e(v) = r(G).**

Localização de "Facilidades"

Matriz D

0	4	7	3	4		***7***
10	0	3	9	8		***10***
7	6	0	6	5		***7***
1	1	4	0	1		***4***
2	1	4	1	0		***4***
10	***6***	***7***	***9***	***8***		

Radio(G) = 4 ➔ Centro (V_4, V_5) (pôr linha)

Radio(G) = 6 ➔ Centro (V_2) (pôr coluna)

Matriz D + D^T

0	14	14	4	6		***14***
14	0	9	10	9		***14***
14	9	0	10	9		***14***
4	10	10	0	2		***10***
6	9	9	2	0		***9***

Radio(G) = 9 ➔ Centro (V_5)

Localização de "Facilidades"

Diâmetro de G é a maior das excentricidades, **vértice periférico** é o vértice de distancia igual ao diâmetro.

Mediana de G é um conjunto de vértices para a qual a soma das distancias aos demais vértices é mínima.

Anti-centro de G é um conjunto de vértices cuja menor distancia em relação a algum outro vértice é máxima.

Localização de “Facilidades”

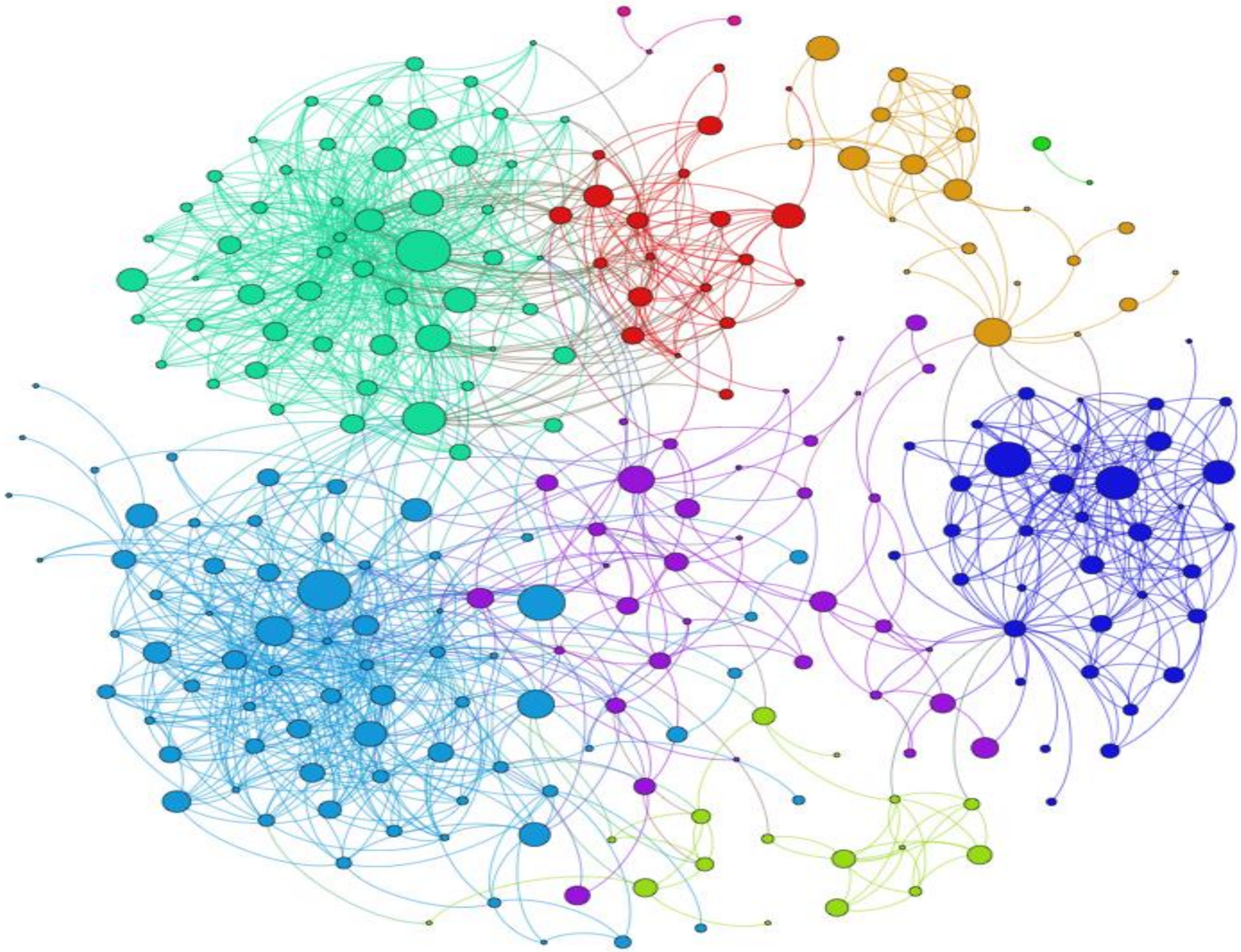
	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	V9
v1	0	12	22	15			25		
v2	12	0	8		16				
v3	22	8	0			17			40
v4	15			0	15		14		
v5		16		15	0	10		16	
v6			17		10	0			18
v7	25			14			0	13	21
v8					16		13	0	11
V9			40			18	21	11	0

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	V9
v1	0	12	20	15	28	37	25	38	46
v2	12	0	8	27	16	25	37	32	43
v3	20	8	0	35	24	17	45	40	35
v4	15	27	35	0	15	25	14	17	35
v5	28	16	24	15	0	10	29	16	27
v6	37	25	17	25	10	0	39	26	18
v7	25	37	45	14	29	39	0	13	21
v8	38	32	40	27	16	26	13	0	11
V9	46	43	35	35	27	18	21	11	0

Max	Soma	Min
46	221	12
43	200	8
45	224	8
35	193	14
29	165	10
39	197	10
45	223	13
40	203	11
46	236	11

Diâmetro = 46 ; Vértices Periféricos (V_1 e V_9);
Centro (V_5); Mediana (V_5); Anti-centro (V_4);

Arvores



Arvores

As seguintes **definições** de **árvores (sem orientação)** são equivalentes. Uma árvore é:

1. Um grafo conexo de **n** vértices e (n-1) arestas;

2. Um grafo conexo sem ciclos;

3. Um grafo no qual cada par de vértices é ligado por um e somente um caminho simples (todos os vértices são distintos);

4. Um grafo conexo, porém, se qualquer de suas arestas for retirada, a conexidade fica interrompida;

5. Um grafo acíclico e conexo, porém, se dois vértices quaisquer, não adjacentes, forem ligados por uma aresta, então o grafo passará a ter um ciclo.

Arvores

Um conjunto de vértices de uma árvore estão no **mesmo nível i**, se e somente se a distância da raiz até esse vértices for a mesma.

As folhas tem estão a mesma distância da raiz estão no **nível zero.**

Uma **floresta** é um conjunto de árvores. Portanto uma floresta de **k** árvores, possuindo **n** vértices, tem precisamente **n-k** arestas.

Arvores

Se G é um grafo não dirigido, de **n** vértices, então uma **árvore expandida** T de G é definida por um subgrafo de G que forma uma árvore de acordo com as definições anteriores. Isto é, uma **árvore expandida** é uma árvore que contém todos os vértices de **V**.

Árvore de Custo Mínimo

Nos problemas de interligação, como redes de comunicação, redes de luz, de agua, esgotos, etc., existe interesse na interligação de todos os pontos atendidos com o consumo mínimo de meios.

Arvores

Algoritmo de Kruskal: este algoritmo utiliza três conjuntos, Q, T e VS. O conjunto T é usado para guardar as arestas da árvore expandida. O conjunto VS contém todos os vértices de G, onde cada vértice é um conjunto de 1 elemento (o algoritmo começa com uma floresta de n arvores para chegar a uma única árvore) .

As arestas são escolhidas de Q pela ordem crescente de custo. Considere que a aresta (v,w) tenha sido escolhida. Se v e w pertencem ao mesmo conjunto VS, descarta-se a aresta. Se v e w estão em conjuntos distintos W1 e W2, faz-se o 'merge' de W1 e W2 e adiciona- se (v,w) a T, o conjunto de arestas da árvore expandida final.

Arvores

Entrada: Um grafo G (V, E) com uma função de custo C associada as arestas.

Saída: S (V, T), uma árvore expandida de custo mínimo de G.

Inicio

Faça T $\leftarrow$ 0; VS $\leftarrow$ 0;

Construa uma fila de prioridade (Q) contendo todas as arestas de E;

Para cada vértice v $\in$V faça: adicione { v } em VS;

Enquanto | VS | > 1 faça

Escolha (v, w), uma aresta em Q de menor custo;

Apague (v, w) de Q;

Se v e w estão em conjuntos diferentes W1 e W2 pertencentes a VS, então:

Substitua W1 e W2 em VS por W1 $\cup$ W2; (para evitar formar ciclos)

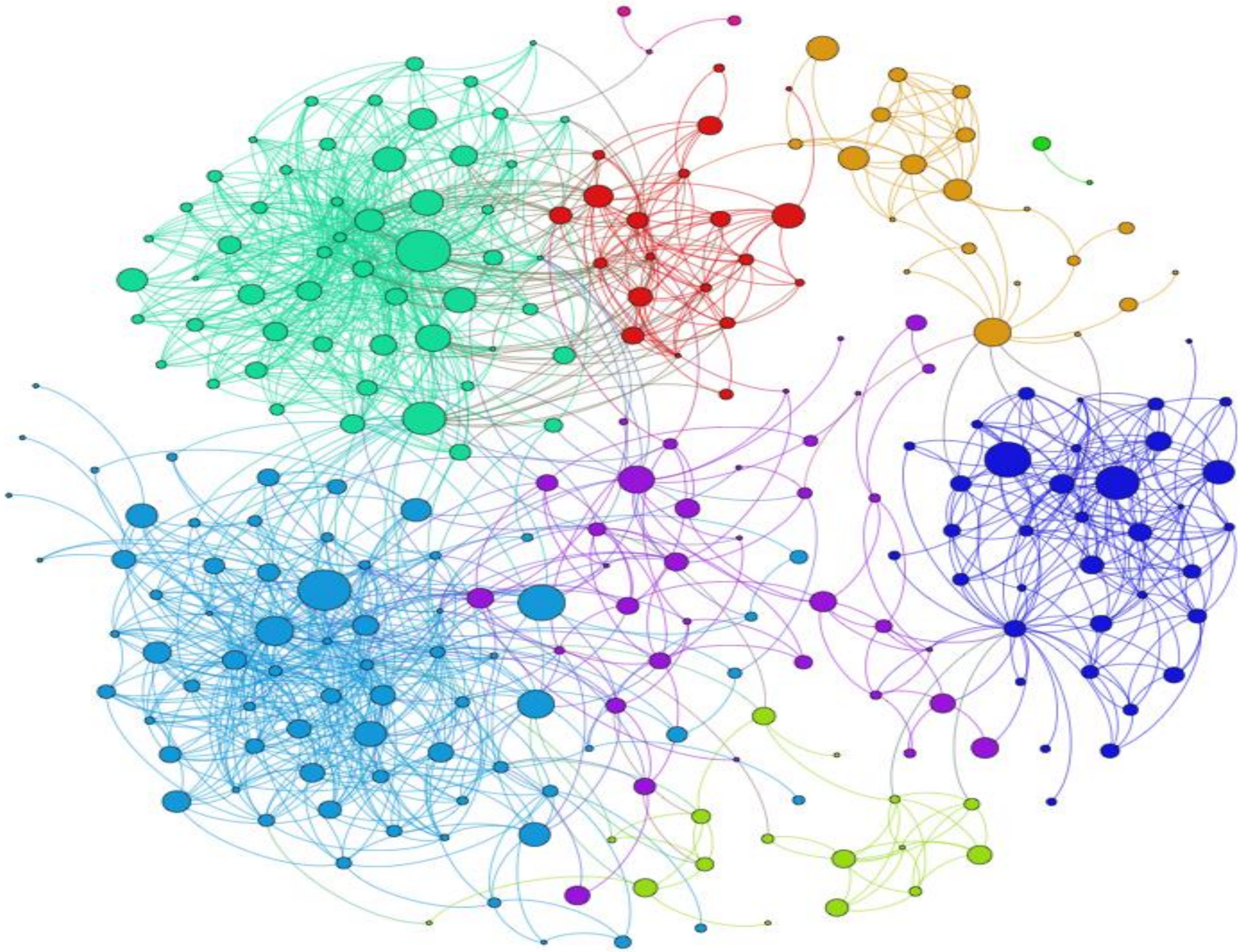
Adicione (v,w) a T;

Fim Se

Fim enquanto

Fim.

Grafos Planos



Grafos Planos

Um grafo G é dito planar se existir alguma representação geométrica de G que possa ser desenhada num plano, de tal modo que não existe cruzamento de arestas.

Algoritmo para Detectar se um Grafo é Planar

Passo 1. O algoritmo inicialmente acha o maior ciclo C existente no grafo. Se G não possuir ciclos, então G é evidentemente planar.

Passo 2. Para toda aresta do grafo não pertencente ao ciclo faça:

- Agrupe as arestas em sub-grafos planos;
- Inclua cada sub-grafo em uma face do ciclo C, ou a uma mesma face mas com a condição de nenhuma das arestas se interceptarem.

Programação Linear e Grafos

Sistemas de Informação - UNISUL
Aran Bey Tcholakian Morales, Dr. Eng.
(Apostila 4)