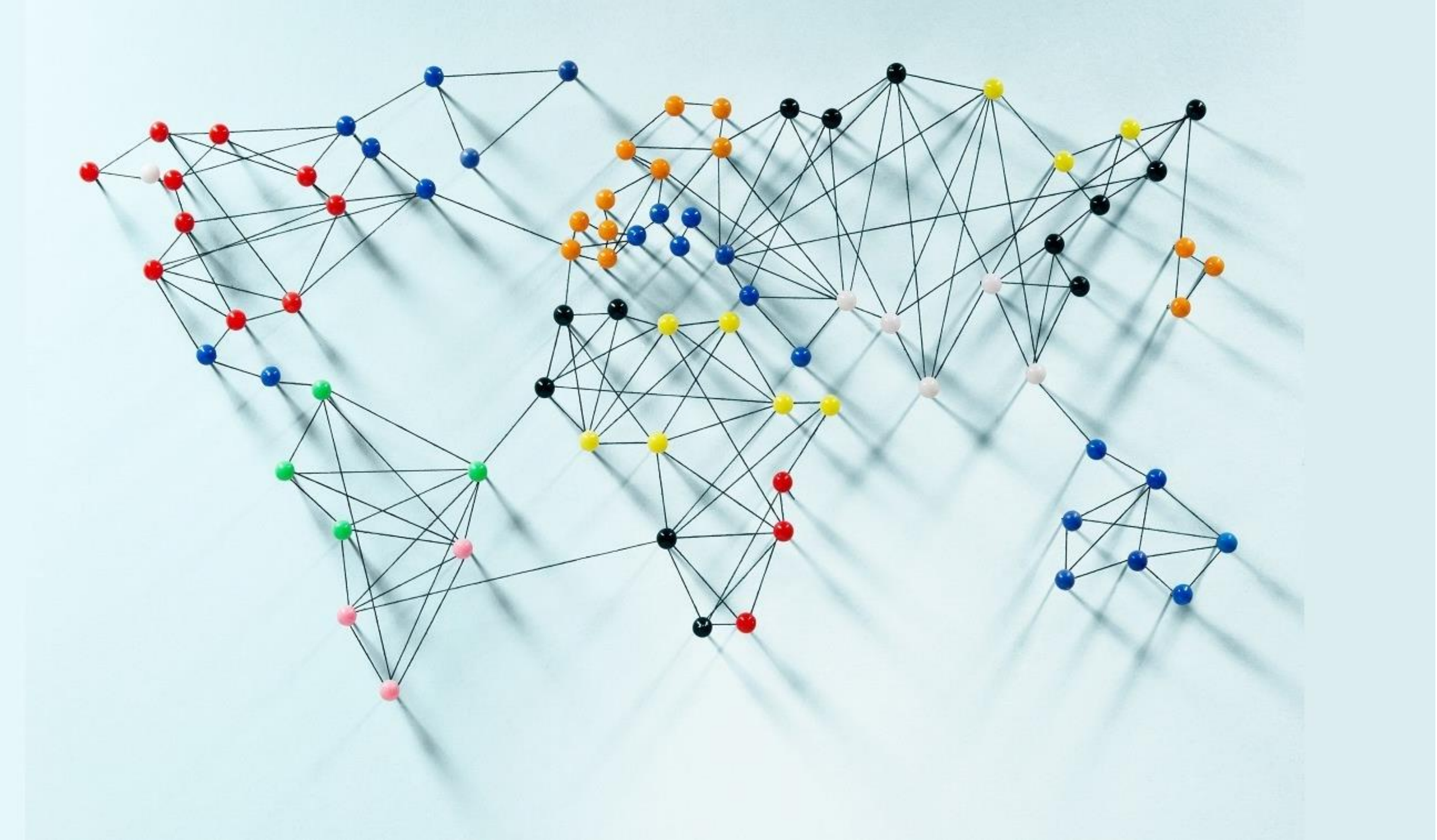
Programação Linear e Grafos

Sistemas de Informação - UNISUL

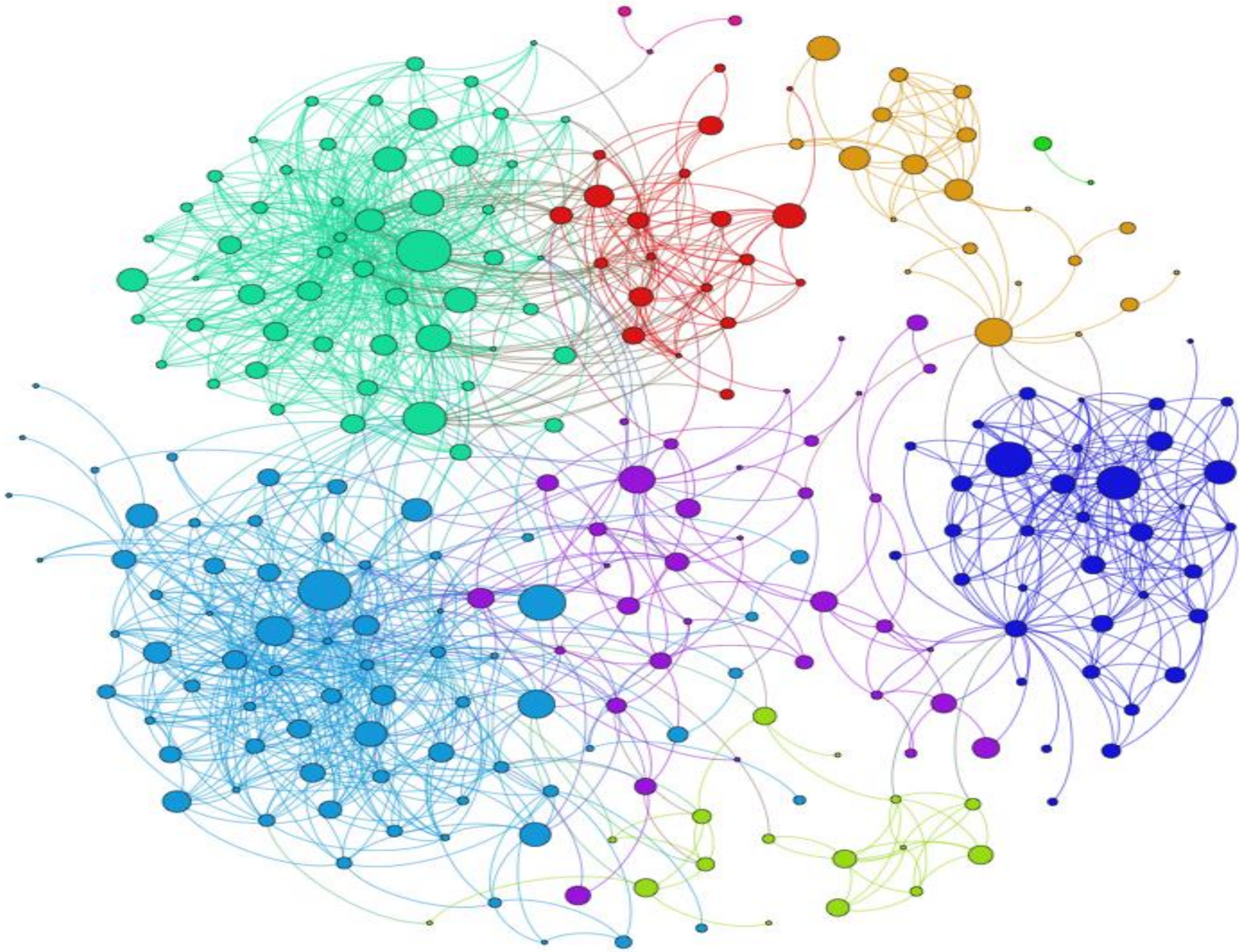
Aran Bey Tcholakian Morales, Dr. Eng.

(Apostila 3)

Teoria de Grafos



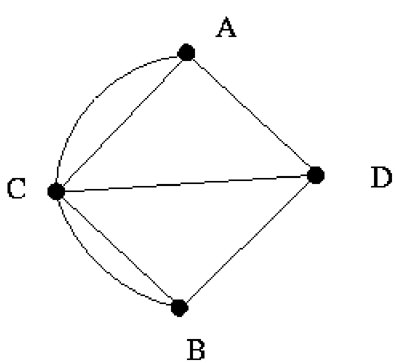
Grafos de Euler

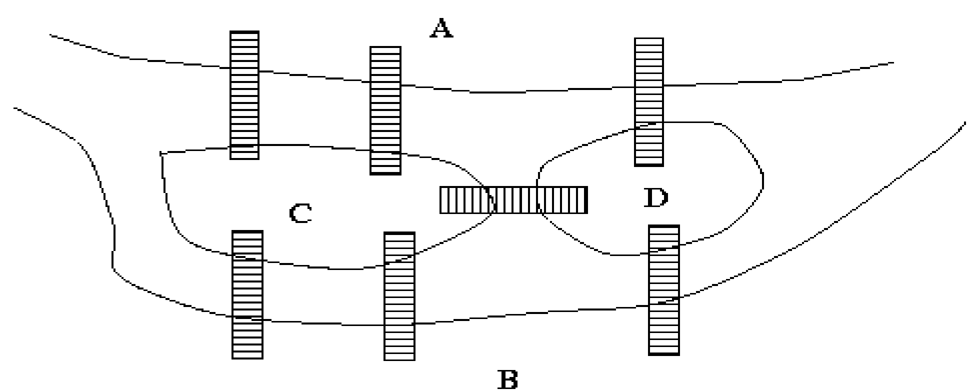


Grafos de Euler

No século 18 havia na cidade de Königsberg famosa pôr ter um conjunto de sete pontes que cruzavam o rio Pregel, (Euler, 1736). Elas conectavam duas ilhas entre si e as ilhas com as margens.

Pôr muito tempo os habitantes daquela cidade perguntava-se se era possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes pôr qualquer uma delas?





Grafos de Euler

Define-se um **caminho de Euler** como sendo um caminho fechado passando uma **única vez por cada aresta** do grafo (percorrendo todas as arestas do grafo).

Todos os grafos que admitem um **caminho de Euler** são chamados de **grafos de Euler**.

Grafos de Euler

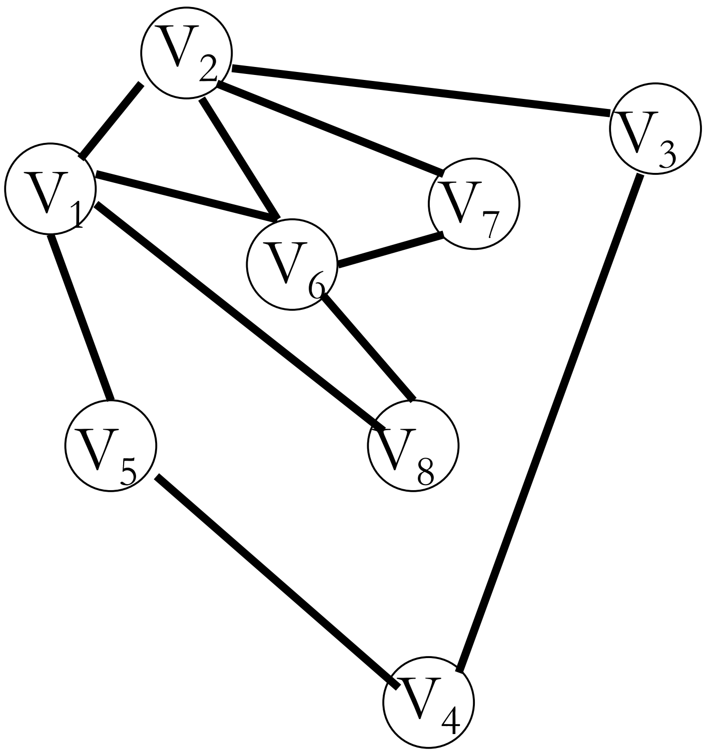
Um grafo **G** é **conexo**, se existe pelo menos um caminho entre qualquer par de vértices em **G**.

Teorema: Um grafo conexo **G**, é um grafo de Euler se e somente se todos os seus vértices são de grau par.

Teorema: Um grafo orientado **G** contém um ciclo euleriano, se e somente se os graus de entrada e saída de cada vértice forem iguais.

Grafos de Euler

$V_1;V_2;\ V_6;V_7;\ V_2;V_3;\ V_4;V_5;\ V_1;V_6;\ V_8;V_1;$



Grafos de Euler

Problema do carteiro chinês.

Encontrar o caminho de menor custo, partindo do vértice inicial, passando uma única vez pôr cada aresta, e passando pôr todas as arestas, voltando ao vértice inicial.

Há dois tipos de solução para esse problema:

Solução 1 – Quando o grafo é de Euler. Nesse caso, o caminho pode ser achado (e também seu respectivo custo).

Para isso, utiliza-se o algoritmo de Fleury.

Solução 2 – Quando o grafo não é de Euler. Nesse caso, algumas arestas terão que ser repetidas e utiliza-se um algoritmo diferente.

Grafos de Euler

Solução 1: Algoritmo de Fleury

O algoritmo parte do pressuposto de que **G** é um grafo de **Euler**.

Para executar o algoritmo, deve-se iniciar em qualquer vértice **v** e atravessar as arestas de maneira arbitrária, seguindo os passos:

Passo 1 – Apague a aresta que foi visitada e, se algum vértice ficar isolada, apague-o também.

Passo 2 – Em cada estágio, use uma ponte somente se não houver alternativa. Isto é, nunca atravesse uma aresta se essa aresta divide o grafo em duas componentes (excluindo o vértice isolado).

Observação: uma ponte (istmo) é uma aresta do grafo G cuja remoção divide o grafo G em duas componentes conexas.

Grafos de Euler

Solução 2

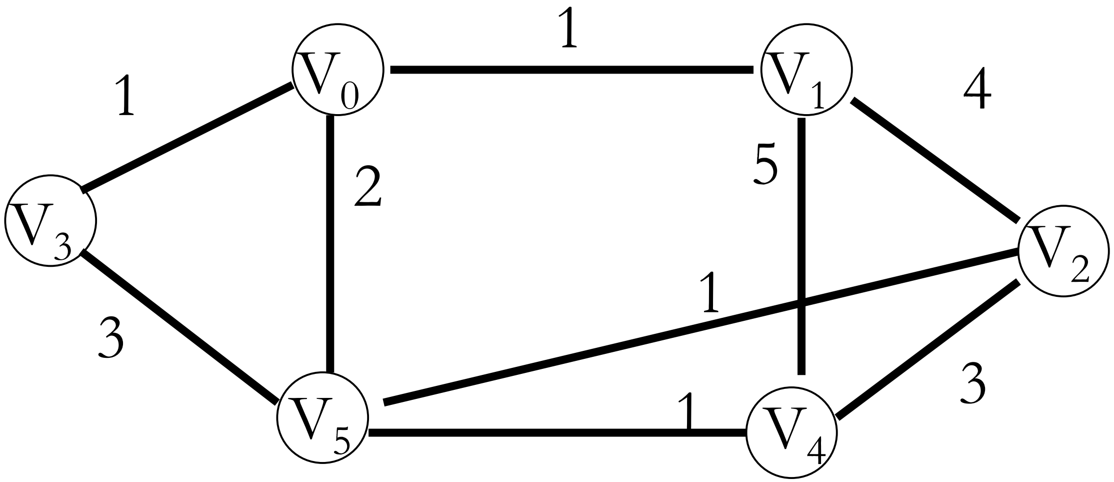
Quando o grafo **G** não é um grafo de **Euler**.

Passo 1 – Obter a matriz de distancia final (Floyd);

Passo 2 – Com a matriz de distancia final para os vértices de grau impar, construir todas as combinações de dois vértices e pegar a de menor valor

Passo 3: incluir as arestas correspondentes no grafo que agora será uma grafo de Euler;

Passo 4: aplicar o algoritmo de Fleury;



Exercício 2 da folha 4.

	V0	V1	V2	V3	V4	V5
V0	0	1		1		2
V1	1	0	4		5	
V2		4	0		3	1
V3	1			0		3
V4		5	3		0	1
V5	2		1	3	1	0

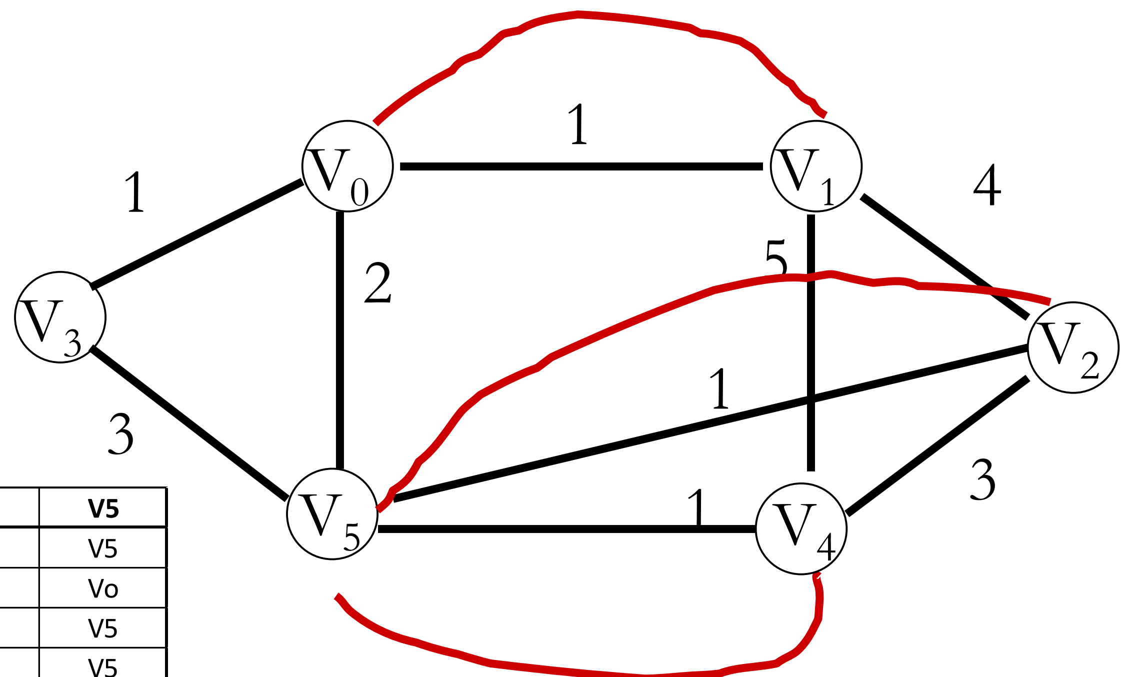
V0-V1 e V2-V4: 1+2

V0-V2 e V1-V4: 3+4

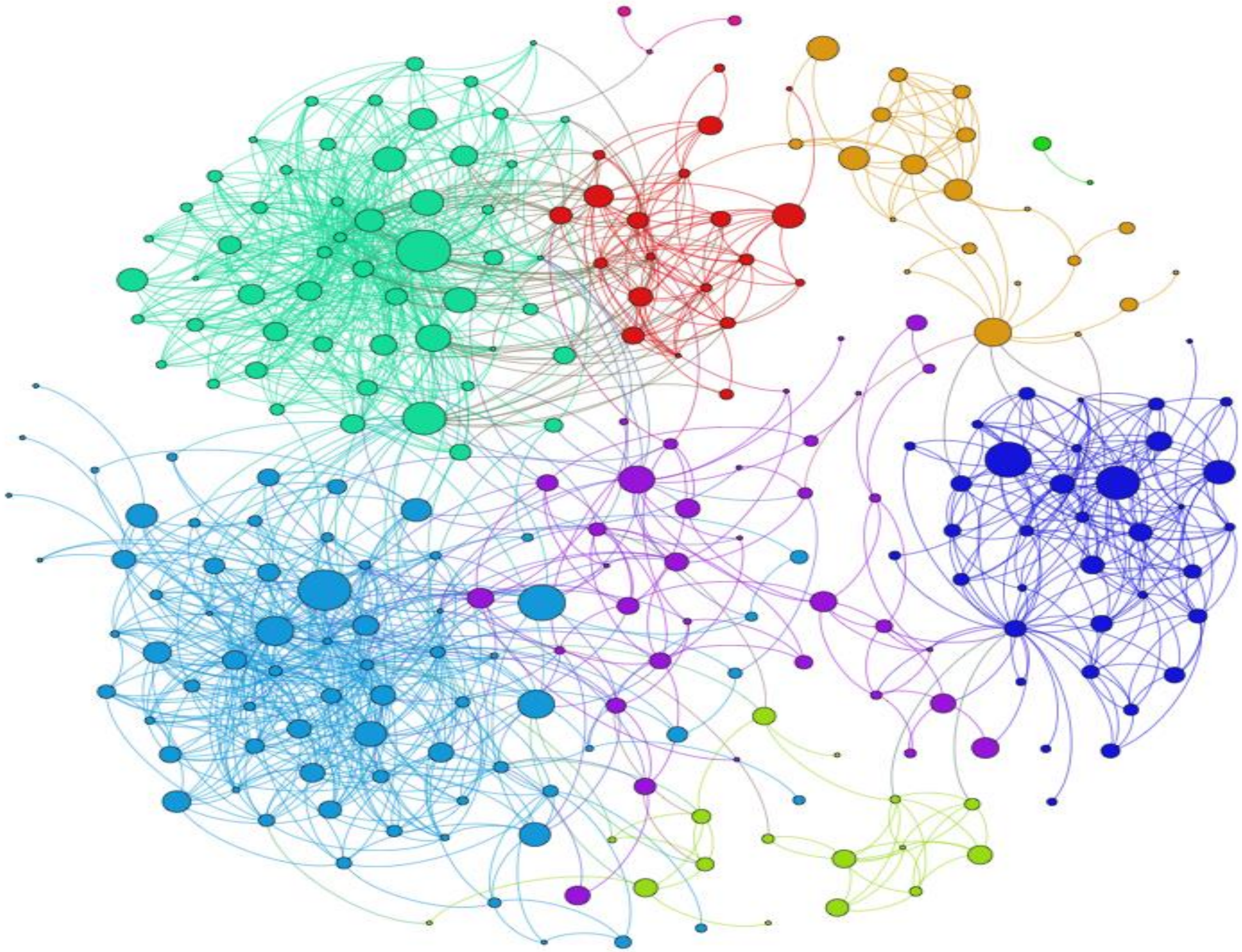
V0-V4 e V1-V2: 3+4

	V0	V1	V2	V3	V4	V5
V0	0	1	3	1	3	2
V1	1	0	4	2	4	3
V2	3	4	0	4	2	1
V3	1	2	4	0	4	3
V4	3	4	2	4	0	1
V5	2	3	1	3	1	0

	V0	V1	V2	V3	V4	V5
V0		V1	V5	V3	V5	V5
V1	Vo		V2	Vo	Vo	Vo
V2	V5	V1		V5	V5	V5
V3	Vo	Vo	V5		V5	V5
V4	V5	V5	V5	V5		V5
V5	Vo	Vo	V2	V3	V4	



Grafos de Hamiltonianos



Grafos de Hamiltonianos

Ciclos e Caminhos Hamiltonianos.

Um **ciclo hamiltoniano** em um grafo conexo **G** é definido como um caminho simples fechado (os vértices são diferentes), isto é, passa-se em cada vértice de **G** exatamente uma vez, exceto o vértice inicial que também é final.

Portanto um **ciclo hamiltoniano** em um grafo de **n** vértices consiste de exatamente **n** arestas.

O **caminho hamiltoniano**, é um caminho simples, de comprimento **n-1**, para **n** vértices.

Grafos de Hamiltonianos

Teorema: uma condição suficiente (não necessária), para que um grafo simples **G** possua um **ciclo hamiltoniano**, é que o grau de cada vértice em **G** seja pelo menos igual a **n/2**, onde **n** é o número de vértices de **G**.

Problema do Caixeiro Viajante: determinar o menor caminho passando pôr todos os vértices e retornando ao vértice de origem. Teoricamente o problema pode ser resolvido da seguinte maneira:

1. Enumere todos os ciclos hamiltonianos
2. Escolha o de menor custo.

Se n = 10 então tenho 181.440 ciclos = 3024 minutos = 50,4 hs.

n = 15 então tenho 1382 anos

Grafos de Hamiltonianos

Solução: Método Algébrico: este método, envolve a geração de todos os caminhos simples pôr multiplicação sucessiva de matriz.

Passo 1. Construir a matriz de adjacência **A** do grafo.

Passo 2. Construir a matriz **B (n x n)** da seguinte forma:

$b_{ij} = v_j$, se existe a aresta (v_i, v_j); 0 em caso contrário.

Passo 3. Faça $P_1 \leftarrow A$;

Passo 4. Faça $P_{i+1} \leftarrow B * P_i$ com $i = 1 .. n-1$ onde

$P_{i+1}(k,k) = 0$, para todo k

$P_{i+1}(s,t) = \sum (b(s,k) * P_i (k,t))$, com k variando até $n-1$.

Observe que na matriz P_{i+1} obtém-se todos os caminhos hamiltonianos de cardinalidade $i+1$, entre os vértices **s** e **t.**

	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4
V_0	0	1	1	0	0
V_1	1	0	1	1	0
V_2	1	0	0	0	1
V_3	1	0	1	0	1
V_4	1	0	0	1	0

V_0	V_1	V_2	V_3	V_4
	VoV1	VoV2		
V1Vo		V1V2	V1V3	
V2Vo				V2V4
V3Vo		V3V2		V3V4
V4Vo			V4V3	

V_0		VoV1	VoV2					VoV1V2	VoV1V3	VoV2V4
V_1	V1Vo		V1V2	V1V3		V1V2Vo V1V3Vo		V1V3V2		V1V3V4
V_2	V2Vo				V2V4	V2V4Vo	V2VoV1		V2V4V3	
V_3	V3Vo		V3V2		V3V4	V3V2Vo V3V4Vo	V3VoV1	V3VoV2		V3V2V4
V_4	V4Vo			V4V3		V4V3Vo		V4VoV2 V4V3V2		

V_0		VoV1	VoV2					VoV1V3V2	VoV2V4V3	VoV1V3V4
V_1	V1Vo		V1V2	V1V3		V1V2V4Vo V1V3V2Vo V1V3V4Vo		V1V3VoV2	V1V2V4V3	V1VoV2V4 V1V3V2V4
V_2	V2Vo				V2V4	V2V4V3Vo			V2VoV1V3	
V_3	V3Vo		V3V2		V3V4	V3V2V4Vo	V3V2VoV1	V3VoV1V2 V3V4VoV2		V3VoV2V4
V_4	V4Vo			V4V3		V4V3V2Vo		V4VoV1V2 V4V3VoV2	V4VoV1V3	

V_0		VoV1	VoV2						VoV1V2V4V3	VoV1V3V2V4
V_1	V1Vo		V1V2	V1V3		V1V2V4V3Vo V1V3V2V4Vo		V1V3V4VoV2	V1VoV2V4V3	V1V3VoV2V4
V_2	V2Vo				V2V4				V2V4VoV1V3	
V_3	V3Vo		V3V2		V3V4			V3V4VoV1V2		
V_4	V4Vo			V4V3			V4V3V2VoV1	V4VoV1V3V2 V4V3VoV1V2		