Programação Linear e Grafos

Sistemas de Informação - UNISUL

Aran Bey Tcholakian Morales, Dr. Eng.

(Programação Linear e Grafos - Apostila 6)

Modelagem e solução com mais de 2 variáveis

Uma fábrica de móveis dispõe em estoque, 250 metros de tábuas, 60 metros de pranchas e 500 metros de painéis de conglomerado. A fábrica oferece uma linha de móveis composta por um modelo de escrivaninha, uma mesa de reunião, um armário e uma prateleira. Cada tipo de móvel consome uma certa quantidade de matéria prima, conforme a tabela a seguir.

Construir um modelo de PL que maximize o valor de vendas dos móveis.

Quantidade de material em metros consumidos por unidade de produto					**Disponibilidade de recurso**
	Escrivaninha	Mesa	Armário	Prateleira	
Tábua	1	1	1	4	250
Prancha	0	1	1	2	600
Painéis	3	2	4	0	500
Valor de venda	R$ 1.000,00	R$ 800,00	R$ 1.200,00	R$ 200,00	

Solução

Variável Decisão: Xi = quantidade de unidades a serem produzidas do produto: 1=escrivaninha;2=mesa;3=armário;4=prateleira;

Função objetivo:

Maximizar f = 1000*X1+ 800*X2+ 1200*X3+200*X4

(receita bruta em R$ em função da quantidade produzida de cada produto)

Restrições:

Restrição de tabuas: X1+X2+X3+ 4* X4 <=250

Restrição de pranchas: X2+X3+2*X4 <=600

Restrição de painéis: X1+2*X2+4*X3 <=500

Um fazendeiro vai dividir de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas:

A – Arrendamento: destinar certa quantidade de hectare (há) para a plantação de cana de açúcar. Uma usina local, se encarrega da atividade e paga pelo aluguel da terra R$ 3.000,00 reais por há/ano;

P – Pecuária: usar outra parte da terra para a criação de gado de corte. A recuperação das pastagens requer adubação de 100 kg/há e irrigação de 100.000 litros de água/há/ano. O lucro desta atividade é de R$ 4.000,00 por ano por há;

S – Plantio de soja: usar uma terceira parte da terra para o plantio de soja. Esta cultura, requer 200 kg/há de adubos e 200.000 litros de água /há/ano para irrigação. O lucro estimado nessa atividade é de R$ 5.000,00 por há/ano.

A disponibilidade de recursos é de 12.750.000 litros de água e 14.000 kg de adubos por ano, e 100 hectares de terra. Quantas hectares devem ser destinadas a cada atividade para proporcionar o melhor retorno.

Construir o modelo de programação linear que auxilie na decisão.

Variável Decisão: Xi = hectares para cada atividade: arrendamento (i=1), pecuária (i=2) e Soja (i=3);

Função objetivo:

Maximizar f = 3.000X1+ 4000X2+ 5000X3

(maximizar o lucro do fazendeiro com as 3 atividades escolhidas)

Restrições:

Restrição da disponibilidade da terra: X1+X2+X3<=100;

Restrição de disponibilidade do adubo: 100X2+ 200X3 <= 14000;

Restrição de disponibilidade de agua: 100.000X2+200.000X3 <=12.750.000

Uma nutricionista está preparando uma dieta de redução calórica. A dieta consiste na ingestão de 4 tipos de alimentos: leite desnatado, carne magra de boi, carne de peixe e salada. A dieta diária, deve respeitar requisitos mínimos nutricionais e o consumo mínimo de ingestão de vitaminas A, B e D.

No quadro a seguir temos a quantidade de vitaminas de cada alimento e os requisitos mínimos necessário. Construir o modelo de PL, que auxilie na decisão.

Vitamina	Leite (litro)	Carne (Kg)	Peixe (Kg)	Salada (100 gr)	Requisito nutricional (mínimo)
A	2 mg	2 mg	10 mg	20 mg	**11 mg**
B	50 mg	20 mg	10 mg	30 mg	**70 mg**
D	80 mg	70 mg	10 mg	80 mg	**250 mg**
Custo	**R$ 4,50**	**R$ 14,00**	**R$ 17,50**	**R$ 1,50**	

Variável Decisão: Xi = quantidade de unidades do alimento tipo i:

1=leite;2=carne;3=peixe;4=salada;

Função objetivo:

Minimizar f = 4,5*X1+ 14*X2+ 17,5*X3+1,5*X4

(gastos com a dieta, valor de cada alimento vezes as unidades necessárias para atender a dieta)

Restrições:

Restrição de demanda da vitamina A: 2X1+2X2+10X3+ 10 X4 >= 11

Restrição de vitamina B: 50X1+20X2+10X3+30X4 >=70

Restrição de vitamina C: 80X1+70X2+10X3+80X4 >= 250

Uma empresa de investimentos, mapeou 6 bônus disponibilizados pelo governo com diferentes retornos (valor esperado), vencimentos (em anos) e risco (maior risco a rentabilidade estimada é menos garantida).

A empresa de investimento deseja construir uma carteira com os 6 bônus, para oferecer a seus clientes com o objetivo de maximizar o retorno esperado.

Bônus	Retorno (anual)	Vencimento (anos)	Risco
A	8,65%	11	Muito Baixo
B	9,50%	10	Médio
C	10,0%	6	Médio Alto
D	8,75%	10	Muito Baixo
E	9,25%	7	Médio
F	9,00%	13	Baixo

Para proteger os interesses dos clientes, a empresa determinou algumas regras:

- no máximo 25% do capital disponível pode ser aplicado por bônus;
- no mínimo 50% do capital deve ser investido em bônus com vencimento de 10 ou mais anos;
- os bônus B, C e E, oferecem um maior retorno, mais tem um risco maior, sendo assim, somente até 35% do capital pode ser investido nesses 3 bônus;

Um cliente tem R$ 750.000,00 para investir, quanto deve investir em cada bônus para maximizar o retorno do investimento.

Construir o modelo de PL que auxilie na decisão.

Variável Decisão: Xi = quantidade investida no bônus i;

Função objetivo:

Maximizar f = 0,0865XA+ 0,095XB+ 0,10XC+0,0875XD+0,0925XE+0,09XF

(maximizar o retorno esperado: retorno de cada bônus vezes o valor investido em cada bônus)

Restrições:

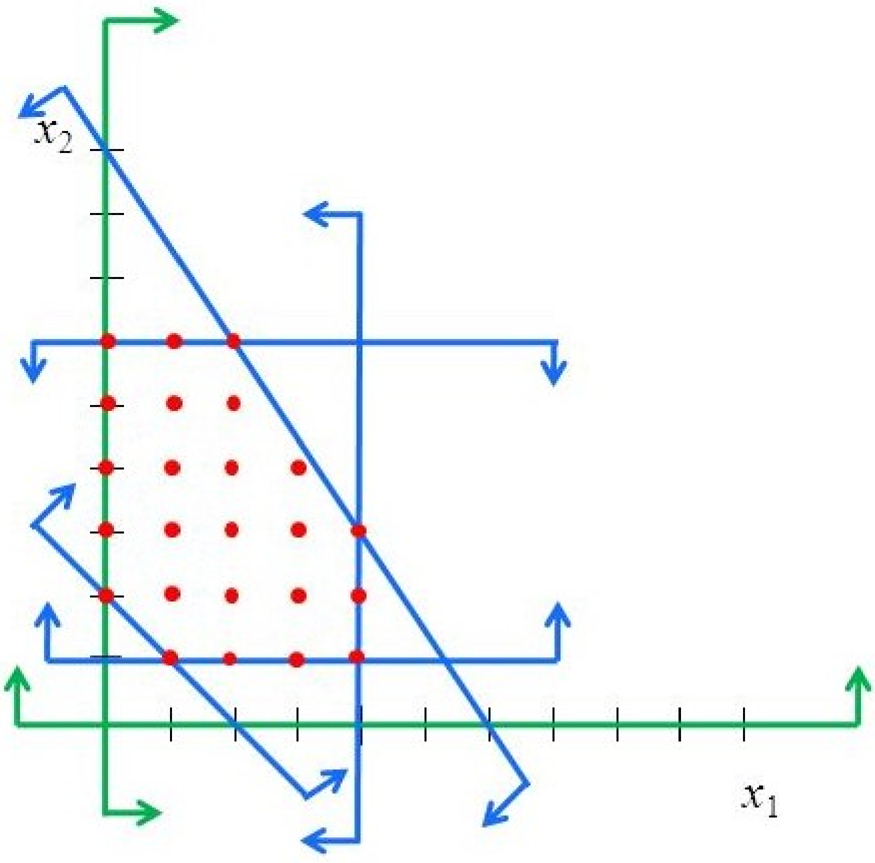
Restrição do valor investido: XA+XB+XC+XD+XE+XF <=750.000;

Restrição de aplicar no máximo de 25% em cada bônus: Xi <= 750.000 * 25%;

Restrição de no mínimo 50% dos recursos devem ser aplicados em bônus a mais de 10 anos de vencimentos: XA+XB+XD+XF >= 750.000 * 50%

Restrição de no máximo 35% dos recursos podem ser aplicados em bônus de risco maior: XB+XC+XE <=750.000 * 35%

Programação inteira e binária



PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA E BINÁRIA

Os problemas de Programação Inteira são, a princípio, estruturados da mesma forma que os PPL.

A diferença é que em um modelo PLI, ao menos uma das variáveis deve assumir como valor um número inteiro, ou seja nos problemas trabalhados até aqui vimos que as variáveis assumiam valores contínuos (resultados quebrados). Mas em alguns casos estes resultados não são válidos, por exemplo disponibilizar 1,5 funcionários para desenvolver uma certa tarefa, ou produzir ¾ de um bolo de chocolate.

PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA E BINÁRIA

Quando a solução de um problema apresenta um caso desses a primeira ideia é a de arredondar os valores das variáveis, mas não sabemos se esse arredondamento deve ser para mais ou para menos, e se isso não vai alterar o plano de produção.

Assim, quando não podemos admitir esse tipo de solução, introduzimos como restrição a imposição de que as variáveis (ou a variável) assumam valor inteiro, são os tipos de problemas de Programação Linear Inteira ou Inteira Mista.

PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA E BINÁRIA

Outro caso pode-se encontrar uma situação especial, onde as variáveis devam assumir apenas valores zero (0) ou um (1).

Este tipo de situação se adapta ao modelo de Programação Linear Inteira Binária.

O valor da variável *zero*, indica **NÂO** para determinada questão e o valor *um* indica **SIM**.

São geralmente utilizados quando precisamos tomar decisões a respeito de COMPRAR / NÃO COMPRAR, INVESTIR NO PROJETO i / NÃO INVESTIR NO PROJETO i, entre outros.

PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA E BINÁRIA

Maximizar L = 3X1 + 3 X2

Sujeito a:

2X1 + 4X2 <= 12

6X1 + 4X2 <= 24

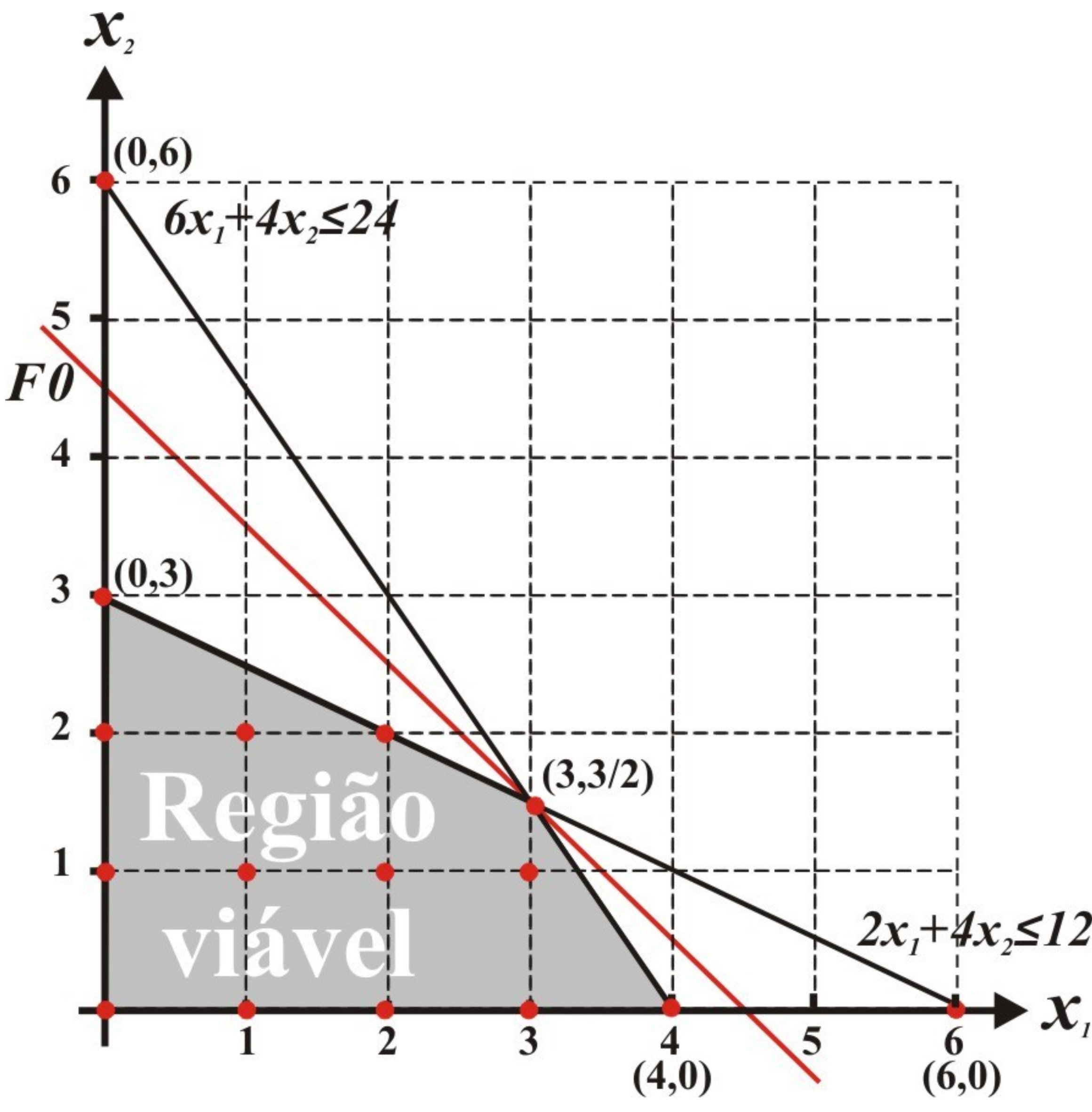
X1, X2 inteiros

Solução:

X1 = 2; X2 = 2; L = 12; ou

X1 = 3; X2 = 1; L = 12; ou

X1 = 4; X2 = 0; L = 12;



Exemplo 1: A empresa COMPUTER -SA monta 4 modelos de laptop (A,B,C,D). O laptop A dá um lucro de R$ 150,00 enquanto os laptop B,C e D tem lucros de R$ 190,00, R$ 180,00 e R$ 200,00, respectivamente.

O laptop A necessita de 0,9h/unidade de mão de obra enquanto que B, C e D necessitam 1,2h/unid., 1,0h/unid. e 1,3h/unid. de mão-de-obra.

A empresa precisa de um espaço de estocagem para cada modelo de laptop assim estimado: 0,7 m^3/unid, 1,0 m^3/unid, 1,2 m^3/unid. e 0,9 m^3/unid. para os modelos A,B,C e D, respectivamente.

O consumo em R$ com matéria prima varia com o modelo. O modelo A consome, por semana, R$ 1.200,00/unid., o B R$ 1.000,00/unid. o C R$ 900,00/unid e o D R$ 1.300,00/unid.

As disponibilidades destes recursos são: 300 h de trabalho por semana, 260 m^3 de galpão para estocagem e R$ 400.000,00 para aquisição de matéria prima por semana. A empresa deseja saber quantos laptop de cada modelo deve montar por semana de maneira a maximizar seu lucro.

Programação Inteira: Exemplo 1

Variáveis de Decisão: X_i: número de laptop do modelo **i** montados (onde **i** pode assumir os valores A, B, C, D)

Maximizar $L = 150\ X_A + 190\ X_B + 180\ X_C + 200\ X_D$

Sujeito a:

$0{,}9\ X_A + 1{,}2\ X_B + 1{,}0\ X_C + 1{,}3\ X_D <= 300$; (restrição de mão de obra)

$0{,}7\ X_A + 1{,}0\ X_B + 1{,}2\ X_C + 0{,}9\ X_D <= 260$; (restrição de estocagem)

$1200\ X_A + 1000\ X_B + 900\ X_C + 1300\ X_D <= 400000$; (restrição de matéria prima)

X_A, X_B, X_C, X_D inteiros

	Variáveis de Decisão					
	XA	XB	XC	XD		
	0	0	0	0		
	Coeficientes da FO					
Função objetivo:	CXA	CXB	CXC	CXD	FO	
Maximizar	150	190	180	200	0	
	Restrições					
Restrições	Coeficientes das Restrições					Limites
	AXA	AXB	AXC	AXD		das
R1 (restrição de mão de obra)	0,9	1,2	1	1,3	0	300
R2 (restrição de estocagem)	0,7	1	1,2	0,9	0	260
R3 (restrição de matéria prima)	1200	1000	900	1300	0	400000

Maximizar L = 150 XA + 190 XB + 180 XC

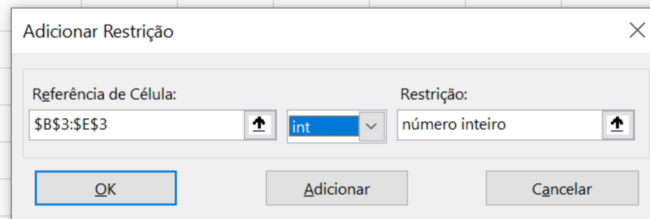
Sujeito a:

0,9 XA + 1,2 XB + 1,0 XC + 1,3 XD <= 300;

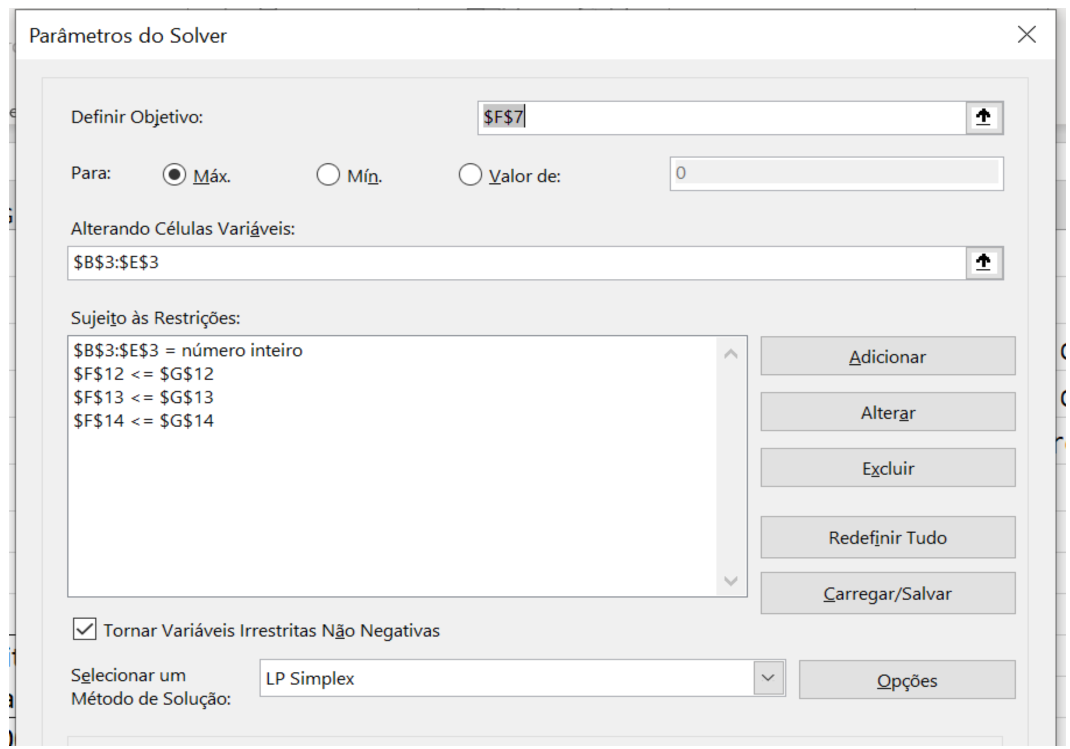
0,7 XA + 1,0 XB + 1,2 XC + 0,9 XD <= 260;

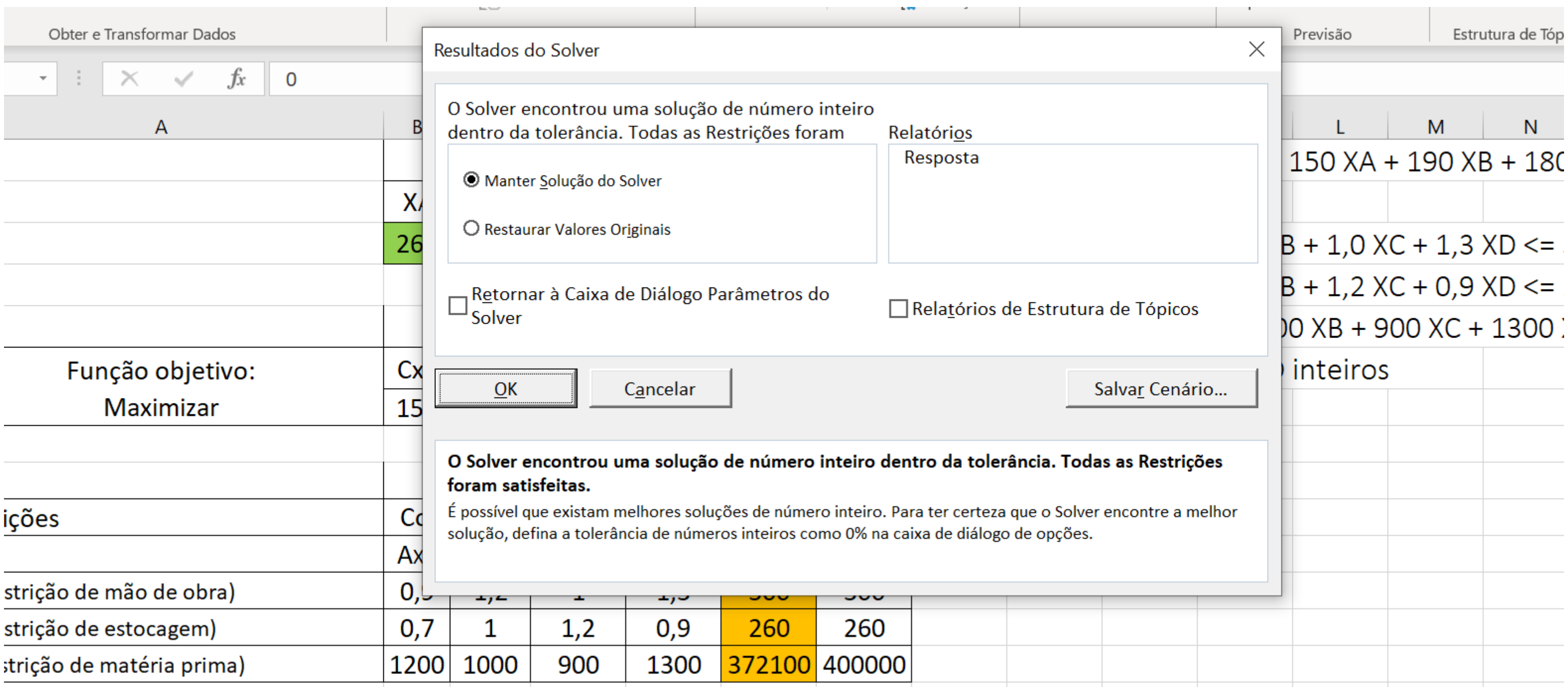
1200 XA + 1000 XB + 900 XC + 1300 XD <

XA, XB, XC, XD inteiros



Incluímos mais uma restrição, onde as variáveis de decisão, são do tipo **int.**





Observar que o relatório de sensibilidade não está disponível.

Exemplo 2: Uma empresa de tecnologia tem que planejar seus gastos em Pesquisa e Desenvolvimento para os próximos cinco anos.

A empresa pré-selecionou quatro projetos e deve escolher dentre estes quais priorizar. Os dados relevantes ao problema encontram-se na tabela abaixo. Nela também se encontra a disponibilidade de capital a ser alocado em cada um dos anos, bem como o valor presente liquido de cada projeto. Como todos os projetos apresentam VPL positivos, todos seriam candidatos. Vale notar que existe uma limitação no valor a ser investido anualmente.

Projetos	VPL (8%) (mil reais)	Necessidade de capital em mil reais				
		Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
01	105,99	70	15	0	20	20
02	128,90	80	20	25	15	10
03	136,14	90	20	0	30	20
04	117,38	50	30	40	0	20
Capital disponível		200	70	70	70	70

Programação Binária
Variáveis de decisão: X_i = 0, se o projeto i não for selecionado; = 1, se o projeto i for selecionado
(onde i pode ser os projetos 1,2,3 ou 4)

Maximizar $VPL = 105{,}99\, X_1 + 128{,}90\, X_2 + 136{,}14\, X_3 + 117{,}38\, X_4$

Sujeito a:

$70\, X_1 + 80\, X_2 + 90\, X_3 + 50\, X_4 <= 200$ (orçamento no ano 1);

$15\, X_1 + 20\, X_2 + 20\, X_3 + 30\, X_4 <= 70$ (orçamento no ano 2);

$25\, X_2 + 40\, X_4 <= 70$ (orçamento no ano 3);

$20\, X_1 + 15\, X_2 + 30\, X_3 <= 70$ (orçamento no ano 4);

$20\, X1 + 10\, X_2 + 20\, X_3 + 20\, X_4 <= 70$ (orçamento no ano 5)

X_1, X_2, X_3, X_4 : binárias

	A	B	C	D	E	F	G
1		Variáveis de Decisão					
2		X1	X2	X3	X4		
3		0	0	0	0		
4							
5		Coeficientes da FO					
6	Função objetivo:	Cx1	Cx2	Cx3	Cx4	FO	
7	Maximizar	105,99	128,9	136,14	117,38	0	
8							
9		Restrições					
10	Restrições	Coeficientes das Restrições					
11		Ax1	Ax2	Ax3	Ax4		das
12	R1 (orçamento no ano 1)	70	80	90	50	0	200
13	R2 (orçamento no ano 2)	15	20	20	30	0	70
14	R3 (orçamento no ano 3)	0	25	0	40	0	70
15	R4 (orçamento no ano 4)	20	15	30	0	0	70
16	R5 (orçamento no ano 5)	20	10	20	20	0	70

Maximizar VPL = 105,99 X1 + 128

Sujeito a:

70 X1 + 80 X2 + 90 X3 + 50 X4 <

15 X1 + 20 X2 + 20 X3 + 30 X4 <

Alterar Restrição

Referência de Célula: $B$3:$E$3

bin

<=
=
>=
int
bin
dif

Restrição: binário

OK

Cancelar

Incluímos mais uma restrição, onde as variáveis de decisão, são do tipo **binário.**

Célula do Objetivo (Máx.)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
$F$7	FO	0	352,27

Células Variáveis

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número Inteiro
$B$3	X1	0	1	Binário
$C$3	X2	0	1	Binário
$D$3	X3	0	0	Binário
$E$3	X4	0	1	Binário

Restrições

Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Status	Margem de Atraso
$F$12	R1 (orçamento no ano 1) FO	200	$F$12<=$G$12	Associação	0
$F$13	R2 (orçamento no ano 2) FO	65	$F$13<=$G$13	Não-associação	5
$F$14	R3 (orçamento no ano 3) FO	65	$F$14<=$G$14	Não-associação	5
$B$3:$E$3=Binário					

Exemplo 3: O gerente de investimento do um Banco tem os seguintes pedidos de financiamento para projetos industriais.

Projeto	A	B	C	D	E	F
R$ lucro previsto	5500	7800	4000	6500	8700	3300
RS necessidade de capital ano 1	400	1800	200	550	900	750
RS necessidade de capital ano 2	1000	200	1000	650	1200	900
RS necessidade de capital ano 3	400	900	700	1750	1100	200
Grau de Risco	1	4	2	5	6	3

Para investir nestes projetos o Banco dispõe de R$ 3200,00 no ano 1, R$ 2800,00 no ano 2 e R$ 2850,00 no ano 3. Há uma regra de não investir em mais do que dois projetos com grau de risco 4 ou acima. Os projetos A e F são mutuamente exclusivos, isto é, se um for escolhido o outro não pode sê-lo (entretanto ambos podem ser recusados). Por outro lado, o projeto C só pode ser escolhido se o projeto E também o for (entretanto, o projeto E pode ser escolhido para financiamento ao mesmo tempo que o projeto C é recusado). Quais os projetos deverão ser escolhidos para financiamento com o objetivo de maximizar o lucro previsto nos investimentos?

Programação Binária $\quad = 0$, se o projeto i não for selecionado;

Variáveis de decisão: $\quad X_i$

(onde i pode ser os projetos A ao F) $\quad = 1$, se o projeto i for selecionado

Max $L = 5500\,X_A + 7800\,X_B + 4000\,X_C + 6500\,X_D + 8700\,X_E + 3300\,X_F$

Sujeito a:

$400\,X_A + 1800\,X_B + 200\,X_C + 550\,X_D + 900\,X_E + 750\,X_F \leq 3200$ (disponibilidade no ano 1);

$1000\,X_A + 200\,X_B + 1000\,X_C + 650\,X_D + 1200\,X_E + 900\,X_F \leq 2800$ (disponibilidade no ano 2);

$400\,X_A + 900\,X_B + 700\,X_C + 1750\,X_D + 1100\,X_E + 200\,X_F \leq 2850$ (disponibilidade no ano 3);

$X_B + X_D + X_E \leq 2$ (Risco >=4);

$X_A + X_F \leq 1$ (A e F mutuamente exclusivos);

$X_C - X_E \leq 0$ (C depende de E ser escolhido);

$X_A, X_B, X_C, X_D, X_E, X_F$: binárias

	Variáveis de Decisão							
	X_A	X_B	X_C	X_D	X_E	X_F		
	0	0	0	0	0	0		
	Coeficientes da FO							
Função objetivo:	C_{XA}	C_{XB}	C_{XC}	C_{XD}	C_{XE}	C_{XF}	FO	
Maximizar	5500	7800	4000	6500	8700	3300	0	
	Restrições							
Restrições	Coeficientes das Restrições							Limites das restrições
	A_{XA}	A_{XB}	A_{XC}	A_{XD}	A_{XE}	A_{XF}		
R1 (disponibilidade no ano 1)	400	1800	200	550	900	750	0	3200
R2 (disponibilidade no ano 2)	1000	200	1000	650	1200	900	0	2800
R3 (disponibilidade no ano 3)	400	900	700	1750	1100	200	0	2850
R4 (projetos com riscos >=4)	0	1	0	1	1	0	0	2
R5 (projetos A e F são mutuamente exclusivos)	1	0	0	0	0	1	0	1
R6 (projeto C depende do E ser escolhido)	0	0	1	0	-1	0	0	0

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
$H$7	FO	0	22000

Células Variáveis

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número Inteiro
$B$3	XA	0	1	Binário
$C$3	XB	0	1	Binário
$D$3	XC	0	0	Binário
$E$3	XD	0	0	Binário
$F$3	XE	0	1	Binário
$G$3	XF	0	0	Binário

Restrições

Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Status	Margem de Atraso
$H$12	R1 (disponibilidade no ano 1) FO	3100	$H$12<=$I$12	Não-associação	100
$H$13	R2 (disponibilidade no ano 2) FO	2400	$H$13<=$I$13	Não-associação	400
$H$14	R3 (disponibilidade no ano 3) FO	2400	$H$14<=$I$14	Não-associação	450
$H$15	R4 (projetos com riscos >=4) FO	2	$H$15<=$I$15	Associação	0
$H$16	R5 (projetos A e F são mutuamente exclusivos) FO	1	$H$16<=$I$16	Associação	0
$H$17	R6 (projeto C depende do E ser escolhido) FO	-1	$H$17<=$I$17	Não-associação	1
$B$3:$G$3=Binário					