MATEMÁTICA PARA TERMODINÂMICA (pt. 1)

• CÁLCULO UNIVARIADO

~ DERIVADA DE 1ª ORDEM

Y É FUNÇÃO f DE X: $Y = Y(X)$ OU $Y = f(X)$

PRIMEIRA DERIVADA FUNÇÃO $f'(x)$ TAL QUE:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]$$

$$Y'(x) = f'(x)$$

REGRA DO EXPOENTE

$$\boxed{\frac{d(f^a)}{dx} = a f^{a-1}\frac{df}{dx}}$$

DERIVADAS IMPORTANTES

$(g = g(x),\ a = \text{cte.})$

REGRA DO PRODUTO

$$\boxed{\frac{d(f\cdot g)}{dx} = f\cdot\frac{dg}{dx} + g\cdot\frac{df}{dx}}$$

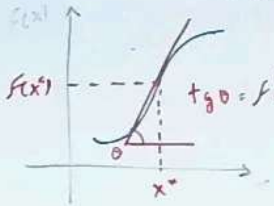
$$\boxed{\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{1}{g^2}\left(g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}\right)}$$

REGRA DO QUOCIENTE

$$\boxed{\frac{d[\ln(ax)]}{dx} = \frac{a}{x}} \qquad \boxed{\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}} \qquad \boxed{\frac{d[f(g)]}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}}$$

REGRA DA CADEIA

INTERPRETAÇÃO: $f'(x^*)$ É INCLINAÇÃO DE RETA TANGENTE À CURVA $f(x)$ VS. x NO PONTO $(x^*, f(x^*))$



~> DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

DERIVADA DE ORDEM n: DERIVADA DE $f(x)$ n VEZES

$$f^n(x) \neq [f(x)]^n$$

$$\frac{d^{(n)}f}{dx^{(n)}} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left(\cdots\left(\frac{df}{dx}\right)\cdots\right) = f^{(n)}(x) = f^{''\cdots'}(x)$$

DERIVADA SEGUNDA:

$$\boxed{\frac{d^{(2)}f}{dx^{(2)}} = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = f^{(2)}(x) = f''(x)}$$

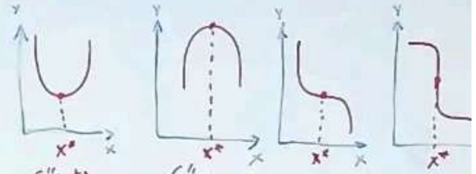
~> PONTOS CRÍTICOS

CARACTERÍSTICA DE f IDENTIFICADA POR DERIVADAS

x^* CRÍTICO?

$f'(x^*) = 0$ → SIM
- $f''(x^*) < 0$ → MÍNIMO
- $f''(x^*) > 0$ → MÁXIMO
- $f''(x^*) = 0$ → INFLEXÃO

$f'(x^*) \neq 0$ → NÃO



$f''(x^*) < 0$ MÍNIMO

$f''(x^*) > 0$ MÁXIMO

$f''(x^*) = 0$ INFLEXÃO

~> EXPANSÃO DE TAYLOR

É POSSÍVEL PROVAR QUE, PARA UM $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}}$$

DE MODO QUE DERIVADAS DESSA FUNÇÃO SERVEM PARA OBTER $\Delta f = f(x) - f(a)$ EM FUNÇÃO DE Δx

$$\boxed{\Delta f = f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)\Delta x^2}{2!} + \cdots}$$

SE $\Delta x \to dx$ $(\Delta x^2, \Delta x^3, \text{ETC.} \to 0)$ $\boxed{df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=a} dx}$

QUESTÃO 4.1: PROVE A EXPANSÃO DE TAYLOR

QUESTÃO 4.2: PROVE QUE $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

~> INTEGRAÇÃO $\cancel{\int_0^x e^{ax} dx}$

A INTEGRAL DEFINIDA DE $f(x)$: $\boxed{\int_{x'}^{x''} f(x)\, dx}$

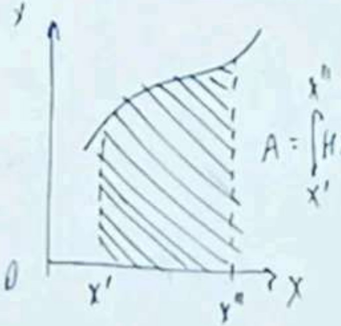
LIMITES DE INTEGRAÇÃO

VARIÁVEL DE INTEGRAÇÃO

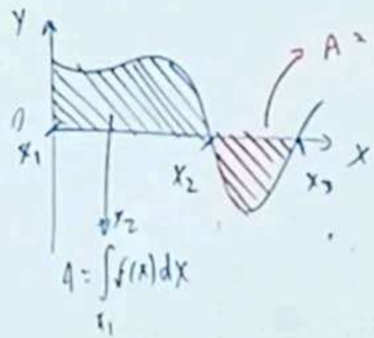
INTERPRETAÇÃO:

$f(x) > 0 \Rightarrow$ ÁREA ABAIXO DA CURVA

$f(x) < 0 \Rightarrow$ NEGATIVO DA ÁREA ACIMA DA CURVA



$A = \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx$



$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

$A = -\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx$

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO:

SE EXISTE $F(x)$ TAL QUE: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

ENTÃO: $\boxed{\int_{x'}^{x''} f(x)\, dx = F(x'') - F(x')}$

INTEGRAL INDEFINIDA: $x'' \to x$ $\quad F(x'') = F(x)$

$F(x') =$ CONSTANTE

$\boxed{\int_x f(x)\,dx = F(x) + C}$

SEM LIMITES DE INTEGRAÇÃO

ALGUMAS INTEGRAIS DEFINIDAS IMPORTANTES

$\boxed{\int_{x'}^{x''} dx = x'' - x'}$

$\boxed{\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{x} = \ln\left|\frac{x''}{x'}\right|}$

$\boxed{\int_{x'}^{x''} x^a\, dx = \frac{1}{a+1}\left[(x'')^{a+1} - (x')^{a+1}\right], \quad a \neq -1}$

$\boxed{\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln\left|\frac{ax''+b}{ax'+b}\right|}$

MATEMÁTICA PARA TERMODINÂMICA (pt. 1)

- **CÁLCULO MULTIVARIADO**

MCQUARRIE MATHEMATICAL METHODS SCIENTISTS ENGINEERS

z É UMA FUNÇÃO f DE x E y: $z = z(x, y)$

$$\underbrace{z = f(x, y)}_{\text{ESSA FORMA SEPARA DEPENDENTE } (z) \text{ DE INDEPENDENTES } (x \text{ E } y)}$$

FORMA QUE NÃO DISTINGUE QUEM DEPENDE DE QUEM:

$$\boxed{g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0}$$

~> DERIVADA DE 1ª ORDEM

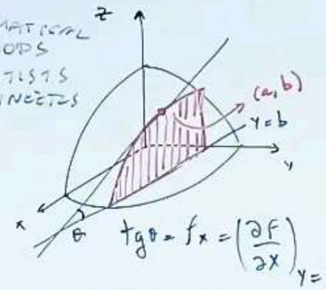
DERIVADAS PARCIAIS: UMA OU MAIS VARIÁVEIS CONSTANTES DURANTE DIFERENCIAÇÃO

$$f_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\right]$$

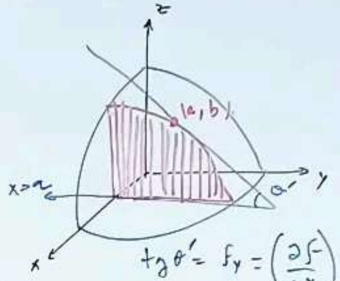
$$f_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\right]$$

DERIVA NORMALMENTE, ASSUMINDO QUE OUTRAS VARIÁVEIS SÃO CONSTANTES

INTERPRETAÇÃO: INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE NO PONTO (a, b), AO LONGO DO PLANO DA VARIÁVEL MANTIDA CONSTANTE



$$\operatorname{tg}\theta = f_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=b}$$



$$\operatorname{tg}\theta' = f_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=a}$$

~> DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

REPETIÇÃO DE DERIVAÇÃO PARCIAL, MANTENDO OU ALTERNANDO VARIÁVEL ESCOLHIDA:

MANTENDO:

$$\boxed{f_{xx} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\right]_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \qquad \boxed{f_{yy} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\right]_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

ALTERNANDO:

$$\boxed{f_{xy} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\right]_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} \qquad \boxed{f_{yx} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\right]_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$$

$$\boxed{f_{xy} = f_{yx}}$$

~> PONTOS CRÍTICOS

PARA DETERMINAR PONTOS CRÍTICOS EM FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL DEFINE-SE O DISCRIMINANTE D. PARA $z = f(x, y)$, D É:

$$\boxed{D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2}$$

$D(a,b)$:

- $\neq 0$
  - > 0 E $f_{xx}(a,b) > 0$ → MÍNIMO LOCAL
  - > 0 E $f_{xx}(a,b) < 0$ → MÁXIMO LOCAL
  - < 0 → PONTO DE CELA
- $= 0$ → INFORMAÇÃO INSUFICIENTE

QUESTÃO 4.7

EX.: $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = -x^2 - y^2$, $h(x,y) = x^2 - y^2$ } PONTO $(0,0)$ É O QUE?

DIFERENCIAL TOTAL

EXPANSÃO DE TAYLOR PARA FUNÇÕES COM MAIS DE UMA VARIÁVEL:

$\Delta f = f(x,y) - f(a,b)$

$\Delta x = x - a$

$\Delta y = y - b$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=b} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=a} \Delta y + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\Delta x^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Delta y^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\Delta x \Delta y\right] + \dots$$

SE FIZERMOS $\Delta x \to dx$ E $\Delta y \to dy$, ENTÃO $\Delta f \to df$

É A CHAMADA DIFERENCIAL TOTAL DE f:

$$\boxed{df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy}$$

PARA $f(x_1, x_2, \dots)$

$$\boxed{df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_2, x_3, \dots} dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x_1, x_3, \dots} dx_2 + \dots = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_{j \neq i}} dx_i = \sum_i f_i \, dx_i}$$

POR EXEMPLO, PARA $f(x,y,z)$:

$$\boxed{df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz}$$

QUESTÃO 4.4

DETERMINE A DIFERENCIAL TOTAL DE $f(x,y) = x \ln y$

DIFERENCIAIS EXATAS / INEXATAS

FUNÇÕES USADAS EM TERMODINÂMICA

- FUNÇÃO DE ESTADO f
  - SÓ DEPENDE DO PONTO i E J
  - DIFERENCIAL EXATA (df)
  - INTEGRAL DE RIEMANN
- FUNÇÃO DE CAMINHO g
  - DEPENDE DE i E J, E CAMINHO M
  - DIFERENCIAL INEXATA $(đ, \delta)$
  - INTEGRAL DE STOKES

TESTE DE EULER

TEOREMA DE GREEN

PFAFFIANA DE Z

$$\boxed{dz = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy}$$

EXATAS

① DERIVADAS

EXISTE f TAL QUE:

$$dz = df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

$$M(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \qquad N(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \qquad \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$$

IGUAIS

TESTE DE EULER

$$\boxed{\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y}$$

② INTEGRAL MÚLTIPLA

$$\iint_i^j df = f(j) - f(i) = \Delta f$$

INDEPENDE DE M

③ INTEGRAL CÍCLICA

$$\oint_M df = \oint_M [M\,dx + N\,dy] = \iint_M \left[\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x\right] dx\,dy$$

$$\boxed{\oint_M df = 0}$$

INEXATAS

① DERIVADAS

$$\delta g = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x \neq \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y}$$

② $\iint_i^f \delta g \neq \Delta g$

DEPENDE DE M

③ $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x \neq \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y \Rightarrow \oint_M \delta g \neq 0$

$df = \ln y\,dx + \frac{y}{x}\,dy \rightarrow$ É EXATA?

LUSCOMBE: 1.2, 1.3, 1.5

QUESTÃO 4.6:

OBTENHA $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\bar V}$ E $\left(\frac{\partial p}{\partial \bar V}\right)_T$ POR DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DO GÁS IDEAL, E AS DERIVADAS A SEGUIR DAS RELAÇÕES APRESENTADAS:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{\bar V},\ \left(\frac{\partial \bar V}{\partial p}\right)_T,\ \left(\frac{\partial T}{\partial \bar V}\right)_p,\ \left(\frac{\partial \bar V}{\partial T}\right)_p = ?$$

$p\bar V = RT$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\bar V} = \left(\frac{\partial}{\partial T}\left(R T/\bar V\right)\right)_{\bar V} = \frac{R}{\bar V}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \bar V}\right)_T = \left(\frac{\partial (RT/\bar V)}{\partial \bar V}\right)_T = -\frac{RT}{\bar V^2}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{\bar V} = \frac{1}{(\partial p/\partial T)_{\bar V}} = \frac{1}{R/\bar V} = \frac{\bar V}{R}$$

$$\left(\frac{\partial \bar V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{(\partial p/\partial \bar V)_T} = -\frac{\bar V^2}{RT}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \bar V}\right)_p \left(\frac{\partial \bar V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\bar V} = -1$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \bar V}\right)_p = \frac{-1}{\left(\frac{\partial \bar V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\bar V}} = \frac{-(\partial T/\partial p)_{\bar V}}{(\partial \bar V/\partial p)_T} = (-)\frac{\bar V/R}{-\bar V^2/RT} = \frac{T}{\bar V}$$

	T	p	$\bar V$
T	1	$\partial T/\partial p$	$\partial T/\partial \bar V$
p	$\partial p/\partial T$	1	$\partial p/\partial \bar V$
$\bar V$	$\partial \bar V/\partial T$	$\partial \bar V/\partial p$	1

RELAÇÃO RECÍPROCA

$p = \frac{RT}{\bar V}$

$p\bar V = RT$

$T = \frac{p\bar V}{R}$

$$\left(\frac{\partial (p\bar V/R)}{\partial \bar V}\right)_p = \frac{p}{R} = \frac{RT}{\bar V R} = \frac{T}{\bar V}$$

RELAÇÕES IMPORTANTES

RELAÇÕES ENTRE DERIVADAS PARCIAIS } DIFÍCEIS DE CALCULAR OU MEDIR

1 VARIÁVEL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

DUAS VARIÁVEIS

$z = cte$

$$\boxed{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_z \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = \frac{1}{(\partial x/\partial y)_z}}$$

RELAÇÃO RECÍPROCA

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \xrightarrow[dz=0]{z=cte} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy = 0$$

$$\downarrow \frac{1}{dx}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = \frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y} = -1 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -1}$$

RELAÇÃO RECÍPROCA

RELAÇÃO CÍCLICA

$f(x,y)$ e $z(x,y)$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = \frac{-(\partial z/\partial x)_y}{(\partial z/\partial y)_x}$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

$$\downarrow \frac{1}{dx},\ z\ cte$$

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \frac{(\partial z/\partial x)_y}{(\partial z/\partial y)_x}}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \frac{(\partial z/\partial y)_x}{(\partial z/\partial x)_y}$$

VERIFIQUE

$pV = nRT$

$p\bar{V} = RT$

SUPONHA QUE X É INTENSIVA E Y É EXTENSIVA

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{T,n} = \frac{1}{n}\cdot n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_T = n\left(\frac{\partial (y/n)}{\partial x}\right)_T = n\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right)_T$$

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{T,n} = \frac{1/n}{1/n}\cdot\frac{1}{y}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_T = \frac{1}{y/n}\left(\frac{\partial (y/n)}{\partial x}\right)_T = \frac{1}{\bar{y}}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right)_T$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\right)_T = \left(\frac{\partial x}{\partial (y/n)}\right)_{T,n} = n\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{T,n}$$