Programação Linear e Grafos

Sistemas de Informação - UNISUL

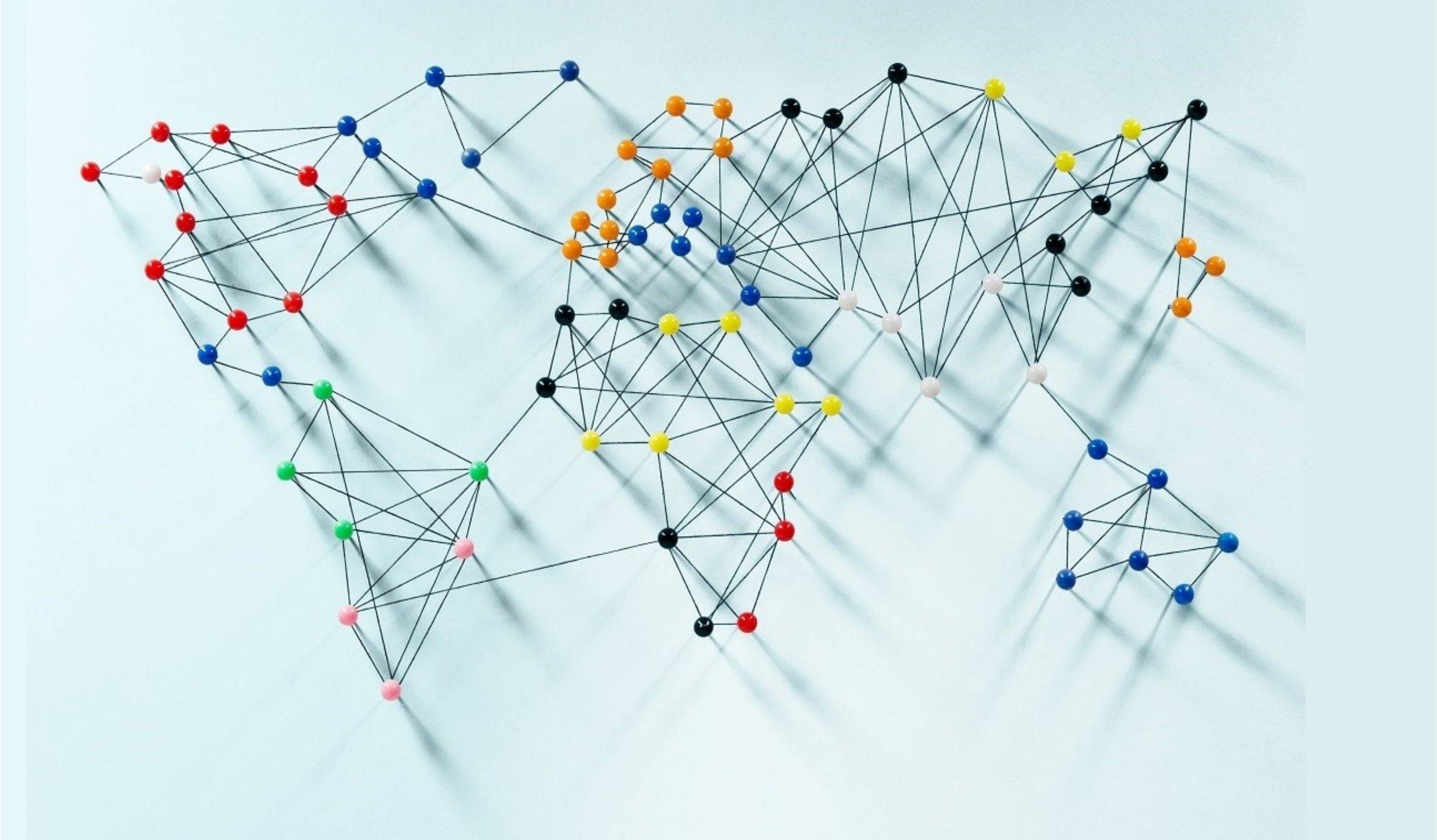
Aran Bey Tcholakian Morales, Dr. Eng.

(Apostila 1)

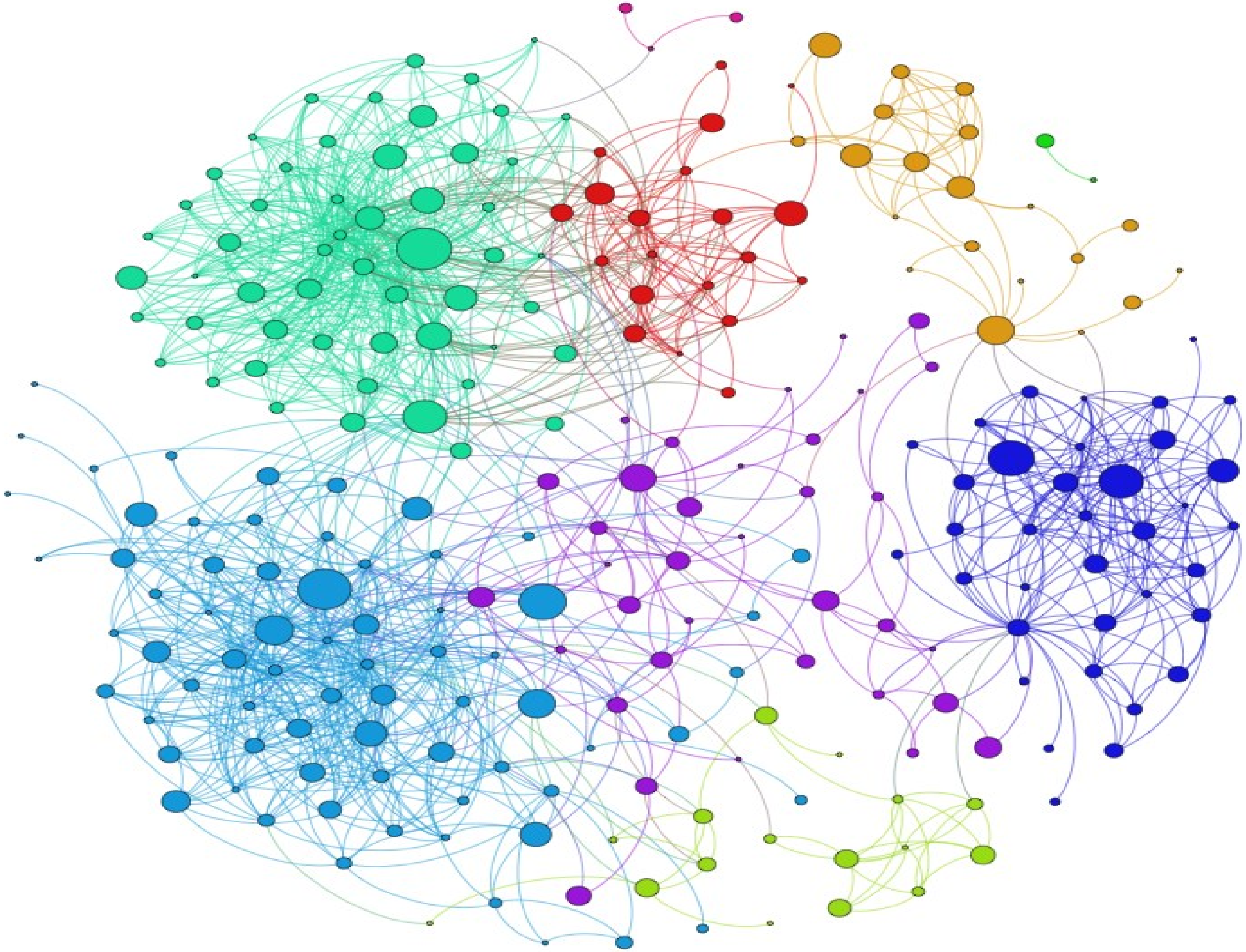
Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional é a aplicação de métodos científicos voltada para a resolução de problemas reais envolvendo situações de tomada de decisão, através de modelos matemáticos habitualmente processados computacionalmente.

Teoria de Grafos



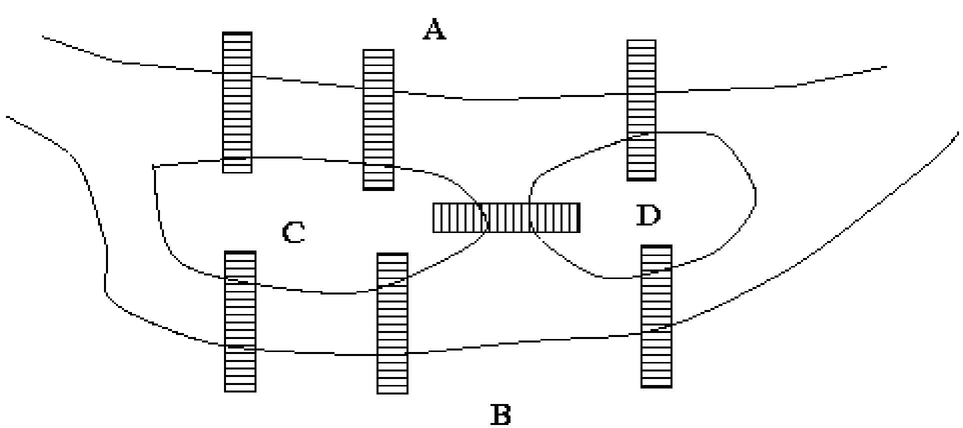
1. Definição e conceitos preliminares



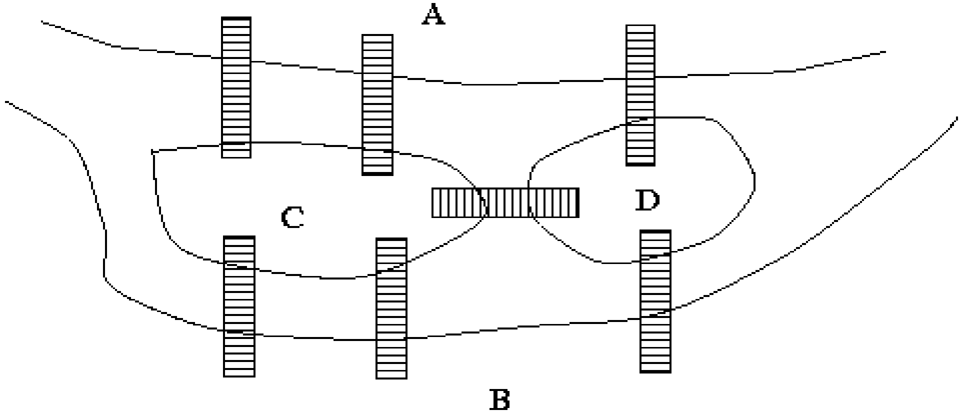
1. Definição e conceitos preliminares

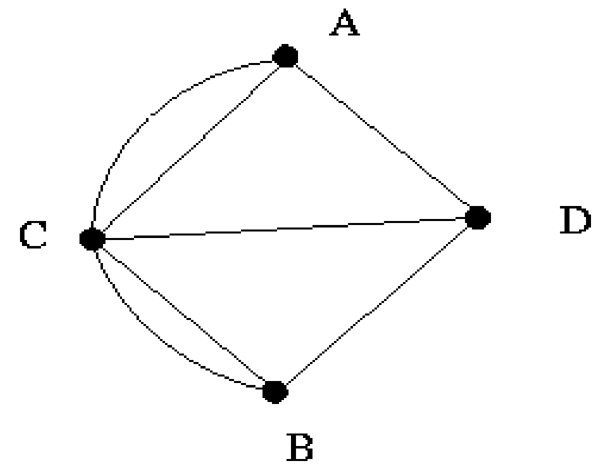
No século 18 a cidade de Königsberg ficou famosa pôr ter um conjunto de sete pontes que cruzavam o rio Pregel, (descrito por Euler em 1736). Elas (as pontes) conectavam duas ilhas entre si e as ilhas com as margens.

É possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes pôr qualquer uma delas?



1. Definição e conceitos preliminares





Podemos representar este problema, com dois tipos de objetos, as pontes e as regiões de terra.

Neste caso podemos denotar as regiões de terra como um conjunto ***V*** (vértices), e o conjunto de pontes ***E*** (arestas = edges), e estabelecer uma relação entre estes dois conjuntos.

1. Definição e conceitos preliminares

É possível definir **grafo** como um par **G = (V,E),** onde **V** é um conjuntos finito e não vazio, e **E** é uma relação (função) sobre os elementos de **V**

Podemos denotar a relação **E** como **E:** $\mathbf{v_i} \rightarrow \mathbf{v_j}$ onde $\mathbf{v_i}$, $\mathbf{v_j}$ ε **V**.

Os elementos de **V** são chamados de **vértices** (ou nós), e os pares ordenados ($\mathbf{v_i}$,$\mathbf{v_j}$), que representam as relações entre os elementos de **V**, de **arestas (edges)** (linhas) do grafo.

1. Definição e conceitos preliminares

Definições:

1. Uma aresta é dita **incidente** com os vértices que ela liga.

Se uma aresta é incidente em um único vértice é chamado de **laço**.

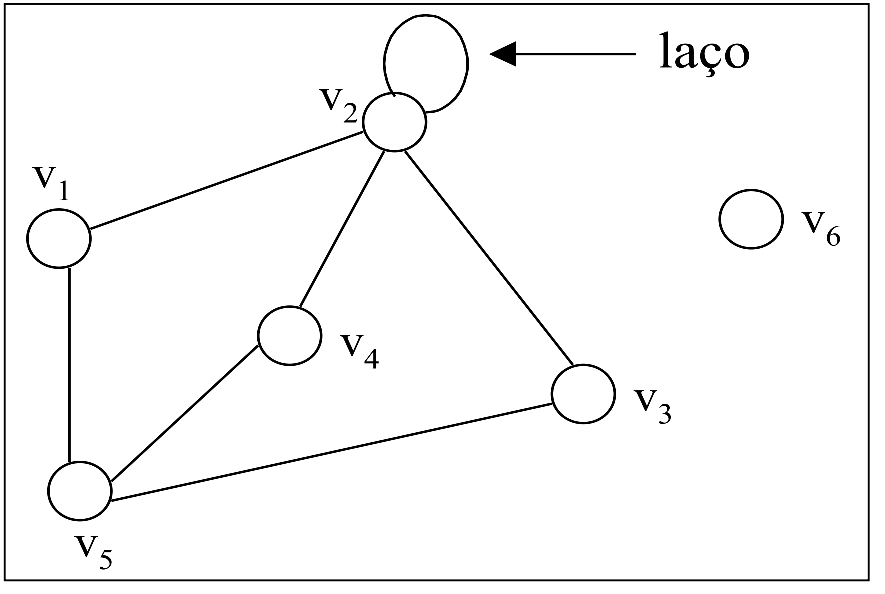
2. Dois vértices são chamados de **adjacentes** se estão ligados pôr arestas.

Um vértice é dito **isolado**, se não tem aresta incidindo nele.

Vértices Adjacentes:

(v_1,v_2), (v_1,v_5), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_5), (v_4,v_5).

Vértice Isolado: v_6



1. Definição e conceitos preliminares

Definições:

3. Define-se **grau** de um vértice **v** pertencente a **V**, denotado pôr **gr(v)** como sendo o número de arestas incidentes em **v**.

Um grafo é dito **regular de grau r** se todos seus vértices tem grau **r**.

Se o grafo é regular de grau zero, é dito **nulo**.

Um vértice de grau 1, é dito **pendente**.

Exemplo:

Gr(v1)=3

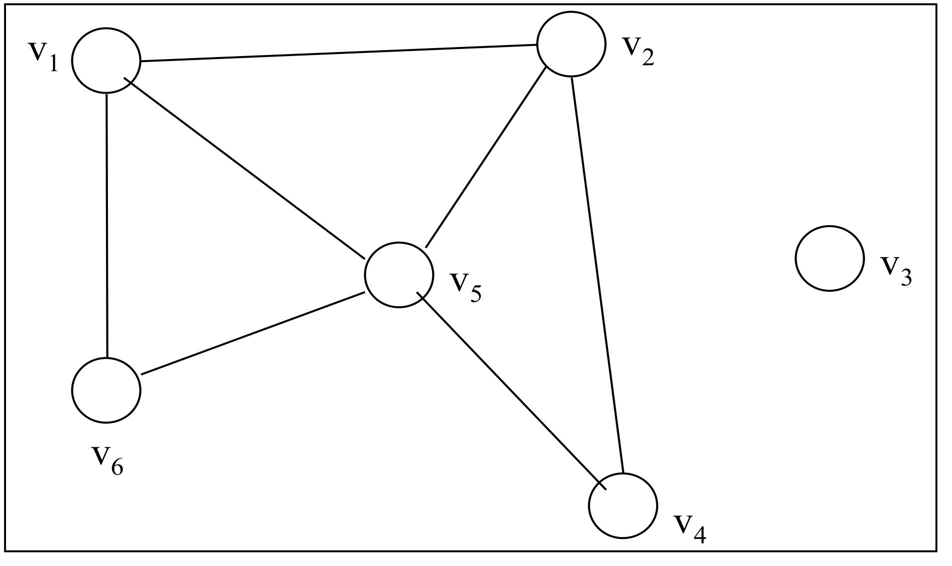
Gr(v2)=3

Gr(v3)=0

Gr(v4)=2

Gr(v5)=4

Gr(v6)=2



1. Definição e conceitos preliminares

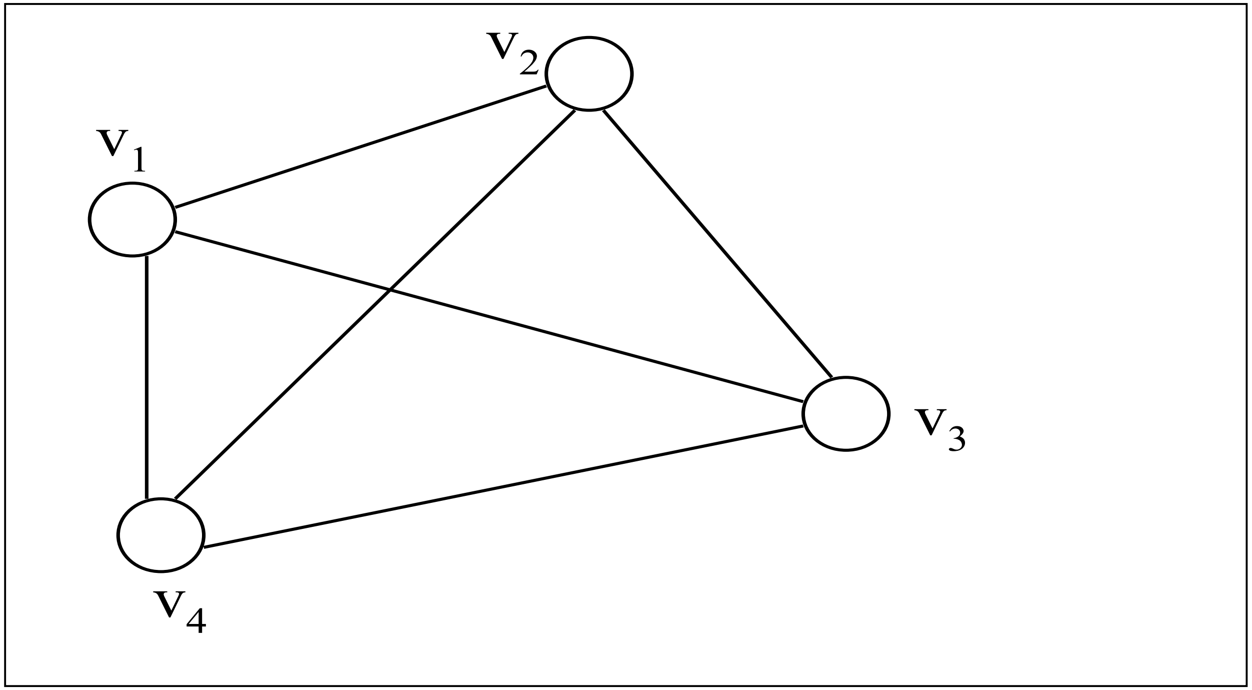
Definições:

4. A **ordem** de um grafo **G**, é o cardinal de vértices: **|V |=n**.
O cardinal de **|A|= m**.

5. Duas arestas que incidam no mesmo vértice são ditas **adjacentes**. Se os dois vértices de incidência são os mesmos, as arestas são ditas **paralelas**.

1. Definição e conceitos preliminares

Exemplo:



Grafo regular de grau 3 (r = 3);

Ordem do Grafo: |**V** |=4; |**A**|= 6

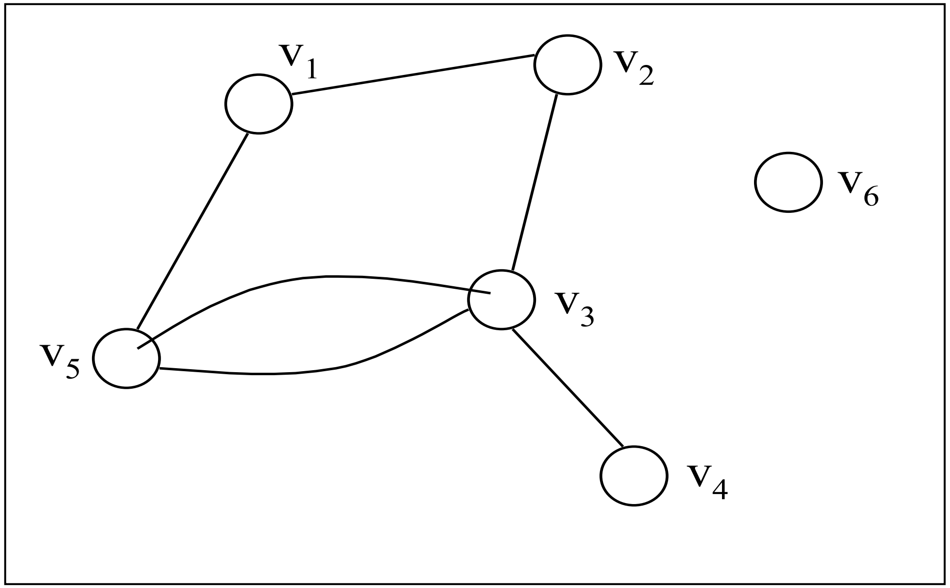
Arestas Adjacentes:

(v_1, v_2) e (v_1, v_4), que incidem sobre v_1

(v_1, v_2) e (v_2, v_3), que incidem sobre v_2

1. Definição e conceitos preliminares

Exemplo:



Vértice de Grau nulo: v6;

Vértice Pendente: v4, pois **gr(v_4)** = 1

Arestas Adjacentes:

(v_3, v_4), (v_2, v_3) e (v_5, v_3), que incidem sobre v_3

(v_1, v_5) e (v_5, v_3), que incidem sobre v_2

Arestas paralelas: (v_5, v_3)

Ordem do Grafo: |**V** |=6; |**A**| = 6

1. Definição e conceitos preliminares

Definições:

6. Um grafo, onde existe um número $\mathbf{w_{ij}}$, associado a cada aresta, é denominado de **grafo valorado** e $\mathbf{w_{ij}}$ é chamado da **custo** de aresta.

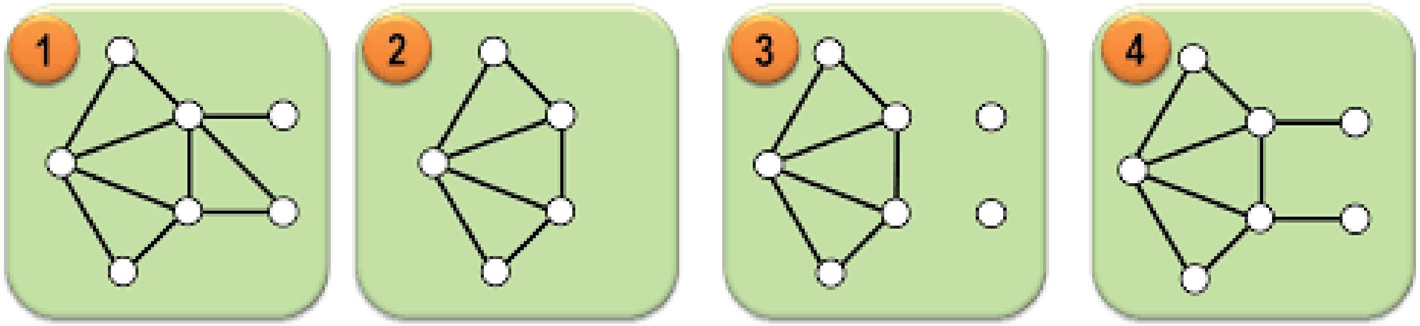
7. **Sub-grafo**, é o grafo obtido de outro grafo eliminando algum vértice e as arestas adjacentes.

8. **Grafo parcial**, é quando são excluídas algumas arestas do grafo original.

9. **Grafo simples**, é o grafo que não contém nenhum par de arestas paralelas ou laços.

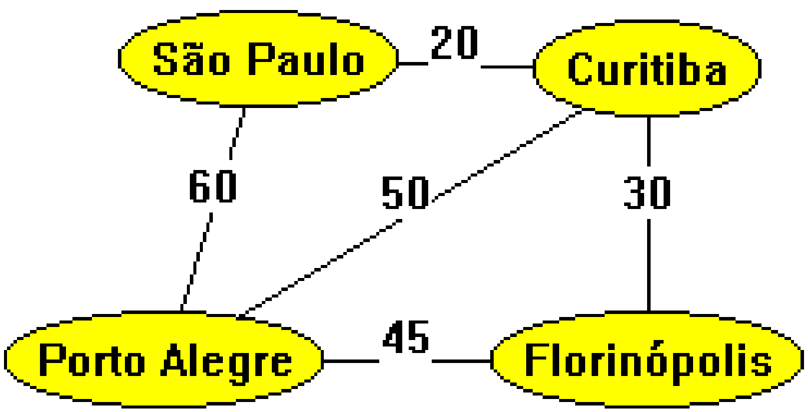
10. **Grafo completo**, um grafo simples será completo quando existir uma aresta entre cada par de seus vértices.

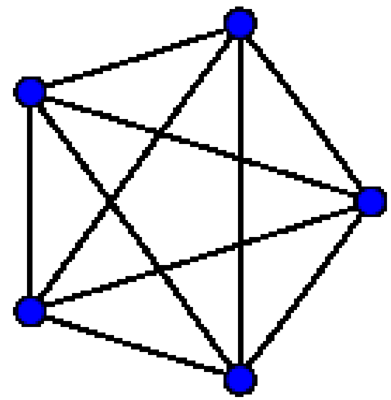
1. Definição e conceitos preliminares



1 : Grafo **2: Sub-grafo** **3 e 4: Grafos parciais**

Grafo valorado (**custo** das arestas)





Grafo completo

1. Definição e conceitos preliminares

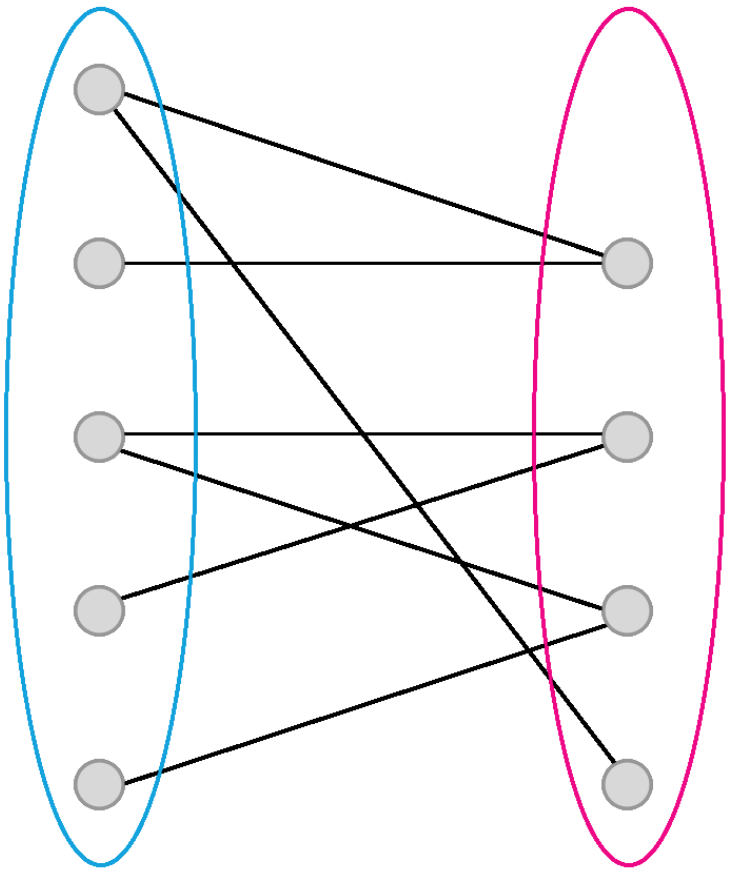
Definições:

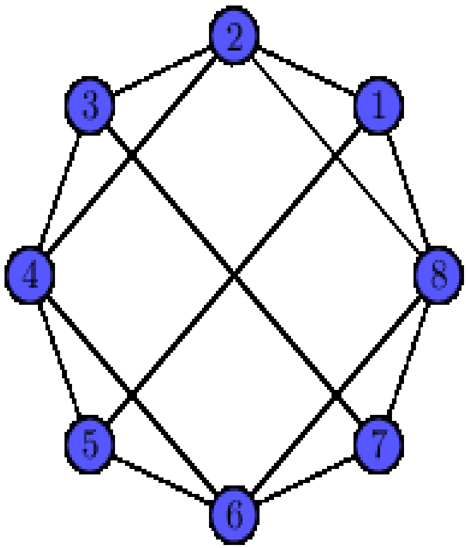
11. **Grafo Complementar**, um grafo **G** é dito complementar de **G** se possui a mesma ordem de **G** e se uma aresta **(v,w)** $\in$ **G**, então **(v,w)** $\notin$ **G** e vice-versa.

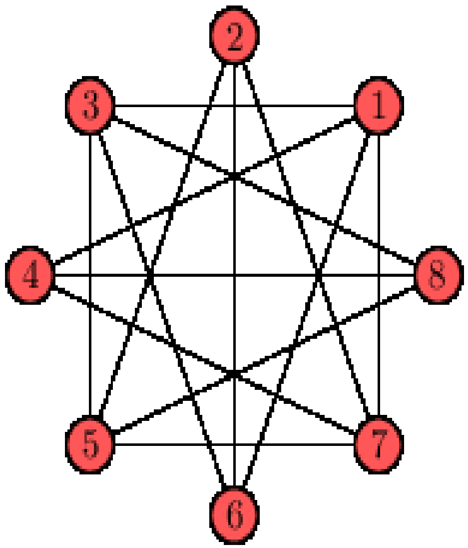
12. **Grafo Bipartite, s**e **G($V_1 \cup V_2$, A)** é tal que, para $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ e para toda aresta **(v_i,v_j)** $\in$ **A**, tem-se que $v_i \in V_1$ **e** $v_j \in V_2$, então o grafo é denominado bipartite.

    Ou seja, o grafo pode ser dividido logicamente em dois conjuntos de vértices, tal que toda aresta começa no vértice de um dos conjuntos e termina no vértice do outro conjunto.

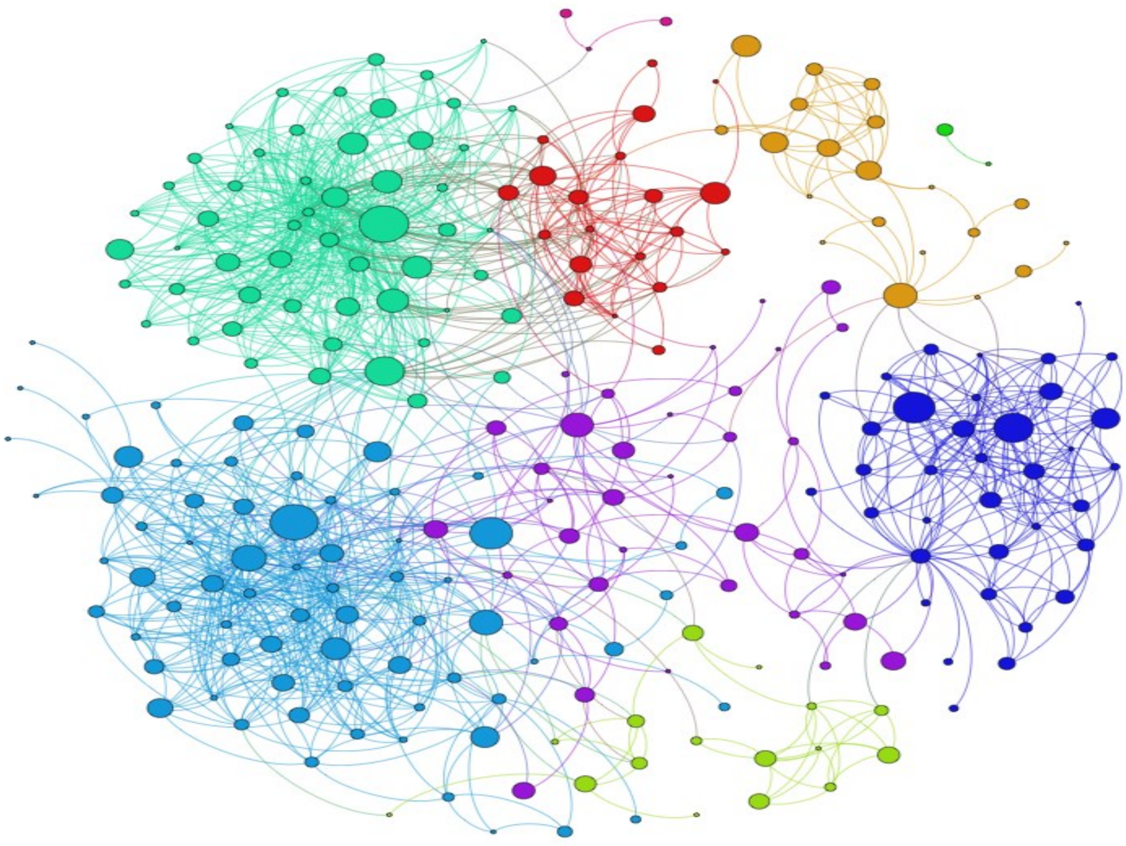
1. Definição e conceitos preliminares







2. Representação de grafos



2. Representação de grafos

Matriz de Adjacência

Dado um grafo **G(V,E)**, a matriz de adjacência $\mathbf{A = [\ a_{ij}\ ]}$ é uma matriz

n x n tal que: $\mathbf{a_{ij} = 1}$ se e somente se existe **(vi,vj) ε E**

0 em caso contrário.

Então $\mathbf{a_{ij} = 1}$ se os vértices são adjacentes.

Vantagem: nessa representação a recuperação de uma aresta é imediata.

Desvantagem: o armazenamento é da ordem de $\mathbf{n^2}$, mesmo que o número de arestas seja muito inferior a **n**

2. Representação de grafos

Matriz de Adjacência - Propriedades:

1. Na diagonal principal o valor 1 representa um laço;
2. As arestas paralelas não são representadas na MA;
3. A soma das linhas (ou colunas) de um grafo representa o grau dos vértices;
4. A MA de um grafo sempre é simétrica;

2. Representação de grafos

Matriz de Incidência

Dado um grafo **G (V, E)** de **n** vértices e **m** arestas, a matriz de incidência de **G** é denotada pôr **B = [** $\mathbf{b_{ij}}$ **]** e é uma matriz **n x m** definida como:

$\mathbf{b_{ij}}$ **= 1** se a aresta $\mathbf{e_i}$, incide no vértice $\mathbf{v_j}$

= 0 em caso contrário

2. Representação de grafos

Matriz de Incidência - Propriedades:

1. Em toda coluna tenho 2 valores diferentes de zero, exceto nos laços onde tenho somente um valor diferente de zero;
2. Na MI, podemos representar arestas paralelas;
3. A soma das linhas representa o grau dos vértices;

2. Representação de grafos

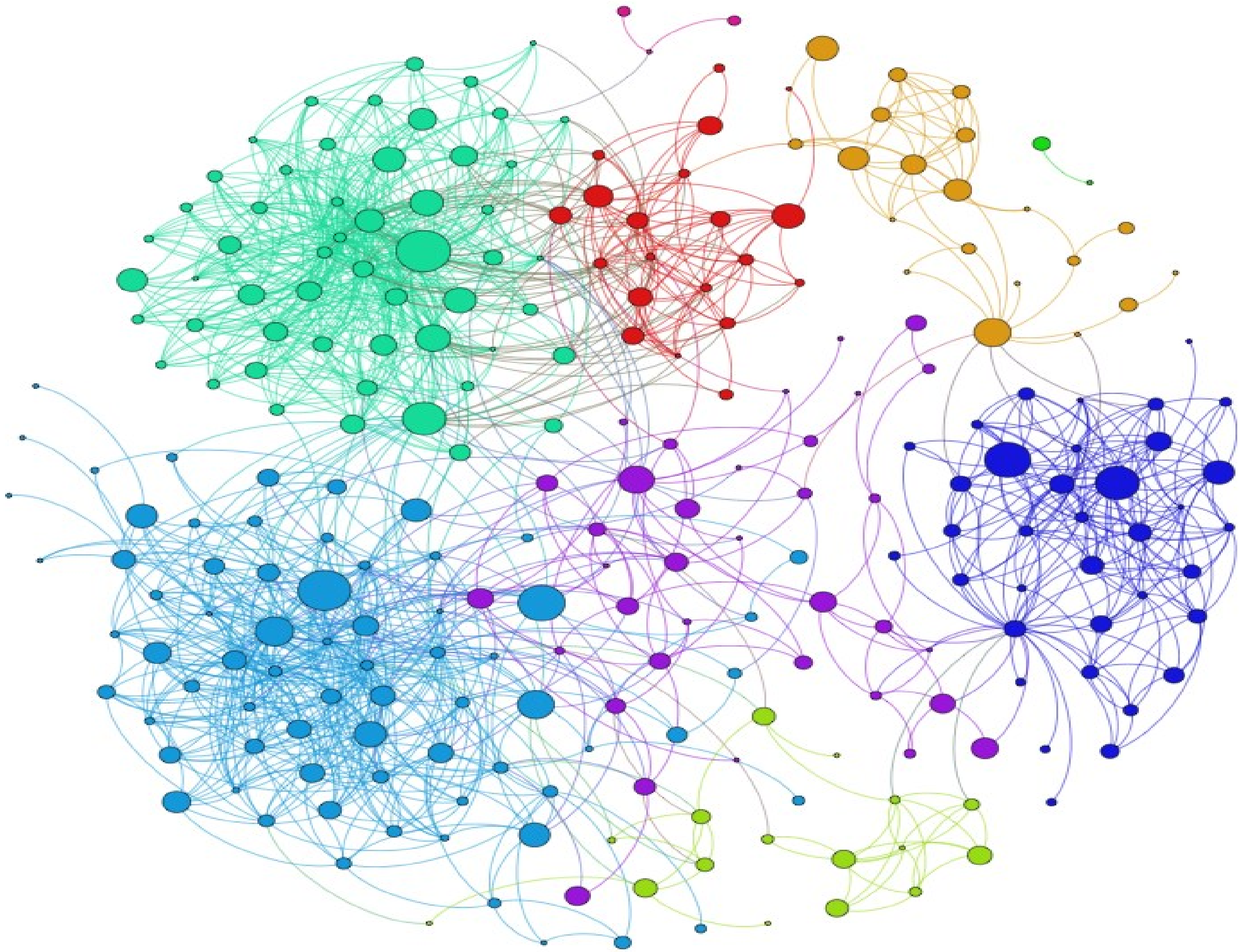
Matriz Valorada

Um grafo valorado, pode ser representado pôr uma matriz **n**x**n** de valores $\mathbf{W = [\ w_{ij}\ ]}$,onde $\mathbf{w_{ij}}$ **=** valor da aresta, se **(vi, vj) ε E**

Propriedades:

1. A MV de um grafo não orientado é simétrica;
2. As arestas paralelas não podem ser representadas;

3. Grafos Orientados



3. Grafos Orientados

Continuação das definições:

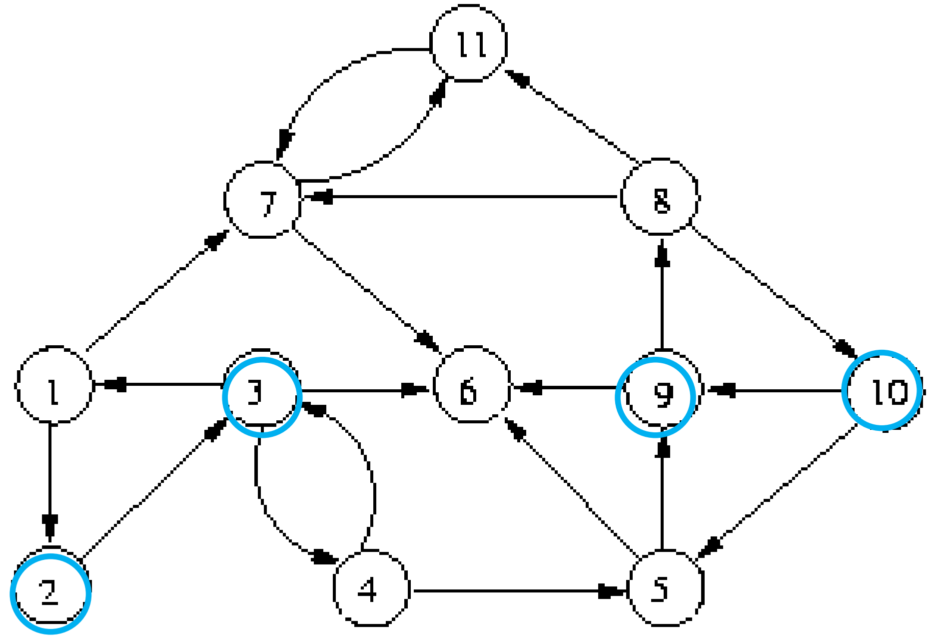
13. Um grafo é dito orientado ou **dirigido** ou **dígrafo** se suas arestas possuem orientação.

    Em um grafo dirigido, as arestas são chamadas de **arcos**.

14. **Sucessor** de um vértice $\mathbf{v_i}$: é todo $\mathbf{v_j}$ que seja extremidade final de um **arco** que parte de $\mathbf{v_i}$.
15. **Antecessor**: de um vértice $\mathbf{v_i}$, é todo vértice $\mathbf{v_j}$, que seja extremidade inicial de um **arco** que termina em $\mathbf{v_i}$.
16. O **grau** de um vértice em um grafo orientado, é a soma dos grau dos arcos que saem do vértice e dos arcos que entram no vértice, isto é o grau de **emissão** (de saída) e o grau de **recepção** (de entrada).

3. Grafos Orientados

Grafo dirigido ou **dígrafo**



v5 e v9 são **Sucessores** do vértice v10

v10 é **antecessor** do v5 e v9

O **grau** do vértice v10 é

Gr(v10) = 3

Gr(v9) = 4

Gr(v3) = 5

Gr(v2) = 2

3. Grafos Orientados

Matriz de Adjacência de um Grafo Orientado

Dado um grafo **G(V,E)**, a matriz de adjacência **A = [a_{ij}]** é uma matriz **n x n** tal que: **a_{ij} = 1** se e somente se existe **(vi,vj) ε E**

0 em caso contrário.

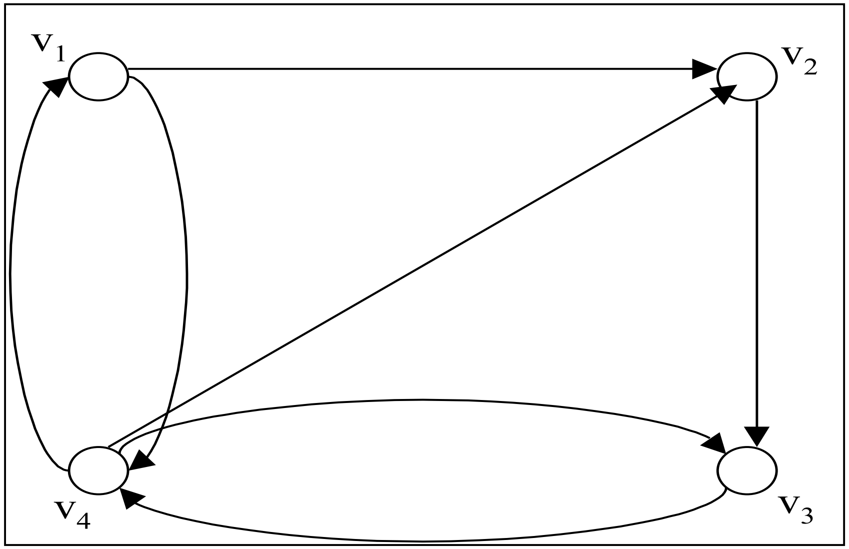
Então **a_{ij} = 1** se os vértices são adjacentes.

Observações:

- a definição de MA é a mesma definição que para um grafo;
- em grafos orientados, a MA não é necessariamente simétrica;
- Em grafos orientados, a soma das linhas representa o grau de saída, a soma das colunas o grau de entrada;

3. Grafos Orientados

Exemplo: Matriz de Adjacência



	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	0	1
v_2	0	0	1	0
v_3	0	0	0	1
v_4	1	1	1	0

3. Grafos Orientados

Matriz de Incidência de um Grafo Orientado

Dado um grafo **G (V, E)** de **n** vértices e **m** arestas, a matriz de incidência de **G** é denotada pôr **B = [b_{ij}]** e é uma matriz **n x m** definida como:

b_{ij} = 1 se a aresta **e_i**, sai no vértice **v_j**

= -1 se a aresta **e_i**, chega no vértice **v_j**

= 0 em caso contrário

3. Grafos Orientados

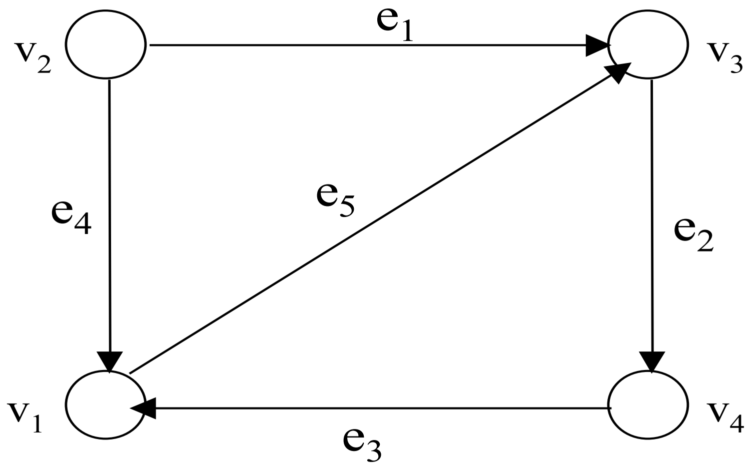
Matriz de Incidência - Propriedades:

1. A MI de um grafo orientado, tem valores negativos;
2. Em grafos orientados a soma dos valores positivos representa o grau de saída, a soma dos negativos o grau de entrada.

   Para laços, tenho que somar um para os positivos e um para os negativos.

3. Grafos Orientados

Exemplo: Matriz de Incidência



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	0	0	-1	-1	1
v_2	1	0	0	1	0
v_3	-1	1	0	0	-1
v_4	0	-1	1	0	0

3. Grafos Orientados

Matriz Valorada de um Grafo Orientado

Um grafo valorado, pode ser representado pôr uma matriz **n**x**n** de valores **W = [w_{ij}]** ,onde **w_{ij} =** valor da aresta, se **(vi, vj) ε E**

Observação: é a mesma definição que para grafos sem orientação;